UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

PROBLEMAS DE EXTREMOS REGULARES Y NO REGULARES, VIA FORMALISMO DE DUBOVITSKII-MILYUTIN. APLICACIÓN A PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

Tesis Doctoral

Violeta Vivanco Orellana

Directores:

Rafaela Osuna Gómez
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Marko Rojas Medar
Dpto. de Ciencias Básicas
Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Sevilla, Febrero de 2013

Agradecimientos

Si bien es cierto hay un número considerable de personas a las que debo agradecer, directa o indirectamente, por ayudarme a estar en esta etapa de finalización. Dentro de ellas se encuentra, con certeza, Rafaela Osuna, Directora de Tesis, a quién le agradezco su paciencia por las numerosas lecturas y correcciones de este trabajo, sus sugerencias y contraejemplos, como también todo este tiempo en el que me ha brindado su apoyo para la elaboración de esta tesis.

Agradezco a Marko Rojas Médar, Codirector de Tesis, quién amerita todo mi consideración por su lucidez, orientación y motivación a la investigación, que ha sido esencial para llegar a obtener los objetivos planteados.

A ellos también les agradezco la oportunidad de tener un primer acercamiento al área de la “Optimización”, de compartir sus conocimientos y de generar el ambiente propicio para el buen desarollo de este trabajo.

Agradezco a mis colegas y a todas aquellas personas que de una u otra forma han sido partícipe de este logro, como también a las autoridades de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, en particular a Hubert Mennickent M., decano de la facultad de Ingeniería y al programa MECESUP, del gobierno de Chile, por otorgarme la beca de doctorado para “académicos en el extranjero”, que han permitido mi perfeccionamiento académico.

Agradezco a mi familia que siempre está conmigo y ante todo, agradezco a Dios, que siempre nos otorga un nuevo día para mejorar.

A Bernardo y a mis hijos:
Leonardo, Dario, Natalia,
Valeria y German.

La Teoría de Optimización diferenciable clásica se basa principalmente en la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes que permitan caracterizar las soluciones óptimas. Las condiciones necesarias se fundamentan en la hipótesis de que el conjunto de soluciones posibles para el problema a resolver, verifica ciertas condiciones, que aseguran la caracterización del cono tangente o del cono factible a través de las derivadas de primer orden de las funciones que definen las restricciones, son los denominados problemas regulares. Sin embargo, en determinados problemas, esta hipótesis no es posible asegurarla, dando lugar a los problemas de optimización no regulares o degenerados. Consecuentemente las condiciones de optimalidad de primer orden del tipo Karush-Kuhn-Tucker, no son aplicables. Será necesario, por tanto, establecer condiciones de optimalidad basadas en aproximaciones al conjunto factible que no sean de primer orden, es decir, utilizando derivadas de orden superior y que, naturalmente, coincidan con las condiciones clásicas de primer orden, cuando el problema sea regular. Por otro lado las condiciones necesarias no garantizan que las soluciones encontradas sean soluciones óptimas, es decir, en general, no son condiciones suficientes para garantizar la optimalidad, sin hipótesis adicionales.

Este trabajo consiste esencialmente en establecer condiciones de optimalidad, optimalidad de Pareto en el caso vectorial, de segundo orden y no degeneradas, para problemas generales de optimización matemática diferenciables, escalares y vectoriales, con restricciones múltiples de igualdad y desigualdad, definidos en espacios de Banach, cuando el problema es no regular. A partir de ellas y haciendo uso de teoremas de representación, conseguimos establecer condiciones de optimalidad de segundo orden no degeneradas, para problemas de control óptimo escalar, con restricciones mixtas. Generalizando los resultados existentes en la literatura y quedando éstos como casos particulares.

Las condiciones necesarias son obtenidas mediante el formalismo de Dubovitskii- Milyutin, el cual, debido al enfoque universal y unificador, permite determinar, en el lenguaje del análisis funcional, condiciones necesarias de optimalidad para una amplia clase y de variada índole de problemas de extremos.

Las condiciones suficientes son establecidas, introduciendo nociones de invexidad generalizada adecuadas a la determinación del problema.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el transcurso del tiempo el hombre ha estado en una constante búsqueda de leyes y principios que obedezcan ciertas formas o fenómenos naturales, con el propósito de explicar o entender el comportamiento de la naturaleza. En este intento fué el francés Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) que enunció, en 1744, el principio de la mínima cantidad de acción: "*En todo cambio que se produzca en la Naturaleza, la cantidad de acción necesaria para tal cambio ha de ser la mínima posible".* De acuerdo a Maupertuis, la Naturaleza obedece un principio de minimización, lo que es interpretado en el contexto teológico, como el hecho de que el creador, hace uso de la mínima energía posible en sus actuaciones.

Este es un principio físico, que posteriormente la matemática fundamenta rigurosamente, desarrollando las técnicas necesarias para dar respuestas a una amplia clase de problemas de extremos, que surgen hasta el día de hoy, y que se extiende a las diversas áreas de las Ciencias y la Ingeniería.

Cuando la finalidad de un problema es optimizar un funcional, que depende de variables, que a su vez son funciones, las cuales varian con el tiempo, entonces estamos en presencia de un problema de optimización dinámica. Tales problemas se caracterizan por el hecho de que la función a minimizar (o maximizar) es un operador, es decir, es una función definida sobre algún espacio de funciones, de dimensión infinita.

Esta clase de problemas incluyen los problemas variacionales, que se caracterizan por el hecho que el funcional a optimizar es dado por un operador integral, cuyo origen se atribuye al planteamiento del problema de la braquistocrona, propuesto por J. Bernoulli, en (1696). Este planteamiento es, básicamente, encontrar entre las posibles trayectorias recorridas por un pequeño objeto que se mueve, entre dos puntos situados en un plano vertical, bajo la influencia de la gravedad, a aquella que emplea el menor tiempo posible, es decir la curva de descenso más rápida. La teoría formal de tales problemas recibe el nombre de cálculo variacional.

También son problemas variacionales, el Principio de Fermat (1601-1665) de la óptica, que establece que independientemente del tipo de reflexión o refracción a que se encuentre sujeto un rayo de luz, éste emplea el menor tiempo posible, para desplazarse de un punto a otro, y el Principio de la mínima acción de Hamilton, donde una cantidad, llamada acción, alcanza siempre un valor extremo. Esta acción se expresa en términos de la función Lagrangeana definida, en la mecánica clásica, como la energía cinética menos la energía potencial. Ambos Principios están sujeto a que un cierto funcional debe tomar un valor mínimo.

El resultado principal del cálculo variacional, que permite determinar las curvas extremales, son las ecuaciones de Euler y Lagrange, introducidas por Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813). Estas ecuaciones establecen condiciones necesarias de optimalidad, es decir si una curva o trayectoria es un extremo, mínimo o máximo, de un operador, que determina un problema variacional, entonces necesariamente debe satisfacer las ecuaciones de Euler y Lagrange.

Anecdóticamente los esquimales resolvieron un problema de cálculo variacional clásico, algunos siglos antes que naciera Bernoulli, para la construcción de iglús en forma óptima: menor superficie para conservar el calor, y a la vez es lo mayor posible, esto es menor área superficial, mayor volumen que encierra.

Otra clase importante de problemas de optimización dinámica, son los problemas de control óptimo, cuya teoría constituye una generalización natural del cálculo de variaciones, permite dar soluciones a diversos problemas de la medicina, ver [90], de la física, ver [37], y en particular a problemas de la economía, modelos neoclásicos de crecimiento económico, modelo de ahorro óptimo ver [31], [39] y [50], entre otros.

Uno de lo objetivos de este trabajo es estudiar problemas de control óptimo, es por ello que haremos una breve introducción de esta clase de problemas, en lo que se refiere a su definición, formulación y resultados principales.

Un problema de control óptimo consiste básicamente en optimizar un funcional, sujeto a un sistema que evoluciona en el tiempo. El funcional a minimizar (o maximizar) depende de una variable, que describe el estado del sistema, en cada momento, y de una variable de control, que interviene en el comportamiento del sistema. Estas variables se relacionan por el sistema dinámico, el cual es determinado por ecuaciones diferenciales ordinarias, que describiremos en la formulación dada posteriormente.

Pensemos en un sistema dinámico que evoluciona en el tiempo (como lo son el cuerpo humano y el sistema económico), con un horizonte temporal predefinido $[t_0, T]$, donde es conocida su situación inicial, digamos x_0 y que la evolución del sistema puede ser influenciada, en parte, por las decisiones de un agente, llamado planificador. El estado del sistema es descrito, en cada momento, por una variable $x(t)$, denominada variable de estado, y las decisiones consideradas por el planificador son representada por un variable $u(t)$, denominada variable de control.

El control $u(t)$ ejerce una influencia sobre el comportamiento del sistema dinámico, descrito por la variable de estado $x(t)$, en cualquier instante t en $[t_0, T]$. Por lo tanto la evolución del sistema dependerá de las decisiones tomadas por el planificador, representada por $u(t)$.

La variable de estado $x(t)$ y la variable de control $u(t)$, se relacionan por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, denominado **ecuación de estado**,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \varphi(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ y $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$.

La variable de control $u(\cdot)$ usualmente pertenece a una familia de funciones U, con valores en un conjunto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$, que representa las restricciones físicas del control $u(t)$, en un tiempo t. La familia de funciones U, y la función φ deben satisfacer las hipótesis suficientes, para garantizar la existencia y unicidad de la solución de la **ecuación de estado**.

Una vez elegido un control u en U, la **ecuación de estado** determina una trayectoria o estado $x(t)$, con condición inicial x_0 en el momento t_0. La solución de la **ecuación de estado**, dependerá de las diferentes elecciones del valor de la variable de control, esto es, elecciones diferentes del valor de control implicará trayectorias diferentes del sistema dinámico.

Por ejemplo, una empresa desea maximizar sus ganancias por la venta de un producto dado, mediante un control conveniente de los gastos de propaganda. El estado del sistema, $x(t)$, podría representar las tasas de venta de un producto y la variable de control, $u(t)$, la tasa de gastos en que la empresa incurre, para promocionar y publicitar el referido producto, entonces, bajos estos términos, este es un problema de control óptimo. En tal caso, se quiere minimizar o maximizar un funcional, que depende del estado del sistema y del control, llamado funcional objetivo o llamado, por algunos autores, funcional de costo.

Una de las variantes más simple de un problema de control óptimo es la siguiente: dado un sistema dinámico que evoluciona en el tiempo, de acuerdo a la **ecuación de estado**, se debe determinar las variables, de estado $x(t)$ y de control $u(t)$ factibles, esto es, funciones $x(t)$ y $u(t)$ que satisfacen la **ecuación de estado** y que minimicen (o maximicen) la función integral

$$\Phi(x, u) = \int_{t_0}^{T} f(x(t), u(t), t)dt + S(x(T)), \tag{1.1}$$

donde además la variable de control $u(t)$ satisface restricciones del tipo

$$u(t) \in \mathbb{U}, \text{ para casi todo } \ t \in [t_0, T],$$

con $\mathbb{U}$ un subconjuto de $\mathbb{R}^m$, el tiempo final T es dado y donde se supone el estado, en el tiempo final, libre, esto es, $x(T)$ es variable y donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, T] \to \mathbb{R}$.

El funcional objetivo Φ mide cuantitativamente el comportamiento del sistema. La integral de la función f, dada en (1.1), depende de los valores de la variable de estado $x(t)$ y la variable de control $u(t)$ a lo largo del horizonte temporal, esto es a través del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, y por tanto, representa el valor del comportamiento del sistema a través del tiempo, mientras que la función $S(x(T))$ representa la valorización del estado en que queda el sistema al final del horizonte temporal.

Hay algunas variantes de problemas de control óptimo que difieren del planteamiento anterior, en lo que se refiere a las formas que puede tomar el funcional objetivo, a las condiciones iniciales y finales de la variable de estado y a las restricciones impuestas sobre el control y/o a la variable de estado, entre otras. En algunos problemas, puede resultar que el valor final de $x(T)$ sea fijo o que sea acotado inferior y/o superiormente, o bien que el horizonte temporal no sea acotado por un valor de T dado, el período de tiempo es por lo tanto infinito.

En el problema anterior no son consideradas restricciones en la variables de estado $x(t)$, no obstante en algunos problemas es necesario imponer restricciones, de igualdad y/o desigualdad, a la variable estado $x(t)$.

Las diferentes formas que puede tomar el funcional objetivo (1.1), dependiendo de las funciones $f(x, u, t)$ y $S(x(T))$, son denominadas: **Bolza**, si $f(x, u, t)$ y $S(x(T))$ son no nulos, **Mayer**, si $f(x, u, t)$ es nulo y $S(x(T))$ es no nulo y **Lagrange**, si $f(x, u, t)$ es no nulo y $S(x(T))$ es nulo. No es difícil mostrar que los problemas de control óptimo con funcional objetivo en la forma Bolza, Mayer y Lagrange son equivalentes, en el sentido de su formulación (ver [31]). Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, solo consideraremos, en este trabajo, problemas de control óptimo con funcional objetivo en la forma Lagrange.

Un problema de Lagrange, con restricciones, se obtiene de un problema de control óptimo, considerando el funcional objetivo de la forma de Lagrange y donde no hay restricciones para la variable de control, en este caso se considera $M = \mathbb{R}^m$, el problema es

$$\min \int_{t_0}^{T} f(x(t), u(t), t)dt$$
$$x'(t) = \varphi(x, u, t), \ x(t_0) = \alpha, \quad x(T) = \beta.$$

Análogamente el problema clásico de cálculo variacional, se obtiene del problema de control óptimo, considerando el funcional objetivo de la forma de Lagrange, con $n = m = 1$, $\varphi(x, u, t) =$

u y $M = \mathbb{R}$, esto es

$$\min \int_{t_0}^{T} f(x(t), u(t), t)dt$$
$$x'(t) = u(t),\ x(t_0) = \alpha, \quad x(T) = \beta.$$

Las condiciones necesarias de optimalidad, para el problema de Lagrange y cálculo variacional son proporcionadas por la ecuación de Euler y por los multiplicadores de Lagrange en caso de restricciones (ver [31]).

Los resultados de la teoría de cálculo variacional aparecen como casos particulares de los resultados de la teoría de control óptimo, que requiere condiciones, sobre los espacios de definición de las variables de estado y de control, mucho más flexibles que la teoría de cálculo variacional.

En efecto en la teoría de cálculo variacional, se requiere que las variables de estado y de control sean de clase $C^2[t_0, T)]$, esto es, funciones con derivadas primera y segunda continuas, definidas en $[t_0, T]$, mientras que en la teoría de control óptimo la variable de estado $x(t)$ necesita ser continua, $x'(t)$ y $u(t)$ sólo necesitan ser continuas por partes, es decir deben se continuas en todos los puntos de $[t_0, T]$, excepto, quizás, en un número finito de ellos.

La precedente formulación conlleva a estudiar un problema de optimización, sujeto a sistemas que evolucionan en el tiempo, que son susceptibles de ser influenciados por agentes externos. Cuando es posible obtener una solución del problema, el control óptimo indicará el procedimiento a seguir, para inducir el sistema de un estado inicial a un estado final de manera óptima.

La finalidad de la teoría de control óptimo es el estudio de condiciones necesarias y suficientes, para garantizar la existencia y unicidad de solución de un problema de control óptimo. Así como también del desarrollo de metodologías para su determinación y cálculo, desde un punto de vista tanto teórico como de las aplicaciones.

Los resultados principales de la teoría de control óptimo son el llamado Principio del Máximo de Pontryagin (1962), y el Principio del Máximo Local (ecuaciones del Euler-Lagrange). El Principio del Máximo de Pontryagin proporciona condiciones necesarias de optimalidad, para problemas de control óptimo, cuya formulación considera al conjunto de las variables de control $\mathbb{U}$, arbitrario, en cambio, el Principio del Máximo Local es más restrictivo, considera al conjunto $\mathbb{U}$ convexo con interior no vacío.

El Principio del Máximo Local establece lo siguiente:

Si (x_0, u_0) es solución del problema de control óptimo de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Minimizar}\, \Phi(x,u) = \displaystyle\int_{t_0}^{T} f(x(t),u(t),t)dt \\ \text{sujeto a :} \\ x'(t) = \varphi(x(t),u(t),t), \quad x(t_0) = \alpha, \ x(T) = \beta \\ u(t) \in \mathbb{U} \ \text{ para casi todo } \ t \in [t_0, T], \end{array}\right\} (P1) \tag{1.2}$$

donde las funciones

$$f: \ \mathbb{R}^n \times \ \mathbb{R}^m \times [t_0, T] \to \ \mathbb{R}, \quad \varphi: \ \mathbb{R}^n \times \ \mathbb{R}^m \times [t_0, T] \to \ \mathbb{R}^n$$

son consideradas continuamente diferenciables con respecto a (x, u) y medibles en t y donde $\mathbb{U}$ es un conjunto cerrado convexo, con interior no vacío, de $\mathbb{R}^m$.

Entonces existe un número $\lambda_0 \geq 0$, y una función $\psi : [t_0, T] \to \ \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, no nulas simultáneamente, tales que

$$\lambda_0 f_x(x_0, u_0, t) - \varphi_x^*(x_0, u_0, t)\psi(t) - \psi'(t) \quad = \quad 0 \tag{1.3}$$

y además para todo $u(t)$ en $\mathbb{U}$

$$\langle \lambda_0 f_u(x_0, u_0, t) - \varphi_u^*(x_0, u_0, t)\psi(t), \ u - u_0 \rangle \quad \geq \quad 0, \quad \text{c.t.p. en } \ [\mathrm{t_0}, \mathrm{T}], \tag{1.4}$$

donde $\varphi_x^*(x_0, u_0, t)$ y $\varphi_u^*(x_0, u_0, t)$, denotan el operador adjunto de $\varphi_x(x_0, u_0, t)$ y $\varphi_u(x_0, u_0, t)$ respectivamente.

El Principio del Máximo Local, y sus variantes, proporcionan condiciones necesarias de optimalidad, para distintas formulaciones de problemas de control óptimo (ver [43], [39], [31]), pero siempre bajo el supuesto de que la variable de control u es tal que $u(t)$ pertenece a un conjunto $\mathbb{U}$, convexo con interior no vacío, de $\mathbb{R}^m$. No obstante, en muchas aplicaciones, es natural considerar proble-mas, donde la variable de control $u(t)$ pertenece a un conjunto menos restrictivo, como lo son los problemas donde el control óptimo toma sólo dos valores, $u_0(t) = a$ o $u_0(t) = b$, en este caso $u_0(t)$ es denominado control bang-bang, (ver [31] y [39]). Este tipo de fenómeno sucede cuando el funcional objetivo y la ecuación de estado es lineal en la variable de control u.

La derivación de condiciones de opimalidad para problemas de control óptimo, bajo el supuesto de que la variable de control $u(t)$ pertenezca a un conjunto arbitrario $\mathbb{U}$, de $\mathbb{R}^m$, son establecidas por el Principio del Máximo de Pontryagin, y sus versiones.

El Principio del Máximo de Pontryagin establece lo siguiente:

Si (x_0, u_0) es solución del del problema de control óptimo (P1), donde $\mathbb{U}$ es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^m$, f, φ son consideradas continuamente diferenciables, únicamente , con respecto a la variable x y medibles en t, entonces existen, $\lambda_0 \geq 0$, y una función $\psi : [t_0, T] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, no nulas simultáneamente, tales que

$$\psi_i'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1.5}$$

$$H(x_0, u_0, \psi, t) = C + \int_t^T (\lambda_0 f_s(x_0, u_0, s) - \langle \psi(t), \varphi_s(x_0, u_0, s)\rangle)ds \tag{1.6}$$

con C constante, satisfaciendo la condición del Máximo,

$$H(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t) \geq H(x_0(t), u(t), \psi(t), t), \quad \forall u \in M, \quad \text{c.t.p. en } [\mathrm{t_0, T}]. \tag{1.7}$$

donde H es la función Hamiltoniana asociada al problema, y es definida

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = -\lambda_0 f(x(t), u(t), t) + \langle \psi(t), \varphi(x(t), u(t), t)\rangle. \tag{1.8}$$

Ambos Principios, y los métodos numéricos clásicos, son eficientes y aplicables sólo en el caso que el problema en estudio sea regular, lo que se llama usualmente en control: problema controlable o extremales regulares o normales, esto es, cuando el multiplicador asociado a la función objetivo, es no nulo, es decir λ_0 es no nulo. Las condiciones suficientes para asegurar que $\lambda_0 > 0$ son denominadas condiciones de regularidad o normalidad, ver [39] y [43], y en el contexto de optimización Matemática, son denominadas cualificación de restricción, ver [14], [39] y [67].

Si λ_0 es nulo entonces el problema es no regular, en este caso el Principio del Máximo Local y el Principio de Pontryagin, proporcionan condiciones degeneradas, no dependen del funcional a minimizar, no producen ninguna información acerca del extremo local o global en estudio. La noción de regularidad es fundamental, tanto para la obtención de condiciones necesarias de optimalidad, de primer orden, no degeneradas, como también para la derivación de las condiciones suficientes de optimalidad. Es esencial, por tanto, establecer condiciones que aseguren que un problema dado es regular.

Existen varias formas de probar el Principio Clásico del Máximo de Pontryagin, una vía análisis real (vea [83]), otra vía inclusiones diferenciales (vea, [17], [18], [35]), via métodos variacionales (vea, [31]) y también usando el principio de Lagrange en dimensión infinita (vea [51], [53]) o a través del llamado formalismo de Dubovitskii y Milyutin [43].

Para formular condiciones necesarias de optimalidad, para problemas de extremos, mediante este formalismo se debe caracterizar, el cono de las direcciones factibles, al conjunto de las restricciones de desigualdad, y el cono de las direcciones tangentes, al conjunto de las restricciones de igualdad, en el punto óptimo, y sus respectivos conos duales, (ver [14], [39] y [67]).

