UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

TEORÍA DE HACES

Por:

Luis Francisco Curquejo Otero

Dirigido por:

Luis Narváez Macarro

Grado en Matemáticas

Sevilla - 20 de Junio de 2016

Índice

Abstract

The creation of sheaf theory during World War II, as well as its spread the following years, marked the beginning of an incredibly powerful mathematical tool. Together with category theory, due to S. Mac Lane and S. Eilenberg, and thanks to the work of J.Leray, H. Cartan, A. Weil and A. Grothendieck (among others), sheaf theory has proven itself to be useful in several areas of mathematics, specially in algebra-related fields: algebraic topology, algebraic geometry and algebraic analysis. Throughout this text sheaf theory will be briefly introduced.

In the first chapter, and aiming at a selfcontained report, some basics concerning category theory will be commented. Category theory proves itself to be a pretty natural language in which sheaf theory can be developed. The basic concepts of the field (category, functor and natural transformation) will be fully developed as a preface to those of limit, universal property and adjoint. The section finish with a brief discussion about abelian categories.

In the second chapter sheaf theory will be treated. It will be developed from the concept of presheaf. Next, germ and stalk of a presheaf on a point, as well as the idea of sheafification, will be explained. This brief introduction to sheaves will end with the introduction of the direct and inverse image of a sheaf by a continuous function.

Finally, in the third chapter some applications of sheaf theory will be explored. The proof of a theorem regarding certain finite differences' equation will be fully developed by algebraic means. Also, some aspects of sheaf theory applied to differential equations and algebraic geometry will be mentioned.

Resumen

La creación de la teoría de haces en plena Segunda Guerra Mundial, unida a su difusión en los años inmediatamente posteriores, marcó el nacimiento de una herramienta matemática increíblemente fructífera. En conjunción con la teoría de categorías de S. Mac Lane y S. Eilenberg, y gracias a los trabajos de matemáticos como J. Leray, H. Cartan, A. Weil y A. Grothendieck, la teoría de haces ha conocido multitud de aplicaciones en áreas matemáticas muy variadas, brillando especialmente en los campos de la topología algebraica, la geometría algebraica y el análisis algebraico. En el presente texto daremos una pequeña introducción a la teoría de haces.

Con el objetivo de que esta memoria resulte lo más autocontenida posible, comenzamos presentando nociones básicas de teoría de categorías. En el lenguaje de las categorías la presentación de la teoría de haces resulta extremadamente sencilla y natural. Además de la definición de categoría, presentamos los conceptos de funtor y transformación natural. También introducimos la versión categórica de conceptos bien conocidos en otras áreas de las matemáticas, como los límites y los adjuntos, haciendo referencia previamente a la versátil idea de propiedad universal. Finalizamos presentando un interesante tipo de categoría: las categorías abelianas.

A continuación, tratamos la teoría de haces en sí. La construimos a partir del concepto de prehaz. Introducimos también los conceptos de germen y fibra en un punto, así como el de haz asociado. Presentamos asimismo, a modo de cierre, la imagen directa y la imagen inversa por una aplicación continua de un haz.

Para finalizar, introducimos una pequeña muestra de la utilidad de la teoría de haces probando un teorema relativo a una ecuación en diferencias finitas mediante técnicas algebraicas. También comentamos someramente algunas otras aplicaciones, relativas al campo de las ecuaciones diferenciales o a la geometría algebraica.

Capítulo 1

Introducción

Desde los estadios más básicos de la formación de cualquier matemático los espacios topológicos aparecen continuamente en todas las ramas de la matemática: la propia topología, el análisis, el álgebra, las ecuaciones diferenciales... Junto a los espacios topológicos se estudian con profusión las funciones continuas entre ellos. Si X e Y son espacios topológicos, U y V abiertos de X y $f : U \to Y, g : V \to Y$ funciones continuas, si se da la tesitura de que $f(z) = g(z)\ \forall z \in U \cap V$ es natural definir una función global continua $h : U \cup V \to Y$ dada por $h(z) = f(z)$ si $z \in U$ y $h(z) = g(z)$ si $z \in V$. De alguna manera hemos *pegado* las funciones preservando la propiedad de continuidad. Esta idea no es más que (con ciertos matices) una extensión a espacios topológicos arbitrarios de la clásica maniobra de definir una función real de variable real a trozos. Esta misma idea se puede extender al campo de las ecuaciones diferenciales: si una cierta ecuación diferencial A tiene soluciones en un abierto U, y esa misma ecuación A tiene otras soluciones en V de forma que las soluciones coinciden en la intersección de ambos abiertos, ¿qué obstáculo hay para unir, para *pegar*, ambas soluciones?

La generalización de la *idea de pegado* a situaciones más abstractas que las arriba descritas será ni más ni menos qué la idea de *haz*. La definición de haz, un breve estudio de las propiedades de los haces y una pequeña muestra de la utilidad de dicho concepto serán las metas del presente trabajo.

Para afrontar estos objetivos resulta imprescindible manejar la teoría de categorías. Desarrollada a mediados del siglo pasado por Mac Lane y Eilenberg entre otros, la teoría de categorías se ha establecido en el mundo de las matemáticas como un lenguaje abstracto potente y de múltiples usos. Desde la propia definición de categoría, capaz de englobar buena parte de los conceptos matemáticos que puedan ocurrirse, a resultados como el lema de Yoneda, pasando por conceptos como transformación natural, límite o adjunción, realizaremos un breve recorrido por elementos básicos de la teoría de categorías, teniendo siempre presente que el objetivo final es el estudio de los haces.

Equipados con la herramienta de las categorías se está en condiciones de desarrollar cómodamente la idea de haz. Como indicábamos, se trata de una generalización de la idea de pegado. Esta generalización tiene el interés de que su carácter es eminentemente local: veremos que el interés de lo que suceda en un punto arbitrario de un espacio topológico se reduce, en general, a lo que suceda en un entorno arbitrariamente pequeño del punto. A este respecto desarrollaremos las ideas de fibra y germen, y estudiaremos también cómo puede afectar a un haz la acción de una función continua.

Los haces despliegan todo su potencial cuando se usan en combinación con herramientas de álgebra homológica, dando lugar a la cohomología de haces. Esta utilidad, además, trasciende al álgebra. Por ejemplo, tenemos el siguiente teorema:

Teorema. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ estable para el grupo engendrado por la transformación $z+1$. Entonces, para cualquier $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ existe un $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ verificando*

$$G(z+1) - G(z) = g(z)$$

Este teorema es un problema típico del campo del análisis funcional. Su resolución mediante herramientas puramente analíticas dista de ser sencilla. No obstante, reformulando adecuadamente el problema en el lenguaje de la teoría de haces, es posible demostrarlo de manera efectiva con herramientas esencialmente algebraicas. Dejando de lado el desarrollo *per se* de la teoría de haces, podríamos considerar la prueba de este teorema como uno de los objetivos de la presente memoria. Para demostrarlo se precisan conceptos de cohomología de haces. Un tratamiento siquiera somero de la cohomología de haces escapa a los fines del presente trabajo, por lo que enunciaremos los resultados que nos sean necesarios sin probarlos. No obstante, la necesidad de hacer referencia a estas proposiciones da pie a un futuro estudio en profundidad tanto del álgebra homológica en general, como de la cohomología de haces en particular.

Como se indicaba en el resumen inicial, la estructura del texto es la que sigue: en el segundo capítulo desarrollamos los rudimentos necesarios de teoría de categorías para que el texto sea autocontenido. En el tercer capítulo afrontamos un estudio introductorio de la teoría de haces. En el cuarto y último capítulo estudiamos el teorema que enunciamos arriba, y comentamos algunas posibles aplicaciones de la teoría de haces.

La bibliografía[1] al final de la presente memoria ha sido dividida en dos partes: bibliografía principal y bibliografía complementaria. La bibliografía principal comprende a las referencias que se han manejado de manera prioritaria durante la elaboración del trabajo. Cabe destacar, de entre ellas el clásico trabajo de Mac Lane ([5]) y el libro de Iversen ([1]) para el segundo y tercer capítulos, respectivamente, el artículo de Mebkhout ([6]) como motivación y referencia para el cuarto capítulo así como las notas de Vakil ([10]) como un apoyo general durante todo el texto.

La bibliografía complementaria comprende dos tipos de textos. Por un lado, aquellos que han sido usados de manera muy residual y casi anecdótica, a nivel comparativo o de ampliación. Por otro, textos que introducen aspectos de álgebra homológica, cohomología de haces y profundizan más allá del objetivo de este trabajo en la teoría de haces, la topología algebraica y otras áreas afines. Estos últimos textos han sido usados también con el fin de ampliar, aunque sea a nivel intuitivo e introductorio, las miras de este trabajo, asomándonos a las áreas avanzadas que hemos nombrado previamente.

[1]Todos los recursos online citados en la bibliografía están disponibles en las páginas web de los autores, a saber: www.jmilne.org (J.S. Milne), https://webusers.imj-prg.fr/ pierre.schapira/ (P. Schapira), http://math.stanford.edu/ vakil/ (R. Vakil).

Capítulo 2

Teoría de categorías

En la presente sección se presentarán algunos resultados y conceptos básicos de teoría de categorías con el fin de usarlos posteriormente en el desarrollo de la teoría de haces. Aunque tenderemos a realizar un desarrollo con la máxima generalidad posible, en ocasiones nos restringiremos a conceptos y definiciones particulares que puedan tener interés en la teoría de haces.

2.1. Definiciones básicas

La noción de categoría, gracias a su generalidad y abstracción, permite englobar muchas construcciones matemáticas bien conocidas.

Definición 2.1.1. *Una* categoría *es un par $\mathcal{C} = (\boldsymbol{Obj}, \boldsymbol{Arw})$ con:*

- *Una colección de objetos, $\boldsymbol{Obj}$.*
- *Una colección de relaciones entre ellos, $\boldsymbol{Arw}$, a las que llamaremos morfismos o flechas.*
- *Una doble asignación que a cada morfismo le asocia un objeto origen (dominio) y un objeto destino (imagen o codominio).*
- *Una asignación que a cada objeto A le asocia un morfismo identidad, $i_A : A \to A$.*
- *Una ley de composición parcial para $\boldsymbol{Arw}$, $\boldsymbol{Arw} \times \boldsymbol{Arw} \to \boldsymbol{Arw}$, de forma que sea asociativa ($(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$) y tenga un elemento identidad dado por el morfismo identidad, de forma que $f \circ i = f = i \circ f$.*

Bajo esta definición podemos encontrar múltiples ejemplos de categorías. El verificar que, en efecto, cumplen todas las propiedades antes dichas es un ejercicio sencillo:

Ejemplo.

- La categoría **Set**, cuyos objetos son los conjuntos (cualquiera) y los morfismos las funciones totales.
- La categoría **Grp**, cuyos objetos son los grupos y los morfismos son los homomorfismos de grupos. De manera similar, pero con anillos, k-espacios vectoriales y R-módulos (a derecha y a izquierda) para un anillo R fijado, tenemos las categorías **Rng**, $\mathbf{Vect_k}$, **Mod-R** y **R-Mod**.
- La categoría **Top** de los espacios topológicos, con los morfismos dados por las aplicaciones continuas.
- Los conjuntos parcialmente ordenados con las funciones que preservan el orden forman una categoría, **Pos**.
- Cualquier monoide $(M, \cdot)$ puede ser considerado como una categoría de un sólo objeto, en la que las flechas son los elementos de M y la composición viene dada por la operación $\cdot$ del monoide.

Dentro de los conjuntos parcialmente ordenados podemos considerar el siguiente caso, que describimos exhaustivamente por su relevancia posterior. La construcción que realizamos, no obstante, es idéntica para cualquier conjunto parcialmente ordenado:

Ejemplo. Sea X un espacio topológico arbitrario. A su colección de abiertos la podemos considerar un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión. Podemos formar una categoría, a la que notaremos $\mathbf{Open}_X$, de la siguiente manera: sus objetos serán los abiertos de X, y dados dos abiertos de X, U y V, existirá una flecha $U \to V$ si, y sólo si, $U \subset V$. Es trivial comprobar que en efecto estos datos conforman una categoría, pues es claro que existe la flecha identidad (ya que $U \subset U$) y se pueden componer las flechas por la propiedad transitiva de la relación $\subset$.

Como vemos, en las categorías nos encontramos con que las colecciones de objetos pueden ser "grandes", en el sentido de que en ocasiones ni siquiera son conjuntos como, por ejemplo, en el caso de **Set**. Por esa razón, la axiomática bajo la que se definen las categorías es la de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), en lugar de la habitual de Zermelo-Fraenkel (ZF, ZFC si la consideramos con el axioma de elección). No obstante, ZF se puede inferir a partir de NBG, y debido a la concreción del tema a tratar resultará irrelevante lo grande que puedan resultar nuestras colecciones de objetos. No resulta irrelevante, sin embargo, el tamaño de las colecciones de *morfismos* entre dos objetos de una categoría:

Definición 2.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sean A, B dos objetos de esa categoría. Los morfismos con origen y destino fijos (A y B, respectivamente) en la categoría forman un conjunto. A dicho conjunto lo llamamos* Hom-set, *y lo notamos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

Cabe destacar que en ocasiones también notaremos $\mathcal{C}(A, B)$ u $Hom(A, B)$, si el contexto categórico está claro. En este punto conviene también destacar que aunque en puridad ha de notarse $A \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ para indicar que un objeto está en una categoría, usualmente notaremos, simplemente, $A \in \mathcal{C}$. Nótese que en la definición anterior hemos especificado que estamos ante un conjunto: hay autores, sin embargo, que no exigen tal condición. Para finalizar este epígrafe, damos algunas definiciones útiles, que caracterizan ciertos tipos de flechas y algunos objetos especiales.

Definición 2.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría.*

- *Sea $X \xrightarrow{f} Y$ una flecha. Si existe una flecha $Y \xrightarrow{g} X$ de forma que $fg = 1$ y $gf = 1$, entonces f se dice* invertible, *y g es la inversa de f, a la cual notaremos f^{-1}. Si entre dos elementos de $\mathcal{C}$ hay una flecha invertible, diremos que son* isomorfos *en $\mathcal{C}$, y notaremos $X \simeq Y$.*

- *Sea $X \xrightarrow{m} Y$ una flecha. La flecha m se dirá un* monomorfismo *si para cualquier par de flechas*

  $$Z \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X$$

  la igualdad $mf = mg$ implica $f = g$, esto es, m es cancelable a izquierda.

- *Sea $X \xrightarrow{p} Y$ una flecha. La flecha p se dirá un* epimorfismo *si para cualquier par de flechas*

  $$Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Z$$

  la igualdad $fp = gp$ implica $f = g$, esto es, p es cancelable a derecha.

Ejemplos de monomorfismos y epimorfismos serían los morfismos inyectivos y sobreyectivos, respectivamente, en las categorías **Set**, **Grp**, **Rng** y similares. Cabe destacar que en general cualquier inyección (respectivamente, sobreyección) es monomorfismo (epimorfismo), pero la implicación contraria es, en general, falsa. Sólo se da la equivalencia en algunas categorías. Otro tipo de objeto de interés, que como veremos se puede encontrar también en las categorías "habituales", es el siguiente:

Definición 2.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sea T un objeto de la categoría. Si para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$ existe una única flecha $T \to A$, T se dice* inicial. *Asimismo, si para cualquier objeto A de $\mathcal{C}$ existe una única flecha $A \to T$, T se dice* final. *Si un objeto es inicial y final, se le suele denominar* objeto nulo *u* objeto cero.

Es fácil comprobar que, caso de existir un objeto inicial o final, ha de ser único (salvo isomorfismo único). Categorías con objetos iniciales y/o finales son, por ejemplo, **Set** (cualquier conjunto de un solo elemento es final, y el vacío es inicial) o **Grp** (el grupo trivial es el objeto nulo de la categoría). En categorías con objeto nulo es sencillo ver que dado cualquier par de objetos A, B existe una descomposición $A \to 0 \to B$. A la flecha composición se le llama *flecha cero* y se denota 0. Volveremos a incidir sobre este tipo de objeto cuando tratemos las categorías abelianas.

2.2. Funtores

Al igual que en otras áreas del álgebra, una vez definido un objeto algebráico resulta interesante estudiar aplicaciones entre estos objetos. En nuestro caso dichas aplicaciones serán los funtores:

Definición 2.2.1. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías. Un* funtor covariante *de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ (notado $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) consiste en dos aplicaciones de la siguiente manera:*

- *Una aplicación, la aplicación objeto F, que asigna a cada objeto a de $\mathcal{A}$ un objeto Fa de $\mathcal{B}$.*
- *Otra aplicación, la aplicación flecha F, que a cada flecha $f : a \to a'$ de $\mathcal{A}$ le asigna una flecha $Ff : Fa \to Fa'$ de $\mathcal{B}$, de forma que $F(id_a) = id_{Fa}$ y $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.*

De similar manera, podemos definir lo siguiente:

Definición 2.2.2. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías. Un* funtor contravariante *de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ (notado $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) consiste en dos aplicaciones de la siguiente manera:*

- *Una aplicación, la aplicación objeto F, que asigna a cada objeto a de $\mathcal{A}$ un objeto Fa de $\mathcal{B}$.*
- *Otra aplicación, la aplicación flecha F, que a cada flecha $f : a \to a'$ de $\mathcal{A}$ le asigna una flecha $Ff : Fa' \to Fa$ de $\mathcal{B}$, de forma que $F(id_a) = id_{Fa}$ y $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$.*

Es decir, tenemos funtores que preservan la dirección de las flechas (covariantes) y que la cambian (contravariantes). En general, indicaremos cuando un funtor es contravariante de manera explícita, y nos referiremos sin apelativo alguno a los funtores covariantes. No obstante, muchas veces es conveniente considerar los funtores contravariantes como funtores covariantes en una categoría adecuada: la categoría opuesta.

Definición 2.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. La* categoría opuesta de $\mathcal{C}$, *notada $\mathcal{C}^{op}$, es aquella que como objetos tiene los objetos de $\mathcal{C}$ y, por cada flecha $f : a \to b$ en $\mathcal{C}$, una y sólo una flecha $f^{op} : b \to a$.*

Es decir, es la categoría con los mismos objetos y las flechas cambiadas de dirección. Así, si tenemos un funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, podemos considerar un funtor (esencialmente el mismo) covariante $\tilde{F} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$. Dicho esto, pasemos a definir ciertas propiedades de los funtores que, en un primer momento, pueden recordar a la inyectividad y sobreyectividad:

Definición 2.2.4. *Sean dos categorías $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y un funtor F entre ellas.*

- *Un funtor F se dice* completo *si para cada par de objetos a, a' de $\mathcal{A}$ y para cada flecha $g : Fa \to Fa'$ existe una flecha $f : a \to a'$ de forma que $g = Tf$.*
- *Un funtor F se dice* fiel *(o una incrustación) si para cada par de objetos a, a' de $\mathcal{A}$ y cada par de flechas $f_1, f_2 : a \to a'$ la igualdad $Ff_1 = Ff_2$ implica $f_1 = f_2$.*

A un funtor que verifica ambas condiciones se le dice completamente fiel.