Cuando el problema es regular, es posible caracterizar (ver [43]) el cono factible y el cono tangente, mediante aproximaciones lineales, lo que permite establecer condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. En el caso contrario, es decir, cuando el problema es no regular, se hace necesario caracterizar el cono factible al conjunto de las restricciones de desigualdad como también el cono tangente, al conjunto de las restricciones de igualdad, en el punto óptimo, mediante aproximaciones de segundo orden, lo que permite establecer condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden, las cuales serán no degeneradas siempre que el problema sea 2-regular, concepto introducido por Avakov, en [8] y por Imailov, en [45], el cual precisamos en este trabajo.

Avakov, en 1985, en [8], propone una extensión del teorema de Lyusternik (ver [43]) para el caso no regular, bajo el supuesto de 2-regularidad, lo cual permite caracterizar el cono de direcciones tangentes. Luego aplica este resultado para obtener condiciones necesarias no degeneradas de optimalidad, para problemas de optimización matemática escalares suaves, en el caso que las restricciones de igualdad sean no regulares.

Más tarde, el mismo autor en [11], generaliza el Principio del Máximo de Pontryagin para problemas escalares no regulares, donde las funciones involucradas en el problema son Frêchet diferenciables, con respecto a la variable de estado y convexas con respecto a la variable de control (ver también [10], [11], [12] y [6]).

En 1991 Ledzewicz, en [60] y [61], deriva las ecuaciones de Euler-Lagrange, para una amplia clase de problemas de optimización Matemática no regulares, escalares y vectoriales respectivamente, con restricciones de igualdad y desigualdad determinadas, por operadores definidos en espacios de Banach, pero únicamente con restricciones de igualdad no regulares. Se vale de una especificación del método Dubovitskii-Milyutin, presentado por la misma autora, en [57], para problemas no regulares, que obtiene mediante la generalización del teorema de Lyusternik, obtenido por Avakov, en [11]. Esta clase incluye los problemas Pareto óptimo con más de una restricción de igualdad, no regular, y restricciones de desigualdad regulares, que generalizan los resultados obtenidos por Censor, en [30], para dimensión finita, y por Kotarski, en [55], para dimensión infinita.

Más tarde, en 1993, la misma autora, en [62], aplica los resultados de Avakov y una especificación del método de Dubovitskii-Milyutin, obtenido en [57], para formular una extensión del Principio del Máximo local, para problemas de control óptimo con restricciones mixtas, de igualdad y desigualdad, y donde el valor de la variable de estado, en el tiempo final, es fijo. Esta versión extendida, que establece condiciones necesarias de optimalidad, cuando las restricciones de igualdad son no regulares, se reduce a la formulación clásica del Principio del Máximo local, en el caso que el problema llegue a ser regular, generalizando los resultados de [43] y [52]. Estas nuevas condiciones permiten investigar el estado de optimalidad de extremales anormales, si las condiciones de optimalidad no se satisfacen en un cierto proceso factible es posible excluirlo del conjunto de los candidatos para extremo. Esto es ilustrado mediante un ejemplo de un problema no regular, presentado por Avakov por primera vez en [10], para apoyar su teoría.

Similarmente Ledzewicz en [63] aplica los resultados de [57] y obtiene una extensión del Principio del Máximo Local, el cual establece condiciones necesarias de optimalidad, para problemas de control óptimo, con restricciones mixtas, de igualdad no regular y desigualdad regular, y con condiciones finales, cuando el Principio del Máximo Local clásico tiene una forma degenerada. Estas condiciones necesarias, coinciden con las condiciones del Principio del Máximo Local formulado en [62], cuando el problema no presenta restricciones ni de igualdad, ni de desigualdad. Es decir, el Principio del Máximo local formulado en [62] es un caso particular del obtenido en [63].

Por otro lado, en 1994, Izmailov en [45], dá una descripción constructiva del cono tangente al conjunto determinado por restricciones de desigualdad, en un punto no regular. Mediante esta descripción obtiene condiciones necesarias de optimalidad, para problemas no regulares de optimización matemática escalares, suaves, sólo con restricciones de desigualdad.

Ledzewicz y Schättler, en 1995, en [59], integran los resultados de Avakov [9] con los resultados de Ben-Tal y Zowe [16], formulan una teoría de segundo orden de optimalidad, para la optimización de problemas con restricciones mixtas, de igualdad y desigualdad, donde las restricciones de igualdad son definidas mediante operadores no regulares. Definen direcciones factibles y tangentes de segundo orden, no sobre el espacio de las variables de estado, el espacio de Banach X, sino sobre el espacio las variables de estado-tiempo, $X \times \mathbb{R}$, lo cual permite reparametrizaciones de curvas aproximantes, a diferencia de las direcciones, factibles y tangentes, definidas en [16], que lo hace sobre el espacio de Banach X. Aproximan localmente los conjuntos determinados por restricciones de igualdad y desigualdad, mediante conos convexos de segundo orden, luego, habiendo definido estos conos, extienden el formalismo de Dubovitskii-Milyutin para obtener condiciones de optimalidad de segundo orden. Las cuales, en particular, generalizan las condiciones de optimalidad para problemas suaves obtenidas en [9].

En un trabajo más reciente Avakov, Arutyunov, Izmailov, año 2007, en [13], obtienen condiciones necesarias de optimalidad, para problemas de programación matemática, suave con restricciones de igualdad y desigualdad, no regulares. Las cuales son una extensión de las obtenidas, por Avakov, en 1988, en [11] y por Izmailov, en 1994, en [45].

Ya en el caso finito dimensional, el problema con n restricciones de igualdad fué estudiado en [82] usando los subgradientes de Clarke, introducidos anteriormente por Ioffe, en [51], en análisis no diferenciable.

El resultado principal obtenido por Ledzewicz y Schättler, en [64], es una versión extendida del Principio del Máximo de Pontryagin, que establece condiciones de optimalidad, para problemas invariantes, no regulares, de tiempo final libre y donde la variable de control, pertenece a un conjunto arbitrario $\mathbb{U}$. Inicialmente, obtienen una versión extendida del Principio del Máximo Local, mediante la generalización de la teoría de Dubovitskii y Milyutin, basándose en la contrucción de conos de las direcciones de descenso, tangentes y factibles, de segundo orden, introducidos por los mismos autores en [59]. Esta versión establece condiciones de optimalidad, no degeneradas, para un proceso factible, aún cuando este proceso sea no regular, para problemas invariantes, con tiempo final fijo, donde la variable de control u, es tal que $u(t)$ pertenece, ahora, a un conjunto convexo con interior no vacío, y donde no se consideran hipótesis de regularidad, pero si se pide diferenciabilidad de hasta orden tres, de las funciones implicadas en relación a la variable de estado.

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker, (presentadas por primera vez en 1939, en la tesis de Maestría de William Karush (1917-1997), únicamente con restricciones de desigualdad) para problemas de optimización matemática y las establecidas por el Principio del Máximo de Pontryagin (Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mischenko, E.F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, 1962) para problemas de control óptimo, no son suficientes, en general, para decidir si el punto en análisis es de hecho la solución óptima global. Consecuentemente, tenemos dos caminos a seguir para decidir si de hecho el candidato (o candidatos) es óptimo (o óptimos), esas condiciones son: condiciones de segundo orden o usar alguna estructura especial de los funcionales involucrados en la problemática (convexidad, deformación para problemas más simples, convexidad generalizada entre otras).

Si las funciones involucradas en el problema son convexas, lo que determina un problema convexo, las condiciones necesarias de optimalidad son también suficientes, pero esta hipótesis es muy restrictiva, dado que una amplia clase de problemas no son convexos. Con el fin de debilitar la hipótesis de convexidad, surgió en la literatura vinculada a la optimización matemática la noción de función invexa, introducida por Hanson en 1981, en [47] y sus generalizaciones [27], [25], [40], [66], las cuales han sido muy fructíferas para la obtención de condiciones suficientes de optimalidad.

Martin, en 1985, en [66], introduce una generalización de la noción de invexidad, denominada KT-invexidad y muestra que la KT-invexidad, no es únicamente un condición suficiente de optimalidad, para problemas de optimización clásicos, en el sentido que cada punto que satisface las condiciones Kuhn-Tucker, (definido por Craven, en [39], como KT-punto), es un mínimo global del problema, sino que también es una condición necesaria, esto es, muestra que cada KT-punto es un mínimo global si y solamente si, el problema es KT-invex. La clase más amplia de problemas que cumple esta proposición son la clase de problemas KT-invex. Uno de los primeros trabajos que extiende la noción de convexidad generalizada, introducida en [66], para problemas de programación multiobjetivo, fué realizado por Osuna et al, en 1999, en [81], lo siguen los trabajos [24], [88], entre otros.

Posteriormente, el uso de esta noción y sus generalizaciones, han sido aplicadas en problemas de tiempo continuo en [26], [71], [85]. Ellas también han sido aplicadas, en ciertas clases de problemas variacionales, por Mond y Husain, en 1988 y 1989, en los trabajos [68] y [69], por Nahak y Nanda, en 1995 y 2000, en los trabajos [73] y [74], respectivamente, y por Arana et al, en 2005, en [3]. En problemas de control, en los trabajos de Mond y Smart, en 1998, en [70], y en el trabajo de Oliveira et al, en 2009, en [80], donde los autores extienden la noción de KT-invexidad, desde optimización matemática a problemas de control óptimo regulares, para mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, establecidas por una versión del Principio del Máximo de Pontryagin, son suficientes si y solamente si el problema es KT-invex.

En los trabajos anteriormente mencionados se han obtenido condiciones necesarias de optimalidad, de segundo orden, para problemas, tanto de optimización Matemática como de control óptimo, no regulares únicamente cuando los problemas, presentan restricciones de igualdad, además se ha utilizado la noción de invexidad y sus generalizaciones, para mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, para problemas de diferente naturaleza, son también suficientes, siempre cuando el problema sea regular. Exceptuando el trabajo de Hernández et al, en 2010, en [49], donde los autores, estudian un problema de optimización matemática, con restricciones de desigualdad no regulares. Introducen la noción de problemas 2KT-invex, para mostrar que las condiciones necesaria de optimalidad, establecidas por Izmailov en [46], son también suficientes si y solamente si el problema es 2KT-invex.

Hasta ahora no se conocen resultados en esta dirección, para problemas con restricciones, de igualdad y desigualdad, no regulares, ni de optimización matemática ni de control óptimo. Motivo que induce la finalidad de esta investigación, que es obtener condiciones de optimalidad, necesarias y suficientes, tanto locales como globales, para problemas mono-objetivo (escalares) y multiobjetivos (vectoriales), anormales o no regulares de optimización matemática y de control óptimo con restricciones mixtas, igualdad y desigualdad, en el caso diferenciable.

Uno de nuestro objetivo será estudiar problemas de control óptimo escalares, considerando el funcional objetivo en la forma de Lagrange, con restricciones de desigualdad, con horizonte temporal fijo T, y donde se supone el estado en el tiempo final fijo, es decir, $x(T)$ es fijo, esto es, estudiamos el siguiente Problema de control óptimo Escalar (P1),

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{Minimizar}\,\Phi(x,u) = \displaystyle\int_{t_0}^{T} f(x(t),u(t),t)dt \\
\text{sujeto a :} \\
\qquad x'(t) = \varphi(x(t),u(t),t), \\
\qquad x(t_0) = \alpha, \quad q(x(T)) = 0 \\
\qquad m(x,u) = 0 \\
\qquad g(x,u) \leqq 0 \\
\qquad u(t) \in \mathbb{U} \;\; \text{para} \;\; \text{casi} \;\; \text{todo} \;\;\; t \in [t_0,T],
\end{array}\right\} (P1) \tag{1.9}
$$

donde la variable temporal final T es libre, $\mathbb{U}$ es es un conjunto cerrado convexo, con interior no vacío, de $\mathbb{R}^m$, donde la variable temporal final T es libre, $\mathbb{U}$ es es un conjunto cerrado convexo, con interior no vacío, de $\mathbb{R}^m$,

$$
f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0,T] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0,T] \to \mathbb{R}^n,
$$

$$
q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0,T] \to \mathbb{R}^l \quad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0,T] \to \mathbb{R}^r.
$$

y donde consideramos las siguiente hipótesis sobre las funciones, f continuamente diferenciable, φ, q, m y g dos veces continuamente diferenciables, con respecto a (x,u) y todas ellas, para cada (x,u), medibles en t.

Previamente estudiaremos problemas de optimización matemática escalar (PE),

$$
(\text{PE}) \left\{\begin{array}{c}
\min f(x) \\
\text{sujeto a :} \\
F(x) = 0 \\
g(x) \leqq 0 \\
x \in X,
\end{array}\right. \tag{1.10}
$$

donde el funcional $f : X \to \mathbb{R}$ es Frêchet diferenciable y los operadores $g : X \to \mathbb{R}^m$ y $F : X \to Y$ son considerados dos veces Frêchet diferenciables, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en $\mathbb{U}$, X e Y son espacios de Banach, el subespacio $\mathrm{Im}F'(x_0)$ es cerrado en Y y donde $g(x) \leqq 0$, es equivalente a que $g_i(x) \leq 0$, para todo i en $I = \{1,2,\cdots,m\}$.

Posteriormente estudiamos problemas de multiobjetivos (vectoriales) considerando la función $\mathbb{I} = (I_1, I_2, \cdots, I_s) : X \to \mathbb{R}^s$, en la formulación del problema definido en (1.10).

Nuestro estudio esencialmente consiste en establecer, mediante el formalismo de Dubovitskii-Milyutin, condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, de segundo orden no degeneradas, para problemas de optimización Matemática (escalares y vectoriales) y a partir de ellas y de los teoremas de representaciones, establecer condiciones de optimalidad, de segundo orden no degeneradas, para problemas de control óptimo.

En 1962, Dubovitskii-Milyutin, consiguen establecer condiciones de optimalidad, para problemas con restricciones determinadas por la intersección de varios conjuntos, de interior no vacío (restricciones de desigualdad) y de interior vacío (restricciones de igualdad), en términos de funcionales lineales y continuos, donde cada uno de estos funcionales se relaciona con cada uno de los conjuntos de restricciones, esto hace posible aplicar, por separado, el análisis de separación a cada uno de los conjuntos que determinan las restricciones, de igualdad y desigualdad, lo cual resulta mucho mas simple que hacerlo en la intersección todos de todos ellos (ver [43]).

Dado el enfoque universal y unificador del formalismo de Dubovitskii-Milyutin, este permite determinar, en el lenguaje del análisis funcional, condiciones necesarias de optimalidad para una amplia clase y de variada índole, de problemas de extremos.

Mediante el formalismo de Dubovitskii-Milyutin conseguimos establecer:

- condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, para el problema de optimización matemática escalar (PE), cuando las restricciones, tanto de igualdad como de desigualdad, son no regulares. Las condiciones necesarias son reducidas a las condiciones Karush-Kunh-Tucker clásicas, cuando el problema es regular, además generalizan las obtenidas por Avakov, en [8], para problemas con restricciones de igualdad no regular y en [11] para problemas con restricciones de igualdad no regular y desigualdad regular. Y a la vez generaliza a las condiciones obtenidas, por Izmailov, en [46], para problemas con restricciones de desigualdad no regular.
- condiciones necesarias de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, para problemas vectoriales, de optimización matemática cuando las restricciones, tanto de igualdad y desigualdad, son no regulares.

A partir de las condiciones de optimalidad, necesarias y suficientes, no degeneradas de segundo orden, obtenidas para problemas de optimización matemática escalares y de los teoremas de representación, conseguimos establecer:

- condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, para el problema (P1), cuando las restricciones, tanto de igualdad y desigualdad, son no regulares, en el caso, de que la variable de control u es tal que $u(t)$ pertenece a un subconjunto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$, convexo, con interior no vacío. Estas condiciones son determinadas por el Principio del Máximo Local Extendido, el cual generaliza: el Principio del Máximo Local usual, para problemas regulares, el Principio del Máximo Local para problemas no regulares, sin restricciones de igualdad ni de desigualdad, formulado en [62], y del Principio el Máximo Local, para problemas que presentan restricciones no regulares y restricciones de desigualdad regulares, formulado en [63].

Obsevamos que las condiciones necesarias de optimalidad, obtenidas en este trabajo, son cercanas a las obtenidas por Avakov et al, en [13], pero con tres visibles diferencias: hipótesis menos restrictivas, la demostración contructiva y la aplicabilidad.

Para alcanzar la finalidad de este trabajo,

- introducimos un concepto de punto 2-regular para el caso escalar y los conceptos de punto 2-regular Fuerte y Débil, para el caso vectorial. Conceptos que son fundamentales, para establecer condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, de la misma forma como lo es, la noción de regularidad, para establecer condiciones no degeneradas de primer orden, tanto en el caso escalar como vectorial.
- caracterizamos los conos de direcciones tangentes y de direcciones factibles, mediante las derivadas de segundo orden de los operadores que determinan las restricciones de igualdad y desigualdad, y sus respectivos conos duales, todos ellos, en un punto 2-regular.
- introducimos las nociones de 2KT-invex para problemas escalares y de 2KT-cuasiinvex, 2KT-cuasiinvex estricto, 2KT-pseudoinvex y 2KT-pseudoinvex estricto, para problemas vectoriales, que son condiciones necesarias y suficientes, para mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, de segundo orden, para un punto factible 2-regular, son también suficientes para la optimalidad, en el caso escalar y en el caso vectorial, respectivamente.

Observamos que el concepto de 2KT-invex introducido en este trabajo, generaliza el concepto de 2KT-invex, introducido en [49], para problemas no regulares sin restricciones de igualdad. Y que, en el contexto de control óptimo, generaliza el concepto de KT-invex, introducido en [80], para el caso regular. Además es posible mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, establecidas por el Principio del Máximo Local para problemas no regulares, formulado en [62] y para problemas con restricciones de igualdad no regulares y restricciones de desigualdad regulares, formulado en [63], son también suficientes bajo el supuesto de 2KT-invexidad.

Este trabajo tiene la siguiente organización. En el Capítulo 2, presentamos las definiciones y los resultados escenciales, para la determinación del formalismo de Dubovitskii y Milyutin. En los capítulos posteriores se hará uso de este formalismo, para la obtención de condiciones optimalidad, para extremales de problemas tanto de optimización matemática escalar y vectorial.

En el Capítulo 3 establecemos condiciones necesarias y suficientes, para problemas de optimización matemática escalar, con restricciones de igualdad y desigualdad. Las condiciones necesarias son obtenidas, mediante el formalismo de Dubovitskii y Milyutin y las condiciones suficientes, mediante supuesto de convexidad generalizada. En 3.1 para problemas regulares y en 3.2 para problemas no regulares.

En el Capítulo 4 se establecen condiciones necesarias de optimalidad de primer y segundo orden, no degeneradas, para problemas de control óptimo, con restricciones mixtas, cuando las restricciones, tanto de igualdad y desigualdad, son no regulares y, la variable de control u es tal que $u(t)$ pertenece a un subconjunto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$, convexo, con interior no vacío.

En el capítulo 5, se introduce la definición, forma de caracterización y propiedades básicas de la noción de equilibrio cooperativo de Pareto, noción que adoptaremos como solución del problema multiobjetivo a estudiar. Establecemos condiciones necesarias y suficientes, para un problema de optimización matemática multiobjetivo, con restricciones de igualdad y desigualdad no regulares, siempre bajo el supuesto de difenciabilidad.

Capítulo 2

Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Un gran número de trabajos, tanto de optimización matemática como de control óptimo, tanto vectoriales como escalares, de dimensión finita o infinita, diferenciable o no diferenciable (vease [30], [22] [54], [55], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [65], [94], entre otros), hacen uso del formalismo de Dubovitskii- Milyutin, para obtener condiciones necesarias de optimalidad. Es este formalismo que usaremos en este trabajo, por ello presentamos las definiciones y resultados necesarios para su aplicación.

Considérese inicialmente el problema de minimizar un funcional definido sobre un abierto de un espacio Banach, sujeto a restricciones, determinadas por conjuntos con interior vacío y no vacío. Más específicamente, sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional, considerese el siguiente problema de optimización:

$$(P_0) \begin{cases} \text{mín } \ f(x) \\ \text{sujeto a} \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{k+1} \mathcal{Q}_i, \end{cases}$$

donde $\mathcal{Q}_i, i = 1, ..., k$, son conjuntos de interior no vacío, $int\mathcal{Q}_i \neq \emptyset, \ i = 1, \cdots, k$ y $\mathcal{Q}_{k+1}$ es un conjunto de interior vacío, $\text{int}\mathcal{Q}_{k+1} = \emptyset$.

En el trabajo de Dubovitskii y Milyutin (1962), son establecidas condiciones necesarias de optimalidad local en un punto x_0 en X, mediantes un enfoque, no geométrico, sino analítico, es decir, las condiciones necesarias de optimalidad son determinadas en forma de una única ecuación, descrita mediante el lenguaje del análisis funcional. Ellas son obtenidas a partir de la separación de las aproximaciones cónicas a los conjuntos de restricciones $\mathcal{Q}_i, \ i = 1, \cdots, k+1$ y del conjunto $\{x \in X, \ f(x) < f(x_0)\}$. En este estudio las definiciones fueron hechas de tal forma que si tales conos, (cono de direcciones factibles, tangentes y descenso) son no vacíos y convexos, entonces la siguiente proposición es verdadera: *Si x_0 es un mínimo local del problema*

(P_0) *entonces, no existe una dirección común a todos los conos aproximantes.* Los resultados obtenidos por Dubovitskii y Milyutin prueban que esta propiedad geométrica de optimalidad local del punto x_0, puede ser equivalentemente descrita en términos de las formas lineales de los correspondientes conos duales o polares.

2.1. Definiciones y Resultados Preliminares

Recordaremos definiciones y resultados necesarios para la aplicación del formalismo de Dubovitskii-Milyutin, los cuales son dados en [43] (ver también [14]).

Definición 1 *Un conjunto K, en X, es llamado cono de vértice 0, si para cada $x \in K$, $\lambda x \in K$, para cualquier $\lambda > 0$, esto es $K = \lambda K$.*

Si K es un cono con vértice 0, entonces $x_0 + K$, es llamado cono de vértice x_0.

Definición 2 *Sea K un cono en X, con vértice 0, el conjunto K^* de todos los funcionales $f \in X^*$ tales que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in K$ es llamado cono dual de K.*

Denotaremos por X^* el dual topológico del espacio de Banach X, esto es, X^* es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos, definidos sobre X. El espacio X^* es un espacio de Banach, con la norma

$$\| f \| = \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \ \| x \| \leq 1\}.$$

Observación 3 *Si K es un cono de vértice 0 en X, tenemos que*

(i) *K^* es un cono con vértice 0,*

(ii) *si $K = \{0\}$ entonces $K^* = X^*$,*

(iii) *si K es un subespacio arbitrario de un espacio de Banach X entonces su cono dual es*

$$K^* = \{f \in X^*,\ f(x) = 0, \forall x \in K\}.$$

En este caso K^* es llamado subespacio anulador o aniquilador del subespacio K,

(iv) *si $f \in X^*$ y $K_1 = \{x \in X,\ f(x) = 0\}$, $K_2 = \{x \in X,\ f(x) \geq 0\}$, $K_3 = \{x \in X,\ f(x) > 0\}$ son conos no vacío, entonces $K_1^* = \{\lambda f, -\infty < \lambda < \infty\}$, $K_2^* = \{\lambda f,\ \lambda \geq 0\}$ y $K_3^* = K_2^*$ (ver [43], 10.2).*

Definición 4 *Un vector h en X es una dirección de descenso de un funcional $f : X \to \mathbb{R}$, en un punto x_0, si existe un entorno $U(h)$ de h y números $\alpha = \alpha(f, x_0, h)$, $\alpha < 0$ y $\epsilon_0 > 0$, tal que para todo ϵ en $(0, \epsilon_0)$,*

$$f(x_0 + \epsilon\bar{h}) \leq f(x_0) + \epsilon\alpha < f(x_0), \quad \forall \bar{h} \in U(h).$$

Las direcciones de descenso generan un cono abierto con vértice 0, llamado cono de descenso del funcional f, en el punto x_0, denotado por $FC(f, x_0)$.

En particular si f es Frêchet diferenciable en x_0 y $f'(x_0)$ es no nulo, entonces $FC(f, x_0)$ es un cono convexo dado que (ver [43], 7.5)

$$FC(f, x_0) \quad = \quad \{h : f'(x_0)h < 0\}. \tag{2.1}$$

Sea $\mathcal{Q}$ un subconjunto de un espacio de Banach X, $x_0 \in \mathcal{Q}$.

Definición 5 *Un vector h en X es una dirección tangente al conjunto $\mathcal{Q}$, en un punto x_0, si existen $\epsilon_0 > 0$ y una función $r : (0,\ \epsilon_0) \to X$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$,*

$$x_0 + th + r(t) \in \mathcal{Q}, \qquad \| r(t) \| = o(t).$$

Las direcciones tangentes generan un cono de vértice 0, llamado cono tangente a $\mathcal{Q}$, para el punto x_0, que es usualmente denotado por $TC(\mathcal{Q}, x_0)$ o bien por $T_{\mathcal{Q}}(x_0)$. Este cono no es, en general, ni abierto ni cerrado.

Observación 6 *En general si $A_1, \cdots, A_k$ son subconjuntos de X, tal que x_0 pertenece a $\bigcap_{i=1}^k A_i$ entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{k} TC(A_i, x_0) \supseteq TC(\bigcap_{i=1}^{k} A_i, x_0).$$

Cuando el conjunto $\mathcal{Q}$ es determinado por un cierta clase de operador diferenciable, el teorema de Lyusternik es una eficaz herramienta para determinar el cono de direcciones tangentes, por tanto presentamos su enunciado (ver [43], 9.1 y [52], 0.2).

Teorema 7 *(Lyusternik) Sean X, Y espacios de Banach y $F : X \to Y$ un operador Frêchet diferenciable, en un entorno de un punto x_0, tal que $F(x_0) = 0$. Sea $F'(x_0)$ continuo en un entorno de x_0 y suponga además que $F'(x_0)$ es sobreyectivo* $(\mathrm{Im}F'(x_0)X = Y)$*. Entonces el cono de direcciones tangentes al conjunto $M_F = \{x,\ F(x) = 0\}$ es el núcleo del operador $F'(x_0)$, esto es*

$$T_{M_F}(x_0) = KerF'(x_0) = \{h,\ F'(x_0)h = 0\}.$$

Si la sobreyectividad es violada, $\mathrm{Im}F'(x_0) \neq Y$, esto equivale a decir que existe algún y en Y, tal que la ecuación lineal $F'(x_0)h = y$ no tiene una solución h en X. En este caso sólo se puede asegurar $T_{M_F}(x_0)$ está incluido en $KerF'(x_0)$, en efecto si $h \in T_{M_F}(x_0)$, entonces existen $\epsilon_0 > 0$ y una función $r : (0,\ \epsilon_0) \to X$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$, $x_0 + th + r(t) \in M_F$, con $\| r(t) \| = o(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = F(x_0 + th + r(t)) &= F(x_0) + F'(x_0)(th + r(t)) + \tilde{r}(x_0, th + r(t)) \\ &= tF'(x_0)h + F'(x_0)r(t) + \tilde{r}(x_0, th + r(t)), \end{aligned}$$

dividiendo por t y haciendo $t \to 0^+$, tenemos que $F'(x_0)h = 0$, esto es $h \in KerF'(x_0)$.

Definición 8 *A vector h en X es una dirección factible o admisible para $\mathcal{Q}$, en el punto x_0, si existe un entorno $U(h)$ de h y un número $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada ϵ en $(0, \epsilon_0)$,*

$$x_0 + \epsilon\bar{h} \in \mathcal{Q},\ \forall\ \bar{h} \in U(h).$$

Las direcciones factibles generan un cono abierto de vértice 0, llamado cono factible para $\mathcal{Q}$, en el punto x_0, y es usualmente denotado por $AC(\mathcal{Q}, x_0)$ o bien $G_{\mathcal{Q}}(x_0)$.

Observación 9 *Si*

(i) *$x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{Q}$ entonces $G_{\mathcal{Q}}(x_0) = X$, por lo tanto únicamente es de interés considerar x_0 en la frontera de $\mathcal{Q}$, es decir, $x_0 \in \mathrm{Fr}(\mathcal{Q})$.*

(ii) *$\mathcal{Q}$ es determinado por un funcional $g : X \to \mathbb{R}^m$, esto es $\mathcal{Q} = \{x \in X,\ g(x) \leqq 0\}$, entonces el cono de descenso de $g(x)$ siempre está incluido en el cono de direcciones factible de $\mathcal{Q}$.*

(iii) *$\mathcal{Q}_i = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0\}$, i en $I = \{1, \cdots, m\}$ es determinado por el funcional $g_i : X \to \mathbb{R}$, que es Frêchet diferenciable en x_0, tal que $g_i'(x_0)$ es no nulo, entonces el cono factible a $\mathcal{Q}_i$, en el punto x_0 en $\mathrm{Fr}(\mathcal{Q}_i)$, coincide con el cono de direcciones de descenso del funcional g_i, i en $I(x_0)$, para el punto x_0 en $\mathrm{Fr}(\mathcal{Q}_i)$, esto es,*

$$G_{\mathcal{Q}_i}(x_0) = \{h \in X,\ g_i'(x_0)h < 0,\ i \in I(x_0)\}, \tag{2.2}$$

donde $I(x_0)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas de g, esto es,

$$I(x_0) = \{i \in I,\ g_i(x_0) = 0\}. \tag{2.3}$$

(iv) *$G_{\mathcal{Q}_i}(x_0)$ es definido como en (2.2), entonces es convexo y abierto (ver [43] 8.1).*

(v) *$A_1, \cdots, A_k$ son subconjuntos de X, tal que x_0 pertenece a $\bigcap_{i=1}^k A_i$ entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{k} AC(A_i, x_0) = AC(\bigcap_{i=1}^{k} A_i, x_0).$$

Para obtener una condición suficiente que asegure que el cono $AC(\bigcap_{i=1}^{k} Q_i, x_0)$ es no vacío, necesitaremos los siguientes conceptos.

Definición 10 *(***Punto Estacionario Vectorial***) Sea X un espacio de Banach y sea $g : X \to \mathbb{R}^k$, Frêchet diferenciable en un punto x_0 en X. Diremos que un vector x_0, en X, es un punto estacionario vectorial de g si existe $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq 0$ en $\mathbb{R}^k$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, k$, tales que $g'^*(x_0)\alpha = 0$, donde $g'^*(x_0)$ es el operador adjunto de $g'(x_0)$.*

El siguiente lema es una versión del Teorema de Motzkin, ver [39].

Lema 11 *Sea X un espacio vectorial normado y $A : X \to \mathbb{R}^k$ una función lineal y continua, entonces exactamente una de las siguientes condiciones valen*

- $\exists\, x \in X, \quad Ax < 0,$
- $\exists\, p = (p_1, \cdots, p_k) \neq 0,\ p \in \mathbb{R}^k,\ p_i \geq 0,\ A^*p = 0.$

El próximo resultado es una concecuencia directa del lema anterior.

Lema 12 *Sea $g : X \to \mathbb{R}^k$, Frêchet diferenciable en x_0 en X, tal que x_0 es un punto no estacionario vectorial de g, entonces existe $h \in X$, $g'(x_0)h < 0$, esto es,*

$$\exists\, h \in X, \quad g_i'(x_0)h < 0,\ \forall i = 1, \cdots, k.$$

Conforme al lema anterior, una condición suficiente para asegurar que el cono $AC(\bigcap_{i=1}^{k} Q_i, x_0)$, es no vacío, donde $\mathcal{Q}_i = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0\}$, es que x_0 no sea punto estacionario de g.

Los siguientes resultados están demostrados en [43], (5.11 y 6.1 respectivamente).

Lema 13 *Sean $K_0, K_1, \cdots, K_{n+1}$ conos no vacío y convexos, con vértices 0, donde $K_0, K_1, \cdots, K_n$ son abiertos. Entonces, $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$ si y sólo si existen funcionales lineales $f_i \in K_i^*, i = 0, 1, \cdots, n+1$, no todos nulos, tales que*

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_{n+1} = 0.$$

Teorema 14 (Dubovitskii-Milyutin) *Asuma que $x_0 \in \mathcal{Q}$ es un mínimo local del funcional $f(x)$, con $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} \mathcal{Q}_i$. Sea K_0 el cono de direcciones de descenso del funcional $f(x)$, en el punto x_0, K_i los conos de direcciones factibles de las restricciones de desigualdades $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, \cdots, n$, en el punto x_0 y K_{n+1} el cono de las direcciones tangentes a la restricción de igualdad $\mathcal{Q}_{n+1}$,* *en el punto x_0. Asuma que $K_i,\ i = 0, 1, \cdots, n, n+1$ son conos no vacío y convexos, entonces existen funcionales lineales y continuos $f_i,\ i = 1, \cdots, n+1$, no todos indenticamente nulos, tales que $f_i \in K_i^*,\ i = 0, 1, \cdots, n+1$, los cuales satisfacen la ecuación de Euler- Lagrange*

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_{n+1} = 0. \tag{2.4}$$

El teorema anterior proporciona condiciones necesarias de optimalidad, las cuales son una generalización de la regla de los multiplicadores de Lagrange, en análisis clásico y la ecuación de Euler y Lagrange en cálculo variacional. Debemos notar que para obtener dichas condiciones necesarias, para algún problema específico, sea cual fuera su naturaleza, es preciso determinar los conos de las direcciones de descenso, de las direcciones factibles y de las direcciones tangentes y sus respectivos duales. Esta determinación dependerá de las hipótesis impuestas al problema, como son difenciabilidad en algún sentido, regularidad, convexidad entre otras.

Observación 15 *En las condiciones del Teorema 14, se siguen los siguientes resultados*

- *Una condición suficiente para asegurar que $f_0 \neq 0$ es que exista al menos una dirección factible y una dirección tangente, es decir, que*

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i \neq \emptyset \tag{2.5}$$

  La conclusión es válida para cualquier $f_i, i = 1, \cdots, n+1$.

- *La condición $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$, aún cuando los conos $K_i,\ i = 1, \cdots, n, n+1$, son no convexos, es una condición necesaria, para que un punto x_0 en $\mathcal{Q}$, llegue a ser una solución óptima (local o global) de $f(x)$ y es una condición necesaria y suficiente para obtener la ecuación de Euler y Lagrange, siempre que los conos sean convexos, es decir,*

$$x_0 \text{ es un punto minimo} \Longrightarrow \bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset \Longleftrightarrow \text{ecuacion de Euler y Lagrange.} \tag{2.6}$$

Esta idea es aplicada en los próximos capítulos para establecer condiciones de optimalidad, para problemas con restricciones, de igualdad y desigualdad, regulares y no regulares.

Capítulo 3

Optimización Matemática

En este capítulo establecemos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, para problemas de optimización matemática escalares, con restricciones de igualdad y desigualdad. En 3.1 para problemas regulares y en 3.2 para problemas no regulares. Las condiciones necesarias son obtenidas, mediante el formalismo de Dubovitskii y Milyutin, presentado en el Capítulo 2, y las condiciones suficientes, mediante supuesto de invexidad generalizada, adecuada al problema, concepto que extiende la noción de invexidad introducida, inicialmente, por Hanson en [47] y extendida luego por Martin en [66].

En 3.2.1, son obtenidas condiciones necesarias, tipo Karush-Kuhn-Tucker, para problemas no regulares, las cuales generalizan las condiciones de optimalidad, introducidas en la sección 3.1.1, para problemas regulares. Posteriomente en 3.2.2, se introduce el concepto de 2KT invexidad, que generaliza el concepto de KT invexidad, introducido en 3.1.2, concepto que es esencial para mostrar que las condiciones necesarias, también son suficientes, para la optimalidad.

3.1. Problemas Regulares

En esta sección formulamos un problema de optimización matemática escalar, diferenciable, con restricciones de igualdad y desigualdad. Definimos el concepto de punto regular, y determinamos los conos de direcciones de descenso, factibles y tangentes, en un punto regular del problema. En la subsección 3.1.1, con la ayuda del método de Dubovitskii-Milyutin, presentamos las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KT) que son condiciones necesarias de optimalidad, no degeneradas, para un punto óptimo regular.

En la subsección 3.2.2 es mostrado que las condiciones necesarias de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker son suficientes, siempre que el problema sea KT-invex. El caso no regular es visto en la próxima sección.

Considere el siguiente Problema Escalar (PE)

$$(PE)\begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ F(x) = 0 \\ g(x) \leqq 0 \\ x \in X \end{cases} \tag{3.1}$$

donde el funcional $f : X \to \mathbb{R}$ y el operador $g : X \to \mathbb{R}^m$ son considerados Frêchet diferenciables, $F : X \to Y$ es continuamente Frêchet diferenciable, X e Y son espacios de Banach y donde $g(x) \leqq 0$, es equivalente a que $g_i(x) \leq 0$, para todo i en $I = \{i,\ i = 1, \cdots, m\}$.

Si denotamos por $M = M_F \cap M_g$, el conjunto factible, esto es

$$M = \{x \in X,\ F(x) = 0,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\},$$

donde $M_F = \{x \in X,\ F(x) = 0\}$ y $M_g = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\}$, podemos escribir el problema escalar (PE) como:

$$\text{(PE)}\begin{cases} \text{mín} f(x) \\ \text{sujeto a} \;\; x \in M = M_F \cap M_g. \end{cases}$$

La noción de regularidad juega un importante papel, tanto para la obtención de condiciones necesarias, no degeneradas, como para la derivación de condiciones suficientes, de optimalidad. Es por ello que precisaremos la definición de punto regular, para nuestro problema.

Definición 16 *Diremos que un punto x_0, es un punto regular del conjunto con interior vacío, M_F, si x_0 es un punto de M_F y el cono tangente al conjunto M_F, en el punto x_0, $T_{M_F}(x_0)$, puede ser caracterizado por aproximaciones lineales, esto es*

$$T_{M_F}(x_0) = \{h \in X,\ F'(x_0)h = 0\}. \tag{3.2}$$

La condición (3.2) es equivalente a decir, para algunos autores, que las restricciones de igualdad, M_F, son regulares para x_0, o que el operador F es regular para x_0, (ver [52], [8], [6], [14], [60] y [13]).

De acuerdo a la definición anterior, un punto x_0 es un punto regular de M_F, si y solo si para todo h en el núcleo del operador $F'(x_0)$, h es una dirección tangente al conjunto M_F, en el punto x_0

Ahora daremos una definición de un punto regular de conjuntos con interior no vacío, tomando en consideración (iii) de la Observación 9.

Definición 17 *Diremos que un punto x_0, es un punto regular del conjunto con interior no vacío, M_g, si x_0 es un punto de M_g y el cono de direcciones factible de M_g, en el punto x_0, $G_{M_g}(x_0)$, puede ser caracterizado por aproximaciones lineales, esto es,*

$$G_{M_g}(x_0) = \{h \in X,\ g_i'(x_0)h < 0,\ i \in I(x_0)\}, \tag{3.3}$$

donde $I(x_0)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas definido en (2.3).

Observemos que si el conjunto $\{h \in X,\ g_i'(x_0)h < 0,\ i \in I(x_0)\}$ es vacío, el cono de direcciones factible de M_g, en el punto x_0, $G_{M_g}(x_0)$, no puede ser caracterizado por las aproximaciones lineales, por lo tanto, x_0 no es un punto regular de M_g.

La verificación de la condición

$$\exists\ \tilde{h}\ \in\ X,\ \ g_i'(x_0)\tilde{h} < 0,\ \forall\ i \in I(x_0), \tag{3.4}$$

es equivalente a decir, de acuedo a la Observación 9, que las restricciones de desigualdad, M_g, son regulares para x_0, y coincide con la definición de restricciones de desigualdad regulares, en un punto x_0 de M_g, dada por Izmailov en [46], (ver también [49]). Por tanto si la condición de regularidad (3.4) es violada entonces el punto x_0 no es regular.

Las condiciones suficientes para asegurar que un punto dado sea regular, de un conjunto de interior vacío o interior no vacío, se denominan cualificación de restricciones o condiciones de regularidad y existen muchas en la literatura (ver [39], [43], [67] y [14]).

Una condición suficiente, para asegurar que x_0 sea un punto regular del conjunto M_F, es que el operador $F'(x_0)$ sea sobreyectivo, esto es $\mathrm{Im}F'(x_0) = Y$. En efecto, por el teorema de Lyusternik, Teorema 7, el cono tangente a M_F, en el punto x_0, coincide con el núcleo del operador $F'(x_0)$. Por lo tanto se cumple la condición (3.2), lo que implica que x_0 es un punto regular de M_F.

Y una condición suficiente, para asegurar que x_0 sea un punto regular del conjunto M_g, de acuerdo al Lema 12, es que x_0 sea un punto no estacionario vectorial del operador g, $\{g_i, i \in I(x_0)\}$, Definición 10.

De lo anteriormente expuesto podemos concluir entonces que una condición suficiente, para asegurar que un punto dado, x_0, sea un punto regular del conjunto de restricciones M_F y de M_g respectivamente, es que el operador $F'(x_0)$ sea sobreyectivo y que x_0 sea un punto no estacionario vectorial del operador g, $\{g_i, i \in I(x_0)\}$, Definición 10.

Definición 18 *Diremos que x_0 es un punto regular del conjunto factible M del (PE), si*

$$T_{M_F}(x_0) = \{h \in X,\ F'(x_0)h = 0\},$$

y si existe $\tilde{h} \in X$, *tal que,*

$$\begin{cases} F'(x_0)\tilde{h} &= 0 \\ g_i'(x_0)\tilde{h} &< 0, \ i \in I(x_0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Diremos indistintamente que el problema (PE) es regular en x_0 *o que el conjunto factible* M *es regular en* x_0*, si* x_0 *es un punto regular del conjunto factible* M*.*

Una condición suficiente para asegurar que un punto x_0, sea un punto regular del conjunto factible M, es que el operador $F'(x_0)$ sea sobreyectivo y que la condición de regularidad (3.5) se verifique. Esta condición suficiente es conocida en la literatura, por cualificación de restricciones de Mangasarian Fromovitz (ver [13], [14]).

Observación 19 *Debemos notar que si los conos de direcciones tangentes,* $T_{M_F}(x_0)$*, y de direcciones factibles,* $G_{M_g}(x_0)$*, pueden ser caracterizado mediante aproximaciones lineales, y si se verifica, conjuntamente, la condición de regularidad (3.5), entonces es posible determinar condiciones de optimalidad, de primer orden no degeneradas, para el problema (PE), en un punto factible* x_0*.*

3.1.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

Para formular condiciones necesarias de optimalidad de problemas con restricciones de desigualdad (interior no vacío) y con restricciones de igualdades (interior vacío), se debe caracterizar el cono de las direcciones factibles de las restricciones de desigualdad y el cono de las direcciones tangentes a las restricciones de igualdades, en el punto óptimo. Si es posible determinar estos conos por aproximaciones lineales, cuya intersección es no vacía, entonces el problema es regular, y por tanto, es posible obtener condiciones de optimalidad de primer orden, no degeneradas, ver [39] y [6] (ver también [52], [14] y [67]).

A continuación presentamos y demostramos las condiciones necesarias de optimalidad de Karush Kuhn Tucker, para un problema regular. Previamente damos la definición de un punto Karush Kuhn Tucker de [39] (ver también [14] y [67]).