Estas propiedades, como decíamos, recuerdan en cierta manera a la inyectividad y la sobreyectividad. De hecho, si para cada par de objetos a, a' en la categoría $\mathcal{A}$ definimos la función

$$\begin{array}{rccc} F_{c,c'}: & Hom_{\mathcal{A}}[a, a'] & \to & Hom_{\mathcal{B}}[Fa, Fa'] \\ & f & \mapsto & Ff \end{array}$$

el que un funtor sea completo equivale a que esta función sea sobreyectiva para cada par a, a'; y que sea fiel, a que sea inyectiva para cada par de objetos en $\mathcal{A}$. Esto nos da una cierta intuición: lo importante en las categorías no son tanto los objetos, como las flechas entre ellos. Para terminar esta breve introducción a los funtores daremos dos definiciones, bastante naturales, y una pequeña batería de ejemplos. En la siguiente definición, aunque no hemos explicitado su existencia, hacemos referencia al (obvio) funtor *identidad*, y también usamos, aunque no la hayamos definido, la composición de funtores, que se realiza de forma totalmente natural:

Definición 2.2.5. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. F se dice un* isomorfismo *si existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ de manera que tanto $F \circ G$ como $G \circ F$ son la identidad. En ese caso, $G = F^{-1}$ y G es la inversa (a izquierda y a derecha, o simplemente inversa) de F.*

De manera equivalente, podríamos decir que un isomorfismo es una biyección en objetos y flechas. Con estas herramientas, damos algunos ejemplos:

Ejemplo.

- El funtor U : **Grp** $\to$ **Set** que a cada grupo le asigna el mismo (como conjunto) y a cada homomorfismo le asocia el mismo (como aplicación entre conjuntos). Nótese que se pierde la estructura algebraica de los elementos de **Grp**: a este tipo de funtores se les suele llamar *funtores olvido*. Este funtor, además, es fiel, pero no es completo.

- El funtor $\mathcal{P}$: **Set** $\to$ **Set**, que a cada conjunto A le asocia partes de A, $\mathcal{P}(A)$. A su vez, a cada flecha $f : A \to B$ le asigna la flecha $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$. Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, tendremos que $(\mathcal{P}f)(X) = f(X) \in \mathcal{P}(B)$.

- Consideremos dos monoides, M y N, tomados como categorías de un sólo objeto. Entonces, un homomorfismo de monoides $f : M \to N$ puede ser considerado un funtor. Si f es sobreyectivo, f como funtor será completo. Si f es inyectivo, f como funtor será fiel.

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría. El funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, -) : \mathcal{C} \to$ **Set** lleva cada objeto s a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, s)$, y cada flecha f a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, f)$ de forma que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, f)(g) = f \circ g$.

2.3. Transformaciones naturales

2.3.1. Transformaciones naturales

En muchas ocasiones en matemáticas se hace referencia a la existencia de *transformaciones naturales* o *aplicaciones naturales*. Esta idea, que resulta en la mayoría de las ocasiones totalmente intuitiva, se puede concretar en el marco de la teoría de categorías con una definición formal:

Definición 2.3.1. *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Una transformación natural es una aplicación $\tau : F \to G$ de forma que a cada objeto a en $\mathcal{A}$ le asigna una flecha $\tau_a = \tau a : Fa \to Ga$ de $\mathcal{B}$ de forma que para cada flecha $f : a \to a'$ de $\mathcal{A}$ el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\tau a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ Fa' \arrow[r, "\tau a'"] & Ga' \end{tikzcd}$$

Diremos, cuando se verifique que el diagrama es conmutativo, que τ es natural en a, y cada τa es una componente *de la transformación natural τ. Si cada componente es invertible, τ se dirá una* equivalencia natural *(o isomorfismo natural) y notaremos $\tau : F \simeq G$.*

Damos ahora algunos ejemplos de transformaciones naturales:

Ejemplo.

- El determinante de una matriz es una transformación natural. Notemos por $\det_R M$ al determinante de una matriz $n \times n$ con entradas en un anillo abeliano R. Una matriz M es regular cuando $\det_R M \in R^*$, siendo R^* las unidades de R. Consideremos los siguientes funtores:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{GL}_n : & \mathbf{CRng} & \to & \mathbf{Grp} \\ & R & \mapsto & \mathrm{GL}_n R \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} ()^* : & \mathbf{CRng} & \to & \mathbf{Grp} \\ & R & \mapsto & R^* \end{array}$$

  Donde $\mathrm{GL}_n R$ denota el grupo lineal de matrices de orden n sobre un anillo conmutativo R. Como la definición de determinante es independiente del anillo en que lo definamos, dados dos anillos R, R' y un morfismo de anillos $f : R \to R'$ (a partir del cual tenemos naturalmente un morfismo $f^* : R^* \to (R')^*$) tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n R \arrow[r, "det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n f"'] & R^* \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{GL}_n R' \arrow[r, "det_{R'}"'] & (R')^* \end{tikzcd}$$

  Conforme a la definición, esto indica que $det : \mathrm{GL}_n \to ()^*$ es una transformación natural.

- Los morfismos de (pre)haces, que serán nombrados más adelante, son transformaciones naturales.

2.3.2. Categorías de funtores

Hemos visto que las transformaciones naturales son, a grandes rasgos, transformaciones de funtores. Establecido esto, resulta natural intentar crear una categoría en la que los objetos sean funtores, y los morfismos transformaciones naturales. Dicha categoría se puede construir, como vemos a continuación.

Definición 2.3.2. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ dos categorías. A partir de ellas formamos la* categoría de funtores $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ *en la que los objetos son los funtores $F : B \to A$ y los morfismos son las transformaciones naturales entre dichos funtores.*

Vamos a comprobar que dicha definición es correcta, esto es, tenemos todas las propiedades necesarias para poder considerar $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ una categoría. Veamos en primer lugar que podemos componer adecuadamente las transformaciones naturales:

Lema. *Dadas dos categorías $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y funtores $F, G, H : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ la composición de transformaciones naturales entre dichos funtores es una transformación natural. Además, dicha composición es asociativa.*

Prueba. Dadas dos transformaciones naturales $\tau : G \to H$ y $\sigma : F \to G$ definimos su composición como $(\tau \circ \sigma)b = \tau b \circ \sigma b$. Para ver que es natural, dada $f : b \to b'$ arbitraria hemos de ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[r, "(\tau\circ\sigma)b"] \arrow[d, "Ff"] & Hb \arrow[d, "Hf"] \\
Fb' \arrow[r, "(\tau\circ\sigma)b'"] & Hb'
\end{tikzcd}.$$

Este diagrama podemos descomponerlo de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\sigma b"] \arrow[dd, bend right, "(\tau\circ\sigma)b"'] & Fb' \arrow[d, "\sigma b'"] \arrow[dd, bend left, "(\tau\circ\sigma)b'"] \\
Gb \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "\tau b"] & Gb' \arrow[d, "\tau b'"] \\
Hb \arrow[r, "Hf"] & Hb'
\end{tikzcd}$$

Como cada uno de los subdiagramas conmuta, el diagrama externo conmuta y tenemos que la composición de transformaciones naturales es natural. La asociatividad se puede probar trivialmente a partir de la definición, por ser asociativa la composición de morfismos.

□

Para tener que, efectivamente, $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ es una categoría nos queda ver que tenemos un morfismo (transformación natural, en este caso) identidad para cada objeto (funtor). Lo tenemos trivialmente considerando, para cada funtor F, la transformación $1_F : F \to F$ definida, para cada elemento b de $\mathcal{B}$, como $1_F b = 1_{Fb}$. Es decir, la identidad para cada objeto. Con todos estos datos podemos establecer, como anunciábamos, la categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$.

2.4. El lema de Yoneda. Universales, límites y colímites.

En este apartado presentamos los conceptos de objeto universal, flecha universal, límite y colímite. Los dos tipos de objetos universales dan pie a definir diversos conceptos categóricos mediante *propiedades universales*. Los límites y colímites son casos particulares de universales pero su abundante presencia, la relevancia y ciertas propiedades interesantes los hacen merecedores de un tratamiento aparte. Además, enunciamos y probamos el útil lema de Yoneda.

2.4.1. Universales

El producto cartesiano de conjuntos se define habitualmente, dados dos conjuntos A y B, como el conjunto

$$A \times B := \{(a,b) \quad | \quad a \in A, B \in B\}$$

Además, el producto cartesiano verifica lo siguiente:

Lema. *Sean A, B conjuntos y $A \times B$ su producto cartesiano. Sea también π_A la proyección canónica de $A \times B$ en A, y π_B la correspondiente para B. Entonces, dado X un conjunto y aplicaciones $X \to A$ y $X \to B$* existe una única aplicación *$X \to Y$ de forma que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr] \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[drr] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Prueba. Para simplificar los razonamientos, notemos de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Sea $m : X \to A \times B$ dada por $m(x) = (f(x), g(x))$. Claramente, $\pi_A \circ m = f$ y $\pi_B \circ m = g$. Veamos que es única: sea m una aplicación de X en $A \times B$ de forma que los diagramas anteriores conmutan. Como $\pi_A \circ m(x) = f(x)$, tendremos que $m(x) = (f(x), \beta)$, con β por determinar. Razonando igual con B llegamos a que $m(x) = (\alpha, g(x))$ con lo cual tenemos que $m(x) = (f(x), g(x))$ y, por consiguiente, la unicidad.

□

Esta propiedad, de hecho, se podría establecer como la definición de producto cartesiano. Si definiésemos así el producto lo habríamos definido mediante una *propiedad universal*. Es más, el producto en los conjuntos es un ejemplo simple y natural de una noción más amplia, la de producto en una categoría, que enunciaremos más adelante. Existen muchos otros conceptos bien conocidos (unión disjunta, núcleo, conúcleo...) que no son más que casos particulares de un concepto categórico definido mediante una propiedad universal. Ahora bien, ¿podemos establecer formalmente a que nos referimos con el concepto de *universalidad*? La respuesta es afirmativa:

Definición 2.4.1. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $b \in \mathcal{B}$. Una* flecha universal de b a F *es un par (r, u) formado por un objeto r de A y una flecha $u : b \to Fr$ de forma que para cualquier par (a, f) con a un objeto de $\mathcal{A}$ y $f : r \to Fa$ una flecha de $\mathcal{B}$ existe una única flecha $f' : r \to a$ con $F(f') \circ u = f$. Esto es, existe una única flecha haciendo conmutar el diagrama de la derecha:*

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\
a
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Fr \arrow[d, dashed, "F(f')"] \\
 & Fa
\end{tikzcd}$$

Tenemos también el concepto dual:

Definición 2.4.2. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $b \in \mathcal{B}$. Una* flecha universal de F a b *es un par (r, u) formado por un objeto r de A y una flecha $u : Fr \to b$ de forma que para cualquier par (a, f) con a un objeto de $\mathcal{A}$ y $f : Fa \to b$ una flecha de $\mathcal{B}$ existe una única flecha $f' : a \to r$ con $u \circ F(f') = f$. Esto es, existe una única flecha haciendo conmutar el diagrama de la derecha:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\ r \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "F(f')"'] & b \\ Fr \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Estas dos definiciones dan una base formal a las diversas propiedades universales que usamos en matemáticas. Veamos a continuación cómo encajan estas definiciones en el ejemplo anterior del producto en la categoría **Set**.

Consideremos, en primer lugar, la categoría **Set** $\times$ **Set**, en la que los objetos son pares de objetos de **Set** y las flechas pares de flechas de **Set** actuando componente a componente. Consideremos asimismo el funtor Δ : **Set** $\to$ **Set** $\times$ **Set** dado por $\Delta(a) = (a, a)$. Consideremos el objeto (A, B) de la categoría **Set** $\times$ **Set**. Si llamamos $p : A \times B \to A$ a la proyección (y q a la respectiva sobre B) tendremos que $(A \times B, (p, q))$ es una flecha universal de Δ a (A, B).

La definición de universal, en su abstracción, no es más que un paso previo necesario para construcciones más concretas: los límites y colímites. De hecho, veremos que el producto (no ya en la categoría de los conjuntos, sino en general) es un caso particular de límite.

2.4.2. Límites

Daremos dos definiciones de límite: una formal, utilizando la definición de flecha universal, y otra dada en sí misma por una propiedad universal. Obviamente ambas definiciones serán equivalentes, pero en la práctica será más manejable la propiedad universal. Antes de proceder con la primera definición precisamos de una cierta herramienta formal:

Definición 2.4.3. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ categorías. El funtor diagonal Δ viene dado por*

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

Este funtor asigna a cada c el funtor $\Delta c : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dado por $\Delta c(j) = c \quad \forall j \in \mathcal{J}$.

Cabe destacar que a la categoría J se la suele llamar *categoría índice*, y en muchos casos es finita o numerable. Dado el funtor Δ estamos en condiciones de definir la noción de límite:

Definición 2.4.4. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ categorías. Consideremos el funtor diagonal*

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

conforme a 2.4.3 y un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Un límite *para el funtor F es una flecha universal (r, v) de Δ a F. El objeto r es un objeto de $\mathcal{C}$ al que llamamos* límite *(y, en ocasiones,* límite proyectivo*) y notamos $r = \varprojlim F$ o $r = limF$. El morfismo v es una transformación natural $v : \Delta r \to F$ que es universal para las transformaciones naturales $\tau : \Delta c \to F$, con c objeto arbitrario de $\mathcal{C}$.*

Como anunciábamos, esta definición abstracta se puede concretar en una propiedad universal. Para ello conviene explicitar cierta idea que, además, justifica que a $\mathcal{J}$ la denotemos *categoría índice*. Si consideramos el funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ tenemos que para cada j en $\mathcal{J}$ hay un c en $\mathcal{C}$ verificando $F(j) = c$. Podemos notar $c = F_j$, lo cual nos da una colección de objetos indexados con índices en J. Si $\mathcal{J}$ es una categoría con una cantidad finita de objetos, o numerable, podemos considerar los F_j una suerte de sucesión y, por tanto, el límite categórico pasa a ser un límite en el sentido intuitivo habitual.

Definición 2.4.5. *Sean dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{J}$. Sea asimismo el funtor Δ anterior, y un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Sean también $j, i \in \mathcal{J}$ de forma que existe un morfismo de $\mathcal{J}$, $u : j \to i$. Un límite del funtor F es un par $(\varprojlim F, v)$ de forma que, si notamos $v_i = v(i) : \varprojlim F \to F_i$, existe un único morfismo haciendo conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & & F_j \arrow[dd, "Fu"] \\
c \arrow[urr, "f_j"] \arrow[drr, "f_i"'] \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \varprojlim F \arrow[ur, "v_j"'] \arrow[dr, "v_i"] & \\
 & & F_i
\end{tikzcd}$$

donde c es un cierto objeto de $\mathcal{C}$ de forma que existan morfismos f_j y f_i con $f_j : c \to F_j$ y $f_i : c \to F_i$.

Como es obvio, esta segunda definición, pese a ser una simple reformulación de la que dimos originalmente, es más manejable. Es especialmente interesante, en vista al posterior estudio de los haces, el caso particular en que nuestra categoría I es un conjunto dirigido:

Definición 2.4.6. *Un* conjunto dirigido *es un par $(I, \leq)$ donde I es un conjunto no vacío y $\leq$ es un preorden*[1] *sujeto a la condición de que, dados $a, b \in I$ existe un $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.*

[1]Esto es, una relación satisfaciendo las propiedades de transitividad ($a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$ para cualesquiera a, b, c) y de reflexividad ($a \leq a$ para todo a).

Esta definición nos indica que un conjunto dirigido no es más que un conjunto con un preorden en el cual hay un "elemento maximal" respecto al preorden. Por comodidad, y como es habitual, al par $(I, \leq)$ lo notaremos I sobreentendiendo el orden. Caso de tener un conjunto dirigido I podemos considerarlo, de manera totalmente análoga a como hemos hecho anteriormente con los conjuntos parcialmente ordenados, una categoría con objetos los del conjunto, y morfismos los dados por la relación de preorden. A partir de ello podemos considerar pues el siguiente concepto:

Definición 2.4.7. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ un* sistema dirigido *de objetos de $\mathcal{C}$ sobre un conjunto dirigido I es una colección de datos (N_a, ρ_{ba}) con N_a un objeto de $\mathcal{C}$ para cada a en I y un morfismo $\rho_{ba} : N_a \to N_b$ para cada par a, b con $a \leq b$ y sujetos a*

$$\rho_{cb}\rho_{ba} = \rho_{ca} \text{ para cada } a, b, c \in I \text{ con } a \leq b \leq c$$

$$\rho_a a = id \quad \forall a \in I$$

Equivalentemente, y usando terminología funtorial, tenemos

Definición 2.4.8. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ un* sistema dirigido *de objetos de $\mathcal{C}$ sobre un conjunto dirigido I es un funtor $N : I \to \mathcal{C}$, con $N(i) := N_i$ para cada $i \in I$.*

La definición de límite no se altera ante este caso particular. Veamos algunos ejemplos de límites:

Ejemplo.

- Dada una categoría $\mathcal{C}$ y dos objetos A, B de la categoría, su producto cartesiano es un límite. En efecto, sea $F : \{1, 2\} \to \mathcal{C}$ el funtor que va al par de objetos (A, B). Entonces, al límite de dicho funtor (cuando existe) lo denominamos producto. En algunas de las categorías habituales $(\mathbf{Set}, \mathbf{Grp} \cdots)$, a este producto se le denomina *producto directo*.

- Dados objetos A, B, C en una categoría $\mathcal{C}$ y flechas $A \to C, B \to C$, a la terna (D, f, g) de forma que se verifica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr] & \\
D \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\
& B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

se le denomina un *pullback* o producto fibrado de $A \to C \leftarrow B$. En puridad, es el límite de un funtor $F : J \to \mathcal{C}$, donde $J = (\to \cdot \leftarrow)$ es la categoría con objetos diagramas de ese tipo.

- El núcleo de una flecha es un caso particular de límite que será tratado en detalle cuando introduzcamos las categorías exactas.

2.4.3. Colímites

La construcción dual al límite también subyace a muchas nociones habituales de la matemática. Como antes, definiremos tanto formalmente como mediante una propiedad universal el colímite, aunque omitiremos las referencias a conjuntos dirigidos, por ser idéntico el tratamiento. También daremos algunos ejemplos de esta noción. La definición formal de colímite es, por tanto:

Definición 2.4.9. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ categorías. Consideremos el funtor diagonal*

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

conforme a 2.4.3 y un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Un colímite *para el funtor F es una flecha universal (r, v) de F a Δ. El objeto r es un objeto de $\mathcal{C}$ al que llamamos* colímite *(y, en ocasiones,* límite inductivo*) y notamos $r = \varinjlim F$ o $r = colimF$. El morfismo v es una transformación natural $v : F \to \Delta r$ que es universal para las transformaciones naturales $\tau : F \to \Delta r$, con c objeto arbitrario de $\mathcal{C}$.*

Como es habitual en teoría de categorías, la dualidad resulta totalmente natural y la definición de colímite mediante una propiedad universal resulta similar a la de límite:

Definición 2.4.10. *Sean dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{J}$. Sea asimismo el funtor Δ anterior, y un funtor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Sean también $j, i \in \mathcal{J}$ de forma que existe un morfismo de $\mathcal{J}$, $u : j \to i$. Un límite del funtor F es un par $(\varinjlim F, v)$ de forma que, si notamos $v_i = v(i) : F_i \to \varinjlim F$, existe un único morfismo haciendo conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[dd, "Fu"'] \arrow[dr, "v_i"] \arrow[drr, "f_i"] & & \\
 & \varinjlim F \arrow[r, dashed, "\exists!"] & c \\
F_j \arrow[ur, "v_j"'] \arrow[urr, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde c es un cierto objeto de c de forma que existan morfismos f_j y f_i con $f_j : F_j \to c$ y $f_i : F_i \to c$.

Como antes, vemos algunos ejemplos de colímites:

Ejemplo.

- Dados objetos A, B, C en una categoría $\mathcal{C}$ y flechas $C \to A, C \to A$, a la terna (D, f, g) de forma que se verifica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ C \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr] & & D \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

  se le denomina un *pushout* (o suma fibrada) de $A \leftarrow C \to B$. En puridad, es el límite de un funtor $F : J \to \mathcal{C}$, donde $J = (\leftarrow \cdot \to)$ es la categoría con objetos diagramas de ese tipo.

- El conúcleo de una flecha es un caso particular de colímite que estudiaremos en la sección dedicada a las categorías exactas.