Definición 20 *Diremos que un punto* x_0*, en* M*, es un punto Karush Kuhn Tucker (KT), del problema (PE), si existen* μ *en* $\mathbb{R}^m$ *y* ψ *en* Y^* *no identicamente nulos, tales que*

$$f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} g'^{*}_i(x_0)\mu_i + F'^{*}(x_0)\psi = 0, \tag{3.6}$$

donde $\mu_i \geq 0$ *y* ψ *en* Y^* *son llamados multiplicadores de Lagrange,* Y^* *es el espacio dual de* Y *y el conjunto de índices* $I(x_0)$ *es definido en (2.3).*

Teorema 21 *Si x_0 es un punto regular y es una solución óptima, local o global, del problema (PE), entonces x_0 es un punto Karush Kuhn Tucker (KT) del problema (PE).*

***Demostración**: La demostración que daremos está basada en el método de Dubovitskii-Milyutin, Teorema 14, por lo tanto debemos determinar el cono de direcciones de descenso de f, el cono de las direcciones factibles de M_g y el cono de las direcciones tangentes a M_F, en el punto x_0, los cuales denotaremos por $\mathcal{K}_0,\ \mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ y sus respectivos conos duales por $\mathcal{K}_0^*,\ \mathcal{K}_1^*$ y $\mathcal{K}_2^*$.*

Si $f'(x_0)$ es no nulo, entonces el cono de las direcciones de descenso del funcional f en el punto x_0, es

$$\mathcal{K}_0 = FC(f, x_0) = \{h, f'(x_0)h < 0\} \tag{3.7}$$

y su cono dual es

$$\mathcal{K}_0^* = \{-\lambda_0 f'(x_0),\ \lambda_0 \geq 0\}. \tag{3.8}$$

Sea $M_g = \bigcap_{i=1}^m M_{g_i}$ las restricciones de desigualdad (interior no vacío), determinadas por los operadores $g_i : X \to \mathbb{R}$, donde $M_{g_i} = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0\},\ i \in I$ y sea K_i el cono de las direcciones factibles de M_{g_i}, en x_0. Por lo tanto, dado que x_0 es un punto regular, el cono de las direcciones factibles de M_{g_i}, en x_0 es

$$K_i = G_{M_{g_i}}(x_0) = \{h,\ g_i'(x_0)h < 0\},\ i \in I(x_0)$$

y su cono dual $K_i^*,\ i \in I(x_0)$ es

$$K_i^* = \{-\mu_i\ g_i'(x_0),\ \mu_i \geq 0\},\ i \in I(x_0). \tag{3.9}$$

Ahora como el cono de las direcciones factibles de M_g, de acuerdo a la Observación 9, es

$$\mathcal{K}_1 = \bigcap_{i \in I(x_0)} K_i = \bigcap_{i \in I(x_0)} G_{M_{g_i}}(x_0) = \bigcap_{i \in I(x_0)} \{h,\ g_i'(x_0)h < 0\}, \tag{3.10}$$

y como los conos $K_i,\ i \in I(x_0)$, son conos convexos y abiertos, cuya intersección es no vacía (ver [43], 5.10), se verifica que,

$$\mathcal{K}_1^* = (\bigcap_{i \in I(x_0)} K_i)^* = \sum_{i \in I(x_0)} K_i^*,$$

y de acuerdo a (3.9),

$$\mathcal{K}_1^* = \{-\sum_{i \in I(x_0)} \mu_i g_i'(x_0),\ \mu_i \geq 0\}. \tag{3.11}$$

Sea $M_F = \mathcal{Q}_{n+1}$ las restricciones de igualdad (interior vacío), determinadas por $F : X \to Y$, esto es, $M_F = \{x \in X,\ F(x) = 0\}$. Como x_0 es regular de M_F, se sigue de (3.2), que

$$\mathcal{K}_2 = T_{M_F}(x_0) = \mathrm{Ker} F'(x_0) = \{h \in X,\ F'(x_0)h = 0\}. \tag{3.12}$$

Como para todo $\check{\psi} \in Y^*$, $\check{\psi}F'(x_0) := \check{\psi} \circ F'(x_0)$ *pertenece a* X^* *y, sin pérdida de generalidad, consideramos,* $\check{\psi} = -\psi$, *se sigue que el cono dual de* $T_{M_F}(x_0)$, *de acuerdo a la Observación 3, es*

$$\mathcal{K}_2^* = \{-\psi F'(x_0), -\psi \in Y^*\}. \tag{3.13}$$

Ahora como x_0 *es una solución óptima de (PE), debido Teorema* 14, *existen* $f_0 \in \mathcal{K}_0^*,\ f_1 \in \mathcal{K}_1^*$ *y* $f_2 \in \mathcal{K}_2^*$ *no todos nulos, tales que*

$$f_0 + f_1 + f_2 = 0. \tag{3.14}$$

Si $f_0 \in \mathcal{K}_0^*$, *de (3.8) se sigue que* $f_0 = -\lambda_0 f'(x_0), \lambda_0 \geq 0$ *y como* x_0 *es un punto regular de* M, *de acuerdo (3.5), se sigue que el sistema*

$$\begin{aligned} F_i'(x_0)\tilde{h} &= 0 \\ g_i'(x_0)\tilde{h} &< 0,\ \forall\ i \in I(x_0) \end{aligned}$$

admite solución $\tilde{h}$ *en* X, *esto implica que la intersección de los conos de direcciones factibles de* M_g *y de direcciones tangentes a* M_F, *en el punto regular* x_0, *es no vacío, esto es,* $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \neq \emptyset$, *y conforme a la Observación 15,* $-\lambda_0 f'(x_0) = f_0 \neq 0$, *esto implica que* $\lambda_0 > 0$. *Por lo tanto, podemos considerar* $\lambda_0 = 1$, *y entonces*

$$f_0 = -f'(x_0). \tag{3.15}$$

De (3.15), (3.11) y (3.13), tenemos que

si $f_0 \in \mathcal{K}_0^*$ *entonces* $f_0 = -f'(x_0)$,

si $f_1 \in \mathcal{K}_1^*$, *entonces* $f_1 = -\sum_{i \in I(x_0)} \mu_i g_i'(x_0),\ \mu_i \geq 0$,

si $f_2 \in \mathcal{K}_2^*$, *entonces* $f_2 = -\psi F'(x_0), \psi \in Y^*$.

Reemplazando en (3.14), para cada $h \in X$,

$$\begin{aligned} -f'(x_0)h - \sum_{i \in I(x_0)} \langle \mu_i,\ g_i'(x_0)h \rangle - \langle \psi,\ F'(x_0)h \rangle &= 0 \\ -\langle f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + F'^*(x_0)\psi,\ h \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + F'^*(x_0)\psi = 0.$$

El teorema queda así demostrado.

Observación 22 *Para concluir veamos las siguientes consideraciones,*

(i) *Si* $f_0 = 0$ *de la ecuación (3.14) obtenemos* $f_1 + f_2 = 0$*, que es una condición necesaria y suficiente, de acuerdo al Lema 13, para que* $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$*, donde* $\mathcal{K}_1 = G_{M_g}(x_0) = \{h,\ g'(x_0)h < 0\}$*, es un cono abierto y convexo y* $\mathcal{K}_2 = T_{M_F}(x_0) = \{h,\ F'(x_0)h = 0\}$ *es un cono cerrado y convexo, es decir la intersección de los conos de direciones factibles y tangentes, es vacía, por lo tanto la condición (3.5) no se cumple, lo que implica que* x_0 *no es un punto regular del (PE). En este caso el punto* x_0 *es llamado punto no regular anormal o degenerado del problema escalar (PE).*

(ii) *Si* x_0 *no es un punto regular de* M_F*, entonces el núcleo del operador adjunto* $F'^{*}(x_0)$ *es no nulo, esto es,*

$$\exists\ \psi \neq \mathbf{0},\ F'^{*}(x_0)\psi \ = \ 0.$$

En efecto, si x_0 *no es un punto regular de* M_F *entonces* $F'(x_0)$ *no es sobreyectivo, esto es equivalente ver [87], a que el subespacio anulador (o aniquilador) de* $\mathrm{Im}F'(x_0)$ *es no nulo, esto es,*

$$\begin{aligned} \exists\ \psi \neq \mathbf{0},\quad \langle \psi, F'(x_0)h \rangle &= 0, \quad \forall\ F'(x_0)h \in \mathrm{Im}F'(x_0) \\ \langle F'^{*}(x_0)\psi, h \rangle &= 0, \quad \forall\ h \in X \\ F'^{*}(x_0)\psi &= 0. \end{aligned}$$

(iii) *De manera análoga si* x_0 *no es un punto regular de* M_g*, entonces,* x_0 *es un punto estacionario del operador* g*,* $\{g_i, i \in I(x_0)\}$*, Definición 10, esto es equivalente a decir que existen* $\tilde{\mu}_i \geq 0,\ i \in I(x_0)$*, no todos nulos, en* $\mathbb{R}$ *tales que,*

$$\sum_{i \in I(x_0)} g_i'^{*}(x_0)\tilde{\mu}_i \ = \ 0.$$

Si x_0 es un punto no regular, entonces no es posible garantizar que λ_0 sea no nulo, esto implica que no podemos considerar $\lambda_0 = 1$, por lo tanto las condiciones necesarias de optimalidad, para x_0 son

$$\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} g_i'^{*}(x_0)\mu_i + F'^{*}(x_0)\psi = 0, \tag{3.16}$$

donde $\lambda \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, ψ en Y^* y el conjunto de índices $I(x_0)$ es definido en (2.3).

Los puntos que satisfacen la condición necesaria de optimalidad (3.16), son bien conocidos y son denomidados puntos Fritz-John (ver [14], [39]).

Atendiendo a la Observación 15 podemos hacer el siguiente análisis, de la condición (3.16).

Si x_0 es un punto regular del (PE), de acuedo a nuestra definición, Definición 18, $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ es no vacío entonces $f_1 + f_2 \neq 0$ lo que implica que $f_0 \neq 0$, y por tanto $\lambda_0 \neq 0$, es posible entonces considerar $\lambda_0 = 1$. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (3.6), son no degeneradas, ya que son definidas para puntos regulares.

Si $\lambda_0 = 0$ entonces,

$$\sum_{i \in I(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + F'^*(x_0)\psi = 0.$$

Esto implica que, para todo h en X,

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\langle \sum_{i \in I(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + F'^*(x_0)\psi, h \Big\rangle \\ &= \sum_{i \in I(x_0)} \Big\langle \mu_i, g_i'(x_0)h \Big\rangle + \Big\langle \psi, F'(x_0)h \Big\rangle \\ &= f_1(h) + f_2(h), \end{aligned}$$

por tanto $f_1 + f_2 = 0$ y de acuerdo a (i) de la Obsevación 22, $\mathcal{K}_1 \bigcap \mathcal{K}_2 = \emptyset$, donde $\mathcal{K}_1 = G_{M_g}(x_0)$ y $\mathcal{K}_1 = T_{M_F}(x_0)$, son definidos en (3.10) y (3.12) respectivamente, lo que implica que x_0 no es regular de M.

Para garantizar que x_0 sea un punto regular del conjunto factible $M = M_F \cap M_g$, no basta que x_0 sea un punto regular de M_F y de M_g, también es necesario que la condición (3.5), que llamaremos condición de regularidad de x_0 en M, se verifique, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 23 *Considere el siguiente problema*

$$(PE) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeto a}: \\ x^2 + y^2 \leq 5 \\ -x \leq 0 \\ y \geq 1 \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Sea $M_F = \{(x, y), F(x, y) = 0\ \}$ *y* $M_g = \{(x, y), g(x, y) \leq 0,\ i \in I\}$, *donde* $I = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$F(x, y) = x - 2y, \quad g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 5, \quad g_2(x, y) = -x, \quad g_3(x, y) = 1 - y.$$

Es fácil mostrar que la condición necesaria de optimalidad (3.16) se cumple, independiente del funcional a minimizar, con $\lambda = 0$, $\psi = -4$ *en* $\mathbb{R}$, $u_1 = 1, u_2 = 10$ *no negativos, esto es*

$$0(f_x(2, 1), f_y(2, 1)) - 4(1, -2) + (4, 2) + 10(0, -1) = (0, 0),$$

donde $(x_0, y_0) = (2, 1)$ *es un punto regular de* M_F *y de* M_g, *pero no es un punto regular de* M.

En efecto, $F'(2,1)$ es sobreyectivo, el cono tangente al conjunto M_F, en el punto $(2,1)$ es

$$\begin{aligned} T_{M_F}(2,1) &= \{(h_1,h_2), F'(2,1)(h_1,h_2)=0\} \\ &= \{(h_1,h_2), h_1-2h_2=0\} \\ &= \{h_2(2,1), h_2 \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

y dado que, el conjunto de índices de las restricciones activas $I(2,1)=\{1,3\}$, y que $g_1'(2,1)=(4,2)$ y $g_3'(2,1)=(0,-1)$, son linealmente independientes, entonces el cono factible al conjunto M_g, en el punto $(2,1)$ es

$$\begin{aligned} G_{M_g}(2,1) &= \{(h_1,h_2),\ g_i'(2,1)(h_1,h_2)<0,\ i=1,2\} \\ &= \{(h_1,h_2), 4h_1+2h_2<0,\ \ -h_2<0\} \\ &= \{(h_1,h_2), 0<h_2<-2h_1\}. \end{aligned}$$

La condición de regularidad (3.5) no es verificada, ya que no existe un (h_1,h_2) en $\mathbb{R}^2$ que satisfaga simultáneamente,

$$\begin{gathered} h_1-2h_2=0 \\ 0<h_2<-2h_1, \end{gathered}$$

lo que implica que $(2,1)$ no es un punto regular del conjunto de restricciones M.

Observemos que la condición x_0 regular es una condición suficiente, para asegurar que λ_0 es no nulo, pero no es condición necesaria. En particular si el problema (PE) es un problema de programación lineal, finito dimensional, esto es, los espacios de Banach X, Y son de dimensión finita y las funciones f, F, g son lineales, entonces todo punto factible es regular. En efecto, dado que $F'(x_0)=F$ y $g'(x_0)=g$, para todo punto x_0 en X, entonces el cono de direcciones tangente coincide con el conjunto de restricciones M_F y el factible está contenido en M_g, para todo punto factible x_0, esto es,

$$T_{M_F}(x_0)=M_F \qquad G_{M_g}(x_0)\subsetneqq M_g.$$

Por tanto la condición necesaria de optimalidad establecida en el Teorema 21 es en rigor, para todo punto factible, inclusive si la cualificación de las restricciones de Mangasarian-Fromovitz no se cumplen. Sin embargo, esto no se verifica para problemas lineales infinito dimensional, como son los problemas de control óptimo, estudiados en el capítulo 4 (ver [7]).

Para finalizar esta sección presentamos condiciones necesarias de optimalidad, para el problema (PE), pero ahora con l condiciones de igualdad y una restricción adicional, que no es determinada por una función.

Bajo los mismo términos del problema (PE), consideremos

$$(\bar{\text{PE}})\begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \bar{F}(x) = 0 \\ g(x) \leqq 0 \\ x \in \mathbb{Q} \subset X \end{cases} \tag{3.17}$$

donde $\bar{F} : X \to \bar{Y}$, $\bar{Y} = Y_1 \times \cdots \times Y_l$, es definido para cada x en X, $\bar{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_l(x))$ y es tal que para todo $k = 1, \cdots, l$, $F_k : X \to Y_k$, es continuamente Frêchet diferenciable, con Y_k espacio de Banach y donde además $\mathbb{Q}$ es un conjunto cerrado y convexo con interior no vacío.

Si denotamos por $\bar{M} = M_{\bar{F}} \cap M_g \cap \mathbb{Q}$, el conjunto factible del $(\bar{PE})$, esto es

$$\bar{M} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I,\ \ x \in \mathbb{Q}\},$$

donde $M_{\bar{F}} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0\}$ y $M_g = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\}$, podemos escribir el problema escalar $(\bar{\text{PE}})$ como:

$$(\bar{PE})\begin{cases} \text{mín} f(x) \\ \text{sujeto a} \ \ x \in \bar{M} = M_{\bar{F}} \cap M_g \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En lo que sigue daremos una definición de punto regular del conjunto factible $\bar{M}$, de punto KT, del problema $(\bar{\text{PE}})$ y condiciones de optimalidad para un punto regular x_0 en $\bar{M}$, del problema $(\bar{\text{PE}})$.

Definición 24 *Diremos que x_0 es un punto regular del conjunto factible $\bar{M}$ del $(\bar{\text{PE}})$, si*

$$T_{M_{\bar{F}}}(x_0) = \{h \in X, \bar{F}'(x_0)h = 0\},$$

y si existe $\tilde{h} = \lambda(x - x_0)$, con $\lambda > 0$ y x en el interior de $\mathbb{Q}$, $\text{int}\mathbb{Q}$, tal que,

$$\begin{cases} \bar{F}'(x_0)\tilde{h} &= 0 \\ g_i'(x_0)\tilde{h} &< 0,\ i \in I(x_0). \end{cases} \tag{3.18}$$

Definición 25 *Diremos que un punto x_0, en $\bar{M}$, es un punto Karush Kuhn Tucker (KT), del problema $(\bar{\text{PE}})$, si existen $\mu \in \mathbb{R}^m$ y $\psi \in Y^*$ no identicamente nulos, tales que*

$$f_s = f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \mu_i {g'}_i(x_0) + \sum_{k=1}^{l} F_k'^{*}(x_0)\psi_k, \tag{3.19}$$

donde f_s es un funcional soporte para el conjunto $\mathbb{Q}$, en x_0, es decir

$$f_s(x) \geq f_s(x_0), \quad \forall\ x \in \mathbb{Q}.$$

donde $\mu_i \geq 0$ y $\bar{\psi} = (\psi_1, \cdots, \psi_l) \in Y^*$ son llamados multiplicadores de Lagrange, Y^* es el espacio dual de Y, y el conjunto de índices $I(x_0)$ es definido en (2.3).

Teorema 26 *Si un punto regular x_0 es una solución óptima, local o global, del problema ($\bar{\mathrm{PE}}$), entonces x_0 es un punto Karush Kuhn Tucker (KT) del problema ($\bar{\mathrm{PE}}$).*

Demostración: *Para establecer condiciones de optimalidad para un punto x_0, en $\bar{M}$, mediante el formalismo de Dubovitskii-Milyutin, para el problema $\bar{\mathrm{PE}}$ necesitamos determinar el cono tangente, $\bar{\mathcal{K}}_2 = T_{M_{\bar{F}}}(x_0)$, del conjunto $M_{\bar{F}}(x_0)$ y el cono factible del conjunto $\mathbb{Q}$, en el punto x_0, y sus respectivo conos duales, ya que el cono de las direcciones de descenso de la función objetivo f, K_0, y su cono dual, K_0^*, fueron determinados en (3.7) y (3.8), al igual que el cono factible, $\mathcal{K}_1 = G_{M_g}(x_0)$, del conjunto $M_g(x_0)$, y su cono dual, $\mathcal{K}_1^*$, determinados en (3.10) y (3.11).*

Observemos inicialmente que si $\bar{F}'(x_0)$ no es sobreyectivo entonces existe $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \cdots, \tilde{\psi}_l)$ en $\bar{Y}^*$, no nulo, tal que $\bar{F}'^*(x_0)\tilde{\psi} = \sum_{k=1}^{l} F_k{}'^*(x_0)\tilde{\psi}_k = 0$, por tanto la condición (3.19) se cumple trivialmente con $f_s = 0$, $\mu_i = 0, i \in I(x_0)$, $\psi_k = \tilde{\psi}_k$, $k = 1, \cdots, l$ y $f'(x_0) = 0$. Por tanto podemos suponer l operador $\bar{F}'(x_0)$ sobreyectivo.

Bajo esta hipótesis obtenemos, de acuerdo al Lema 1 [57], que el cono tangente, en el punto x_0 y su cono dual son,

$$\bar{\mathcal{K}}_2 = T_{M_{\bar{F}}}(x_0) = \{h \in X, \bar{F}'(x_0)h = 0\} = \bigcap_{i=1}^{l}\{h \in X, F_i'(x_0)h = 0\} = \bigcap_{i=1}^{l} T_{M_{F_i}}(x_0) \tag{3.20}$$

y su cono dual

$$(\bar{\mathcal{K}}_2)^* = T^*_{M_{\bar{F}}}(x_0) = (\bigcap_{i=1}^{l} T_{M_{F_i}}(x_0))^* = \sum_{i=1}^{l} T^*_{M_{F_i}}(x_0), \tag{3.21}$$

donde, de acuerdo a (3.12),

$$T^*_{M_{F_i}}(x_0) = \{-\psi_i F_i'(x_0),\ \psi_i \in Y_i^*\}.$$

Por lo tanto si $\bar{f}_2$ pertenece a $(\bar{\mathcal{K}}_2)^*$, entonces $\bar{f}_2 = -\sum_{i=1}^{l} \psi_i F_i'(x_0)$.

Además como $\mathbb{Q}$, es un conjunto cerrado, convexo y con interior no vacío, de X, el cono de las direcciones factibles de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{K}_3$, en el punto x_0, de acuerdo a (8.2 [43]), es

$$\mathcal{K}_3 = \{h \in X,\ h = \lambda(x - x_0),\ \text{donde}\ \ x \in \text{int}\ \mathbb{Q},\ \lambda > 0\} \tag{3.22}$$

y su cono dual, de acuerdo a (10.5 [43]), es

$$\mathcal{K}_3^* = \{f_3 \in X^*,\ f_3 = f_s\} \tag{3.23}$$

donde f_s es una función soporte de $\mathbb{Q}$, para x_0, esto es

$$f_s(x) \geq f_s(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{3.24}$$

Ahora como por hipótesis x_0 es una solución óptima de ($\bar{\mathrm{PE}}$) *y dado que los conos $\mathcal{K}_0,\ \mathcal{K}_1,\ \bar{\mathcal{K}}_2$ y $\mathcal{K}_3$ son convexos (ver 7.5 [43]), entonces, por el Teorema 14, existen $f_0 \in \mathcal{K}_0^*,\ f_1 \in \mathcal{K}_1^*,\ f_2 \in \bar{\mathcal{K}}_2^*$ y $f_3 \in K_3^*$ no todos nulos, tales que*

$$f_0 + f_1 + \bar{f}_2 + f_s = 0, \tag{3.25}$$

de donde

$$-f'(x_0) - \sum_{i \in I(x_0)} \mu_i g'_i(x_0) - \sum_{i=1}^{l} \psi_i F_i'(x_0) + f_s = 0,$$

esto es

$$f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \mu_i g'_i(x_0) + \sum_{i=1}^{l} F_i'^*(x_0)\psi_i = f_s,$$

donde hemos considerado que $\psi_i F_i'(x_0) = \psi_i \circ F_i'(x_0) = F_i'^*(x_0)\psi_i$.

El teorema queda así demostrado.

Hacemos notar que si x_0 no es un punto regular de $M_{\bar{F}}$ ($\bar{F}$ no es regular), entonces no podemos garantizar, ver Observación 6, que $T_{M_{\bar{F}}}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{l} T_{M_{F_i}}(x_0)$, ni tampoco, ver [43], que $[\bigcap_{i=1}^{l} T_{M_{F_i}}(x_0)]^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} T_{M_{F_i}}^*(x_0)$.

3.1.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

En esta sección introducimos la definición de KT invexidad, para el problema (PE) y ($\bar{\mathrm{PE}}$), que es una condición suficiente, y además necesaria, para asegurar que todo punto KT es un óptimo, para ambos problemas.

Definición 27 *Diremos que (PE) es KT-invex en M, si para cualquier $x,\ x_0$ en M, existe una función $\eta : X \times X \to X$, tales que*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta && (3.26)\\ F'(x_0)\eta &= 0 && (3.27)\\ -g_i'(x_0)\eta &\geq 0,\ i \in I(x_0), && (3.28) \end{aligned}$$

donde $I(x_0)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas y $\eta = \eta(x, x_0)$.

Definición 28 *Diremos que* $(\bar{\text{PE}})$ *es KT-invex en* $\bar{M}$*, si para cualquier* $x,\ x_0$ *en* $\bar{M}$*, existe una función* $\eta : X \times X \to X$*, definida como* $\eta(x, x_0) = \lambda(x - x_0)$*, con* $\lambda > 0$ *y* x *en* $\text{Int}\mathbb{Q}$ *tales que*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta & (3.29)\\ F_i'(x_0)\eta &= 0,\ i = 1, \cdots, l & (3.30)\\ -g_i'(x_0)\eta &\geq 0,\ i \in I(x_0), & (3.31) \end{aligned}$$

donde $I(x_0)$ *es el conjunto de índices de las restricciones activas de* g *y* $\eta = \eta(x, x_0)$*.*

Si los problemas (PE) y $(\bar{\text{PE}})$ son convexos (ver [67], [43]), entonces ellos son problemas KT-invex, basta con considerar $\eta(x, x_0) = x - x_0$, en la Definición 27 y $\lambda = 1$, en la Definición 28, respectivamente.

El próximo teorema extiende el resultado presentado por Martin, en [66], donde se considera restricciones solo de desigualdad.

Teorema 29 *Un punto KT,* x_0 *en* M (x_0 en $\bar{M}$)*, es una solución óptima del* (PE), $((\bar{\text{PE}}))$*, si y solo si el* (PE), $((\bar{\text{PE}}))$*, es KT-invex en* x_0*.*

Demostración*: Suponga que cada punto KT, es una solución óptima. Vamos a demostrar que el problema (PE) es KT-invex.*

Sean $x,\ x_0$ *en* M*.*
i) Si $f(x) \geq f(x_0)$*, para todo* x *en* M*, podemos elegir* $\eta \equiv 0$ *y las condiciones de la Definición 27 son verificada trivialmente.*
ii) Si $f(x) < f(x_0)$ *entonces* x_0 *no es una solución optima del (PE) y por hipótesis* x_0 *no es un punto KT. Esto implica, conforme a la Observación 15,*

$$\bigcap_{i=0}^{2} \mathcal{K}_i \neq \emptyset, \tag{3.32}$$

donde recordemos que $\mathcal{K}_0$ *es el cono de direcciones de descenso del funcional* f*, en el punto* x_0*, dado en (3.7),* $\mathcal{K}_1$ *es el cono de direcciones factibles, del conjunto* $G_{M_g}(x_0)$ *para el punto* x_0*, dado en (3.10) y* $\mathcal{K}_2$ *es el cono de direcciones tangentes a* $M_F(x_0)$*, dado en (3.12).*

Por lo tanto, existe h *en* $\bigcap_{i=0}^{2} \mathcal{K}_i$*, esto es, existe* h *tal que*

$$\begin{aligned} f'(x_0)h &< 0\\ F'(x_0)h &= 0\\ -g_i'(x_0)h &\geq 0,\ i \in I(x_0). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Si definimos $\eta = ch$*, tal que*

$$c \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(h)} > 0,$$

donde la última desigualdad es debido a que $f(x) - f(x_0) < 0$ *y a que* $f'(x_0)h < 0$*, obtenemos a partir de las condiciones (3.33),*

$$\begin{aligned} f'(x_0)\eta = f'(x_0)ch = cf'(x_0)h &\leq f(x) - f(x_0) \\ F'(x_0)\eta = F'(x_0)ch = cF'(x_0)h &= 0 \\ -g'_i(x_0)\eta = -g'_i(x_0)ch = -cg'_i(x_0)h &> 0,\ i \in I(x_0). \end{aligned}$$

esto es, existe η*, dependiendo de los puntos factibles* x *y* x_0*, tal que las condiciones de la Definición 27 son verificadas, por lo tanto el problema (PE) es KT-invex.*

Inversamente, suponga que el (PE) es KT-invex. Mostraremos que cada punto KT es una solución optima del (PE).

Sea x_0 *un punto KT, por definición existen* μ_i*,* i *en* $I(x_0)$*, no negativos, y* ψ*, no identicamente nulos, satisfaciendo las condiciones de la Definición 20. Tomando en consideración (3.26) y aplicando* $\psi \in Y^*$*,* μ_i *no negativo en (3.27), (3.28), respectivamente, obtenemos, para todo punto factible* x*,*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta \\ \langle \psi, F'(x_0)\eta \rangle &= 0 \\ \langle \mu_i, -g'_i(x_0)\eta \rangle &\geq 0,\ i \in I(x_0). \end{aligned}$$

Sumando en i *en la última desigualdad y reordenando los términos,*

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta + \sum_{i \in I(x_0)} (\mu_i g'_i(x_0))\eta + \langle \psi,\ F'(x_0)\eta \rangle \\ &= (f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} g'^*_i(x_0)\mu_i + F'^*(x_0)\psi)\eta. \end{aligned}$$

Como μ_i*,* i *en* $I(x_0)$ *y* ψ *son los multiplicadores de Lagrange, satisfacen la condición (3.6) de la Definición 20, se sigue que*

$$f(x) - f(x_0) \geq 0,$$

para todo punto factible $x \in M$*, esto es,* x_0 *es solución optima.*

Finalmente observamos que, si se considera el problema $(\bar{\mathrm{PE}})$ *en vez* (PE)*, la demostración del teorema va en la misma dirección, sólo que, en este caso, la condición* $ii) f(x) < f(x_0))$ *implica, en vez de (3.32), la condición*

$$\mathcal{K}_0 \bigcap \mathcal{K}_1 \bigcap \bar{\mathcal{K}}_2 \bigcap \mathcal{K}_3 \neq \emptyset,$$

donde $\mathcal{K}_0$ *es el cono de direcciones de descenso del funcional* f*, en el punto* x_0*, dado en (3.7),* $\mathcal{K}_1$ *es el cono de direcciones factibles, del conjunto* $G_{M_g}(x_0)$ *para el punto* x_0*, dado en (3.10),*

$\bar{\mathcal{K}}_2$ es el cono de direcciones tangentes a $M_{\bar{F}}(x_0)$, dado en (3.20) y el cono de las direcciones factibles de $\mathbb{Q}$, en el punto x_0, dado en (3.22).

Por lo tanto, existe $h = \lambda(x - x_0)$, λ positivo y x en $\mathrm{Int}\mathbb{Q}$, tal que

$$\begin{array}{lcl} f'(x_0)h & < & 0 \\ \bar{F}'(x_0)h & = & 0 \\ -g_i'(x_0)h & \geq & 0, \ i \in I(x_0). \end{array}$$

Posteriormente se define $\eta = c\lambda(x - x_0)$, con λ positivo y x en $\mathrm{Int}\mathbb{Q}$, y se continua con la demostración dada.

El teorema queda así demostrado.

Hacemos notar que el teorema anterior caracteriza completamente los problemas KT-invex.

3.2. Problemas No Regulares

En esta sección estableceremos condiciones necesarias de optimalidad, en un punto x_0, aún cuando este sea no regular, en este caso no es posible caracterizar el cono tangente o el cono de direcciones factibles, en el punto x_0, mediante las derivadas de primer orden de los operadores que determinan las restricciones de igualdad y desigualdad. O bien si es posible caracterizarlos, su intersección es vacía. La regla de los multiplicadores de Lagrange proporciona condiciones degeneradas, no dependen del funcional a minimizar, no produce información acerca del extremo local o global en estudio. Además, en general, las condicions necesarias de segundo orden clásicas no valen.

En la Sección 3.2.1 son obtenidas condiciones necesarias, para problemas no regulares, las cuales por una parte generalizan la regla de los multiplicadores de Lagrange y, por otra, garantizan condiciones no degeneradas, con hipótesis más débiles que las de punto regular. Estas condiciones son reducidas, cuando el problema es regular, a las condiciones Karush-Kuhn-Tucker, presentadas en la Sección 3.1.

Previamente, introducimos el concepto de punto 2-regular que es fundamental, para establecer condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, de la misma forma como lo es, la noción de regularidad, para establecer condiciones no degeneradas de primer orden, y caracterizamos los conos de direcciones tangentes y de direcciones factibles, en un punto x_0 no regular, y sus respectivos conos duales, mediante las derivadas de primer y segundo orden de los operadores F y g, que determinan las restricciones de igualdad y desigualdad, respectivamente. En la caracterización de estos conos se considera el supuesto que los operadores F y g son dos veces Frêchet diferenciables, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M, y que el subespacio $\mathrm{Im}F'(x_0)$ es cerrado en Y.

Es decir consideramos el siguiente Problema Escalar $(\hat{\mathrm{PE}})$,

$$(\hat{\mathrm{PE}}) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ F(x) = 0 \\ g(x) \leqq 0 \\ x \in X, \end{cases} \tag{3.34}$$

donde el funcional $f : X \to \mathbb{R}$ es Frêchet diferenciable y los operadores $g : X \to \mathbb{R}^m$ y $F : X \to Y$ son considerados dos veces Frêchet diferenciables, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M, X e Y son espacios de Banach, el subespacio $\mathrm{Im}F'(x_0)$ es cerrado en Y y donde $g(x) \leqq 0$, es equivalente a que $g_i(x) \leq 0$, para todo i en $I = \{i,\ i = 1, \cdots, m\}$.

Cono tangente de segundo orden a las restricciones de igualdad M_F

Nuetra finalidad ahora es determinar el cono tangente, para el conjunto de interior vacío, M_F, mediante aproximaciones de segundo orden. Para ello daremos la definición de punto 2-regular, para un punto de M_F, y estableceremos condiciones suficientes, para asegurar que un punto dado es 2-regular, de acuerdo a nuestra definición.

Considere el siguiente conjunto (ver [8], [10], [13] y [6]),

$$H_F(x_0) = \Big\{h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im}F'(x_0)\Big\}, \tag{3.35}$$

donde los corchetes cuadrados denotan la acción de una forma bilineal sobre h y $F''(x_0)(h)h = F''(x_0)[h,h]$.

Note que la condición $F''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im}F'(x_0)$ es equivalente a decir que existe algún x en X, que denotaremos x_h tal que

$$F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0,$$

o bien, (ver [87]),

$$\langle \psi, F''(x_0)[h,h] \rangle = 0, \quad \forall \psi \in [\mathrm{Im}F'(x_0)]^{\perp} = \ker F'^{*}(x_0).$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$H_F(x_0) = \Big\{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0,\ F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\Big\}, \tag{3.36}$$

o bien

$$H_F(x_0) = \Big\{h \in X,\ F'(x_0)h = 0, \langle \psi, F''(x_0)[h,h] \rangle = 0, \quad \forall \psi \in [\mathrm{Im}F'(x_0)]^{\perp} = \ker F'^{*}(x_0)\Big\} \tag{3.37}$$

donde $[\mathrm{Im}F'(x_0)]^{\perp}$ es el subespacio anulador de $\mathrm{Im}F'(x_0)$ y $F'^{*}(x_0) : Y^* \to X^*$, es el operador adjunto de $F'(x_0) : X \to Y$, que se relacionan, (ver [87]), por

$$\left\langle F'^{*}(\bar{x}_0)\psi, h\right\rangle_{X^*X} = \left\langle \psi, F'(\bar{x}_0)h\right\rangle_{Y^*Y}. \tag{3.38}$$

Para caracterizar el cono tangente a M_F, en un punto x_0, introduciremos la siguiente definición de punto 2-regular, del conjunto de interior vacío M_F.

Definición 30 *Diremos que un punto x_0, es un punto 2-regular del conjunto de interior vacío, M_F, si x_0 es un punto de M_F y el cono tangente al conjunto M_F, en el punto x_0, $T_{M_F}(x_0)$ coincide con el cono $H_F(x_0)$,*

$$T_{M_F}(x_0) = \left\{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\right\}. \tag{3.39}$$

Diremos indistintamente que el conjunto de restricciones M_F es 2-regular en x_0, si x_0 es un punto 2-regular del conjunto M_F, o bien que F es 2-regular, en x_0.

Conforme a la definición anterior, se sigue que si x_0 es un punto 2-regular, entonces h es una dirección tangente, de M_F, en x_0, si y solo si el sistema,

$$\begin{array}{lcl} F'(x_0)h & = & 0 \\ F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] & = & 0, \end{array} \tag{3.40}$$

admite solución x_h en X, es decir, el cono tangente es determinado por aproximaciones de segundo orden.

Cualquier condición que asegure que un punto sea 2-regular, la llamaremos condición de 2-regularidad, para el punto x_0 del conjunto con interior vacío M_F.

Bajo los mismos términos del Problema (PE), asumiendo además que el operador F es dos veces Frêchet diferenciable, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M, y que el subespacio $\mathrm{Im}F'(x_0)$ es cerrado en Y, presentamos el siguiente resultado que nos proporciona una condición de 2-regularidad, esto es, una condición suficiente para determinar si un punto dado es 2-regular, del conjunto M_F.

Teorema 31 *Sea x_0 en M_F, si para todo $y \in Y,\quad y = y_1 + y_2$, existen $\xi_1,\ \xi_2$ en X tales que*

$$\begin{array}{lcl} F'(x_0)\xi_2 & = & y_1 \\ F'(x_0)\xi_1 + F''(x_0)[h,\xi_2] & = & y_2, \end{array} \tag{3.41}$$

entonces x_0 es un punto 2-regular, con respecto a h en $H_F(x_0)$, del conjunto M_F.

Demostración: *Debemos demostrar que x_0 es un punto 2-regular de M_F, esto es*

$$T_{M_F}(x_0) = H_F(x_0) = \{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\}.$$

Para ello tomamos un elemento arbitrario h en $T_{M_F}(x_0)$ y demostraremos que h pertenece a $H_F(x_0)$. Sea h en $T_{M_F}(x_0)$ entonces existen $\epsilon_0 > 0$ y una función $r_* : (0, \epsilon_0) \to X$, con $\| r_*(t) \| = o(t)$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$, $x_0 + th + r_*(t) \in M_F$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0 + th + r_*(t)) \\ &= F(x_0) + F'(x_0)(th + r_*(t)) + \frac{1}{2}F''(x_0)[th + r_*(t), th + r_*(t)] + o(t^2) \\ &= tF'(x_0)h + F'(x_0)r_*(t) + \frac{t^2}{2}F''(x_0)[h,h] + \beta(t), \end{aligned}$$

donde $\beta(t) = o(t^2)$.

Ahora, dado que siempre $T_{M_F}(x_0)$ está contenido en $\mathrm{Ker}F'(x_0)$, $F'(x_0)h = 0$, se sigue que, para todo t en $(0, \epsilon_0)$

$$F'(x_0)r_*(t) + \frac{t^2}{2}(F''(x_0)[h,h] + 2\frac{\beta(t)}{t^2}) = 0,$$

lo que implica que $F''(x_0)[h,h] + 2\frac{\beta(t)}{t^2} \in \mathrm{Im}F'(x_0)$. Siendo $\mathrm{Im}F'(x_0)$ cerrada en Y, cuando $t \to 0^+$, $F''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im}F'(x_0)$, entonces h pertenece en $H_F(x_0)$. Por lo tanto, como h es arbitrario,

$$T_{M_F}(x_0) \subseteq \{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\}. \tag{3.42}$$

Recíprocamente, sea h en $H_F(x_0)$, mostraremos que h pertenece a $T_{M_F}(x_0)$.

Para ello consideremos el operador $\widetilde{F}(x_0) : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, definido para todo $(\xi_1, \xi_2) \in \widetilde{X}$

$$\widetilde{F}(x_0)(\xi_1, \xi_2) = (F'(x_0)\xi_2, F'(x_0)\xi_1 + F''(x_0)[\xi_2, \xi_2]), \tag{3.43}$$

donde $\widetilde{X} = X \times X$ e $\widetilde{Y} = \mathrm{Im}F'(x_0) \times Y/\mathrm{Im}F'(x_0)$.

Notar además que siendo $\mathrm{Im}F'(x_0)$ un subespacio cerrado en Y, es posible identificar $Y = \mathrm{Im}F'(x_0) + Y/\mathrm{Im}F'(x_0)$ con $\widetilde{Y} = \mathrm{Im}F'(x_0) \times Y/\mathrm{Im}F'(x_0)$ (ver [87]).

Definamos ahora el subespacio

$$\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \widetilde{X},\ \widetilde{F}(x_0)(\xi_1, \xi_2) = 0\}, \tag{3.44}$$

y observemos que,

$$h \in H_F(x_0) \Longleftrightarrow (x_h, h) \in \widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0), \tag{3.45}$$

donde x_h es solución de (3.40), entonces

$$H_F(x_0) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0) \neq \emptyset. \tag{3.46}$$

Si h está en $H_F(x_0)$ y la condición (3.41) se cumple, entonces (x_h, h) es un punto regular del conjunto con interior vacío $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$ (ver Definición 16).

En efecto, bajo el supuesto de que el operador F es dos veces continuamente Frêchet diferenciable, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M_F, es inmediato que $\widetilde{F}(x_0)$, definido sobre los espacios de Banach $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, es continuo, y que su primera derivada definida para cada (ξ_1, ξ_2) en $\widetilde{X}$,

$$(\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) = (F'(x_0)\xi_2, F'(x_0)\xi_1 + 2F''(x_0)[h, \xi_2]) \tag{3.47}$$

es continua en (x_h, h), y además, de acuerdo a (3.41), también es sobreyectivo, entonces por el teorema de Lyusternik, Teorema 7, el conjunto de direcciones tangentes a $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$, en (x_h, h), coincide con el núcleo del operador $(\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)$, esto es,

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{H}_{\widetilde{F}}}(x_h, h) &= \Big\{(\xi_1, \xi_2) \in \widetilde{X},\ (\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) = 0\Big\} \\ &= \Big\{(\xi_1, \xi_2) \in \widetilde{X},\ F'(x_0)\xi_2 = 0,\ F'(x_0)\xi_1 + 2F''(x_0)[h, \xi_2] = 0\Big\}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

por lo tanto, de acuerdo a la Definición 16, (x_h, h) es un punto regular de $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$.

Sea (x_h, h) en $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$ y consideremos (ξ_1, ξ_2) en $T_{\widetilde{H}_{\widetilde{F}}}(x_h, h)$, entonces existen $\epsilon_0 > 0$ y una función $\tilde{r} : (0,\ \epsilon_0) \to \widetilde{X}$, con $\tilde{r}(t) = (r_1(t),\ r_2(t))$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$,

$$(x_h, h) + t(\xi_1, \xi_2) + (r_1(t),\ r_2(t)) \in \widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0), \qquad \| r(t) \| = o(t).$$

Si denotamos, para todo t en $(0, \epsilon_0)$,

$$\tilde{h} = h + t\xi_2 \qquad \tilde{x}_h = x_h + t\xi_1, \tag{3.49}$$

es inmediato, debido a que $F'(x_0)h = 0$, y $F'(x_0)\xi_2 = 0$, que

$$F'(x_0)\tilde{h} \ = \ 0. \tag{3.50}$$

Definamos ahora la variable $x(t)$, en términos de $\tilde{h}$ y $\tilde{x}_h$, como

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t\tilde{h} + \frac{t^2}{2}\tilde{x}_h \\ &= x_0 + th + \hat{r}(t), \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde $\hat{r} : (0, \epsilon_0) \to X$, es definido $\hat{r}(t) = t^2\xi_2 + t^2\dfrac{x_h}{2} + t^3\dfrac{\xi_1}{2}$ y es tal que $||\hat{r}(t)|| = o(t)$.