2.4.4. El lema de Yoneda

El lema de Yoneda es un resultado breve y sencillo, pero a la vez potente. Establece un cierto isomorfismo que nos permite pasar de trabajar en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ a la categoría bien conocida **Set**. Además, en un plano más práctico nos permitirá probar una cierta propiedad de los funtores adjuntos:

Lema 2.4.11 (Yoneda)**.** *Sea $K : \mathcal{C} \to$ **Set** un funtor, y $r \in \mathcal{C}$. Entonces, existe una biyección*

$$y : Nat(Hom_{\mathcal{C}}(r, -), K) \simeq Kr$$

que lleva cada transformación natural $\alpha : Hom_{\mathcal{C}}(r, -) \to K$ a $\alpha_r 1_r$, es decir, la imagen de la identidad $r \to r$.

Prueba. Basta probar que la transformación natural α está caracterizada por $\alpha_r 1_r$. Sea $s \in \mathcal{C}$ de forma que $r \xrightarrow{f} s$. Por la propia definición de transformación natural tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, r) \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r,f)"'] & K(r) \arrow[d, "Kf"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, s) \arrow[r, "\alpha_s"'] & K(s) \end{tikzcd}$$

Si estudiamos la imagen de $1_r \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, r)$ tenemos que se tiene la igualdad

$$\alpha_s(f) = \alpha_s(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, f)(1_r)) = Kf(\alpha_r 1_r)$$

Como la f es arbitraria, tenemos que cada transformación natural α está caracterizada (i.e, se tiene la biyección) por $\alpha_r 1_r$.

□

Este lema induce el siguiente funtor, que será fundamental a la hora de probar un resultado que nos permitirá caracterizar funtores:

Lema 2.4.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sea $Y : \mathcal{C} \to \boldsymbol{Set}^{\mathcal{C}}$ el funtor que a cada x de $\mathcal{C}$ le asigna el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(x, -)$. Entonces, este funtor (llamado* incrustación de Yoneda*) es completamente fiel.*

Prueba. Para cualquier par de objetos $x, y \in \mathcal{C}$ tenemos, por el lema de Yoneda, que

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, -)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x)$$

Pero se tiene que

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, -)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, -)) =$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(Y(x), Y(y))$$

Se tiene por tanto el isomorfismo (en particular, biyección)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}}(Y(x), Y(y))$$

Por la definición de completamente fiel dada anteriormente 2.2.4, y atendiendo a que Y es un funtor contravariante, tenemos el resultado.

□

Como decíamos, usaremos este funtor para caracterizar, en cierto sentido, a otros funtores. Veamos cómo podemos establecer dicha caracterización:

Definición 2.4.13. *Sea $F : \mathcal{C} \to \boldsymbol{Set}$ un funtor. Una* representación *de F es un par (r, ψ) con $r \in \mathcal{C}$ y $\psi : Hom_{\mathcal{C}}(r, -) \simeq F$ un isomorfismo natural. Al objeto r se le llama* objeto representante *(o simplemente representante). El funtor F se dirá representable cuando existe una representación.*

Esto es, los funtores representables, en esencia, son lo mismo que algún funtor del tipo Hom. Veamos que dicho funtor es, salvo isomorfismo, único:

Lema 2.4.14. *Los objetos representantes son únicos (salvo isomorfismo).*

Prueba. Supongamos un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ representado por x e y (i.e, $F \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, -)$). Tenemos por tanto que $Y(x) \simeq Y(y)$, donde Y es la incrustación de Yoneda. Por ser Y completamente fiel, se tiene trivialmente que $x \simeq y$.

□

2.5. Adjuntos

Presentamos a continuación el concepto de adjunción motivados por la construcción, una vez trabajemos en teoría de haces, de las imágenes directa e inversa de un haz. También probaremos un interesante resultado que involucra límites y adjuntos.

Definición 2.5.1. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías. Una* adjunción *de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es una terna (F, G, φ) con F, G funtores de la forma*

$$\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$$

y donde φ es una función que induce, para cada pareja de objetos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ un isomorfismo

$$\varphi = \varphi_{A,B} : \quad Hom_{\mathcal{B}}(FA, B) \quad \xrightarrow{\sim} \quad Hom_{\mathcal{A}}(A, GB)$$

siendo esta transformación natural en A y B.

Si tenemos una adjunción (F, G, φ) diremos que F es el adjunto a la izquierda de G y que G es el adjunto a la derecha de F. Por otro lado, φ es conocido como *morfismo de adjunción.* Veamos algunos ejemplos de adjunciones:

Ejemplo.

- Dado el funtor olvido U : **Grp** $\to$ **Set** que a cada grupo le asocia el mismo como conjunto (y preserva las funciones) su adjunto por la izquierda es F : **Set** $\to$ **Grp**, que a cada conjunto X le asocia el grupo libre generado por X, FX. Las flechas las preserva, pues lleva generadores en generadores, caracterizando el morfismo.

- Tenemos un análogo en el caso del funtor U : **R-Mod** $\to$ **Set**, siendo en este caso el adjunto por la izquierda el funtor que a cada conjunto le asocia el **R**-módulo libre generado por X.

- Más adelante veremos en detalle que el funtor *imagen directa* y el functor *imagen inversa* de un cierto haz $\mathcal{F}$ forman un par de adjuntos.

Aunque las adjunciones presentan un gran interés por sí mismas y poseen múltiples propiedades nos limitaremos a probar una que nos será útil a la hora de desarrollar adecuadamente la teoría de haces:

Lema 2.5.2. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías y (F, G, φ) una adjunción entre dichas categorías. Entonces, el adjunto izquierdo (F) preserva los colímites y el adjunto derecho (G) los límites.*

En la prueba de este lema usaremos lo siguiente:

Lema 2.5.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un funtor con límite L. Entonces, dado $r \in \mathcal{C}$, se tiene que $Hom_{\mathcal{C}}(r, -)$ preserva los límites, i.e, $Hom_{\mathcal{C}}(r, L) \simeq \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(r, F_i)$. Se tiene análogo resultado para el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(-, r)$ y los colímites.*

Prueba (De 2.5.3). Probamos el caso de los límites, siendo análoga la prueba del otro caso. Dado el diagrama del límite

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[dd, "\rho_{ij}"'] & & & \\
 & & L \arrow[ull, "\rho_i"'] \arrow[dll, "\rho_j"] & X \arrow[l, "\exists!\alpha"'] \arrow[ulll, "f_i"'] \arrow[dlll, "f_j"] \\
F_j & & &
\end{tikzcd}$$

podemos aplicarle el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, -)$, resultando en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, F_i) \arrow[dd, "\tilde{\rho_{ij}}"'] & & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, L) \arrow[ul, "\tilde{\rho}_i"'] \arrow[dl, "\tilde{\rho}_j"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, X) \arrow[l, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[ull, "\tilde{f}_i"'] \arrow[dll, "\tilde{f}_j"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r, F_j) & &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas con tilde indican la imagen por el funtor Hom de las flechas del diagrama del límite. La unicidad de la flecha α y que el funtor preserve la conmutatividad hace que se tenga el resultado.

$\square$

Prueba (De 2.5.2). Probamos el caso de los límites, siendo totalmente análogo el otro. Sea $H : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ un funtor con límite L. Tendremos, atendiendo a la definición de adjunción y al lema 2.5.3, que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GL) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, L) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, H_i) \simeq$$
$$\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GH_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varprojlim GH_i)$$

Por el lema de Yoneda (2.4.11) tendremos a su vez que

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GL)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GL)$$

y también que

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \varprojlim GH_i)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varprojlim GH_i)$$

Pero como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GL) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \varprojlim GH_i)$, se infiere por 2.4.14 que $GL \simeq \varprojlim GH_i$, como queríamos probar.

□

Una vez definamos núcleos veremos que son límites, y que los conúcleos son, a su vez, colímites. Por ello, se tendrá lo siguiente:

Lema 2.5.4. *Los funtores adjuntos izquierdos preservan núcleos, y por tanto son exactos a izquierda. Los funtores adjuntos derechos preservan conúcleos, y por tanto son exactos a derecha.*

2.6. Categorías exactas, aditivas y abelianas

En este epígrafe definimos ciertos conceptos que son fundamentales a la hora de construir un tipo de categoría especialmente útil y versátil. La mayoría de las siguientes definiciones pueden ser tomadas también como propiedades universales.

Definición 2.6.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo (al que denotaremos 0). Un morfismo $f : A \to B$ entre dos objetos de la categoría se dirá que es un morfismo nulo (y lo denotaremos también 0) cuando el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "0"] \arrow[dr] & & B \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Recordemos que, dado un objeto arbitrario A de la categoría, *existen una única* flecha $A \to 0$ y *una única flecha* $0 \to A$, por lo que se infiere que *existe un único* morfismo $A \xrightarrow{0} B$ entre dos objetos cualesquiera de la categoría. Además, es trivial comprobar que, para cualesquiera morfismos $C \xrightarrow{f} A$ y $B \xrightarrow{g} D$ se verifica que $0f = 0$ y $g0 = 0$. Conviene resaltar que, aunque denotamos siempre 0, *no* tiene por qué tratarse siempre del mismo morfismo 0. Concluimos esta breve presentación sobre el morfismo 0 con el siguiente resultado. Omitimos la prueba por ser trivial, consecuencia directa de las definiciones.

Lema 2.6.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero. Sea m un monomorfismo y f un morfismo de forma que $mf = 0$. Entonces, $f = 0$. De forma totalmente análoga, sea e un epimorfismo y g un morfismo de forma que $ge = 0$. Entonces, $g = 0$.*

2.6.1. Núcleo y conúcleo

Definimos a continuación dos elementos cuyos nombres resultan familiares de otras ramas de las matemáticas (especialmente, el álgebra abstracta). Una vez estudiemos sus propiedades veremos que no son más que generalizaciones de conceptos bien conocidos:

Definición 2.6.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ objetos de la categoría y $f : A \to B$ una flecha entre esos objetos. Entonces, el* núcleo *de f es un par $(\ker(f), i)$ de forma que $\ker(f)$ es un objeto de la categoría, $i : \ker(f) \to A$ es un morfismo con $fi = 0$ y para cualquier par (X, g) de forma que $g : X \to A$ y $fg = 0$ entonces existe una única aplicación de forma que el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\
& \ker(f) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Conviene aclarar en este punto que la definición, en sentido estricto, debería hacer referencia a *un* núcleo del morfismo f. Pero dos núcleos cualesquiera serán isomorfos, por lo que podemos hablar *del* núcleo. Antes de probar este hecho, probamos que la aplicación i del núcleo (que, en realidad, es el elemento realmente importante del par) es un monomorfismo.

Lema 2.6.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $f : A \to B$ un morfismo y $(\ker(f), i)$ un núcleo de f. Entonces, i es un monomorfismo.*

Prueba. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & \ker(f) \arrow[r, "i"] & A
\end{tikzcd}$$

De forma que $ig = ih$. Consideremos asimismo el diagrama, más amplio,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "ig"] \arrow[r, shift right, "ih"'] \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "g"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
\ker(f) \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ya que $fi = 0$, tendremos que $fig = fih = 0$. Por la propiedad universal del núcleo 2.6.3 tendremos que existe una única flecha de forma que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "ig"] \arrow[r, shift right, "ih"'] \arrow[d, "\exists!"'] & A \\ \ker(f) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero tanto g como h hacen conmutar el diagrama, con lo que ha de ser $g = h$ y tenemos que i es, por tanto, un monomorfismo.

□

Como anunciábamos, probamos que existe (salvo isomorfismo) un único núcleo:

Lema 2.6.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, y sea $f : A \to B$ un morfismo. Sean (K_1, i_1) y (K_2, i_2) dos núcleos. Entonces, $K_1 \simeq K_2$.*

Prueba. Por la propiedad del núcleo, ha de ser $fi_1 = fi_2 = 0$. Luego, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dd, shift left, "\exists!"] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ K_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] \arrow[uu, shift left, "\exists!"] & & \end{tikzcd}$$

.

Por ser únicas las aplicaciones entre K_1 y K_2 se tiene directamente que $K_1 \simeq K_2$.

□

Igual que hemos definido el núcleo estamos en condiciones de definir el conúcleo:

Definición 2.6.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ objetos de la categoría y $f : A \to B$ una flecha entre esos objetos. Entonces, el* conúcleo *de f es un par $(coker(f), p)$ de forma que $coker(f)$ es un objeto de la categoría, $p : B \to coker(f)$ es un morfismo con $pf = 0$ y para cualquier par (X, g) de forma que $g : B \to X$ y $gf = 0$, entonces existe una única aplicación de forma que el diagrama siguiente conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & X \\
& coker(f) \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

Como antes, la definición, en puridad, debería hacer referencia a *un* conucleo, pero este es único salvo isomorfismo. La prueba es totalmente análoga a la del caso del núcleo. También análoga es la siguiente propiedad, de la cual omitiremos la prueba por ser idéntica a la de 2.6.4:

Lema 2.6.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto nulo, $f : A \to B$ un morfismo y $(coker(f), p)$ un conúcleo de f. Entonces, p es un epimorfismo.*

Con estas definiciones estamos en condiciones de definir el primer tipo de categoría relevante que nos encontramos: las categorías *exactas*. Como decíamos antes, veamos que tanto el núcleo como el conúcleo son límite y colímite, respectivamente.

En efecto, dada $f : F \to G$ en un categoría $\mathcal{C}$, el núcleo de f (si existe) es el límite del funtor dado por $H : \{1, 2\} \to \mathcal{C}$ con $H(1) = F$, $H(2) = G$ y con las aplicaciones adecuadas. Razonando idénticamente llegamos a que el conúcleo es un colímite. Esto justifica el lema antes enunciado acerca de los adjuntos.

2.6.2. Categorías exactas

Para definir categoría exacta necesitamos los conceptos de imagen y coimagen:

Definición 2.6.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sea $f : A \to B$ un morfismo. La* imagen *de f es el núcleo del conúcleo de f. La* coimagen *de f es el conúcleo del núcleo de f.*

Conviene destacar en este punto que hablamos de núcleos y conúcleos *suponiendo su existencia*. No en todas las categorías existen, y, cuando los tenemos, no es necesario que existan para todos los morfismos. Dicho esto, cuando tenemos núcleo y conúcleo tenemos lo siguiente:

Lema 2.6.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, y $f : A \to B$ un morfismo de forma que tiene núcleo y conúcleo. Entonces, existe una factorización canónica del morfismo f por*

$$A \to Coim(f) \to Im(f) \to B$$

Prueba. Atendiendo a la definición de imagen y coimagen, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coim}(f) & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "0"] &
\end{tikzcd}$$

Como $pf = 0$, por ser la imagen un núcleo, $\exists! \beta$ de forma que $f = \eta\beta$. A su vez, sabemos que $fi = 0$ por la propiedad universal del núcleo, y, por la factorización de f, tenemos que $\eta\beta i = 0$. Pero por 2.6.4 tendremos que η es un monomorfismo y, por el lema 2.6.2, $\beta i = 0$. Como la coimagen es un conúcleo, por la propiedad universal del conúcleo tendremos que existe un único $\tilde{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ de forma que $\beta = \tilde{f}\pi$. Por lo tanto, tenemos la factorización canónica de f como

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
\mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

que es lo que queríamos probar.

□

Definición 2.6.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Esta categoría se dirá* exacta *cuando tenga objeto nulo, existan todos los núcleos y conúcleos y, para todo morfismo f, el morfismo canónico Coim$(f) \xrightarrow{\tilde{f}}$ Im(f) es un isomorfismo.*

En estas categorías cabe definir el siguiente concepto:

Definición 2.6.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría exacta. Sea asimismo $\{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una familia de morfismos de forma que $f_i : C_i \to C_{i-1}$ para cada i. Entonces, la sucesión*

$$\cdots \to C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} C_i \xrightarrow{f_i} C_{i-1} \to \cdots$$

se dirá una sucesión exacta *cuando* $\ker(f_i) = Im(f_{i+1})$ *para cada i.*

Dentro de las sucesiones exactas destaca el siguiente tipo:

Definición 2.6.12. *En una categoría exacta $\mathcal{C}$ una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma*

$$0 \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to 0$$

Para estas sucesiones tenemos lo siguiente:

Lema 2.6.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría exacta. Sea la sucesión exacta*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Entonces, esta sucesión es exacta si, y sólo si, las composiciones de las diagonales en el siguiente diagrama son cero.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "f"] & & Cok(f) \\
& F \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\
\ker(g) \arrow[ur, "i"] & & G
\end{tikzcd}$$

Prueba. Si es exacta, $gf = 0$. Estudiemos que sucede con pi. Por ser exacta, tendremos que $\ker(g) = \mathrm{Im}(f) = \ker(p)$. Por tanto, $pi = 0$. Para la otra implicación, supongamos que $pi = 0$ y $gf = 0$. Sea $x \in \ker(f)$. Entonces, $pi(x) = p(x) = 0$, es decir, $x \in \ker(p) = \mathrm{Im}(f)$. Supongamos ahora $y \in \mathrm{Im}(f)$. Entonces, hay un $x \in E$ con $y = f(x)$. Entonces, $g(y) = g(f(x)) = 0$, con lo que $y \in \ker(g)$ y hemos completado la prueba.

□

2.6.3. Categorías aditivas

Antes de establecer qué entendemos por una categoría aditiva es necesario establecer el concepto de suma directa. Lo hacemos a partir de una propiedad universal:

Definición 2.6.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, P y Q objetos de la categoría. La suma directa de P y Q es una terna $(P \oplus Q, i, j)$ con $P \oplus Q$ un objeto de C e i y j morfismos con $i : P \to P \oplus Q$ y $j : Q \to P \oplus Q$, de forma que si existe una terna (X, f, g) con $P \xrightarrow{f} X$, $Q \xrightarrow{g} X$ y X un objeto de $\mathcal{C}$, entonces existe un único morfismo $P \oplus Q \to X$ de forma que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& P \oplus Q \arrow[r, dashed, "\exists!"] & X \\
Q \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Veremos que en el caso de categorías aditivas la suma directa induce, de hecho, un producto directo, conforme a la definición vista en la sección anterior. Este producto directo se basará fuertemente en lo siguiente: dada una suma directa $P \oplus Q$, si tomamos en la definición anterior $X = P, f = 1, g = 0$ (dónde 1 denota la identidad) existe un único p de forma que $pi = 1$ y $pj = 0$. Llegamos a una relación análoga si $X = Q$. Veamos ahora qué es una categoría aditiva:

Definición 2.6.15. *Una categoría $\mathcal{C}$ se dirá* aditiva *si tiene objeto cero, todas las sumas directas y los Hom-set están dotados de estructura de grupo abeliano haciendo las composiciones bilineales.*

La presencia de una estructura de grupo abeliano permite afirmar lo siguiente:

Lema 2.6.16. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, $(P \oplus Q, i, j)$ la suma directa de dos objetos P y Q. Entonces, se tiene la siguiente relación*

$$1 = ip + jq$$

donde p y q son los únicos morfismos de forma que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "1"] & & \\
& P \oplus Q \arrow[r, dashed, "p"] & X \\
Q \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "0"] & & \\
& P \oplus Q \arrow[r, dashed, "q"] & X \\
Q \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Prueba. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \oplus Q \arrow[dr, "ip+jq"'] \arrow[drr, "1"] & & \\
& P \oplus Q \arrow[r, "\alpha"] & P \oplus Q \\
P \oplus Q \arrow[ur, "ip"] \arrow[urr, "ip"'] \arrow[dr, "ip+jq"'] \arrow[drr, "1"] & & \\
& P \oplus Q \arrow[r, "\beta"] & P \oplus Q \\
P \oplus Q \arrow[ur, "jq"] \arrow[urr, "jq"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nuestro objetivo es probar que $\alpha = \beta = 1$. Observemos que a partir del diagrama se obtienen las siguientes igualdades:

$$\beta ip + \beta jq = 1 \qquad \alpha ip + \alpha jq = 1$$

$$\alpha jq = jq \qquad \alpha ip = ip$$

Esto se puede expresar también como

$$\beta ip + jq = 1 \qquad ip + \alpha jq = 1$$

$$\alpha jq = jq \qquad \alpha ip = ip$$

De aquí obtenemos también que

$$\alpha ip + \beta jq = ip + jq$$

Se observa trivialmente que $\alpha = \beta = 1$ satisface todas las igualdades, con lo que se tiene el resultado.