Tomando en consideración que

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = h, \quad x''(0) = 2\xi_2 + x_h, \tag{3.52}$$

y que, para todo t en $(0, \epsilon_0)$, $x(t)$ pertenece a $U(x_0)$, entorno de x_0 en X, obtenemos

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= F(x(0)) + tF'(x(0))x'(0) + \frac{t^2}{2}\Big[F''(x(0))[x'(0), x'(0)] + F'(x(0))x''(0)\Big] + o(t^2) \\ &= F(x_0) + tF'(x_0)h + \frac{t^2}{2}\Big[F''(x_0)[h, h] + F'(x_0)(2\xi_2 + x_h)\Big] + o(t^2) \\ &= F(x_0) + tF'(x_0)h + t^2F'(x_0)\xi_2 + \frac{t^2}{2}\Big[F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h, h]\Big] + o(t^2). \end{aligned}$$

De acuerdo a las definiciones (3.49) y (3.51)

$$F(x_0 + th + \hat{r}(t)) = F(x_0) + tF'(x_0)\tilde{h} + \frac{t^2}{2}\Big[F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h]\Big] + o(t^2).$$

Considerando ahora que x_0 pertenece a M_F, la condición (3.50) y que h pertenece a $H_F(x_0)$, podemos concluir que, para todo t en $(0, \epsilon_0)$, $F(h+th+\hat{r}(t)) = 0$, con $\hat{r}(t) = o(t)$, lo que implica que h pertenece a $T_{M_F}(x_0)$, por lo tanto

$$\{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\} \subseteq T_{M_F}(x_0).$$

De la inclusión anterior y de (3.42) obtenemos,

$$T_{M_F}(x_0) = \{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)h = 0, F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0\}.$$

El teorema queda así demostrado.

Debemos hacer notar que la condición de 2-regularidad (3.41), implica la definición de condición de 2-regularidad para el punto x_0, en dirección de h en $H_F(x_0)$, introducida en [13] (ver también [8], [6], [9], y [60]). Y ambas condiciones implican que el punto x_0, del conjunto con interior vacío M_F, es 2-regular, en el sentido de la definición introducida en este trabajo.

Observación 32 *El Teorema 31, nos dice que si para todo h en $H_F(x_0)$, la condición de 2-regularidad (3.41) se cumple, entonces $H_F(x_0) \subseteq T_{M_F}(x_0)$, por lo tanto $T_{M_F}(x_0) = H_F(x_0)$, ya que la inclusión recíproca siempre es válida, lo que implica que x_0 es 2-regular de M_F.*

Note además que si la condición de 2-regularidad (3.41) vale para $h = 0$, entonces el sistema,

$$\begin{aligned} F'(x_0)\xi_1 &= y_1 \\ F'(x_0)\xi_2 &= y_2 \end{aligned}$$

tiene solución $\xi_1,\ \xi_2$ en X. Por lo tanto para todo $y = y_1 + y_2$ en Y, existe $\xi = \xi_1 + \xi_2$ tal que $F'(x_0)\xi = y$, es decir $F'(x_0)$ es sobreyectivo, lo que implica que x_0 es regular. Por otro lado si x_0 es regular entonces x_0 es 2-regular, en efecto si x_0 es regular, la condición de 2-regularidad (3.41) vale para x_0 en M_F, en cualquier dirección $h \in X$, es suficiente poner $\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = 0$, pero, en general, lo inverso no siempre es cierto.

Cono factible de segundo orden de las restricciones de desigualdad M_g

Nuestro interés ahora es caracterizar el cono factible, para el conjunto de las restricciones de interior no vacío, M_g, en un punto no regular. Para ello daremos la definición de punto 2-regular, para M_g y estableceremos condiciones suficientes, para asegurar que un punto dado es 2-regular, de acuerdo a nuestra definición. Previamente haremos las siguientes consideraciones.

Sea x_0 un punto de M_g y sea $g'(x_0) : X \to \mathbb{R}^p$, tal que para todo h en X,

$$g'(x_0)h = (g_1'(x_0)h, g_2'(x_0)h, \cdots, g_p'(x_0)h),$$

donde p es la cardinalidad del conjunto de índices de las restricciones activas $I(x_0)$, definido en (2.3). El operador $g'(x_0)$ será sobreyectivo, esto es $\text{Im}g'(x_0) = \mathbb{R}^p$, si y solo si, no existe un $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_p) \neq 0$, en $\mathbb{R}^s$ tal que $g'^*(x_0)\mu = 0$ (ver [87]), lo que implica que x_0 es un punto regular de M_g.

Si x_0 no es un punto regular, la condición (3.3) no se cumple, lo que implica que el sistema de desigualdades

$$g_i'(x_0)h < 0, \quad \forall i \in I(x_0)$$

no tiene solución h en X, entonces, de acuerdo al Lema 12, x_0 es un punto estacionario de g, lo implica que $g'(x_0)$ no es sobreyectiva, por tanto, $\text{Im}g'(x_0)$ es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^p$, y como $\mathbb{R}^p$ es de dimensión finita, es un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^p$, y por tanto, es posible representar $\mathbb{R}^p$ como una suma directa $\text{Im}g'(x_0) \oplus [\text{Im}g'(x_0)]^\perp$ la cual es isomorfa a $\tilde{W} = \text{Im}g'(x_0) \times [\text{Im}g'(x_0)]^\perp$, esto es

$$\mathbb{R}^p = \text{Im}g'(x_0) \oplus [\text{Im}g'(x_0)]^\perp \cong \text{Im}g'(x_0) \times [\text{Im}g'(x_0)]^\perp := \tilde{W}, \tag{3.53}$$

donde $[\text{Im}g'(x_0)]^\perp$ es el subespacio ortogonal, no nulo, de $\text{Im}g'(x_0)$ en $\mathbb{R}^p$ (ver [87]).

Consideremos ahora el siguiente conjunto, (ver [46], [13]),

$$H_g(x_0) = \Big\{h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),\ \ -g_i''(x_0)[h,h] \in \text{Im } g_i'(x_0) + \mathbb{R}^+,\ i \in I_h(x_0)\Big\},$$

donde $I_h(x_0)$ es un subconjunto del conjunto de índices de las restricciones activas, definido

$$I_h(x_0) = \{i \in I(x_0),\ g_i'(x_0)h = 0\}, \tag{3.54}$$

y los corchetes cuadrados denotan la acción de la forma bilineal sobre h, $g_i''(x_0)(h)h = g_i''(x_0)[h,h]$.

El conjunto $H_g(x_0)$, en el espacio de Banach X, es un cono de vértice 0, en efecto siendo $\text{Im } g_i'(x_0)$, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, para cada $h \in H_g(x_0)$, $\lambda h \in H_g(x_0)$, para todo $\lambda \geq 0$.

Note que la condición $-g_i''(x_0)[h,h] \in \text{Im } g_i'(x_0) + \mathbb{R}^+,\ i \in I_h(x_0)$, es equivalente a decir que existe un elemento en X, que denotaremos por x_h, tal que

$$g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] \leq 0,\ i \in I_h(x_0).$$

Por lo tanto podemos escribir,

$$\begin{aligned} H_g(x_0) = \Big\{h \in X,\ \exists\ x_h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),\ g_i'(x_0)x_h + \\ g_i''(x_0)[h,h] \leq 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

En lo que sigue introduciremos la definición de punto 2-regular, del conjunto de interior vacío M_g.

Definición 33 *Diremos que un punto x_0, en M_g, es un punto 2-regular, del conjunto de interior no vacío M_g, si el cono factible al conjunto M_g, en el punto x_0, $G_{M_g}(x_0)$, puede ser caracterizado por aproximaciones de segundo orden, esto es*

$$G_{M_g}(x_0) = H_g(x_0) = \Big\{h \in X, \exists\ x_h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0), \\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\} \neq \emptyset, \tag{3.56}$$

con $I_h(x_0)$, definido en (3.54).

Observemos que si $I_h(x_0)$ es vacío, en (3.56), entonces $g_i'(x_0)h < 0$, para todo $i \in I(x_0)$, esto equivale a decir que,

$$G_{M_g}(x_0) = \Big\{h \in X,\ g_i'(x_0)h < 0,\ i \in I(x_0)\Big\} \neq \emptyset,$$

lo que implica, de acuerdo a la Defineión 17, que x_0 es un punto regular, de M_g.

De la definición anterior, se sigue que si x_0 es un punto 2-regular, entonces h es una dirección factible para M_g, en el punto x_0, si y solamente si, el sistema de desigualdades,

$$\begin{array}{lll} g_i'(x_0)h & \leq & 0,\ i \in I(x_0), \\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] & < & 0,\ i \in I_h(x_0) \end{array} \tag{3.57}$$

admite solución x_h en X.

Cualquier condición que asegure que un punto x_0 del conjunto con interior no vacío M_g, sea 2-regular, la llamaremos condición de 2- regularidad, para el punto x_0 de M_g.

Bajo los mismos términos del Problema (PE), asumiendo además que el operador g es dos veces Frêchet diferenciable, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M_g, podemos introducir para x_0 en M_g y h en X, la función Frêchet diferenciable $\tilde{g}(x_0) : \widetilde{X} \to \tilde{W}$, $\tilde{g}(x_0) = (\tilde{g}_1(x_0), \cdots, \tilde{g}_s(x_0))$, tal que para cada (ξ_1, ξ_2) en $\widetilde{X}$

$$\tilde{g}_i(x_0)(\xi_1, \xi_2) = (g_i'(x_0)\xi_2, g'(x_0)\xi_1 + g_i''(x_0)[\xi_2, \xi_2]),\ i = 1, \cdots, p, \tag{3.58}$$

y (x_h, h) en $\widetilde{X}$

$$\tilde{g}_i'(x_0)(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) = (g_i'(x_0)\xi_2, g_i'(x_0)\xi_1 + 2g_i''(x_0)[h, \xi_2]),\ i = 1, \cdots, p, \tag{3.59}$$

donde $\widetilde{X} = X \times X$ y donde identificamos, de acuerdo a (3.53), $\tilde{W} = \mathrm{Im}g'(x_0) \times [\mathrm{Im}g'(x_0)]^{\perp}$ con $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}g'(x_0) \oplus [\mathrm{Im}g'(x_0)]^{\perp}$.

Considerando lo anterior expuesto, presentamos el siguiente resultado que nos proporciona una condición suficiente para determinar si un punto dado es 2-regular, del conjunto M_g.

Teorema 34 *Si para todo h en $H_g(x_0)$, (x_h, h), con x_h solución de (3.57), es un punto no estacionario del operador $\tilde{g}(x_0)$, $\{\tilde{g}_i(x_0),\ i \in \tilde{I}_h(x_0)\}$, definidos en (3.59), entonces x_0 es un punto 2-regular del conjunto de interior no vacío, M_g, donde*

$$\tilde{I}_h(x_0) = \{i \in I_h(x_0),\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] = 0\}. \tag{3.60}$$

***Demostración**: Debemos demostrar que x_0 es un punto 2-regular de $M_g(x_0)$, esto es*

$$G_{M_g}(x_0) = \Big\{h \in X, \exists\ x_h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0), \\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\} \neq \emptyset.$$

Para ello tomemos un elemento arbitrario h en $G_{M_g}(x_0)$, entonces existen $\epsilon_0 > 0$ y un entorno $U(h)$, de h, tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$, $x_0 + t\bar{h}$ está en M_g, con $\bar{h}$ en $U(h)$.

Sea $\epsilon_1 > 0$, tal que

$$\bar{h} = h + \frac{1}{t}r(t) \ \in U(h),\ \forall\ t \in (0, \epsilon_1),$$

donde $r(t) = o(t)$.

Entonces para t en $(0, \epsilon)$, con $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$,

$$\begin{aligned}
0 &\geq g(x_0 + t\bar{h}) \\
&= g(x_0 + th + r(t)) \\
&= g(x_0) + tg'(x_0)h + g'(x_0)r(t) + \frac{1}{2}g''(x_0)[th + r(t), th + r(t)] + o(||t\bar{h}||) \\
&= g(x_0) + tg'(x_0)h + g'(x_0)r(t) + \frac{t^2}{2}g''(x_0)[h,h] + \delta(x_0, t), \\
&= g(x_0) + tg'(x_0)h + g'(x_0)r(t) + \frac{t^2}{2}[g''(x_0)[h,h] + \frac{2}{t^2}\delta(x_0, t)],
\end{aligned}$$

donde $\delta(x_0, t) = o(t^2)$.

Si consideramos las restricciones activas, esto es i en $I(x_0)$, obtenemos desde la desigualdad anterior, que

$$0 \geq \lim_{t \to 0^+} \frac{g_i(x_0 + t\bar{h})}{t} = g_i'(x_0)h$$

entonces $g_i'(x_0)h < 0$, si i pertenece a $I(x_0)/I_h(x_0)$.

Si tomamos ahora i en $I_h(x_0)$, esto es $g_i(x_0) = 0$ y $g_i'(x_0)h = 0$, obtenemos que

$$g_i'(x_0)r(t) + \frac{t^2}{2}[g_i''(x_0)[h,h] + \frac{2}{t^2}\delta(x_0, t)] \leq 0,$$

es decir,

$$-[g_i''(x_0)[h,h] + \frac{2}{t^2}\delta(x_0,t)] \in \mathrm{Im} g'(x_0) + \mathbb{R}_+, \ i \in I_h(x_0).$$

Siendo $\mathrm{Im} g'(x_0)$ *cerrada en* $\mathbb{R}^p$ *y* $\mathbb{R}_+$ *un cono, se sigue que, cuando* $t \to 0^+$, $-g_i''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im} g'(x_0) + \mathbb{R}_+, i \in I_h(x_0)$, *por lo tanto* h *está en* $intH_g(x_0)$.

Por lo tanto

$$G_{M_g}(x_0) \subseteq \{h \in X, \exists\, x_h \in X, \ g_i'(x_0)h \leq 0, \ i \in I(x_0), \\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] < 0, \ i \in I_h(x_0)\}. \tag{3.61}$$

Inversamente sea

$$h \in \{h \in X, \exists\, x_h \in X, \ g_i'(x_0)h \leq 0, \ i \in I(x_0), \quad g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] < 0, \ i \in I_h(x_0)\},$$

mostraremos que h *pertenece a* $G_{M_g}(x_0)$, *esto es, que existe un entorno* $U(h)$ *de* h *y un número* $\epsilon > 0$ *tal que para cada* t *en* $(0,\epsilon)$ *y para todo* $\bar{h}$ *en* $U(h)$, $x_0 + t\bar{h}$ *pertenece a* M_g, *es decir* $g_i(x_0 + t\bar{h}) \leq 0$, *para todo* i *en* I.

Para ello consideremos el operador, dado en (3.58), para x_0 *en* M_g, $\tilde{g}(x_0) : \widetilde{X} \to \tilde{W}$, *definido para cada* (ξ_1, ξ_2) *en* $\widetilde{X} = X \times X$.

$$\tilde{g}(x_0)(\xi_1,\xi_2) = (g'(x_0)\xi_2, g'(x_0)\xi_1 + g''(x_0)[\xi_2,\xi_2]),$$

e introduzcamos el conjunto

$$\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0) = \{(\xi_1,\xi_2) \in \widetilde{X}, \ \tilde{g}_i(x_0)(\xi_1,\xi_2) \leqslant 0, \ i \in I(x_0)\}. \tag{3.62}$$

Es simple ver, de la propia definición de los conjuntos $H_g(x_0)$ *y* $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$, *que* $H_g(x_0)$ *y* $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$ *son conos y que*

$$h \in H_g(x_0) \Longleftrightarrow (x_h, h) \in \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0), \tag{3.63}$$

donde x_h *es solución de (3.57).*

Por lo tanto

$$H_g(x_0) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0) \neq \emptyset. \tag{3.64}$$

Ahora como por hipótesis, para todo h *en* $H_g(x_0)$, *el punto* (x_h, h) *es un punto no estacionario del operador* $\tilde{g}(x_0)$, *Definición 10, esto implica, debido al Lema 12, que existen* (ξ_1,ξ_2) *en* $\tilde{X}$, *tal que*

$$\tilde{g}_i'(x_0)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) < \mathbf{0}, \ i \in \tilde{I}_h(x_0),$$

donde

$$\tilde{g}_i'(x_0)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = (g_i'(x_0)\xi_2, g_i'(x_0)\xi_1 + 2g_i''(x_0)[h,\xi_2]), \ i \in \tilde{I}_h(x_0),$$

con $\tilde{I}_h(x_0)$, el conjunto de índices de las restricciones activas de $\tilde{g}(x_0)$, esto es,

$$\begin{array}{rcl}\tilde{I}_h(x_0) & = & \{i \in I_h(x_0),\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] = 0\}, \\ & = & \{i \in I(x_0),\ g_i'(x_0)h = 0,\ g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] = 0\}, \\ & = & \{i \in I(x_0),\ \tilde{g}_i(x_0)(x_h, h) = 0\}.\end{array}$$

Esto implica que, para todo i en $\tilde{I}_h(x_0)$ existe (ξ_1, ξ_2) en $\tilde{X}$, solución del sistema

$$\begin{array}{rcl}g_i'(x_0)\xi_2 & < & 0, \\ g_i'(x_0)\xi_1 + 2g_i''(x_0)[h, \xi_2] & < & 0,\end{array} \tag{3.65}$$

lo que a su vez implica que (x_h, h) es un punto regular del conjunto con interior no vacío $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$, por lo tanto el cono de direcciones factibles a $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$, en el punto (x_h, h), de acuerdo a la Definición 17, es

$$G_{\widetilde{H}_{\tilde{g}}}(x_h, h) = \{(\xi_1, \xi_2) \in X \times X,\ \tilde{g}_i'(x_0)(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) < \mathbf{0},\ i \in \tilde{I}_h(x_0)\}.$$

Conforme a lo anterior, consideremos (ξ_1, ξ_2) en $G_{\widetilde{H}_{\tilde{g}}}(x_h, h)$, entonces de acuerdo a la definición de dirección factible, Definición 8, existen un entorno $U((\xi_1, \xi_2))$ de (ξ_1, ξ_2) y $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon_0)$,

$$(x_h, h) + t(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0),\ \forall\ (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in U((\xi_1, \xi_2)),$$

esto es, si denotamos

$$\tilde{h} = h + t\bar{\xi}_2, \qquad \tilde{x}_h = x_h + t\bar{\xi}_1. \tag{3.66}$$

entonces para todo i en $I_h(x_0)$, $\tilde{g}_i(x_0)(\tilde{x}_h, \tilde{h}) \leq 0$, que es equivalente a decir que para todo i en $I_h(x_0)$

$$\begin{array}{rcl}g_i'(x_0)\tilde{h} & \leq & 0, \\ g_i'(x_0)\tilde{x}_h + 2g_i''(x_0)[\tilde{h}, \tilde{h}] & \leq & 0.\end{array} \tag{3.67}$$

Es fácil ver que $V((\tilde{x}_h, \tilde{h})) = (x_h, h) + tU((\xi_1, \xi_2))$, con t en $(0, \epsilon_1)$ es un entorno de $(\tilde{x}_h, \tilde{h})$.

Si hacemos $\epsilon = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$ y definimos para todo t en $(0, \epsilon)$

$$x(t) = x_0 + t\tilde{h} + \frac{t^2}{2}\tilde{x}_h, \tag{3.68}$$

es posible escribir

$$\begin{array}{rcl}x(t) & = & x_0 + th + t^2\bar{\xi}_2 + \dfrac{t^2}{2}\tilde{x}_h \\ & = & x_0 + th + \tilde{r}(t),\end{array}$$

donde

$$\tilde{r}(t) = t^2\bar{\xi}_2 + \frac{t^2}{2}\tilde{x}_h = t^2\bar{\xi}_2 + \frac{t^2}{2}x_h + \frac{t^3}{2}\bar{\xi}_1, \quad \tilde{r}(t) = o(t). \tag{3.69}$$

Notar que

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = h \quad x''(0) = 2\bar{\xi}_2 + x_h. \tag{3.70}$$

Consideremos ahora

$$\bar{h} = h + \frac{1}{t}\tilde{r}(t) \in U(h), \quad \forall\ t \in (0, \epsilon), \tag{3.71}$$

donde $U(h)$ *es un entorno de* h.

Para t *en* $(0, \epsilon)$, *suficientemente pequeño sea* $x(t)$ *en* $U(x_0) \cap M_g(x_0)$, *donde* $U(x_0) \cap M_g(x_0)$, *es un entorno de* x_0 *en* M_g, *tal que, considerando (3.66) y (3.70),*

$$\begin{aligned}
g(x(t)) &= g(x(0)) + tg'(x(0))x'(0) + \frac{t^2}{2}\Big[g''(x(0))[x'(0), x'(0)] + g'(x(0))x''(0)\Big] + o(t^2) \\
&= g(x_0) + tg'(x_0)h + \frac{t^2}{2}\Big[g''(x_0)[h, h] + g'(x_0)(2\bar{\xi}_2 + x_h)\Big] + o(t^2) \\
&= g(x_0) + tg'(x_0)h + t^2 g'(x_0)\bar{\xi}_2 + \frac{t^2}{2}\Big[g'(x_0)x_h + g''(x_0)[h, h]\Big] + o(t^2).
\end{aligned}$$

Dado que $x(t) = x_0 + t\bar{h}$ *y* $\tilde{h} = h + t\bar{\xi}_2$

$$g(x_0 + t\bar{h}) = g(x_0) + tg'(x_0)\tilde{h} + \frac{t^2}{2}\Big[g'(x_0)x_h + g''(x_0)[h, h]\Big] + o(t^2), \tag{3.72}$$

y dado que, por hipótesis, h *pertenece* $H_g(x_0)$, *se sigue que.*

- *Si* $i \in I \setminus I_h(x_0)$, $g_i(x_0) \leq 0$ *y* $g_i'(x_0)h < 0$, *entonces*

  $$g_i(x_0 + t\bar{h}) \leq 0,\ \forall\ i \in I \setminus I_h(x_0).$$

- *Si* $i \in I_h(x_0)$, *esto es,* $g_i(x_0) = 0$ *y* $g_i'(x_0)h = 0$, *entonces de acuerdo a (3.67) obtenemos de (3.72), que*

  $$g_i(x_0 + t\bar{h}) \leq 0,\ \forall\ i \in I_h(x_0).$$

Podemos concluir entonces que para todo t, *suficientemente pequeño, en* $(0, \epsilon)$ *y para todo* i *en* I, $g_i(x_0 + t\bar{h}) \leq 0$, *con* $\bar{h}$ *en* $U(h)$, *lo que implica que* h *pertenece a* $G_{M_g}(x_0)$, *por lo tanto*

$$\Big\{h \in X, \exists\ x_h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),$$
$$g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h, h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\} \subseteq G_{M_g}(x_0).$$

De la inclusión anterior y de (3.61) obtenemos

$$G_{M_g}(x_0) = \Big\{h \in X, \exists\ x_h \in X,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),$$
$$g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h, h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\} \neq \emptyset.$$

El teorema queda así demostrado.