□

Una vez establecida esta igualdad podemos probar el siguiente lema, que establece la relación entre sumas directas y productos en las categorías aditivas.

Lema 2.6.17. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva, y sea el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "i"] & & P \\
& X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\
Q \arrow[ur, "j"] & & Q
\end{tikzcd}$$

de forma que se verifican las siguientes identidades:

$$1 = ip + jq$$

$$pi = 1 \qquad qi = 0$$

$$pj = 0 \qquad qj = 1$$

Entonces, (X, i, j) es una suma directa y (X, p, q) un producto directo.

Prueba. Probemos en primer lugar la suma directa. Consideremos morfismos $f : P \to Y$ y $g : Q \to Y$. Consideremos asimismo el morfismo $F : X \to Y$ dado por $F = gq + fp$. Es trivial comprobar que $Fi = f$ y $Fj = g$, con lo cual encajaría en la definición de la suma directa. Veamos que es único: sea ahora un morfismo

$F : X \to Y$ verificando $Fi = f, Fj = g$. Entonces, $Fip = fp$ y $Fjq = gq$. Sumando y aplicando que la composición es bilineal tendremos que $F(ip+jq) = fp+gq$. Pero $ip + jq = 1$ con lo que se tiene $F = fp + gq$ y tenemos la unicidad.

Para probar el producto directo procedemos de forma totalmente análoga pero considerando un morfismo $F = if + jg$, construido a partir de las flechas $f : Y \to P$ y $g : Y \to Q$.

□

Así, como anunciábamos, de manera implícita la presencia de sumas directas hace que tengamos productos directos. Para finalizar, en el contexto de las categorías aditivas surge también el siguiente concepto:

Definición 2.6.18. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice* aditivo *si para todo par de objetos X, Y en $\mathcal{A}$ se tiene que F induce un homomorfismo*

$$Hom(X, Y) \to Hom(F(X), F(Y))$$

.

2.6.4. Categorías abelianas

Habiendo definido categorías exactas y aditivas en apartados anteriores la definición de categoría abeliana es breve:

Definición 2.6.19. *Una categoría $\mathcal{C}$ se dice* abeliana *si es aditiva y exacta.*

El interés de este tipo de categorías radica en que en ellas es donde se definen muchas teorías de homología y cohomología, de gran relevancia en algebra en general, y en ramas como la topología algebraica en particular. Además, algunas de las categorías en las que trabajamos con mayor asiduidad (y, en particular, en las que trabajamos en este texto) son abelianas: por ejemplo, la categoría de los grupos abelianos **AbGrp**, la de los anillos conmutativos **AbRng**, la de los R-módulos **R-Mod**...

Capítulo 3

Teoría de haces

Abordaremos el estudio de los haces y prehaces en el caso particular de los grupos abelianos. Por completitud, no obstante, daremos dos definiciones generales del concepto de prehaz: una categórica y otra explícita. En adelante, y salvo que sea necesario especificar más, al hacer referencia a un espacio topológico X sobreentenderemos que dotamos a X de una cierta topología $\mathcal{T}$.

Definición 3.0.1. *Sea X un espacio topológico, y consideremos las categorías $\boldsymbol{Open}_X$ (de la topología de los abiertos de X con la inclusión) y $\mathcal{C}$ (una categoría arbitraria). Entonces, un* prehaz *sobre X es un funtor contravariante $\mathcal{F} : \boldsymbol{Open}_X \to \mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto inicial I, exigimos que $\mathcal{F}(\emptyset) = I$.*

Esta definición puede ser reformulada de manera más explícita:

Definición 3.0.2. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una categoría. Un prehaz de X sobre $\mathcal{C}$ es un conjunto de datos $\mathcal{F}$ de manera que:*

- *A cada abierto U de X le asigna un objeto de C, la sección de X sobre U, denotada $\mathcal{F}(U)$. Si $\mathcal{C}$ tiene un objeto inicial I, exigimos que $\mathcal{F}(\emptyset) = I$.*
- *Para cada par de abiertos $V \subset U$ de X un morfismo $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, el morfismo restricción.*

Imponemos asimismo que si se tiene la cadena de abiertos $W \subset V \subset U$, se verifique $r_{WV} \circ r_{VU} = r_{WU}$ y $r_{UU} = id$ con id el morfismo identidad.

Esta construcción abstracta la trabajaremos en profundidad en el caso particular de los grupos abelianos. En adelante, salvo que se indique lo contrario, cada vez que hagamos referencia a prehaces o haces se tratará de prehaces y haces de *grupos abelianos*.

3.1. Prehaces

Como decíamos, en el caso particular de la categoría de los grupos abelianos obtenemos la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio topológico. Un prehaz (de grupos abelianos) en X es una asignación $\mathcal{F}$ de manera que:*

- *A cada abierto U de X le asigna un grupo, la sección de X sobre U, $\mathcal{F}(U)$. Imponemos que $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$, donde 0 es el grupo abeliano nulo.*
- *Para cada par de abiertos $V \subset U$ de X un morfismo $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, el morfismo restricción.*

Imponemos asimismo que si se tiene la cadena de abiertos $W \subset V \subset U$, se verifique $r_{WV} \circ r_{VU} = r_{WU}$ y $r_{UU} = id$ con id el morfismo identidad.

Nótese que en la definición anterior los morfismos son homomorfismos, por ser estos los morfismos de la categoría de los grupos abelianos. Conviene también aclarar que, en ocasiones, para simplificar notación, escribiremos $r_{VU}(s) = s_{|VU}$ o, incluso, si estamos trabajando con subconjuntos abiertos V de un abierto U fijado, $s_{|V}$. Podemos definir, asimismo, morfismos sobre prehaces:

Definición 3.1.2. *Dados dos prehaces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X, un morfismo de prehaces*

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

es una colección de aplicaciones lineales $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada abierto U de X de forma que si $V \subset U$ son abiertos el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{r_{VU}} & \mathcal{F}(V) \\ {\scriptstyle f(U)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(V)} \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow[r_{VU}]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

O, reescribiendo en términos categóricos, un morfismo f entre prehaces es una transformación natural de funtores. Los morfismos, de manera totalmente natural, podrán ser compuestos y sumados:

Definición 3.1.3. *Sean $f, g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $h : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismos de prehaces sobre un cierto espacio topológico X. Entonces:*

- *La composición de morfismos* $h \circ f : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ *vendrá dada por la regla*

$$(h \circ f)(U) = h(U) \circ f(U)$$

para cada abierto U *de* X*.*

- *La suma de morfismos* $f + g$ *vendrá dada por*

$$(f + g)(U) = f(U) + g(U)$$

para cada abierto U *de* X*.*

Es rutinario comprobar que los prehaces sobre un espacio topológico X con los morfismos de prehaces forman una categoría, a la que denotaremos **pSh(X)**[1]. Resulta interesante destacar que esta categoría tiene un objeto nulo:

Lema 3.1.4. *Dado un espacio topológico* X*, la categoría* ***pSh***(X) *tiene un objeto nulo dado por el prehaz* ***0****, definido como* ***0***$(U) = 0$ *para cada abierto* U *de* X*. También lo notaremos simplemente* 0*.*

Prueba. Consideremos un prehaz arbitrario $\mathcal{F}$. Consideremos, para un abierto cualquiera U de X, la sección $\mathcal{F}(U)$. Ya que $\mathcal{F}(U)$ es grupo abeliano, por ser 0 el objeto nulo de la categoría de los grupos abelianos, existe una única aplicación $f(U) : \mathcal{F}(U) \to 0$. Pero $0 = \mathbf{0}(U)$. Esta colección de aplicaciones $f(U)$ induce una única aplicación $f : \mathcal{F} \to \mathbf{0}$, con lo cual tenemos que $\mathbf{0}$ es objeto final de la categoría de los prehaces. La prueba de que es inicial es totalmente análoga.

□

Además de objeto nulo la categoría **pSh** cuenta con suma directa, notada $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, y dada por

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

para cada abierto U de X. Podemos construir también los núcleos y conúcleos de un morfismo de prehaces $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ como

$$\ker(f)(U) = \ker(f(U))$$

$$\operatorname{coker}(f)(U) = \operatorname{coker}(f(U))$$

A partir de estas construcciones podemos probar el siguiente hecho relevante:

[1] En contextos más generales convendría denotar $\mathbf{pSh}_{AGrp}(X)$, por ser prehaces *de grupos abelianos*. En general, notaríamos $\mathbf{pSh}_{\mathcal{C}}(X)$ a los prehaces sobre una categoría $\mathcal{C}$. Dado que el presente desarrollo no deja lugar a posibles confusiones, usaremos la notación más simple.

Proposición 3.1.5. *Dado un espacio topológico X la categoría* ***pSh*** *es una categoría abeliana.*

Prueba. Probemos en primer lugar que es aditiva, conforme a la definición 2.6.15. Ya hemos probado la existencia de objeto nulo, y hemos construido la suma directa. Basta probar que los hom-set vienen dotados de estructura de grupo abeliano. Anteriormente hemos definido la suma de morfismos de prehaces. Como lo hemos hecho abierto a abierto, y en cada abierto un morfismo de prehaces f no es más que un homomorfismo $f(U)$, se tendrá el carácter abeliano al heredarlo de la categoría de los grupos abelianos. Con esto, la categoría es aditiva.

Veamos a continuación que es exacta. Conforme a 2.6.10, ya tenemos elemento nulo, y por la construcción anterior, tenemos núcleos y conúcleos. Para ver que, dado un morfismo de prehaces $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, se tiene el isomorfismo canónico $Im(f) \simeq Coim(f)$, basta considerar que, debido a la definición de núcleo y conúcleo, es $Im(f)(U) = Im(f(U))$ (y de manera análoga para la coimagen). Así, por ser la categoría de los grupos abelianos abeliana (en particular, exacta) es $Im(f)(U) = Im(f(U)) \simeq Coim(f(U)) = Coim(f)(U)$, con lo que se tiene $Im(f) \simeq Coim(f)$. Así, la categoría es exacta. Al ser exacta y aditiva, tenemos que es abeliana, como queríamos probar.

□

3.2. Haces

La utilidad de los prehaces se aprecia en su totalidad al estudiar el siguiente caso particular:

Definición 3.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un* haz *si para cada familia $(U_i)_{i\in I}$ de abiertos de X y cada familia $(s_i)_{i\in I}$ de secciones (con $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$) verificando*[2]

$$r_{U_i\cap U_j,U_i}(s_i) = r_{U_i\cap U_j,U_j}(s_j) \qquad \forall i,j \in I$$

se tiene que existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$, con $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y

$$r_{U_i,U}(s) = s_i \qquad \forall i \in I$$

Intuitivamente, y como anunciábamos en la introducción, la definición nos da una generalización de la *idea de pegado* que resulta tan familiar en contextos como el del análisis. Observemos este hecho en un par de ejemplos:

[2] A esta condición haremos referencia en el futuro como *condición de pegamiento* o *condición de haz.*

Ejemplo.

- Sea X un espacio topológico arbitrario. Para cada abierto U de X definamos

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{f es continua}\}$$

Asimismo, dados $V \subset U$ abiertos de X, definamos

$$\begin{array}{rccc} r_{VU}: & \mathcal{C}(U) & \to & \mathcal{C}(V) \\ & f & \mapsto & f_{|V} \end{array}$$

Esto es, la restricción en su sentido habitual. Veamos que con estas definiciones $\mathcal{C}$ es un haz.

En efecto, es fácil comprobar que cada $\mathcal{C}(U)$ es grupo abeliano con la suma: la suma de funciones continuas es continua y hay elemento neutro (la función constante 0, que es continua). Por otro lado, dado que la restricción es la habitual, es sencillo ver que se verifican las propiedades que exigíamos a la aplicación r_{VU}: es lineal (lleva la suma a la suma de restricciones), lleva el 0 al 0 (restringido) y además $r_{UU} = id$ y $r_{WV}r_{VU} = r_{WU}$ para abiertos $W \subset V \subset U$, como resulta obvio de la definición. Con esto, $\mathcal{C}$ es un prehaz.

Consideremos ahora una familia $(U_i)_{i\in I}$ de abiertos en X,$U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ y una familia de secciones $(f_i)_{i\in I}$ con $f_i \in \mathcal{C}(U_i)$ verificando la condición que indicábamos en la definición de haz. Entonces, podemos considerar $f \in \mathcal{C}(U)$ dada por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$, esto es, la definición abierto a abierto. Es claro que es continua, pues lo es en cada abierto, y si se intersecan, por la condición impuesta a las secciones, no ofrece problemas. Es claro además que es la única verificando que $r_{U_i,U}(f) = f_i$, pues suponiendo otra distinta se llega a contradicción. Con todo ello, $\mathcal{C}$ es un *haz* sobre X.

- Sea G un grupo abeliano no trivial y X un espacio topológico. Definamos

$$G_X(U) = \{f : U \to G \mid \text{f es localmente constante}\}$$

$$\tilde{G}_X(U) = \{f : U \to G \mid \text{f constante}\}$$

Consideremos, en cada uno de los casos, las restricciones r_{VU} como las restricciones habituales. Veamos que G_X es un haz pero $\tilde{G}_X$, aún siendo prehaz, no es haz. Es rutinario comprobar el carácter de prehaz tanto de G_X como de $\tilde{G}_X$.

Consideremos una familia de abiertos $(U_i)_I$. Consideremos una familia $(f_i)_I$

con $f_i \in G_X(U_i)$ bajo las condiciones adecuadas. Definiendo $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$ para todo $x \in U$, con $U = \bigcup_I U_i$, es fácil ver que $f \in G_X(U)$ y que $r_{U_i,U} = f_i$. Por otro lado, consideremos ahora la situación análoga para $\tilde{G}_X$.

Sean dos abiertos U, V de forma que $U \cap V = \emptyset$, y consideremos las secciones $f \in \tilde{G}_X(U)$ y $g \in \tilde{G}_X(V)$. Por ser constantes, tendremos que $f(x) = a_1 \quad \forall x \in U$ y $g(x) = a_2 \quad \forall x \in V$, con $a_1, a_2 \in G$. Tomemos las secciones de forma que $a_1 \neq a_2$. Supongamos que existe una sección $h \in \tilde{G}_X(U \cup V)$ verificando $r_{U,U\cup V} h = f$ y $r_{V,U\cup V} h = g$. Como $h \in \tilde{G}_X(U \cup V)$, $h(x) = a_3 \quad \forall x \in U \cup V$, con $a_3 \in G$. Esto es, $h(x) = a_1$ si $x \in U$ y $h(x) = a_2$ si $x \in V$. Por ser h constante, tenemos $a_1 = a_3 = a_2$, lo cual es una contradicción: no puede existir dicha sección, y por tanto $\tilde{G}_X$ es un prehaz pero no un haz.

Con esto, tenemos ejemplos de haces y de prehaces que no son haces. Cabe preguntarse, dado este último caso: ¿podemos, dado un prehaz que no sea un haz, generar de alguna manera un haz basado en (o, mejor aún, asociado a) él? La respuesta es afirmativa. Para ello habremos de recurrir a una cierta construcción a la que llamaremos *fibra*, que resultará fundamental tanto para la obtención de un haz a partir de un prehaz (proceso al que, por comodidad, llamaremos *"hacificación"*) como para demostrar que los haces forman una categoría abeliana.

3.3. Fibra de un prehaz en un punto. Localización.

Para definir la fibra utilizaremos el hecho de que los prehaces forman una categoría abeliana o, más explícitamente, están construidos a partir de grupos. Podemos considerar, fijado un prehaz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, un sistema dirigido sobre los $\mathcal{F}(U)$.

Definición 3.3.1. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X y $x \in X$ un punto. La* fibra de $\mathcal{F}$ en x *se define como*

$$\mathcal{F}_x = \lim_{\to} \mathcal{F}(U)$$

donde el límite es sobre los entornos U del punto x, que forman un conjunto dirigido.

Atendiendo a la definición de límite inductivo, es natural, dado $x \in X$ y U un entorno abierto de X, considerar una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \mathcal{F}_x \\ s & \mapsto & s_x \end{array}$$

que no es otra cosa que la proyección canónica debida a la definición de límite inductivo. Conviene notar que, también de acuerdo a la definición de límite inductivo, dos elementos $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ con $x \in U \cap V$ son iguales en F_x si, y sólo si, existe un $W \subset U \cap V$ entorno abierto de x de forma que $s_{|W} = t_{|W}$, esto es, que las secciones coincidan en un entorno (arbitrariamente pequeño) del punto x. Así, la fibra tiene como objetivo ofrecer información local del espacio topológico. Se tiene también que un morfismo de prehaces $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce, por la definición de límite inductivo, una aplicación f_x:

$$\begin{array}{cccc} f_x : & \mathcal{F}_x & \rightarrow & \mathcal{G}_x \\ & s_x & \mapsto & f_x(s_x) = (f(s))_x \end{array}$$

del cual se puede comprobar con facilidad que está bien definido. Con estas herramientas podemos demostrar un resultado, que tiene como finalidad el permitir, haces mediante, pasar la información de carácter local (fibras) a carácter global (grupo de secciones), y viceversa. Para demostrar dicho teorema usaremos el siguiente lema técnico:

Lema 3.3.2. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Entonces, para cada abierto U de X, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ s & \mapsto & \{s_x\}_{x\in U} \end{array}$$

es inyectiva.

Prueba. Fijemos un cierto abierto U de X. Consideremos la aplicación anterior

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ s & \mapsto & \{s_x\}_{x\in U} \end{array}$$

Por comodidad, llamemos a esta aplicación g. Para probar que g es inyectiva, vamos a probar que si $g(s) = 0$ entonces $s = 0$. Sabemos que $g(s) = 0$ si, y sólo si, $\{s_x\}_{x\in U} = 0$. Esto se da si, y sólo si, $s_x = 0 \quad \forall x \in U$.

Fijemos $x \in U$. Se tiene, por la definición de $\mathcal{F}_x$, que $s_x = 0$ si, y sólo si, existe un $V_x \subset U$ entorno abierto de x verificando $s_{|V_x} = 0$. Podemos expresar $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. Sobre esta unión, consideremos la colección de secciones $0 \in \mathcal{F}(V_x) \quad \forall x \in U$. Por ser $\mathcal{F}$ un haz existe un único $s \in U$ verificando $s_{|V_x} = 0 \quad \forall x \in U$. Como se tiene que $0_{|V_x} = 0$ para cada x, ha de ser $s = 0$. Por tanto, g es inyectiva.

□

Con este lema, podemos probar el resultado antes anunciado:

Proposición 3.3.3 (Teorema de localización de haces)**.** *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces sobre X.*

1. *Si dos morfismos de haces $f, g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ verifican $f_x = g_x \quad \forall x \in X$, entonces $f = g$.*

2. *Un morfismo de haces $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ verifica que $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es inyectivo para todo $x \in X$ si, y sólo si, $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectivo para cada abierto U de X.*

3. *Si un morfismo de haces $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ verifica que $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo para cada $x \in X$, entonces f es un isomorfismo de haces en X.*

Prueba. 1. Dados los morfismos $f, g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces sobre X, si probamos $f(U) = g(U)$ para cada abierto U de X tendremos que $f = g$. Fijemos pues U abierto de X y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ {\scriptstyle f(U)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \prod_{x \in U} f_x} \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

Por el lema 3.3.2 sabemos que las flechas horizontales son inyectivas. Si llamamos h_F y h_G a cada una de las flechas horizontales, tendremos que

$$\prod_{x \in U} f_x(h_F(s)) = h_G(f(U)(s))$$

y que (considerando el diagrama idéntico, pero con $g(U)$ y $\prod_{x \in U} g_x$)

$$\prod_{x \in U} g_x(h_F(s)) = h_G(g(U)(s))$$

Pero como $f_x = g_x$ para cada x, $\prod_{x\in U} f_x = \prod_{x\in U} g_x$. Así,

$$h_G(f(U)(s)) = h_G(g(U)(s))$$

Como h_G es inyectiva,

$$f(U)(s) = g(U)(s)$$

con lo cual se tiene el resultado querido.

2. Supongamos, en primer lugar, f_x inyectivo $\forall x \in X$. Consideremos como antes el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "f(U)"'] & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \arrow[d, "\prod_{x\in U} f_x"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

para un cierto U abierto de X. Como f_x es inyectivo, $\prod_{x\in U} f_x$ también lo es. En el diagrama, tendremos que

$$\prod_{x\in U} f_x(h_F(s)) = h_G(f(U)(s)) \quad \forall s \in \mathcal{F}(U)$$

Sean ahora $s, v \in \mathcal{F}(U)$. Supongamos $f(U)(s) = f(U)(v)$. Por tanto,

$$h_G(f(U)(s)) = h_G(f(U)(v))$$

Pero por ser el diagrama conmutativo, lo que tendremos es

$$\prod_{x\in U} f_x(h_F(s)) = \prod_{x\in U} f_x(h_F(v))$$

Pero por ser tanto $\prod_{x\in U} f_x$ como h_F inyectivas, esto implica que $s = v$, es decir, $f(U)$ es inyectiva para cada U abierto de X.

Para la otra implicación, basta tener en cuenta que el límite inductivo es exacto. Es sencillo de ver, pues los núcleos y conúcleos son, en sí, límites, y al calcular el nuevo límite se preservan. Dicho esto, sea la sucesión $0 \to F(U) \to G(U)$. Ya que $f(U)$ es inyectiva, la sucesión es exacta. Por tanto, $0 \to F_x \to G_x$ es exacta y, por tanto, f_x es inyectiva, como queríamos probar.

3. Dado que f_x es isomorfismo para todo x, y en la categoría de los grupos abelianos ismorfismo implica inyectividad, tendremos que f es inyectiva (por serlo para cada $f(U)$.

   Veamos ahora que f es sobreyectiva. Lo probaremos ahora abierto a abierto. Consideremos $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Sea $t \in \mathcal{G}(U)$, y sea $x \in U$. Sea t_x el germen de t en x. Como f_x es isomorfismo, existe un $s_x \in \mathcal{F}_x$ con $f_x(s_x) = t_x$. Sea s^x un representante de s_x, con $s^x \in \mathcal{F}(V^x)$ para un cierto entorno de x. Así, podemos considerar $t_{|V^x}, f(V^x)(s^x) \in \mathcal{G}(V^x)$ y se verifica que el germen de ambos es el mismo. Esto es fácil de ver considerando el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V^x) & \longrightarrow & \mathcal{F}_x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V^x) & \longrightarrow & \mathcal{G}_x \end{array}$$

   donde las flechas son las aplicaciones habituales: restricciones, f_x, $f(U)$, $f(V^x)$ y tomar clase, según corresponda. Ya que tienen igual germen, por como está definida la clase de equivalencia, existe un entorno de x (quizás distinto del anterior, pero por comodidad abusaremos de notación), $V^x \subset U$ verificando $f(V^x)(s^x) = t_{|V^x}$ en V^x. Así, podemos expresar $U = \bigcup_{x \in U} V^x$.

   Sean ahora $x, y \in U$. Consideremos, en entornos adecuados,

$$f(V^x \cap V^y) : t \in \mathcal{F}(V^x \cap V^y) \to t_{|V^x \cap V^y} \in \mathcal{G}(V^x \cap V^y)$$

   Tendremos $s^x_{|V^x \cap V^y}, s^y_{|V^x \cap V^y} \in \mathcal{F}(V^x \cap V^y)$ y se verifica que

$$f(V^x \cap V^y)(s^x_{|V^x \cap V^y}) = f(V^x \cap V^y)(s^y_{|V^x \cap V^y}) = t_{|V^x \cap V^y}$$

   Como f es inyectiva, se tiene $s^x_{|V^x \cap V^y} = s^y_{|V^x \cap V^y}$. Así, por ser $\mathcal{F}$ haz, existe un único $s \in \mathcal{F}(U)$ verificando $s_{|V^x} = s^x \quad \forall x \in U$.

   Veamos que $f(U)(s) = t$. Es claro que, $\forall x$,

$$(f(U)(s))_{|V^x} = r_{V^x,U}(f(U)(s)) = f(V^x)(r_{V^x,U}(s)) = f(V^x)(s^x) = t_{|V^x}$$

   Luego, como $r_{V^x,U}$ es lineal (homomorfismo de grupos abelianos) es

$$r_{V^x,U}(f(U)(s) - t) = 0 = 0_{|V^x}$$

Por ser $\mathcal{F}$ haz, existe un único $h \in \mathcal{F}(U)$ verificando $h_{|V^x} = 0$. Ha de ser forzosamente $h = 0$, con lo que se tiene que $f(U)(s) = t$. Por tanto, f es sobreyectiva.

Si definimos f^{-1} como $f(U)^{-1}$ abierto por abierto tendremos que f tiene inverso, con lo que f es un isomorfismo, como queríamos probar.

$\square$

Tenemos pues un resultado que nos permite, dada información global, obtener información local, y viceversa. Este teorema, claramente relevante por sí mismo, nos será fundamental a la hora de demostrar que la categoría de los haces es abeliana y para obtener ciertas propiedades de un objeto interesante que presentamos a continuación: el *hacificado* de un prehaz. Es destacable también que este teorema *no* es cierto en general en el caso de los prehaces, y por tanto ahí es donde radica la importancia de los haces: en la capacidad para sintetizar información local. Veamos con un ejemplo cómo este teorema es falso en el caso de los prehaces:

Ejemplo. Sean los haces sobre $\mathbb{R}$ dados por:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ constante}\}$$

$$\mathcal{D}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ localmente constante}\}$$

Antes vimos que $\mathcal{C}$ no es un haz. Consideremos el morfismo dado por

$$\begin{array}{rccc} i(U): & \mathcal{D}(U) & \to & \mathcal{C}(U) \\ & f & \mapsto & c \end{array}$$

donde $c = \inf\limits_{x \in \mathrm{Im}(f)} |f(x)|$. Dicho ínfimo existe por el axioma del ínfimo de los números reales (todo conjunto de números reales acotado inferiormente y no vacío tiene ínfimo). Es claro que $i(U)$ no es inyectiva. Baste considerar, por ejemplo, el abierto $U = (-1, 0) \cup (0, 1)$ y las funciones localmente constantes dadas por

$$f = \begin{cases} -1 & x \in (-1, 0) \\ 1 & x \in (0, 1) \end{cases} \qquad g = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 0) \\ -1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Obviamente $i(U)(g) = i(U)(f) = 1$ pero $g \neq f$. Sin embargo, se puede comprobar que, por el carácter local de las funciones, i_x si es inyectiva, lo cual muestra cómo el teorema no es cierto en general para prehaces. Se puede comprobar incluso que nuestra i es, una vez localizada, un isomorfismo i_x, no siendo isomorfismo de prehaces.

3.4. Hacificación

Antes construimos un ejemplo de prehaz que no era un haz. Cabe preguntarse: ¿existe alguna forma de pasar de trabajar con prehaces a trabajar con haces? O, en otras palabras, dado un prehaz $\mathcal{F}$, ¿podemos asociarle un haz $\tilde{\mathcal{F}}$? La respuesta es afirmativa: a dicho proceso lo llamaremos "*hacificación*"[3].

Sea pues $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X. La "hacificación" de $\mathcal{F}$ será el haz $\tilde{\mathcal{F}}$ definido de la siguiente manera: para cada abierto U de X, las secciones de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre U vendrá dado por los $s \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ tales que, para cada x en U, existe un entorno abierto de x, $W \subset U$, y una sección $t \in \mathcal{F}(W)$ con $pr_w(s) = t_w$ para cada $w \in W$, donde pr_w es la proyección en w. Las restricciones, dados abiertos $V \subset U$, vendrán dadas de manera natural por la aplicación $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \to \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x$, que no es más que la aplicación inducida por la propiedad universal del producto de acuerdo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \arrow[d, "\pi_x"] \\
\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \arrow[ur, "\exists! \rho_{VU}"] \arrow[r, "\tilde{\pi_x}"'] & F_x
\end{tikzcd}$$

donde π y $\tilde{\pi}$ indica las proyecciones canónicas.

Lema 3.4.1. *El prehaz $\tilde{\mathcal{F}}$ anterior es un haz.*

Prueba. Veamos en primer lugar que, para cada abierto U de X, su conjunto de secciones es, en efecto, un grupo abeliano. Para ello, comprobaremos que forma un subgrupo del grupo abeliano $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Fijemos un cierto U abierto de X. Recordemos que

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{s \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \quad | \quad \forall x \in U \quad \exists W \text{ abierto entorno de x}$$
$$\text{y una sección } t \in \mathcal{F}(U) \text{ con } pr_w(s) = t_w \quad \forall w \in W\}$$

Es claro que $0 \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ para cada U: la proyección en cualquier punto y para cualquier abierto de la sección 0 es 0, y en cualquier abierto tenemos la sección 0. Por otro lado, sean $a, b \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$. Vamos a probar que $a - b \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$. Fijado $x \in X$, por la definición, existen entornos abiertos de x, W^a, W^b y secciones $t^a \in \mathcal{F}(W^a)$,

[3]Esta palabra es una traducción directa del inglés, *sheafification*, dada la carencia de una palabra apropiada en español.

$t^b \in \mathcal{F}(W^b)$ con $pr_{w^a}(a) = t^a_{w^a}$ y $pr_{w^b}(b) = t^b_{w^b}$. Si consideramos el opuesto de b, de manera natural, como el opuesto componente a componente, tendremos el resultado deseado.

Veamos ahora que se verifica la condición de pegamiento. Sea $\{U_i\}$ una familia de abiertos de x y sea una familia $\{s_i\}$ con $s_i \in \tilde{\mathcal{F}}(U_i)$ verificando la condición de pegamiento. Entonces, si definimos de manera totalmente natural $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ (con $U = \bigcup U_i$) como $s = \prod\limits_i s_i$. Es fácil ver que esta s verifica que $s_{|U_i,U} = s_i$ por la propia definición. La unicidad de dicha sección es trivial (supuesta otra distinta, se llega a que ha de ser igual componente a componente). Por ello, tenemos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es un haz, como queríamos probar.

□

En definitiva, a partir de un prehaz podemos pasar a trabajar con facilidad con haces, obteniendo las secciones en el haz a partir de las fibras de una sección en el prehaz para cada abierto. Además, es natural inducir un morfismo de prehaces

$$i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$$

definido en cada abierto como

$$\begin{array}{rccc} i_{\mathcal{F}(U)} : & \mathcal{F}(U) & \to & \tilde{\mathcal{F}}(U) \\ & s & \mapsto & (s_x)_{x\in U} \end{array}$$

A raíz de la definición de este morfismo podemos probar el siguiente resultado, que resulta ser una propiedad universal para caracterizar el hacificado a nivel categórico. Además, esta propiedad universal resultará útil a la hora de probar que los haces forman una categoría abeliana:

Proposición 3.4.2. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre el espacio topológico X.*

1. *El morfismo canónico $i_{\mathcal{F}}$ antes descrito induce un isomorfismo en todas las fibras.*

2. *Dado un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ en un* haz *$\mathcal{G}$, existe un único morfismo $\varphi : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ verificando $f = \varphi \circ i_{\mathcal{F}}$.*

Prueba. 1. Fijemos un punto x arbitrario. Si consideramos el grupo de secciones $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ sobre un entorno abierto de x es natural considerar la aplicación inducida por la proyección $\tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}_x$. Así, pasando al límite, es natural asimismo considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{F}}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_x \\ \tilde{\mathcal{F}}_x \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Centrémonos en la aplicación h, y veamos que está bien definida. Esta aplicación h nos lleva la clase de equivalencia de un elemento de $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ (es decir, la clase de un elemento de la forma $(s_z)_{z\in U}$, bajo la relación indicada al defininir la fibra de un prehaz) a un germen s_x en $\mathcal{F}_x$, esto es, una suerte de "proyección sobre la clase". Veamos que está bien definida. Sean $(s_z)_{z\in U}, (t_z)_{z\in V}$ dos secciones de forma que definen la misma clase de equivalencia en $\tilde{\mathcal{F}}_x$. Entonces, existe un entorno abierto de x verificando $W \subset U \cap V$ y con $(s_z)_{|W} = (t_z)_{|W}$, esto es, $s_z = t_z \quad \forall z \in W$. En particular, en dicho entorno W es $s_x = t_x$, con lo que h está bien definida. Con esta definición de h, además, se observa que h no es sino el inverso a izquierda de la aplicación inducida sobre las fibras por $i_{\mathcal{F}}$, a la que notamos $(i_{\mathcal{F}})_x : \mathcal{F}_x \to \tilde{\mathcal{F}}_x$. Probando que $(i_{\mathcal{F}})_x$ es sobreyectiva habremos completado la prueba (garantizamos que h está definida en todo elemento). Este resultado se obtiene con facilidad: sea $[(s_z)_{z\in U}]$ una clase de equivalencia en $\tilde{\mathcal{F}}_x$. Dado el representante $(s_z)_{z\in U}$, basta tomar s_x para tener la imagen adecuada. Esto se debe a un razonamiento similar al hecho antes para ver que h está bien definida: a efectos prácticos, trabajando con esta relación de equivalencia, nos interesa sólo el carácter local y lo que sucede en un entorno arbitrariamente pequeño de nuestro punto x. Así, hemos completado la prueba.

2. A partir del morfismo $f : F \to G$ podemos inducir el morfismo (para cada abierto)

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f}: & \tilde{\mathcal{F}}(U) & \to & \tilde{\mathcal{G}}(U) \\ & (s_x)_{x\in U} & \mapsto & (f_x(s_x))_{x\in U} \end{array}$$

A partir de este morfismo es claro que podemos definir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "i_{\mathcal{F}}(U)"] \arrow[d, "f(U)"'] & \tilde{\mathcal{F}}(U) \arrow[d, "\tilde{f}(U)"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "i_{\mathcal{G}}(U)"'] & \tilde{\mathcal{G}}(U) \end{tikzcd}$$

Por el apartado 1 de este mismo teorema y el apartado 3 de la proposición 1 se tiene que $i_{\mathcal{G}}(U)$ es un isomorfismo. Podemos pues definir $\varphi(U) : \tilde{\mathcal{F}}(U) \to \mathcal{G}(U)$ con $\varphi(U) = i_{\mathcal{G}}(U)^{-1}\tilde{f}(U)$. Esto nos da el morfismo $\varphi : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ buscado. Para ver que es único, razonemos sobre las fibras. Sabemos por el apartado 1 de este mismo teorema que $i_{\mathcal{F}}$ induce un isomorfismo en cada fibra. Por tanto, podemos considerar $f_x = \varphi_x \circ (i_{\mathcal{F}})_x$. Si hubiese dos morfismos distintos verificando la condición, notemos por ejemplo φ y ψ, se tendria que $\psi_x = ((i_{\mathcal{F}})_x)^{-1} \circ f = \varphi_x$. Luego, por el apartado 1 de la proposición 1, $\psi = \varphi$, con lo que el morfismo es único, como queríamos probar.

□

3.5. Carácter abeliano de la categoría Sh(X)

Como indica el título, a continuación probaremos que la categoría de los haces de grupos abelianos en un espacio topológico, $\mathbf{Sh}(X)$, es abeliana. Para ello, veamos que es aditiva y exacta.

Lema 3.5.1. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces sobre un espacio topológico X. Entonces, la suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ (en la categoría de los prehaces) es un haz. En consecuencia, la categoría **Sh**(X) es aditiva.*

Prueba. La prueba de la condición de haz es sencilla: basta considerar la sección $s \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}(U)$ con $s = f + g$, siendo f y g las secciones de $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{G}(U)$ que verifican la condición de haz para una familia $\{U_i\}$ de abiertos de X con la condición de pegamiento. Por la unicidad de f y g, s ha de ser única, con lo que se tiene que la suma directa es un haz. Como además hay objeto 0 (el prehaz constante 0 es, de manera trivial, un haz) y los Hom-set son, por ser de morfismos de prehaces, grupos abelianos, tenemos que $\mathbf{Sh}(X)$ es una categoría aditiva.

□

Una vez probada la aditividad, veamos que es exacta. Para ello, precisamos la presencia de núcleos, conúcleos y que el morfismo canónico $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ sea para cada morfismo f un isomorfismo. Tal y como hicimos antes, resultaría natural definir *ker* y *coker* como el núcleo y el conúcleo en la categoría de prehaces, pero esto resulta inapropiado: dicha idea funciona en el caso del núcleo, pero no en el conúcleo. Probaremos que, en efecto, el núcleo como prehaz de un morfismo entre haces es un haz, pero que el conúcleo, como se ve en el siguiente ejemplo, no tiene por qué serlo.

Ejemplo. Consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{C}$ con la topología euclídea habitual. Consideremos el haz sobre X notado como $\mathcal{O}_X$, dado por

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$$

Consideremos el morfismo de haces

$$\frac{d}{dz} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

dado por la derivada. El *prehaz* $\operatorname{coker}(\frac{d}{dz})$ vendrá dado, para cada abierto U, por

$$\operatorname{coker}(\frac{d}{dz})(U) = {\mathcal{O}_X(U)}\Big/{\operatorname{Im}(\frac{d}{dz}(\mathcal{O}_X(U))}$$

Consideremos el caso de U un disco abierto. Es claro que $\operatorname{coker}(\frac{d}{dz})(U) = 0$, pues en un disco abierto toda función holomorfa en el disco tiene una primitiva (baste considerar su desarrollo en serie de Taylor e integrar término a término). Consideremos el caso del abierto $U = \mathbb{C}^*$, esto es, todo el plano complejo a excepción del origen. Podemos considerar un recubrimiento $\{U_i\}$ de U formado por discos abiertos. Es claro que $\operatorname{coker}(\frac{d}{dz})(U) \neq 0$, pues hay funciones sin primitiva (por ejemplo, $\frac{1}{z}$: no existe un logaritmo que esté definido en todo el plano salvo en un punto). Pero para cada abierto del recubrimiento, es $\operatorname{coker}(\frac{d}{dz})(U_i) = 0$. Por ello, existen secciones $f, g \in \operatorname{coker}(\frac{d}{dz})(U)$ distintas entre sí de forma que $f_{|U_i} = g_{|U_i} = 0$ para cada abierto U_i. Es decir, el conúcleo como prehaz *no* es un haz.

Este ejemplo muestra que para dotar a la categoría de los haces de una estructura de categoría exacta (y así, en conjunción con la aditividad antes probada, abeliana) hemos de encontrar un nuevo haz que haga el papel de conúcleo. Veremos que dicho haz no será otro que el hacificado del conúcleo. Antes, probemos que el núcleo en la categoría de los prehaces es un haz.