Diremos indistintamente que el conjunto de restricciones M_g es 2-regular en x_0, si x_0 es un punto 2-regular, de M_g.

Observación 35 *El teorema anterior, Teorema 34, es equivalente a decir que si para toda h en $H_g(x_0)$, (x_h, h) es un punto no estacionario de $\tilde{g}(x_0)$, $\{\tilde{g}_i(x_0),\ i \in \tilde{I}_h(x_0)\}$, Definición 10, entonces $H_g(x_0) \subseteq G_{M_g}(x_0)$, ya que la inclusión recíproca siempre es válida, lo que a su vez implica que x_0 es un punto 2-regular de $M_g(x_0)$.*

La condición de 2-regularidad, determinada en el Teorema 34, implica la condición (3.65), para el punto x_0 en el conjunto con interior no vacío M_g, la cual coincide con la definición de restricciones de desigualdad 2-regulares, en el punto x_0, en la dirección de $h \in H_g(x_0)$, introducida por Izmailov en [46] (ver también [13] y [49]). Y ambas condiciones aseguran que el punto x_0, del conjunto con interior no vacío M_g, es 2-regular, en el sentido de la definición introducida en este trabajo.

Note que, si la condición (3.65) vale para x_0 en M_g, en la dirección $h = 0$, entonces existe $\xi = \xi_1$ ($\xi = \xi_2$) en X, tal que $g_i'(x_0)\xi < 0$ para todo i en $I(x_0)$, lo que implica que x_0 es un punto regular de M_g. Y si x_0 es regular entonces x_0 es 2-regular, en cualquier dirección $h \in X$, es suficiente poner $\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = 0$, pero, en general, lo inverso no siempre es cierto.

Para concluir esta sección introduciremos una definición de 2-regularidad para un punto x_0, del conjunto de restricciones $M = M_F \cap M_g$, del problema escalar ($\hat{\text{PE}}$).

Definición 36 *Diremos que un punto x_0 es un punto 2-regular del conjunto factible M, del ($\hat{\text{PE}}$), si para todo h en $H_M(x_0)$, la condición (3.41) es verificada y el sistema*

$$\begin{cases} F'(x_0)\xi_2 & = & 0 \\ F'(x_0)\xi_1 + F''(x_0)[h, \xi_2] & = & 0, \\ g_i'(x_0)\xi_2 & \leq & 0,\ \forall\ i \in\ I_h(x_0) \\ g_i'(x_0)\xi_1 + g_i''(x_0)[h, \xi_2] & < & 0,\ \forall\ i \in \tilde{I}_h(x_0) \end{cases} \tag{3.73}$$

tiene solución $\xi_1, \xi_2 \in X$, donde

$$H_M(x_0) = \Big\{h \in X,\ F'(x_0)h = 0,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),\ \exists\ x_h \in X,\ F'(x_0)x_h + F''(x_0)[h,h] = 0, g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h,h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\}. \tag{3.74}$$

Diremos, indistintamente, que el problema ($\hat{\text{PE}}$) es 2-regular en x_0 o que el conjunto factible M es 2-regular en x_0.

Si para algún h en $H_M(x_0)$, la condición (3.41) no se cumple o el sistema (3.73) no tiene solución, entonces x_0 no es un punto 2-regular de M.

Observación 37 *Hacemos notar que* $H_M(x_0) \subseteq H_{M_F}(x_0) \bigcap H_{M_g}(x_0)$ *y que siempre, ver las Observaciones 32 y 35, se verifica*

$$\begin{aligned} T_{M_F}(x_0) &\subseteq H_{M_F}(x_0) \\ G_{M_g}(x_0) &\subseteq H_{M_g}(x_0), \end{aligned}$$

en particular si x_0 *es un punto 2-regular de* $M = M_F \cap M_g$, *entonces las inclusiones anteriores se cumplen en la igualdad y por tanto se tiene que*

$$H_M(x_0) \subseteq T_{M_F}(x_0) \bigcap G_{M_g}(x_0) \neq \emptyset,$$

por tanto, si x_0 *es un punto 2-regular de* $M = M_F \cap M_g$, *entonces la intersección de los conos, de direcciones tangentes,* $T_{M_F}(x_0)$, *y de direcciones factibles,* $G_{M_g}(x_0)$, *que son caracterizado mediante aproximaciones de segundo orden, es no vacía. Esto nos permite determinar condiciones de optimalidad, de segundo orden, no degeneradas, para el problema* ($\hat{\mathrm{PE}}$), *en un punto 2-regular.*

3.2.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

Para formular condiciones necesarias de optimalidad de problemas con restricciones de desigualdad (interior no vacío) y con restricciones de igualdad (interior vacío), se debe caracterizar el cono de las direcciones factibles de las restricciones de desigualdad y el cono de las direcciones tangentes a las restricciones de igualdades, en el punto óptimo. Si es posible determinar estos conos por aproximaciones de segundo oden, cuya intersección es no vacía, entonces el problema es 2-regular, y por tanto, es posible obtener condiciones de optimalidad de segundo orden, no degeneradas, ver [8] y [46] .

En esta sección establecemos condiciones necesarias de optimalidad, para problemas no regulares, mediante el método Dubovitskii-Milyutin. Las cuales son una generalización de las condiciones necesarias de optimalidad obtenidas en la Sección 3.1, para problemas regulares.

Si x_0 es una solución óptima del ($\hat{\mathrm{PE}}$) entonces, de acuerdo a la Observación 15, $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$, donde K_0 es el cono de direcciones de descenso de f, $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ es el cono de direcciones factibles de $M_g(x_0)$ y K_{n+1} es el cono de direcciones tangentes $T_{M_F}(x_0)$, esto es

$$K_0 = \{h,\ f'(x_0)h < 0\}, \quad \bigcap_{i=1}^{n} K_i = G_{M_g}(x_0), \quad K_{n+1} = T_{M_F}(x_0).$$

Conforme a lo anterior expuesto se obtiene, de forma inmediata, el siguiente resultado de optimalidad.

Proposición 38 *Si x_0 es una solución óptima, local o global, del problema* ($\hat{\text{PE}}$)*, entonces*

$$f'(x_0)h \geq 0, \ \forall \ h \in T_{M_F}(x_0) \bigcap G_{M_g}(x_0). \tag{3.75}$$

En lo que sigue introduciremos la definición de punto Karush Kuhn Tucker Avakov (KTA), en una cierta dirección, del problema ($\hat{\text{PE}}$), que es una generalización de la definición de un punto Karush Kuhn Tucker (KT), del problema (PE), dada en la Definición 20.

Definición 39 *Diremos que un punto factible x_0 es un punto Karush Kuhn Tucker Avakov (KTA), en dirección de h en X, del ($\hat{PE}$), si existen funciones $\mu = \mu(h), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(h) \in \mathbb{R}^m, \psi = \psi(h), \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(h) \in Y^*$, no identicamente nulas tal que*

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\psi + F''^*(x_0)(h)\tilde{\psi} &= 0 \quad (3.76) \\ \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\tilde{\psi} &= 0, \quad (3.77) \end{aligned}$$

donde $\mu_i \geq 0, \ \tilde{\mu}_i \geq 0, \ \psi$, y $\tilde{\psi}$ son llamados multiplicadores de Lagrange-Avakov, los conjuntos de índices $I_h(x_0)$ e $\tilde{I}_h(x_0)$, son definidos en (3.54) y (3.60), respectivamente y $F''^*(x_0)(h)$, $g_i''^*(x_0)(h)$, son los correspondiente operadores adjuntos de $F''(x_0)(h)$ y $g_i''(x_0)(h)$.

Ahora usaremos el método de Dubovitskii-Milyutin y los resultados de las secciones previas, para probar el siguiente teorema.

Teorema 40 *Si un punto x_0, en M, es una solución óptima, local o global, y es un punto 2-regular del conjunto factible M, del* ($\hat{\text{PE}}$)*, tal que $f'(x_0)h = 0$, h en $H_M(x_0)$, entonces x_0 es un punto KTA, en la dirección de h en $H_M(x_0)$, definido en (3.74).*

Demostración: Consideremos la función escalar $\tilde{f}(x_0) : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$, definida para cada (x, z) en $\widetilde{X} := X \times X$,

$$\tilde{f}(x_0)(x, z) = f'(x_0)z \tag{3.78}$$

y el siguiente problema,

$$(\tilde{PE}) \begin{cases} \text{mín}\, \tilde{f}(x_0)(x, z) & \\ \text{sujeto a} \ \widetilde{F}(x_0)(x, z) & = \ 0 \\ \qquad\qquad \tilde{g}(x_0)(x, z) & \leq \ 0 \\ (x, z) \in \widetilde{X}. & \end{cases}$$

$$(\tilde{PE}) \begin{cases} \text{mín}\, \tilde{f}(x_0)(x, z) \\ \text{sujeto a} \\ (x, z) \in \widetilde{H}(x_0) = \widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0) \cap \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0), \end{cases}$$

donde $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$ y $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$ son definidos en (3.44) y (3.62) respectivamente.

Mostraremos que si x_0 es solución del ($\hat{\text{PE}}$) y es un punto 2-regular, entonces para todo h en $H_M(x_0)$, (x_h, h) es solución, y es un punto regular, del $(\tilde{PE})$.

Si x_0 es una solución óptima y es un punto 2-regular del conjunto factible M, entonces, debido a la condición de optimalidad (3.75) y a la Observación 37,

$$f'(x_0)z \geq 0, \ \forall \ z \in G_{M_g}(x_0) \bigcap T_{M_F}(x_0) = H_F(x_0) \bigcap H_g(x_0), \tag{3.79}$$

y como, de acuerdo a (3.45) y (3.63),

$$z \in H_F(x_0) \bigcap H_g(x_0) \Longleftrightarrow (x, z) \in \widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0) \bigcap \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0),$$

obtenemos, de la propia definición de $\tilde{f}(x_0)$,

$$\tilde{f}(x_0)(x, z) \geq 0, \quad \forall \ \ (x, z) \in \widetilde{H}(x_0). \tag{3.80}$$

Ahora como h pertenece a $H_M(x_0)$, definido en (3.74), entonces, siendo x_0 2-regular, existe algún $x_h \in X$, tal que (x_h, h) está en $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$ y $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$, es decir, (x_h, h) pertenece a $\widetilde{H}(x_0)$ y siendo que $H_M(x_0)$ está contenido en $G_{M_g}(x_0) \bigcap T_{M_F}(x_0)$, entonces por (3.79) $f'(x_0)h \geq 0$ y como por hipótesis $f'(x_0)h = 0$, se sigue que

$$\tilde{f}(x_0)(x_h, h) = 0, \ (x_h, h) \in \widetilde{H}(x_0). \tag{3.81}$$

Por lo tanto, debido a (3.80) y (3.81), (x_h, h) es solución de $(\tilde{PE})$.

Para obtener condiciones necesarias de optimalidad, para (x_h, h) del problema $(\tilde{PE})$, mediante el método de Dubovitskii-Milyutin, procedemos análogamente como en la Sección 3.1, para ello debemos conocer el cono de direcciones de descenso del funcional $\tilde{f}(x_0)$ en el punto (x_h, h), esto es $FC(\tilde{f}(x_0), (x_h, h))$, el cono de direcciones factibles, para el conjunto $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$, $G_{\widetilde{H}_{\tilde{g}}}(x_0)$, y el cono de direcciones tangente a $\widetilde{H}_{\widetilde{F}}(x_0)$, $T_{\tilde{H}_F}(x_h, h)$, todos en el punto (x_h, h).

El cono de las direcciones de descenso del funcional lineal $\tilde{f}(x_0)$ en el punto (x_h, h), de acuerdo a (2.1), es

$$\widetilde{\mathcal{K}}_0 = FC(\tilde{f}(x_0), (x_h, h)) = \{(x, \xi), (\tilde{f}(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) < 0\},$$

donde para todo (x, ξ) en $\widetilde{X}$

$$(\tilde{f}(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) = \tilde{f}(x_0)(x, \xi) = f'(x_0)\xi.$$

Por lo tanto el cono de direcciones de descenso de $\tilde{f}(x_0)$ en (x_h, h), $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ y su cono dual $\widetilde{\mathcal{K}}_0^*$, de acuerdo a lo anterior y a la Observación 3, son

$$\widetilde{\mathcal{K}}_0 = \{(x,\xi), f'(x_0)\xi < 0\}; \qquad \widetilde{K}_0^* = \{-\lambda_0 \tilde{f}(x_0), \lambda_0 \geq 0\}. \tag{3.82}$$

Siendo x_0 un punto 2-regular, entonces, de acuerdo a la Definición 36, para todo h en $H_M(\bar{x}_0)$ existen x, ξ en X, tal que la condición (3.73) se cumple, lo que implica que existe (x,ξ) en $\widetilde{X}$, tal que

$$(\tilde{g}_i(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) < 0, \ i \in \tilde{I}_h(x_0),$$

donde $\tilde{I}_h(x_0)$, definido en (3.60), es el conjunto de índices de las restricciones activas de $\tilde{g}(x_0)$, esto implica, de acuerdo a la Observación 9, que el cono de direcciones factibles $\widetilde{\mathcal{K}}_1 = G_{\widetilde{H}_{\tilde{g}}}(x_0)$, es

$$\widetilde{\mathcal{K}}_1 \ = \bigcap_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \Big\{(x,\xi) \in \widetilde{X}, \ (\tilde{g}_i(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) < 0\Big\} \tag{3.83}$$

y, de acuerdo a la Observación 3, su cono dual

$$\widetilde{\mathcal{K}}_1^* \ = \ \Big\{ \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} -\langle \bar{\mu}_i, \ (\tilde{g}_i(x_0))'(x_h, h)\rangle, \ \bar{\mu}_i \geqq 0 \Big\}, \tag{3.84}$$

donde $(\tilde{g}_i(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) = (g_i'(x_0)\xi, g_i'(x_0)x + 2g_i'(x_0)[h,\xi])$ y $\bar{\mu}_i = (\mu_i, \breve{\mu}_i) \geqq 0$ es equivalente a que $\mu_i \geq 0$ y $\breve{\mu}_i \geq 0$.

Ahora como estamos bajo el supuesto de que el operador F es dos veces continuamente Frêchet diferenciable, en un entorno $U(x_0)$ de x_0 en M_F, es inmediato que $\widetilde{F}(x_0)$, es continuo, y que el operador $(\widetilde{F}(x_0))'$ es continuo en (x_h, h). Además, siendo x_0 2-regular, para todo h en $H_M(x_0)$ la condición (3.41) se cumple, lo que implica que $(\widetilde{F}(x_0)(x_h, h))' := (\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)$ es sobreyectivo, entonces por el teorema de Lyusternik, Teorema 7, el cono de direcciones tangente $\widetilde{\mathcal{K}}_2 = T_{\widetilde{H}_{\widetilde{F}}}(x_h, h)$, es

$$\widetilde{\mathcal{K}}_2 \ = \ \Big\{(x,\xi), (\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) = 0\Big\} \tag{3.85}$$

y su cono dual $\widetilde{\mathcal{K}}_2^*$, de acuerdo a la Observación 3,

$$\widetilde{\mathcal{K}}_2^* \ = \ \Big\{ -\bar{\psi}^*(\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h), \ \bar{\psi}^* \in \widetilde{Y}^* \Big\}, \tag{3.86}$$

donde consideramos que $\bar{\psi}^*(\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h)$ pertenece a X^*, para todo $\bar{\psi}^* \in \widetilde{Y}^*$ y donde $(\widetilde{F}(x_0))'(x_h, h) : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ definido $(\tilde{F}(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) = (F'(x_0)\xi, F'(x_0)x + 2F''(x_0)[h,\xi])$.

Bajo la misma hipótesis, x_0 2-regular, con respecto h en $H_M(x_0)$ arbitrario, se sigue que, para todo h en $H_M(x_0)$ el sistema (3.73) admite solución, por lo tanto, debido a la linealidad de este sistema, podemos afirmar que existen $(x,\ \xi)$ en $\widetilde{X}$ tales que,

$$\begin{array}{rcl}(\tilde{F}(x_0))'(x_h,h)(x,\ \xi) & = & 0 \\ (\tilde{g}_i(x_0))'(x_h,h)(x,\ \xi) & < & 0,\ i\in \tilde{I}_h(x_0).\end{array} \tag{3.87}$$

Concluimos que, de acuerdo a la Definición 18, (x_h,h) es un punto regular del problema $(\tilde{\text{PE}})$.

Observemos que si (x_h,h) es un punto regular del problema $(\tilde{\text{PE}})$ entonces $\widetilde{\mathcal{K}}_1\bigcap\widetilde{\mathcal{K}}_2\neq\emptyset$ por lo tanto, de acuerdo a la Observación 15, si $f_0\in\mathcal{K}_0^*$, $f_0\neq 0$, ahora como $f_0=-\lambda_0\tilde{f}(x_0)$, entonces λ_0 es no nulo, por tanto podemos considerar $\lambda_0=1$.

Como x_0 es un punto 2-regular y es una solución óptima del $(\hat{\text{PE}})$ implica que (x_h,h) es un punto regular y es una solución óptima del $(\tilde{PE})$, conforme al Teorema 14, existen, f_0 no nulo en $\widetilde{\mathcal{K}}_0^*$, definido en (3.82), f_1 en $\widetilde{\mathcal{K}}_1^*$, definido en (3.84), y f_2 en $\widetilde{\mathcal{K}}_2^*$, definido en (3.86), tales que

$$f_0+f_1+f_2=\mathbf{0},$$

y por lo tanto para todo $(x,\xi)\in X\times X$,

$$\tilde{f}(x_0)(x,\xi)+\sum_{i\in\tilde{I}_h(x_0)}\langle\bar{\mu}_i,\ (\tilde{g}_i(x_0))'(x_h,h)(x,\xi)\rangle+\langle\bar{\psi}^*,(\widetilde{F}(x_0))'(x_h,h)(x,\xi)\rangle=0. \tag{3.88}$$

Para especificar la ecuación anterior, notemos que, de acuerdo a la definición de $(\widetilde{F}(x_0))'(x_h,h)$ dada en (3.47), para todo (x,ξ)

$$(\widetilde{F}(x_0))'(x_h,h)(x,\xi)=(F'(x_0)\xi,F'(x_0)x+2F''(x_0)[h,\xi])\in\widetilde{Y}=\mathrm{Im}F'(x_0)\times Y\setminus\mathrm{Im}F'(x_0),$$

y usando la definición de producto directo para el espacio $\widetilde{Y}^*$, obtenemos que para todo $\bar{\psi}^*=(\psi^*,\check{\psi}^*)$ en $\widetilde{Y}^*$,

$$\langle\bar{\psi}^*,(\widetilde{F}(x_0))'(x_h,h)(x,\xi)\rangle \;=\; \langle\psi^*,F'(x_0)\xi)\rangle+\langle\check{\psi}^*,F'(x_0)x+2F''(x_0)[h,\xi]\rangle,$$

Ahora siendo el subespacio $ImF'(x^*)$ cerrado en Y y siendo que ψ^* pertenece a $[\mathrm{Im}F'(x^*)]^*$ y $\check{\psi}^*$ a $[Y\setminus\mathrm{Im}F'(x^*)]^*\equiv[\mathrm{Im}F'(x^*)]^{\perp}$, entonces, debido al teorema de extensión de Hahn-Banach, existen, $\psi,\ \check{\psi}$ en Y^* tal que,

$$\begin{array}{rcl}\psi(y) & = & \psi^*(y),\ \forall\ y\in\mathrm{Im}F'(x^*) \\ \check{\psi}(\tilde{y}) & = & \check{\psi}^*(\tilde{y}),\ \forall\ \tilde{y}\in Y\setminus\mathrm{Im}F'(x^*).\end{array} \tag{3.89}$$

Por lo tanto podemos afirmar la existencia de $\psi,\ \check{\psi}$ en Y^*, tal que para todo x,ξ en X,

$$\begin{array}{rcl}\langle\bar{\psi}^*(\widetilde{F}(x_0))'(x_h,h)(x,\xi)\rangle & = & \langle\psi^*,F'(x_0)\xi)\rangle+\langle\check{\psi}^*,F'(x_0)x+2F''(x_0)[h,\xi]\rangle \\ & = & \langle\psi,F'(x_0)\xi)\rangle+\langle\check{\psi},F'(x_0)x+2F''(x_0)[h,\xi]\rangle \\ & = & \langle(F'(x_0))^*\psi+(F''(x_0)h)^*(2\check{\psi}),\xi)\rangle+\langle(F'(x_0))^*\check{\psi},x\rangle.\end{array} \tag{3.90}$$

Similarmente, de acuerdo a la definición de $\widetilde{g}(x_0)$, dada en (3.58), su derivada $(\widetilde{g}(x_0))'(x_h, h)$, para todo (x, ξ) en $\widetilde{X}$ es

$$(\widetilde{g}(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) = (g'(x_0)\xi, g'(x_0)x + 2g''(x_0)[h, \xi]) \in \widetilde{W} = \mathrm{Im}g'(x_0) \times [\mathrm{Im}g'(x_0)]^{\perp},$$

y usando la definición de producto directo para el espacio $\widetilde{W}^*$, obtenemos que para todo $\bar{\mu} = (\mu, \breve{\mu})$ en $\widetilde{W}^*$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mu}, (\widetilde{g}(x_0))'(x_h, h)(x, \xi)) \rangle &= \langle \mu, g'(x_0)\xi) \rangle + \langle \breve{\mu}, g'(x_0)x + 2g''(x_0)[h, \xi] \rangle \\ &= \langle (g'(x_0))^* \mu + (g''(x_0)h)^*(2\breve{\mu}), \xi) \rangle + \langle (g'(x_0))^* \breve{\mu}, x \rangle \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \langle \bar{\mu}_i, (\widetilde{g}_i(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) \rangle &= \sum_{i \in I_h(x_0)} \Big\langle \mu_i, g_i'(x_0)\xi \Big\rangle + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \Big\langle \breve{\mu}_i, g_i'(x_0)x \Big\rangle \\ &\quad + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \Big\langle \breve{\mu}_i, 2g_i''(x_0)[h, \xi] \Big\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} (g_i''(x_0)h)^*(2\breve{\mu}_i), \xi) \Big\rangle \\ &\quad + \Big\langle \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} (g_i'(x_0))^* \breve{\mu}_i, x \Big\rangle. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Reemplazando $\tilde{f}(x_0)$, definida en (3.78), y las igualdades (3.90) y (3.91), en la igualdad (3.88), que se cumple, para todo (x, ξ) en $\widetilde{X}$, obtenemos

$$\Big\langle f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)(2\breve{\mu}_i) + F'^*(x_0)\psi + F''^*(x_0)(h)(2\breve{\psi}), \quad \xi \Big\rangle = 0,$$

$$\Big\langle \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\breve{\mu}_i + F'^*(x_0)\breve{\psi}, \ x \Big\rangle = 0.$$

Si multiplicamos por dos la segunda igualdad, denotamos $\tilde{\mu} = 2\breve{\mu}$ y $\tilde{\psi} = 2\breve{\psi}$ y, además, consideramos que la primera igualdad se cumple para todo ξ en X y la segunda se cumple para todo x en X, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\psi + F''^*(x_0)(h)\tilde{\psi} &= 0, \\ \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\tilde{\psi} &= 0, \end{aligned}$$

donde por simplicidad denotamos $(F'(x_0))^* = F'^*(x_0)$, $(F''(x_0)h)^* = F''^*(x_0)(h)$, $(g_i'(x_0))^* = g_i'^*(x_0)$, $(g_i''(x_0)h)^* = g_i''^*(x_0)(h)$.