Lema 3.5.2. *Dados dos haces sobre un espacio topológico X y un morfismo entre ellos $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, el prehaz* $\ker(f)$ *es un haz, y un núcleo en el sentido categórico.*

Prueba. Basta probar que es un haz, pues la propiedad universal del núcleo seguirá cumpliéndose. Para ver que es un haz, sean una familia de abiertos $\{U_i\}$ y una familia de secciones $\{s_i\}$ con $s_i \in \ker(f)(U_i)$ verificando la condición de pegamiento. Para cada U_i, por la definición del prehaz, tenemos que $\ker(f)(U_i)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U_i)$. Ya que, por tanto, se tiene que para cada i $\quad s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, por ser $\mathcal{F}$ un haz existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$ con $s_{|U_i} = s_i$ para cada i, y $U = \bigcup U_i$. Veamos que $s \in \ker(f)(U)$. En efecto, sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "h_1"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "h_2"] \\
\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "f(U_i)"] & \mathcal{G}(U_i)
\end{tikzcd}$$

siendo h_1 y h_2 las restricciones adecuadas. Tenemos pues que

$$h_2(f(U)(s)) = (f(U)(s))_{|U_i} = f(U_i)(h_1(s)) = f(U_i)(s_i) = 0$$

Como $\mathcal{G}$ es un haz, considerando para la familia $\{U_i\}$ la familia de secciones $\{(f(U)(s))_{|U_i}\}$ existe una única sección de $r \in \mathcal{G}$ con $r_{|U_i} = (f(U)(s))_{|U_i}$ para cada i. Es claro que $r = f(U)(s)$ es dicha sección, pero por ser $(f(U)(s))_{|U_i} = 0$ para cada i, también vale $r = 0$. Es decir, $f(U)(s) = 0$, con lo que tenemos que $s \in \ker(f)(U)$, como queríamos probar.

□

Veamos a continuación que el hacificado del conúcleo (al que notaremos scoker) es, como anunciábamos, un conúcleo en la categoría de los haces en el sentido categórico.

Lema 3.5.3. *Sea $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Consideremos el conúcleo en la categoría de los prehaces, coker(f), y su hacificado, al que notaremos scoker(f). Entonces, scoker(f) es un conúcleo en la categoría de los haces.*

Prueba. Podemos considerar el diagrama, ajustado a que *cokerf* es un conúcleo en la categoría de los prehaces,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, "0"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{G} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "p"] \arrow[d, "\tilde{p}"] & \mathcal{H} \\
\text{coker}(f) \arrow[r, "i_{\text{coker}}"'] \arrow[urr, bend right, "h_1"'] & \text{scoker}(f) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La flecha rayada, definida por composición, es 0 trivialmente; $\tilde{p}$, por su parte, es la composición de p y i_{coker}. Resta comprobar que g factoriza a través de $\tilde{p}$ por scoker. Veamos este último aserto: sabemos que $g = h_1 p$ por ser *coker*(f) conúcleo en la categoría de prehaces. Por otro lado, por la proposición 2 existe un único

$\varphi : \operatorname{scoker}(f) \to \mathcal{H}$ con $h_1 = \varphi i_{\text{coker}}$. La flecha que va de $\operatorname{scoker}(f)$ a $\mathcal{H}$ es dicha φ. Así, como $g = h_1 p$, $g = \varphi i_{\text{coker}} p = \varphi \tilde{p}$, es decir, g factoriza a través de $\operatorname{scoker}(f)$. Por tanto, como verifica la propiedad universal del conúcleo, hemos terminado la demostración.

□

Una vez obtenidos núcleos y conúcleos, probemos que el proceso de localización preserva tanto núcleos como conúcleos.

Lema 3.5.4. *Sea $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces sobre un espacio topológico X. Entonces, el localizar preserva núcleos y conúcleos.*

Prueba. Probamos el caso de los núcleos, siendo análogo el de los conúcleos. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "\exists !"] & \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \\
& \ker(f) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Fijado $x \in X$, localizando, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_x \arrow[r, "g_x"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "\exists !"] & \mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{G}_x \\
& \ker(f)_x \arrow[u, hook, "i_x"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Es claro que se verifica la propiedad universal del núcleo, pues al ser única la aplicación de origen, la inducida es única también. El caso del conúcleo es idéntico.

□

Debido a que nuestra definición de conúcleo para la categoría de los haces no casa con la de la categoría de los prehaces, conviene hacer notar que esa propiedad se verifica también en la categoría de los haces. Para el núcleo es obvio: la definición es la misma, y se traslada a la categoría de los haces. Para el caso del conúcleo, sabemos por un teorema anterior que las fibras de un prehaz y su hacificado son isomorfas, con lo que la propiedad universal del conúcleo se preservaría a partir del conúcleo en la categoría de los prehaces. Con ello, tenemos el resultado deseado y ahora nos encontramos en condiciones de probar que la categoría de los haces es abeliana:

Proposición 3.5.5. *La categoría de los haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico X, **Sh(X)**, es abeliana.*

Prueba. Ya sabemos que es aditiva, por lo que basta probar que es exacta. Sabemos que existen núcleos y conúcleos, como hemos visto antes, por lo que resta probar que el morfismo canónico $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ es, de hecho, un isomorfismo. Sea pues un morfismo de haces $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Notemos por $\tilde{f}$ al morfismo canónico antes indicado. Por definición, la imagen es el núcleo del conúcleo, y la coimagen el conúcleo del núcleo. Hemos probado en 3.5.4 que el localizar preserva núcleos y conúcleos, por lo que obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] \arrow[d] & \mathcal{G}_x \arrow[d] \\ (\mathrm{Coim}(f))_x \arrow[r, "(\tilde{f})_x"] & (\mathrm{Im}(f))_x \end{tikzcd}$$

Atendiendo al hecho de que localizar es, de hecho, un funtor covariante

$$\mathrm{Loc} : \mathbf{pSh(X)} \to \mathbf{AbGrp}$$

se tendrá, al ser la categoría **AbGrp** abeliana, que $(\tilde{f})_x$ es un isomorfismo. Por el teorema de localización de haces 3.3.3 tendremos pues que $\tilde{f}$ es un isomorfismo, lo cual completa la prueba.

□

3.6. Sucesiones exactas en Sh(X)

Como en cualquier categoría abeliana, podemos considerar sucesiones exactas de haces. Lo interesante, en este caso, es determinar cuándo una sucesión es exacta. La localización nos da la clave.

Proposición 3.6.1. *Sea la sucesión de morfismos de haces sobre un espacio topológico X*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

*Esta sucesión es exacta en **Sh(X)** si, y sólo si, la sucesión*

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{G}_x$$

es exacta para cada $x \in X$.

Prueba. Supongamos exacta la sucesión

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

Y sea $x \in X$ arbitrario. Sabemos que al localizar se preservan los núcleos y conúcleos (y como consecuencia las imágenes). Por tanto, la sucesión

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{G}_x$$

es exacta. Para la otra inclusión basta usar el lema 2.6.13. Con esto, ya que la secuencia es exacta para las fibras, se tiene que $g_x f_x = 0_x$ y $\pi_x i_x = 0_x$. Por la proposición 3.3.3 tendremos, ya que $g_x f_x = (gf)_x$ para cualesquiera morfismos de (pre)haces, que $gf = 0$ y $\pi i = 0$, con lo cual, por el lema2.6.13 tendremos que la secuencia es exacta, como queríamos probar.

□

Aquí vemos que, como en otros casos, en la teoría de haces nos basta estudiar los haces a nivel local y el resultado se transmitirá a lo global. Esta idea, no obstante, falla abierto a abierto, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{C}$. Consideremos el haz $\mathcal{O}_X$ sobre X dado por

$$\mathcal{O}_X(U) = \{h : U \to \mathbb{C} \mid h \text{ es holomorfa}\}$$

Es sencillo comprobar que, en efecto, es un haz: ya simplemente a nivel intuitivo es sencillo ver que verifica la “idea de pegado”. Consideremos asimismo el morfismo de haces

$$p = \frac{d}{dz} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

Con $\frac{d}{dz}$ la derivada respecto a la coordenada holomorfa z. En cada abierto, será simplemente la derivada (compleja) en el abierto. Es fácil ver que $\ker(p)$ no es más que el haz de las funciones con valores en $\mathbb{C}$ localmente constantes, al cual notaremos $\mathbb{C}_X$. Consideremos asimismo la sucesión

$$0 \to \mathbb{C}_X \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}_X \to 0$$

Veamos que es exacta estudiando las fibras y utilizando la proposición anterior. Sea $x \in X$ arbitrario. Consideremos la sucesión

$$0 \to (\mathbb{C}_X)_x \xrightarrow{i_x} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{(\frac{d}{dz})_x} \mathcal{O}_{X,x} \to 0$$

Donde por $\mathcal{O}_{X,x}$ notamos a $(\mathcal{O}_X)_x$. La fibra de las funciones localmente constantes son las constantes: las clases de equivalencia del límite inductivo vendrán dadas por cada una de las posibles constantes. Así, $(\mathbb{C}_X)_x = \mathbb{C}$. Por otro lado, si consideramos cualquier función holomorfa h, su clase de equivalencia, i.e, su germen, será su desarrollo de Taylor en el punto x: un desarrollo de Taylor en un punto x caracteriza unívocamente a las funciones en ese punto y en un entorno arbitrariamente pequeño de dicho punto. Así, la fibra de las funciones holomorfas será el conjunto de los posibles desarrollos de Taylor: $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{z\}$. Por tanto, tenemos la sucesión

$$0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{C} \xrightarrow{i_x} \mathbb{C}\{z\} \xrightarrow{(\frac{d}{dz})_x} \mathbb{C}\{z\} \xrightarrow{f_2} 0$$

Veamos que es exacta. Como estamos en la categoría de los grupos abelianos, 0 denota al grupo trivial. Por tanto, $Im(f_1) = 0$. Por otro lado, i_x es la inclusión (de grupos abelianos) inducida por la inclusión en haces, y por tanto es inyectiva y $\ker(i_x) = 0$. Por construcción, será $Im(i_x) = \ker((\frac{d}{dz})_x)$. Por último, $Im((\frac{d}{dz})_x) = \mathbb{C}\{z\}$ pues cada serie de Taylor procede, integrando término a término, de otra, esto es, la derivada es sobreyectiva en cada germen. Por último, es trivial comprobar que $\ker(f_2) = \mathbb{C}\{z\}$ (es la única aplicación posible, pues el 0 es terminal) con lo que tendremos que la sucesión es exacta para cada x. Por el lema anterior, la sucesión de haces

$$0 \to \mathbb{C}_X \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}_X \to 0$$

es, por tanto, exacta. Pero consideremos el caso del abierto $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Consideremos pues la sucesión de los grupos de secciones

$$0 \to \mathbb{C}_X(U) \xrightarrow{i(U)} \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\frac{d}{dz}(U)} \mathcal{O}_X(U) \to 0$$

Consideremos

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

Esta función claramente es holomorfa en U. Pero $h \notin Im(\frac{d}{dz}(U))$. Esto se debe a que, globalmente, no podemos considerar una función logaritmo. En cada disco abierto V que no contenga al 0 podemos considerar un logaritmo, pero no en la unión de todos esos discos (que no es otra cosa que U). Esto enlaza con el ejemplo mostrado anteriormente de un conúcleo que no era un haz. En este hecho subyace que U no es *simplemente conexo*, es decir, la presencia de un *agujero* en el abierto.

3.7. Imagen directa e imagen inversa de haces

En adelante vamos a considerar una aplicación continua entre dos espacios topológicos $f : X \to Y$.

3.7.1. Imagen inversa

Consideremos la aplicación anterior $f : X \to Y$ y un haz sobre Y al que notaremos $\mathcal{G}$. Vamos a asociar a este haz $\mathcal{G}$ un haz sobre X, al que notaremos $f^*\mathcal{G}$. Lo definiremos de la siguiente manera:

Las secciones de $f^*\mathcal{G}$ sobre un abierto U de X vienen dadas por la siguiente colección de datos: el conjunto (el grupo, de hecho) de los

$$s \in \prod_{z \in U} \mathcal{G}_{f(z)}$$

tales que para cada $x \in U$ existe un entorno abierto W de x en U, un abierto V de Y con $f(W) \subset V$ y una sección $t \in \mathcal{G}(V)$ verificando

$$pr_w s = t_{f(w)} \quad \forall w \in W$$

con pr_w la proyección canónica en w. Las aplicaciones restricción para abiertos $V \subset U$ vendrán inducidas, de manera natural, por

$$\prod_{z \in U} \mathcal{G}_{f(z)} \to \prod_{z \in V} \mathcal{G}_{f(z)}$$

La prueba de que esta colección de datos es, de hecho, un haz, es similar a la prueba de que el hacificado de un prehaz es haz, por lo que la omitiremos. Esto se debe a que, en puridad, al hacer esta descripción ya estamos dando de manera explícita el hacificado de un cierto prehaz f_0^* dado por $(f_0^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{V \supset f(U), V \subset Y \text{abierto}} \mathcal{G}(V)$ para cada abierto U de X. Es decir, $f^*\mathcal{G}$ es el hacificado de $f_0^*\mathcal{G}$. Omitimos la prueba de este hecho debido a que no es más que una reformulación paso a paso y aplicando propiedades de los límites inductivos del proceso general de hacificación. En algunas de las pruebas a continuación usaremos tanto la descripción explícita como la basada en f_0^*.

Es claro que, dado V entorno abierto de y y una sección t de $\mathcal{G}(V)$, sus fibras forman $f^*\mathcal{G}(f^{-1}(V))$, es decir, tenemos una aplicación

$$\begin{array}{cccc} a(V): & \Gamma(V, \mathcal{G}) & \to & \Gamma(f^{-1}(V), f^*\mathcal{G}) \\ & t & \mapsto & \prod_{x \in f^{-1}(V)} t_f(x) \end{array} \text{cccc}$$

Recordemos que, dado un espacio topológico X y un (pre)haz $\mathcal{F}$ sobre X, notamos por $\Gamma(U, \mathcal{F})$ a las secciones $\mathcal{F}(U)$. A esta aplicación a (o $a_{\mathcal{G}}$) la llamaremos *adjunción*. El hecho interesante relacionado con esta aplicación es el siguiente:

Proposición 3.7.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, y sea $\mathcal{G}$ un haz sobre Y. Sea asimismo $a(V) : I(V, \mathcal{G}) \to I(f^{-1}(V), f^*\mathcal{G})$ la adjunción (para cada abierto V de Y). Entonces, fijado $x \in X$, la adjunción variando sobre los entornos de $f(x)$ induce un isomorfismo*

$$\mathcal{G}_{f(x)} \simeq (f^*\mathcal{G})_x$$

para cada x en X.

Prueba. Consideremos en todo momento un x arbitrario de X. Probemos, en primer lugar que a_x es sobreyectiva. Sea $t \in (f^*\mathcal{G})_x$. Por definición, existe un entorno abierto U de x y una sección $s \in (f^*\mathcal{G})(U)$ de forma que $t = s_x$. A su vez, como $s \in (f^*\mathcal{G})(U)$, por definición s es de la forma $s = (r_{f(z)})_{z \in U}$ de forma que para todo z en U existen un entorno abierto W de x en U, un abierto $V \supset f(W)$ y una sección $b \in \mathcal{G}(V)$ de forma que $pr_w(s) = b_{f(w)}$ para cada w de W. Por la expresión de s esto quiere decir que $r_{f(w)} = b_{f(w)}$ para cada w de W. Tomemos pues dicha sección V y hagamos $a_x(b) = (a(V)(b))_x$. Como $f(W) \subset V$, se tiene que $W \subset f^{-1}(V)$. Por la definición de fibrado, como $(a(V)(b))_{|W} = s_{|W}$, se tiene que $(a(V)(b))_x = s_x$ con lo que $a_x(b) = s_x = t$. Así, a_x es sobreyectiva, como queríamos probar.

Veamos ahora la inyectividad. Sea $\xi \in \mathcal{G}_{f(x)}$ de forma que $a_x(\xi) = 0$. Por definición existen un entorno abierto V de $f(x)$ y una sección $s \in \mathcal{V}$ tales que $s_{f(x)} = \xi$. Tenemos por tanto que $a_x(\xi) = (a(V)(s))_x = 0$, esto es, por definición de fibra, existe un entorno abierto U de x tal que $a(V)(s)_{|U} = 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $U \subset f^{-1}(V)$ (caso contrario, usaríamos la intersección, que es no vacía por estar el x). Por definición de $a(V)$ es, por tanto, $s_{f(z)} = 0 \quad \forall z \in f^{-1}(V)$. En particular, $s_{f(z)} = 0 \quad \forall z \in U$. Como $x \in U$, se tiene $s_{f(x)} = 0$. Por tanto, $\xi = 0$ y a_x es inyectiva. Como a_x es inyectiva y es sobreyectiva, es un isomorfismo, con lo que queda probado el resultado.

□

3.7.2. Imagen directa

De manera similar al proceso anterior, pero mucho más sencilla en este caso, definimos, a partir de un prehaz $\mathcal{F}$ en X, un prehaz $f_*\mathcal{F}$ en Y. Para cada abierto

V de Y las secciones de $f_*\mathcal{F}$ vendrán dadas por

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)),$$

y las restricciones serán las naturales inducidas por $\mathcal{F}$. Es trivial por el carácter de haz de $\mathcal{F}$ verificar que, si el prehaz de partida $\mathcal{F}$ es un haz, esta colección de datos da lugar a un haz.

3.7.3. Imagen directa e imagen inversa como funtores. Adjunción.

Claramente, tanto la imagen inversa f^* como la directa f_* definen funtores

$$f^* : \ Sh(Y) \ \rightarrow \ Sh(X)$$

y

$$f_* : \ Sh(X) \ \rightarrow \ Sh(Y)$$

Un hecho interesante sobre estos funtores es que son adjuntos: más concretamente, f^* es el adjunto a la izquierda de f_*.

Proposición 3.7.2. *El funtor f^* es adjunto izquierdo de f_* o, equivalentemente,*

$$Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Prueba. Recordemos la aplicación $a_{\mathcal{G}}$ de adjunción antes definida. Era un morfismo de haces $a_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f^*\mathcal{G}$, definida explícitamente para cada abierto V. Podemos definirla también a partir de una cierta aplicación $a^0_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f_0^*\mathcal{G}$.

Fijado un abierto V de Y, consideremos $(f_*f_0^*\mathcal{G})(V)$. Se tendrá, por definición, que

$$(f_*f_0^*\mathcal{G})(V) = f_0^*\mathcal{G})(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supset f(f^{-1}(V))} \mathcal{G}(W)$$

Es claro que $f(f^{-1}(V)) \subset V$, con lo que tenemos, por las propiedades del límite inductivo, una aplicación natural $G(V) \to (f_*f_0^*\mathcal{G})(V)$. A esta aplicación la notaremos $a^0_{\mathcal{G}}$. Esta aplicación da lugar al morfismo de prehaces $a^0_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f_0^*\mathcal{G}$. A partir de ella, definimos $a_{\mathcal{G}}$ por composición como

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "a_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "a^0_{\mathcal{G}}"'] & f_*f^*\mathcal{G} \\
f_*f_0^*\mathcal{G} \arrow[ur, "f_*(i_{f_0^*\mathcal{G}})"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $i_{f_0^*\mathcal{G}}$ denota a la aplicación canónica que va de un prehaz en su haz asociado (a la cual notaremos por comodidad, de ahora en adelante, $h_\mathcal{G} = i_{f_0^*\mathcal{G}}$. Asimismo, vamos a definir una aplicación $b_\mathcal{F} : f^*f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. En primer lugar, consideremos el prehaz $f_0^*f_*\mathcal{F}$. Para un abierto U de X tendremos que

$$(f_0^*f_*\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

Para cada V abierto de Y con $f(U) \subset V$ se verifica que $U \subset f^{-1}(V)$. Así, podemos considerar el diagrama, conmutativo en cada celda,

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \\
\mathcal{F}(U) \arrow[dr, "\rho'_U"] \arrow[drr, bend left, "id"] \arrow[dd, "\rho_{f^{-1}(V),U}"'] & & \\
& \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\exists!"] & \mathcal{F}(U) \\
\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[ur, "\rho'_{f^{-1}(V)}"] \arrow[urr, bend right] \arrow[d] & & \\
\vdots & &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del límite inductivo 2.4.10 tendremos aplicación única verificando las condiciones de dicha propiedad: a ese morfismo lo llamaremos $b^0_\mathcal{F}(U)$. Esto nos define un morfismo $b^0_\mathcal{F}$. A partir de este, en virtud de la proposición 3.3.3, definimos $b_\mathcal{F}$ como la única aplicación que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f_0^*f_*\mathcal{F} \arrow[r, "b^0_\mathcal{F}"] \arrow[d, "i_{f_0^*f_*\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F} \\
f^*f_*\mathcal{F} \arrow[ur, "\exists!"] &
\end{tikzcd}$$

donde, como antes, $i_{f_0^*f_*\mathcal{F}}$ es la aplicación canónica que va de un prehaz en su haz asociado. Por comodidad, de ahora en adelante notaremos $h_\mathcal{F} = i_{f_0^*f_*\mathcal{F}}$. De esta manera, hemos definido los *morfismos de adjunción*. Veamos ahora que, efectivamente se da

$$Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Con el isomorfismo dado por

$$Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

con $\alpha(\varphi) = f_*\varphi \circ a_{\mathcal{G}}$ y $\beta(\psi) = b_{\mathcal{F}} \circ f_*\psi$. En puridad, lo que estudiaremos será la biyectividad de α. Comprobemos en primer lugar la inyectividad. Sea $\varphi \in Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Podemos considerar una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \to & Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ & \varphi & \mapsto & \psi = f_*\varphi \circ a_{\mathcal{G}} \end{array}$$

Esta definición, para cada abierto V, da lugar a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi(V)"] \arrow[d, "a_{\mathcal{G}}(V)"'] & (f_*\mathcal{F})(V) \arrow[d, "id"] \\ (f_*f^*\mathcal{G})(V) \arrow[r, "(f_*\varphi)(V)"] & (f_*\mathcal{F})(V) \end{tikzcd}$$

O, equivalentemente,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi(V)"] \arrow[d, "a_{\mathcal{G}}(V)"'] & (f_*\mathcal{F})(V) \arrow[d, "id"] \\ (f^*\mathcal{G})(f^{-1}(V)) \arrow[r, "(\varphi)(f^{-1}(V))"] & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \end{tikzcd}.$$

Si fijamos $x \in X$ y tomamos el límite sobre todos los abiertos V tales que V es entorno de $f(x)$ obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_{f(x)} \arrow[r, "\psi_{f(x)}"] \arrow[d, "(a_{\mathcal{G}})_x"'] & (f_*\mathcal{F})_{f(x)} \arrow[d, "id_x"] \\ (f^*\mathcal{G})_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

Tendremos pues que $id_x \circ \psi_{f(x)} = \varphi_x \circ (a_{\mathcal{G}})_x$. Conviene notar que, conforme a 3.7.1 $(a_{\mathcal{G}})_x$ es un isomorfismo, y de acuerdo a 3.3.3, b_x también lo es. Por tanto, $\varphi_x = id_x \circ \psi_{f(x)} \circ (a_{\mathcal{G}})_x^{-1}$. Supongamos ahora dos aplicaciones φ, φ' de forma que, si sus imagenes por α son ψ y ψ' respectivamente, se tiene $\psi = \psi'$. Por tanto, $\psi_{f(x)} = \psi'_{f(x)}$ para cualquier $x \in X$. Pero acabamos de ver que $\varphi_x = id_x \circ \psi_{f(x)} \circ (a_{\mathcal{G}})_x^{-1} = id_x \circ \psi'_{f(x)} \circ (a_{\mathcal{G}})_x^{-1} = \varphi'_x$. Como el x es arbitrario, por 3.3.3 se tiene que $\varphi = \varphi'$ y la aplicación α es inyectiva. Veamos ahora que es sobreyectiva.

Consideremos, dado $\psi \in Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$, el morfismo $b_{\mathcal{F}} \circ f_*\psi \in Hom(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Vamos a probar que $\alpha(b_{\mathcal{F}} \circ f_*\psi) = \psi$, es decir, α es sobreyectiva. Esto equivale a ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "a_{\mathcal{G}}"'] & f_*\mathcal{F} \\
f_*f^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_*f^*\psi"] & f_*f^*f_*\mathcal{F} \arrow[u, "f_*b_{\mathcal{F}}"']
\end{tikzcd}
$$

Este diagrama puede ser dividido en celdas de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[dr, "a^0_{\mathcal{G}}"] \arrow[dd, "a_{\mathcal{G}}"'] & & & f_*\mathcal{F} \\
& f_*f_0^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_*f_0^*\psi"] \arrow[dl, "f_*h_{\mathcal{G}}"] & f_*f_0^*f_*\mathcal{G} \arrow[ur, "f_*b^0_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "f_*h_{\mathcal{F}}"] & \\
f_*f^*\mathcal{G} \arrow[rrr, "f_*f^*\psi"'] & & & f_*f^*f_*\mathcal{F} \arrow[uu, "f_*b_{\mathcal{F}}"']
\end{tikzcd}
$$

Recordemos que $h_{\mathcal{G}}$ y $h_{\mathcal{F}}$ son las aplicaciones canónicas que llevan $f_0^*\mathcal{G}$ y $f_0^*f_*\mathcal{F}$ respectivamente a sus haces asociados. Probando que cada uno de los subdiagramas conmuta, tendremos que el diagrama global conmuta. Los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[dr, "a^0_{\mathcal{G}}"] \arrow[dd, "a_{\mathcal{G}}"] & \\
& f_*f_0^*\mathcal{G} \arrow[dl, "f_*h_{\mathcal{G}}"] \\
f_*f^*\mathcal{G} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \\
f_*f_0^*f_*\mathcal{F} \arrow[ur, "f_*b_{\mathcal{F}0}"] \arrow[dr, "f_*h_{\mathcal{F}}"] & \\
& f_*f^*f_*\mathcal{F} \arrow[uu, "f_*b_{\mathcal{F}}"']
\end{tikzcd}
$$

conmutan trivialmente: el primero, por ser la definición de $a_{\mathcal{G}}$. El segundo, por ser el resultado de aplicar el funtor f_* al diagrama conmutativo de la definición de $b_{\mathcal{F}}$. Por otra parte, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
f_*f_0^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_*f_0^*\psi"] \arrow[d, "f_*h_{\mathcal{G}}"'] & f_*f_0^*f_*\mathcal{F} \arrow[d, "f_*h_{\mathcal{F}}"'] \\
f_*f^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_*f^*\psi"'] & f_*f^*f_*\mathcal{F}
\end{tikzcd}
$$

proviene de aplicar el funtor f_* al diagrama

$$
\begin{tikzcd}
f_0^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_0^*\psi"] \arrow[d, "h_{\mathcal{G}}"'] & f_0^*f_*\mathcal{F} \arrow[d, "h_{\mathcal{F}}"'] \\
f^*\mathcal{G} \arrow[r, "f^*\psi"'] & f^*f_*\mathcal{F}
\end{tikzcd}
$$

que es trivialmente conmutativo por la proposición 3.4.2. Esta conmutatividad se preserva por el funtor f_*. Queda pues por estudiar una única celda, dada por

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "a^0_{\mathcal{G}}"'] & f_*\mathcal{F} \\
f_*f_0^*\mathcal{G} \arrow[r, "f_*f_0^*\psi"'] & f_*f_0^*f_*\mathcal{F}. \arrow[u, "f_*b^0_{\mathcal{F}}"']
\end{tikzcd}$$

Para estudiar este diagrama seguiremos la estrategia anterior: subdividirlo, y estudiar cada celda. Fijemos un abierto V de Y y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V) \arrow[rr, "\psi(V)"] \arrow[dr, "\psi(V)"] \arrow[dd, "a^0_{\mathcal{G}}(V)"'] & & (f_*\mathcal{F})(V) \\
& (f_*\mathcal{F})(V) \arrow[dr, "\rho'_V"] & \\
(f_*f_0^*\mathcal{G}(V) \arrow[rr, "(f_*f_0^*\psi)(V)"'] & & (f_*f_0^*f_*\mathcal{F})(V) \arrow[uu, "(f_*b^0_{\mathcal{F}})(V)"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos en primer lugar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi(V)"] \arrow[d, "a^0_{\mathcal{G}}(V)"'] & (f_*\mathcal{F})(V) \arrow[d, "\rho'_V"] \\
(f_*f_0^*\mathcal{G})(V) \arrow[r, "(f_*f_0^*\psi)(V)"'] & (f_*f_0^*f_*\mathcal{F})(V)
\end{tikzcd}$$

Conviene notar que $(f_*f_0^*\psi)(V) = (f_0^*\psi)(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W\supset f(f^{-1}(V))} \psi(W)$. Conforme vemos en 2.4.10, $(f_*f_0^*\psi)(V)$ es la única aplicación que cumple lo indicado: va de $(f_*f_0^*\mathcal{G}(V)$ en $(f_*f_0^*f_*\mathcal{F})(V)$ (pues en realidad no son más que límites inductivos) y verifica una cierta condición de conmutatividad. Conforme a la notación que estamos usando, esa propiedad de conmutatividad la podemos expresar como $(f_*f_0^*\psi)(V) \circ a^0_{\mathcal{G}}(W) = \rho'_W \circ \psi(V)$ para cualquier abierto W adecuado. En particular, se verifica para $W = V$, lo que nos da la conmutatividad del diagrama. Nos falta probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V) \arrow[r, "\psi(V)"] \arrow[d, "\psi(V)"'] & (f_*\mathcal{F})(V) \arrow[d, "\rho'_V"] \\
(f_*\mathcal{F})(V) & (f_*f_0^*f_*\mathcal{F})(V) \arrow[l, "(f_*b^0_{\mathcal{F}})(V)"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es claro que esto equivale a probar que $(f_*b^0_{\mathcal{F}})(V) \circ \rho'_V = id$. Atendiendo a la definición de $b^0_{\mathcal{F}}$, vemos que es la única verificando, precisamente, $(f_*b^0_{\mathcal{F}})(V) \circ \rho'_V = id$. Así, el diagrama es conmutativo. Como cada una de las celdas que hemos estudiado conmuta, tendremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & f_*\mathcal{F} \\ {\scriptstyle a_{\mathcal{G}}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f_*b_{\mathcal{F}}} \\ f_*f^*\mathcal{G} & \xrightarrow{f_*f^*\psi} & f_*f^*f_*\mathcal{F} \end{array}$$

es conmutativo. Y, como dijimos, esto equivale a probar que

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & Hom(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) & \to & Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ & \varphi & \mapsto & (f_*\varphi)\circ a_{\mathcal{G}} \end{array}$$

es sobreyectiva. Como antes vimos que es también inyectiva, es por tanto un isomorfismo, y, al ser $Hom(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq Hom(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$, tenemos que f^* es el funtor adjunto a la izquierda de f_*, como queríamos probar.

□

Los funtores f_* y f^* verifican ciertas propiedades de exactitud:

Lema 3.7.3. *El funtor f^* es exacto. El funtor f_* es exacto a izquierda.*

Prueba. Sabemos, por 3.7.1, que $G_{f(x)} \simeq (f^*\mathcal{G})_x \quad \forall x \in X$. Aplicando el teorema 3.6.1 tenemos que f^* es exacto. Para ver que f_* es exacto a izquierda, basta saber que f^* es el adjunto a izquierda de f_*: por tanto, f_* es exacto a izquierda por 2.5.4.

□

3.8. Los haces ⊗ y *Hom*

Finalizamos esta breve introducción a la teoría de haces con dos haces relevantes. Sin adentrarnos en profundidad, daremos sus descripciones.

Definición 3.8.1. *Sean $\mathcal{F},\mathcal{G}$ dos prehaces sobre un espacio topológico X. El prehaz $Hom(\mathcal{F},\mathcal{G})$ será el prehaz que viene dado por la asignación, para cada abierto de X, $U \mapsto Hom(\mathcal{F}(U),\mathcal{G}(U))$.*

Comprobar que en efecto $U \mapsto Hom(\mathcal{F}(U),\mathcal{G}(U))$ es un prehaz es rutinario. Resulta interesante destacar que, si tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ son haces, entonces $Hom(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es también un haz.

Definición 3.8.2. *Sea R un anillo conmutativo. Un R-*haz sobre el espacio topológico *X es un haz $\mathcal{F}$ de forma que para cada abierto U de X dotamos a $\mathcal{F}(U)$ de estructura de R-módulo, y de forma que las restricciones sean R-lineales. Un morfismo de R-haces $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ es un morfismo de haces de forma que cada $f(U)$ es R-lineal.*

Claramente todos los R-haces forman una categoría, notada **Sh(X,R)**. Ajustando con cuidado los argumentos utilizados, todas las pruebas de las secciones previas (2,1 a 2,7) son válidas en el caso de **Sh(X,R)**, con lo que tenemos que **Sh(X,R)** es una categoría abeliana. Damos ahora la definición antes anunciadas:

Definición 3.8.3. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos R-haces sobre un espacio topológico X. El producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_R \mathcal{G}$ es el haz asociado al prehaz dado por la asignación $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_R \mathcal{G}(U)$.*

Bastaría comprobar que $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_R \mathcal{G}(U)$ define un prehaz para que tenga sentido considerar el hacificado, pero dicha comprobación es trivial.

Capítulo 4

Aplicaciones de la teoría de haces

Como todas las construcciones matemáticas, los haces no surgen de un capricho o de una idea arbitraria. Son, en primer lugar y como llevamos indicando todo el texto, una generalización de la idea de pegado. En segundo lugar, forman una categoría íntimamente relacionada tanto con espacios topológicos como con los grupos, lo cual, convenientemente trabajado, puede dar lugar a herramientas potentes de topología algebraica. Por último, y profundamente relacionado con la idea de pegado, los haces permiten expresar en un lenguaje cómodo y sintético muchas ideas matemáticas presentes en el análisis en general y en las ecuaciones diferenciales en particular.

Para mostrar esta última faceta de los haces, probaremos un teorema del campo del análisis matemático. Antes de enunciarlo, fijemos algunas cuestiones notacionales y conceptuales:

Nota. En adelante, consideramos a $\mathbb{C}$ dotado de la topología euclídea. Notemos por $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, y dotémoslo asimismo de la topología relativa. Dado un abierto U de $\mathbb{C}$ notamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ al conjunto de las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ con f holomorfa.

Definición 4.0.1. *Un abierto U de $\mathbb{C}$ se dice* estable *para una transformación $\alpha : U \to \mathbb{C}$ cuando $\alpha(z) \in U$ $\forall z \in U$.*

Bajo las condiciones topológicas anteriores y con la definición previa, podemos enunciar el teorema objetivo que preconizábamos ya en la introducción:

Teorema 4.0.2. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ estable para el grupo generado por la transformación $z + 1$. Entonces, para cualquier $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ existe un $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ verificando*

$$G(z + 1) - G(z) = g(z)$$

Es decir, la ecuación en diferencias finitas arriba presentada *siempre* tiene solución. Este es un problema clásico de ecuaciones en diferencias finitas que, como anunciábamos en la introducción, no posee una solución sencilla en términos analíticos. Aún más, no siempre se puede obtener la máxima generalidad y se encuentran soluciones sometiendo el problema a restricciones adicionales (principalmente, relacionadas con el crecimiento de las funciones implicadas). Mediante la teoría de haces (y, en particular, la cohomología de haces) podemos demostrar la versión arriba indicada del teorema. Para ello, precisaremos de diversos lemas técnicos, y tendremos que reformular el problema analítico anterior en el lenguaje de los haces.

4.1. Lemas previos

Lema 4.1.1. *Dado U abierto de $\mathbb{C}$, la asignación $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ antes descrita para cada abierto da lugar a un haz, notado $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, sobre $\mathbb{C}$. Se tiene el mismo resultado para $\mathbb{C}^*$ y sus abiertos. En puridad, se puede extender esta definición a cualquier abierto V de $\mathbb{C}$, notándose el haz correspondiente $\mathcal{O}_V$.*

Prueba. Lo probamos para $\mathbb{C}$, siendo idéntico el caso general.Comprobar el carácter de prehaz de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ es trivial: las funciones holomorfas en un abierto forman grupo, y la restricción habitual de funciones cumple el papel del morfismo restricción. Estudiemos la propiedad de haz.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de abiertos de $\mathbb{C}$, y sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de secciones con $f_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U_\alpha)$ para cada α, y verificando la condición de pegamiento. Sea $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Tomemos f una función definida a trozos como $f(z) = f_\alpha(z)$ cuando $z \in U_\alpha$. Por la condición de pegamiento, esta f está bien definida y, claramente, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$. Además, es claro que esta función es única por la propia definición. Por tanto, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ es un haz.

□

Como parte de la formalización del problema, consideremos también el siguiente concepto topológico:

Definición 4.1.2. *Sean $X, \tilde{X}$ dos espacios topológicos. Una aplicación $p : \tilde{X} \to X$ se dice un* recubrimiento *de X (y $\tilde{X}$ un* espacio recubridor *de X) cuando verifica las siguientes condiciones:*

1. *p es sobreyectiva*

2. *Para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x de forma que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, donde $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de abiertos disjuntos de $\tilde{X}$ con $p_{|U_\alpha} : U_\alpha \to U$ un homeomorfismo para cada α.*

Cuando el contexto esté claro, se hará referencia simplemente a recubrimiento y espacio recubridor. También se hará referencia al espacio topológico $\tilde{X}$ como recubrimiento (a través de la aplicación p, dándola por supuesta). Esta definición abstracta, intuitivamente, nos dice que cada abierto U de X viene de una colección de copias (en el sentido topológico) de U contenidas en $\tilde{X}$. De entre todos los posibles recubrimientos, tienen especial interés los que recubren a X mediante un espacio topológico simplemente conexo:

Definición 4.1.3. *Sean $X, \tilde{X}$ espacios topológicos, y sea $p : \tilde{X} \to X$ un recubrimiento. Se dirá que p es un* recubrimiento universal *cuando $\tilde{X}$ sea simplemente conexo.*

En nuestro desarrollo usaremos el siguiente recubrimiento universal:

Lema 4.1.4. *Sea la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & e^{2\pi i z} \end{array}$$

Entonces, p es un recubrimiento universal de $\mathbb{C}^*$. Además, p verifica que $p(z+n) = p(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Probamos en primer lugar el segundo aserto. Es bien conocido que

$$e^{2\pi i} = 1$$

Por tanto,

$$p(z+n) = e^{2\pi i(z+n)} = e^{2\pi i z} \cdot e^{2\pi i n} = p(z) \cdot (e^{2\pi i})^n = p(z).$$

Por otro lado, veamos que p es un recubrimiento universal. Ya que es un hecho conocido que $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, basta probar que p es recubrimiento. La sobreyectividad es trivial (salvo en el 0, hay logaritmos definidos en todo $\mathbb{C}$) por lo que sólo resta probar la otra condición. Para probarla haremos uso del siguiente hecho de topología general , fácil de probar:

Lema. Sea X un espacio topológico e Y un abierto de X. Entonces, un abierto de Y (con la topología restricción) es también un abierto de X.

En particular, en nuestro caso, vamos a tener que los abiertos de $\mathbb{C}^*$ son también abiertos de $\mathbb{C}$. Sea pues $x \in \mathbb{C}^*$. Consideremos el abierto dado por $U = B(x, \epsilon)$, es decir, la bola abierta de centro x y radio ϵ fijado, donde $\epsilon > 0$ y arbitrariamente pequeño. Estudiemos $p^{-1}(U)$. Tendremos que

$$p^{-1}(U) = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \in U\}.$$

Fijado $y \in U$, tenemos que las antiimágenes de y serán de la forma

$$z = \frac{\arg(y)}{2\pi} + i(-\frac{\log|y|}{2\pi})$$

Es decir, la imagen inversa de y serán puntos situados en una línea horizontal y distantes entre sí una cantidad entera. Veamos que se verifica que $p^{-1}(U) = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ para una cierta familia de abiertos.

Sean $y_1, y_2 \in U$. Como U es un disco abierto de radio arbitrariamente pequeño ϵ, tendremos que $|y_2 - y_1| < 2\epsilon$. Por el estudio que hemos realizado antes de la antiimagen de un punto tenemos habrá puntos de la antiimagen de y_2 alejados (con distancia mayor o igual que 1, de hecho) de los puntos de la imagen inversa de y_1. Pero ya que la distancia entre y_1 e y_2 es pequeña, tendremos que $\log|y_1| \approx \log|y_2|$ y que $\mathrm{Arg}(y_1) \approx \mathrm{Arg}(y_2)$, donde Arg denota el argumento principal. En puridad, tendremos que

$$|\log|y_1| - \log|y_2|| < \delta$$

y también que

$$|\mathrm{Arg}(y_1) - \mathrm{Arg}(y_2)| < \delta$$

para δ pequeño y dependiente de ϵ. Por tanto, podemos "emparejar" los puntos de ambas antiimágenes. Consideremos, para algún k_0 fijado, los siguientes puntos pertenecientes a las antiimágenes de y_1 e y_2 respectivamente:

$$z_1 = \frac{\mathrm{Arg}(y_1) + 2k_0\pi}{2\pi} + i(-\frac{\log|y_1|}{2\pi})$$
$$z_2 = \frac{\mathrm{Arg}(y_2) + 2k_0\pi}{2\pi} + i(-\frac{\log|y_2|}{2\pi})$$

Si estudiamos el módulo de la diferencia tendremos que

$$|z_2 - z_1| \leq \frac{\delta}{\pi}$$

Si consideramos $z_1 = x$, tenemos que

$$p_k^{-1}(U) \subset B(p_k^{-1}(x), \frac{\delta}{\pi})$$

donde

$$p_k^{-1}(U) = \{z \in p^{-1}(U) \mid \text{Fijamos cierto } k \text{ como en las antiimágenes anteriores}\}$$

y, abusando de notación,

$$p_k^{-1}(x) = \{z \in p^{-1}(x) \mid \text{Fijamos cierto } k \text{ como en las antiimágenes anteriores}\}$$

Nótese que este último conjunto está formado por un único punto. Esto implica que $p_k^{-1}(U) \cap p_l^{-1}(U) = \emptyset$ cuando $l \neq k$. Consideremos ahora la restricción

$$p_{|p_k^{-1}(U)} : p_k^{-1}(U) \to U$$

Esta aplicación es continua (por ser restricción de una continua) y se comprueba fácilmente que es biyectiva. Por tanto, tenemos que $p_k^{-1}(U)$ es homeomorfo a U para cada k. Por tanto, cada uno de ellos es abierto . Con ello, hemos probado que p es recubrimiento y, por ser $\mathbb{C}$ simplemente conexo, es recubrimiento universal, con lo que finaliza la prueba.

$\square$

Esta aplicación p resultará fundamental en nuestra prueba del teorema. Probamos un hecho interesante y relevante para el teorema sobre dicha función: no sólo $p(z + n) = p(z)$ para cualquier entero n, sino que estas son las únicas transformaciones T verificando $p \circ T = p$:

Lema 4.1.5. *Sea $p(z) = e^{2\pi i z}$ la definida antes. Sea*

$$G_p = \{T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid T \textit{ es homeomorfismo y } p \circ T = p\}$$

Entonces, tenemos que G es un grupo con la composición y se verifica que $G =< \tau >$, donde $\tau(z) = z + 1$.

Prueba. Veamos en primer lugar el carácter de grupo de G_p. Claramente la identidad es un homeomorfismo y verifica la igualdad, con lo que está en G_p y tenemos elemento neutro. Además, tenemos la propiedad asociativa heredada de la composición de funciones en general. Para ver que dado un elemento $T \in G_p$ su inverso (que existe por ser T homeomorfismo) también está en G_p basta ver lo siguiente:

$$p \circ T = p$$

Componiendo a ambos lados con T^{-1}, tendremos que

$$p \circ T \circ T^{-1} = p \circ T^{-1}$$

es decir, se da la igualdad

$$p \circ T^{-1} = p$$

con lo que $T^{-1} \in G_p$ y G_p es un grupo.

Para ver que $< \tau >= G_p$, basta probar la contención $G_p \subset< \tau >$, pues la otra es trivial. Sea T un elemento arbitrario de G_p. Tenemos que $p \circ T = p$, es decir, para cualquier número complejo z, se tiene que

$$e^{2\pi i T(z)} = e^{2\pi i z}$$

Tomando logaritmos, tendremos que

$$\log |e^{2\pi i T(z)}| + i\arg(e^{2\pi i T(z)}) = \log |e^{2\pi i z}| + i\arg(e^{2\pi i z})$$

donde $\arg(x)$ denota *un* argumento de x. Habrá argumentos para los cuales la igualdad sea falsa, pero existe al menos uno en que se verifica. Si expresamos $z = x + iy$ y $T(z)$ como $T(z) = \alpha + \beta i$ (con α y β dependiendo de z), tendremos las siguientes identidades:

$$\log |e^{2\pi i T(z)}| = -2\pi\beta$$

$$\log |e^{2\pi i z}| = -2\pi y$$

$$\arg(e^{2\pi i T(z)}) = 2\pi\alpha + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(e^{2\pi i z}) = 2\pi x + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

En base a esto, existirán constantes enteras k_1 y k_2 de forma que

$$-2\pi\beta + i(2\pi\alpha + 2k_1\pi) = -2\pi y + i(2\pi x + 2k_2\pi)$$

De aquí obtenemos que

$$\beta = y$$

y que

$$\alpha = x + \tilde{k}$$

con $\tilde{k} = k_2 - k_1$. Es decir, tendremos que $T(z) = z + \tilde{k}$ para un cierto entero $\tilde{k}$. Si notamos, como indicábamos antes, $\tau = z + 1$, tendremos por tanto que $T(z) = \tau^{\tilde{k}}$, es decir, $T \in <\tau>$ y por tanto $G = <\tau>$, como queríamos probar.

□

La igualdad que hemos probado antes, además del interés que tiene a nivel topológico[1], resulta relevante porque $\tau(z) = z + 1$ induce un isomorfismo de haces

$$T : p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

Este isomorfismo estará definido abierto a abierto, y funciona de la siguiente forma:

Lema 4.1.6. *El isomorfismo $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $\tau(z) = z+1$ induce un isomorfismo de haces $T : p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ definido para cada abierto U como*

$$\begin{array}{rccc} T(U): & p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) & \to & p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \\ & s & \mapsto & s \circ \tau \end{array}$$

Veamos, antes de probar esto, el siguiente hecho:

Lema 4.1.7. *Sean p y τ las aplicaciones anteriores. Entonces, dado un abierto U de $\mathbb{C}^*$ se verifica que $\tau^{-1}(p^{-1}(U)) = p^{-1}(U)$.*

Prueba (Del lema 4.1.7). Sea $x \in p^{-1}(U)$. Ya que $p \circ \tau = p$, tendremos que $p \circ \tau(x) \in U$. Por consiguiente, $x \in \tau^{-1}(p^{-1}(U))$. La inclusión contraria se demuestra de manera totalmente análoga.

□

[1]Se puede probar que, dado un recubrimiento universal $p : \tilde{X} \to X$, el grupo fundamental de X es isomorfo al grupo de automorfismos de $\tilde{X}$ que dejan invariante p. En nuestro caso particular, el desarrollo anterior prueba que $\pi_1(\mathcal{C}^*) \simeq <\tau> \simeq \mathbb{Z}$, como es bien sabido.

Prueba (Del lema 4.1.6). El morfismo

$$T : p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

está inducido por τ, abierto a abierto, como

$$\begin{array}{rccc} T(U): & p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) & \to & p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \\ & s & \mapsto & s \circ \tau \end{array}$$

El lema 4.1.7 nos indica que la aplicación está bien definida. Veamos que es un isomorfismo. El probar que es morfismo (i.e, $T(U)(0) = 0$ y $T(U)(f+g) = T(U)(f) + T(U)(g)$) es una simple comprobación trivial. Para ver que es inyectivo, supongamos f de forma que $T(U)(f) = 0$. Entonces, $f(\tau(x)) = f(x+1) = 0$ $\forall x \in p^{-1}(U)$. Por tanto, $f = 0$, con lo que es inyectiva. Por el primer teorema de isomorfía obtenemos por tanto que $p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \simeq \mathrm{Im}(T(U))$, con lo que tenemos la sobreyectividad y se completa la prueba.

□

Finalizamos la formalización del problema en el marco de la teoría de haces con el siguiente teorema, que resultará sumamente útil en la prueba del resultado objetivo.

Lema 4.1.8. *Se tiene un isomorfismo canónico*

$$p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

Prueba. Recordemos que tenemos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & e^{2\pi i z} \end{array}$$

Hemos probado que p es recubrimiento universal. De hecho, se da una situación aún más fuerte: p es un *biholomorfismo local*[2]. De aquí se infiere, ya que p^{-1} existe localmente, que p es abierta.

Comencemos definiendo una aplicación

$$p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

[2]Omitimos la prueba por escaparse del objetivo de este texto. Básicamente se reduce a un estudio exhaustivo de la función p, el cual resulta sencillo por el carácter elemental de p.

Recordemos que $p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$ es el prehaz definido por $(p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*})(U) = \varinjlim_{V \supset p(U)} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(V)$, y que $p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$ no es más que el haz asociado al prehaz $p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$. Ya que p es abierta, tendremos que $(p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{C}^*})(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(p(U))$. Definiremos esta aplicación de prehaces abierto a abierto como

$$\begin{array}{rccc} \alpha(U): & (p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*})(U) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \\ & h & \mapsto & h \circ p_{|U} \end{array}$$

Una vez definida esta aplicación α, por el teorema 3.4.2 tendremos que existe una única aplicación $\beta : p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, de acuerdo al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \arrow[d, "\exists!\beta"] \\ & \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Basta probar que dicha β es isomorfismo. Para ello, fijado $x \in \mathbb{C}$, consideremos el diagrama inducido por el funtor localización:

$$\begin{tikzcd} (p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*})_x \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\alpha_x"'] & (p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*})_x \arrow[d, "\beta_x"] \\ & (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_x \end{tikzcd}$$

La flecha que aparece señalada como un isomorfismo lo es por 3.4.2. Por tanto, para probar que β_x es isomorfismo basta probar que α_x es isomorfismo. Recordemos que se tiene

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$$

$$(p_0^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*})_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(p(U))$$

Ya que p es biholomorfismo local, para cada x tenemos un entorno arbitrariamente pequeño U_x de forma que $U_x \simeq p(U_x)$. Por tanto, las funciones holomorfas en U_x son las mismas que en $p(U_x)$. Por ser un entorno arbitrariamente pequeño, esto indica que α_x es un isomorfismo para cualquier x. Por tanto, β_x es un isomorfismo para cualquier x y por el teorema 3.3.3 tendremos que β es un isomorfismo, lo cual completa la prueba.

$\square$

4.2. Comentario sobre cohomología de haces

La teoría de haces muestra su utilidad completa una vez que, mediante el álgebra homológica, se desarrolla la *cohomología de haces*. Esta cohomología tiene múltiples aplicaciones y resulta fundamental en la concepción moderna de la geometría algebraica o el análisis algebraico, entre otras áreas.

Sin embargo, el estudio de la cohomología de haces escapa al objetivo de este trabajo. Su tratamiento formal exhaustivo requiere profundizar en la teoría de categorías y el álgebra homológica mucho más allá de lo que se pretende mostrar en esta modesta introducción a la teoría de haces. No obstante, presentamos algunos resultados relacionados con la cohomología de haces a fin de poder demostrar el teorema que nos hemos marcado como objetivo. Además, la necesidad de estos resultados da pie a una mayor profundización futura en el área.

En esencia, y sin concretar detalles, dado un haz (de grupos abelianos) sobre un espacio topológico X, $Sh(X)$, el objetivo de la cohomología es asociar grupos abelianos de cierta manera sistemática y con buenas propiedades (a nivel de álgebra homológica) al espacio topológico X, y utilizando el haz $Sh(X)$ en dicha asignación. Siguiendo este principio, el $i-$ésimo grupo de cohomología del espacio topológico X con coeficientes en $Sh(X)$ se denota $H^i(X, F)$, y está relacionado con la construcción conocida como *funtor derivado*. Volúmenes como [8] y [1], entre otros, tratan adecuadamente el tema.

Sabiendo esto, podemos enunciar (sin demostrar) el siguiente teorema. Enunciamos el caso particular de los haces, aunque se puede probar en situaciones más generales:

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio topológico, y sean $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces (de grupos abelianos) sobre X. Sea la sucesión exacta*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

Entonces, se induce una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{E}(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to H^1(X, \mathcal{E}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^2(X, \mathcal{E}) \to \cdots$$

En nuestro caso, ya que estamos trabajando en el espactio topológico $\mathbb{C}$, resulta relevante el siguiente hecho, del cual también omitimos la prueba. En este caso la demostración utiliza conceptos y resultados del análisis complejo:

Teorema 4.2.2. *Sea* $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ *el haz de las funciones holomorfas sobre* $\mathbb{C}$*. Entonces, para cualquier abierto* U *de* $\mathbb{C}$*, se tiene* $H^1(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = 0$*.*

Con estos resultados podemos, finalmente, probar el teorema.

4.3. Prueba del teorema

Recordemos el enunciado del teorema que queremos probar:

Teorema 4.3.1. *Sea* U *un abierto de* $\mathbb{C}$ *estable bajo la acción del grupo generado por la transformación* $z+1$*, de forma que* $U = p^{-1}(V)$ *para cierto* V *abierto de* $\mathbb{C}^*$*. Entonces, para cualquier* $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ *existe un* $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ *verificando*

$$G(z+1) - G(z) = g(z)$$

Antes de proceder con la prueba, precisaremos un último lema:

Lema 4.3.2. *A partir del isomorfismo* T *definido en 4.1.6 definimos el isomorfismo*

$$\Delta : p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

dado por $\Delta = T - 1$*, donde* 1 *denota la identidad. Entonces, se tiene que* $\ker(\Delta) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$*.*

Prueba (Del lema 4.3.2). Sabemos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \arrow[r, hook, "a_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, hook, "a_{\mathcal{G}}"'] & p_*p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \arrow[d, "T"] \\ & p_*p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \end{tikzcd}$$

donde tiene sentido establecer el diagrama con T el isomorfismo presentado en 4.1.6. A partir de este diagrama se tiene, ya que $T \circ a_{\mathcal{G}} = a_{\mathcal{G}}$, que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \subset \ker(\Delta)$. Veamos la inclusión contraria.

Sea $f \in (\ker(\Delta))(U)$. Entonces, se tiene que $\Delta(f) = 0$ (i.e, $T(U)(f) = f$). También se tiene que $f \in p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$, es decir, $f : p^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Pero localmente, para cada $x \in p^{-1}(U)$, existe un entorno de x, $U_x \subset p^{-1}(U)$, de forma que $U_x \simeq U$. Por tanto, tenemos que f está definida en U y es holomorfa. Así, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(U)$, lo cual completa la prueba.

$\square$

Prueba (Del teorema 4.3.1). Con la notación anterior, definamos la sucesión exacta

$$0 \to \ker(\Delta) \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\Delta} p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to 0$$

Combinando los teoremas 4.2.1 y 4.2.2 obtenemos la sucesión exacta inducida

$$0 \to \ker(\Delta)(V) \to (p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}})(V) \xrightarrow{\Delta(V)} (p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}})(V) \to 0$$

Pero por definición tenemos que $(p_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}})(V) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$. Además, por el lema 4.3.2, $(\ker(\Delta))(V) = \mathcal{O}_{\mathcal{C}^*}(V)$. Así, tenemos la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*)}(V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \xrightarrow{\Delta(V)} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \to 0$$

Por ser exacta la sucesión, tenemos que $\Delta(V)$ es sobreyectiva. Es decir, para cada $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$, existe $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ de forma que $\Delta(G) = g$, esto es, $G(z+1) - G(z) = g(z)$ para cada $z \in U$, con lo cual completamos la demostración.

□

4.4. Breve comentario sobre otras aplicaciones

Lo anterior no es más que un ejemplo de la potencia de la teoría de haces. Un campo donde se ha aplicado la teoría de haces fructiferamente es la geometría algebraica. A grandes rasgos, se podría incluso afirmar que la idea de haz, junto con la de esquema, sustenta a la geometría algebraica moderna. Se puede observar esta relación en algunos textos como [15], [13] o [14].

Otro campo en el que se aprecia la utilidad y potencia de la teoría de haces es el de las ecuaciones diferenciales. De hecho el desarrollo inicial de la teoría de haces, llevado a cabo durante su internamiento en un campo de prisioneros por el matemático J. Leray en la década de 1940 ([3]), fue motivado, entre otras razones, por el estudio de las ecuaciones diferenciales. Este matemático, antes de esa fecha, se dedicó al estudio de diversos problemas de ecuaciones diferenciales y mecánica de fluidos, estudiando en particular las ecuaciones de Navier-Stokes. Un ejemplo de la teoría de haces aplicada al estudio de las ecuaciones diferenciales lo podemos encontrar en [7].

Bibliografía

Bibliografía principal

[1] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1986).

[2] A. Grothendieck y J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas. Publications mathématiques de l'I.H.É.S*, 4 (1960), 23-34.

[3] C. Houzel, *Les débuts de la théorie des faisceaux.* Prefacio del libro *Sheaves on Manifolds* de M.Kashiwara y P. Schapira. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1990).

[4] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[5] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer, Nueva York (1998).

[6] Z. Mebkhout, *Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrigue complexe et le théorème d'existence de Riemann. Publications mathématiques de l'I.H.É.S*, 69 (1989), 69-70.

[7] L. Narváez Macarro, *D-modules in dimension 1. Algebraic approach to differential equations* (Bibliotheca Alexandrina, Alexandria, Egypt, 12 – 24 November 2007). Editado por Lê Dung Tráng (ICTP, Trieste, Italy). World Scientific (2010).

[8] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra.* Springer-Verlag, Nueva York (2009).

[9] H. Simmons, *An Introduction to Category Theory.* Cambridge University Press, Cambridge (2011).

[10] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry (Online lecture notes)* (2015).

Bibliografía complementaria

[11] S. Eilenberg y N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, Princeton (1952).

[12] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math J.*, 2 (1957), 119-221.

[13] A. Grothendieck y J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. Publications mathématiques de l'I.H.É.S*(1960-1967).

[14] A. Grothendieck *et al.*, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie.* Springer-Verlag, Berlín/Nueva York (1971 a 1973).

[15] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, Nueva York (1997).

[16] S. Lang, *Algebra.* Springer-Verlag, Nueva York (2002).

[17] J.S. Milne, *Lectures on Étale Cohomology. (Online lecture notes)*(2013).

[18] P. Schapira, *Abelian Sheaves. (Online lecture notes, Universidad Paris VI)*, París (2014).

[19] —, *Algebra and Topology. (Online lecture notes, Universidad Paris VI)*, París (2011).

[20] —, *Categories and Homological Algebra. (Online lecture notes, Universidad Paris VI)*, París (2015).

[21] J.P. Serre, *Faisceaux Algebriques Coherents. The Annals of Mathematics*, 61 (1955), 197-278.

[22] B.R. Tennison, *Sheaf Theory.* Cambridge University Press, Cambridge (1975).

[23] C.A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, Cambridge (1994).