El teorema queda así demostrado.

Observación 41 *En el transcurso de la demostración es posible observar que si*

$$\begin{array}{ccccc} x_0 \text{ es un punto} & & (x_h, h) \text{ es un punto KT} & & x_0 \text{ es un punto} \\ 2 \text{ regular del } (\hat{\text{PE}}), & \Longrightarrow & \text{del } (\tilde{\text{PE}}) & \Longleftrightarrow & \text{KTA del } (\hat{\text{PE}}) \\ h \in H_M(x_0) & & h \in H_M(x_0) & & h \in H_M(x_0). \end{array}$$

Notemos que siendo $\text{Im}F'(x_0)$, un subespacio cerrado en Y, entonces $(Y \setminus \text{Im}F'(x_0))^*$ y el subespacio anulador de $\text{Im}F'(x_0)$, $[\text{Im}F'(x_0)]^\perp$, son isomórficamente isométricos, ver [87], por lo tanto es posible hacer la siguiente identificación

$$(Y \setminus \text{Im}F'(x_0))^* \equiv [\text{Im}F'(x_0)]^\perp = \text{Ker}F'^*(x_0).$$

Luego si $F'(x_0)$ es sobrejectivo, entonces $\text{Ker}F'^*(x_0)$ es el subespacio nulo. Similarmente, si $g'(x_0)$, $\{g_i,\ i \in I(x_0)\}$ es sobrejectivo, $\text{Im}g'(x_0) = \mathbb{R}^p$, entonces $[\text{Im}g'(x_0)]^\perp = \text{Ker}g'^*(x_0)$ es el subespacio nulo.

Luego si $\tilde{\mu}$ pertenece a $[\text{Im}g'(x_0)]^\perp$ y $\tilde{\psi}$ pertenece a $\text{KerF}'^*(\text{x}_0)$ entonces $\tilde{\psi} = 0$ y $\tilde{\mu} = 0$, esto implica que el problema es regular o normal, para el punto $x_0 \in M$, y los multiplicadores de Lagrange-Avakov $\bar{\lambda} = (1, \mu, \psi, 0, 0)$, en la Definición 39, son transformados en los multiplicadores de Lagrange $\bar{\lambda} = (1, \mu, \psi)$, en la Definición 20, y el Teorema 40 es transformado en el Teorema 21 (tomando $h = 0$ en $H_M(x_0)$, definido en (3.74)).

De lo anteriormente expuesto podemos hacer la siguiente observación.

Observación 42 *Si x_0 es un óptimo, de acuerdo al Teorema 40, es cierta una de las siguientes afirmaciones*

- *si x_0 es un punto regular las ecuaciones de Euler-Lagrange son válidas con $\tilde{\psi}$ y $\tilde{\mu}_i$, idénticamente nulos.*
- *si x_0 es un punto 2-regular hay un familia de ecuaciones de Euler-Lagrange, que son válidas con $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(h)$ y $\tilde{\mu}_i = \tilde{\mu}_i(h)$, no todos identicamente nulos, dependiendo del parámetro h en $H_M(x_0)$.*

Ahora presentamos condiciones necesarias de optimalidad, para un problema escalar, con l condiciones de igualdad y una restricción adicional, que no es determinada por un función.

Bajo los mismo términos del problema (PÊ), consideremos

$$(\hat{PE})\begin{cases} \min f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \bar{F}(x) = 0 \\ g(x) \leqq 0 \\ x \in \mathbb{Q} \subset X \end{cases} \tag{3.92}$$

donde $\bar{F} : X \to \bar{Y}$ es definido para cada x en X, $\bar{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_l(x))$ y es tal que para todo $i = 1, \cdots, l$, $F_i : X \to Y_i$ es dos veces continuamente Frêchet diferenciable, en un entorno $U(x_0)$ de x_0, los subespacios $\mathrm{Im}F_i'(\bar{x}_0)$ son cerrados en Y_i, con X, $\bar{Y} = Y_1\times, \cdots, \times Y_l$ espacio de Banach y donde $\mathbb{Q}$ es un conjunto cerrado, convexo con interior no vacío.

Si denotamos por $\hat{\hat{M}} = M_{\bar{F}} \cap M_g \cap \mathbb{Q}$, el conjunto factible del $(\hat{\hat{P}E})$, esto es

$$\hat{\hat{M}} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I, \quad x \in \mathbb{Q}\}$$

donde $M_{\bar{F}} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0\}$ y $M_g = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\}$, podemos escribir el problema escalar $(\hat{\hat{P}}E)$ como:

$$(\hat{\hat{P}}E)\begin{cases} \text{mín } f(x) \\ \text{sujeto a } \ x \in \hat{\hat{M}} = M_{\bar{F}} \cap M_g \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En lo que sigue introduciremos la definición de punto 2-regular del conjunto factible $\hat{\hat{M}}$ y de punto KTA del problema $(\hat{\hat{P}}E)$, además introduciremos condiciones de optimalidad para un punto 2-regular x_0 en $\hat{\hat{M}}$, del problema $(\hat{\hat{P}}E)$.

Definición 43 *Diremos que un punto x_0 es un punto 2-regular del conjunto factible $\hat{\hat{M}}$, del $(\hat{\hat{P}}E)$, si para todo h en $H_{\hat{\hat{M}}}(x_0)$, $\bar{F}$ satisface la condición (3.41) y el sistema*

$$\begin{cases} \bar{F}'(x_0)\xi_2 & = & 0 \\ \bar{F}'(x_0)\xi_1 + \bar{F}''(x_0)[h, \xi_2] & = & 0, \\ g_i'(x_0)\xi_2 & \leq & 0,\ \forall\ i \in \ I_h(x_0) \\ g_i'(x_0)\xi_1 + g_i''(x_0)[h, \xi_2] & < & 0,\ \forall\ i \in \tilde{I}_h(x_0) \end{cases} \tag{3.93}$$

tiene solución $\xi_1, \xi_2 \in X$, $\xi_2 = \hat{\lambda}(x - x_0 - th)$, $\hat{\lambda},\ t > 0,\ x \in \mathrm{Int}\mathbb{Q}$ donde

$$H_{\hat{\hat{M}}}(x_0) = \Big\{h = \lambda(x - x_0), \lambda > 0,\ \bar{F}'(x_0)h = 0,\ g_i'(x_0)h \leq 0,\ i \in I(x_0),$$

$$\exists\ x_h \in X,\ \bar{F}'(x_0)x_h + \bar{F}''(x_0)[h, h] = 0, g_i'(x_0)x_h + g_i''(x_0)[h, h] < 0,\ i \in I_h(x_0)\Big\}.$$

Diremos, indistintamente, que el problema $(\hat{\hat{P}}E)$ es 2-regular en x_0 o que el conjunto factible $\hat{\hat{M}}$ es 2-regular en x_0.

Definición 44 *Diremos que un punto factible x_0 es un punto Karush Kuhn Tucker Avakov (KTA), en dirección de h en X, del $(\hat{\bar{P}}E)$, si existen funciones $\mu = \mu(h), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(h) \in \mathbb{R}^m, \psi = \psi(h), \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(h) \in \bar{Y}^*$, no todas identicamente nulas tal que*

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\psi & \\ + \sum_{k=1}^{l} F_k''^*(x_0)(h)\tilde{\psi} &= \bar{f}_s \qquad (3.94) \\ \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\tilde{\psi}_k &= 0, \qquad (3.95) \end{aligned}$$

donde llamaremos a $\mu_i \geq 0$, $\tilde{\mu}_i \geq 0$, ψ y $\tilde{\psi}$ multiplicadores de Lagrange-Avakov, los conjuntos de índices $I_h(x_0)$ e $\tilde{I}_h(x_0)$, son definidos en (3.54) y (3.60), respectivamente y donde $\bar{f}_s$, es el funcional soporte para el conjunto $\mathbb{Q}$, en x_0, es decir

$$\bar{f}_s(x - x_0) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}.$$

Las Definiciones 43 y 44 de punto 2-regular y de punto KTA en una cierta dirección, del problema $(\hat{\bar{P}}E)$, son una generalización de la Definiciones 24 y 25 de punto regular y de punto Karush Kuhn Tucker (KT), del problema (P̄E), respectivamente.

Ahora usaremos el método de Dubovitskii-Milyutin y los resultados de las secciones previas, para probar el siguiente teorema.

Teorema 45 *Si un punto x_0, en $\hat{\bar{M}}$, es una solución óptima, local o global, y es un punto 2-regular, del $(\hat{\bar{P}}E)$, tal que $f'(x_0)h = 0$, h en $H_{\hat{\bar{M}}}(x_0)$, entonces x_0 es un punto KTA, en la dirección de h en $H_{\hat{\bar{M}}}(x_0)$.*

***Demostración**: La demostración es en la misma dirección de la demostración del Teorema 40. Consideremos la función escalar $\tilde{f}(x_0) : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$, definida para cada $(x,z) \in \widetilde{X} := X \times X$,*

$$\tilde{f}(x_0)(x,z) = f'(x_0)z \qquad (3.96)$$

y el siguiente problema,

$$(\widetilde{\bar{P}E}) \begin{cases} \text{mín}\, \tilde{f}(x_0)(x,z) & \\ \quad \textit{sujeto a} & \\ \qquad \tilde{\bar{F}}(x_0)(x,z) & = \; 0 \\ \qquad \tilde{g}(x_0)(x,z) & \leq \; 0. \\ \quad (x,z) \in X \times K_{\mathbb{Q}}, & \end{cases}$$

donde $\tilde{g}(x_0)$ *es definida en (3.58),* $\widetilde{\widetilde{F}}(x_0)(x,z) = (\widetilde{F}_1(x_0)(x,z), \cdots, \widetilde{F}_l(x_0)(x,z))$*, con* $\widetilde{F}_k(x_0) : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}_k,\ k = 1, \cdots, l$*,* $\widetilde{Y}_k = \mathrm{Im}F'_k(x_0) \times Y_k/\mathrm{Im}F'_k(x_0)$*, definido para cada* (x,z) *en* $\widetilde{X}$ *como*

$$\widetilde{F}_k(x_0)(x,z) \quad = \quad (F'_k(x_0)z, F'_k(x_0)x + F''_k(x_0)z),\ k = 1, \cdots, l \tag{3.97}$$

y donde

$$K_{\mathbb{Q}} = \{z \in X,\ z = \lambda(x - x_0), \lambda\ > 0,\ x \in \mathrm{int}\mathbb{Q}\}. \tag{3.98}$$

El problema $\widetilde{\widetilde{PE}}$ *es equivalente al siguiente problema*

$$(\widetilde{\widetilde{PE}})\begin{cases} \text{mín}\, \tilde{f}(x_0)(x,z) \\ \ \textit{sujeto a} \\ (x,z) \in \widetilde{\widetilde{H}}(x_0) = \widetilde{H}_{\widetilde{\widetilde{F}}}(x_0) \cap \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0) \cap \widetilde{H}_{\mathbb{Q}}(x_0), \end{cases}$$

donde $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x_0)$ *es definido en (3.62),* $\widetilde{H}_{\mathbb{Q}}(x_0) = X \times K_{\mathbb{Q}}$ *y*

$$\widetilde{H}_{\widetilde{\widetilde{F}}}(x_0) \quad = \quad \{(x,\xi) \in \widetilde{X},\ \widetilde{\widetilde{F}}(x_0)(x,\xi) = 0\}. \tag{3.99}$$

Siendo que x_0 *es un punto 2-regular y es solución del problema* $(\hat{\hat{PE}})$*, es fácil mostrar, usando los mismos argumentos de la demostración del Teorema 40, que* (x_h, h) *en un punto regular de* $\widetilde{\widetilde{H}}(x_0)$ *y es solución del problema* $(\widetilde{\widetilde{PE}})$*.*

Por lo tanto, de acuerdo al formalismo de Dubovitskii-Milyutin, Teorema 14, existen f_0 *en* $\widetilde{\mathcal{K}}_0^*$*,* f_1 *en* $\widetilde{\mathcal{K}}_1^*$*,* f_2 *en* $\widetilde{\widetilde{\mathcal{K}}}_2^*$ *y* f_3 *en* $\widetilde{\mathcal{K}}_3$ *tales que*

$$f_0 + f_1 + \hat{\hat{f}}_2 + f_3 = \mathbf{0},$$

donde el cono de las direcciones de descenso de la función objetivo $\tilde{f}(x_0)$*,* $\widetilde{\mathcal{K}}_0 = FC(\tilde{f}(x_0), (x_h, h))$*, y su cono dual* $\widetilde{\mathcal{K}}_0^* = [FC(\tilde{f}(x_0), (x_h, h))]^*$*, fueron determinados en (3.82), el cono factible,* $\widetilde{\mathcal{K}}_1 = G_{\widetilde{H}_g}(x_h, h)$*, del conjunto* $\widetilde{H}_g$*, y su cono dual* $\widetilde{\mathcal{K}}_1^*$ *en (3.83) y (3.84) respectivamente, por lo tanto debemos determinar únicamente los conos tangentes,* $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_2$*, del conjunto* $\widetilde{H}_{\widetilde{\widetilde{F}}}(x_0)$ *y* $\tilde{K}_3$ *del conjunto* $\widetilde{H}_{\mathcal{Q}}(x_0)$ *y sus respectivos conos duales, ámbos en el punto* (x_h, h)*,*

Como por hipótesis $F_k,\ \ k = 1, \cdots, l$ *es dos veces continuamente Frêchet diferenciable, en un entorno* $U(x_0)$ *de* x_0 *en* $M_{\hat{\hat{F}}}$*, es inmediato de sus propias definiciones, que* $\widetilde{\widetilde{F}}(x_0)$ *y* $(\widetilde{\widetilde{F}}(x_0))'$ *son continuos en* (x_h, h)*. Además, siendo* x_0 *un punto 2-regular, la condición (3.41) se cumple, para todo* h *en* $H_M(x_0)$*, entonces* $(\widetilde{\widetilde{F}}(x_0))'(x_h, h)$ *es sobreyectivo, lo que implica que, para cada* $k = 1, \cdots, l$*,* $(\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)$*, es también sobreyectivo, luego por el teorema de Lyusternik, Teorema 7, el cono de direcciones tangente al conjunto* $\widetilde{H}_{\widetilde{F}_k}$*, en el punto* (x_h, h)*, es*

$$T_{\widetilde{H}_{\widetilde{F}_k}}(x_h, h) \quad = \quad \Big\{(x,\xi) \in \widetilde{X}, (\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)(x,\xi) = 0\Big\}, \tag{3.100}$$

y su cono dual $T^*_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h)$*, de acuerdo a la Observación 3,*

$$T^*_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h) \quad = \quad \Big\{ -\bar{\psi}^*_k(\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h),\ \bar{\psi}^*_k \in \widetilde{Y}^*_k \Big\}. \tag{3.101}$$

Siendo (x_h, h) *un punto regular de* $\widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x_0)$*, entonces el cono tangente al conjunto* $\widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x_0)$*, que denotaremos* $\tilde{\bar{\mathcal{K}}}_2$*, en el punto* (x_h, h) *es*

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{\mathcal{K}}}_2 := T_{\widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}}(x_h, h) \quad &= \quad \{(x, \xi) \in \widetilde{X}, (\widetilde{\bar{F}}(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) = 0\} \\
&= \quad \{(x, \xi) \in \widetilde{X}, (\widetilde{\bar{F}}_k(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) = 0,\ k = 1, \cdots, l\} \qquad (3.102) \\
&= \quad \bigcap_{k=1}^{l} \{(x, \xi) \in \widetilde{X}, (\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)(x, \xi) = 0\} \\
&= \quad \bigcap_{k=1}^{l} T_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h),
\end{aligned}$$

y su cono dual, (ver Lema 1 [57])

$$(\tilde{\bar{\mathcal{K}}}_2)^* = T^*_{\widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}}(x_h, h) = (\bigcap_{k=1}^{l} T_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h))^* = \sum_{k=1}^{l} T^*_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h), \tag{3.103}$$

donde, $T^*_{\widetilde{H}_{\tilde{F}_k}}(x_h, h)$ *es definido en a (3.101).*

Por lo tanto si $\hat{\bar{f}}_2$ *pertenece a* $(\bar{\mathcal{K}}_2)^*$*, entonces* $\hat{\bar{f}}_2 = -\sum_{k=1}^{l} \bar{\psi}^*_k(\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)$.

Ahora como $K_{\mathbb{Q}}$*, definido en (3.98), es un cono cerrado y convexo, con vértice* 0*, en* X*, también* $\widetilde{H}_{\mathbb{Q}}(x_0)$ *es cerrado y convexo, con vértice* $\mathbf{0}$*, en* $\widetilde{X}$*, entonces, el cono,* $T_{\widetilde{H}_{\mathbb{Q}(x_0)}}(x_h, h) := \tilde{\mathcal{K}}_3$*, de las direcciones tangentes al cono* $\widetilde{H}_{\mathbb{Q}}(x_0)$*, en el punto* (x_h, h)*, es*

$$\widetilde{\mathcal{K}}_3 = \{(x, \xi),\ \xi = \lambda(z - h),\ \lambda > 0,\ z \in K_{\mathbb{Q}}\}, \tag{3.104}$$

y su respectivo cono dual (ver 10.5 [43]), coincide con

$$\widetilde{H}^*_{\mathbb{Q}}(x_0) = \{f = (0, \bar{f}_s) \in \widetilde{X}^*, f(x, z) \geq f(x_h, h),\ \forall\ (x, z) \in \widetilde{H}_{\mathbb{Q}}(x_0)\}.$$

Si f_3 *pertenece a* $\tilde{\mathcal{K}}^*_3$*, entonces* $f_3 = (0, \bar{f}_s)$*, donde* $\bar{f}_s(z) \geq \bar{f}_s(h)$*, para todo* z *en* $K_{\mathbb{Q}}$*, siendo* $K_{\mathbb{Q}}$ *un cono convexo de vértice* 0*, entonces (ver Lema 5.1 [43]),* $\bar{f}_s(z) \geq 0$*, para todo* z *en* $K_{\mathbb{Q}} = \{z = \lambda(x - x_0),\ \lambda > 0,\ x \in \mathrm{Int}\mathbb{Q}\}$*, esto es* $\bar{f}_s(x) \geq \bar{f}_s(x_0)$*, para todo* x *en* $\mathrm{Int}\mathbb{Q}$*, lo que implica*

$$\bar{f}_s(x) \geq \bar{f}_s(x_0), \forall\ x \in\ \overline{\mathrm{Int}\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}, \tag{3.105}$$

por tanto $\bar{f}_s$ *es el soporte de* $\mathbb{Q}$ *en* x_0.

Como x_0 *es un punto 2-regular y es una solución óptima del* ($\hat{\bar{\mathrm{PE}}}$*) implica que* (x_h, h) *es un punto regular y es una solución óptima del* $(\widetilde{PE})$*, conforme al Teorema 14, existen,* f_0 *en* $\widetilde{\mathcal{K}}^*_0$*,* *definido en (3.82), f_1 en $\widetilde{\mathcal{K}}_1^*$, definido en (3.84), f_2 en $\widetilde{\widetilde{\mathcal{K}}}_2^*$ definido en (3.103) y $f_3 = (0, \bar{f}_s)$ en (3.104), donde $\bar{f}_s$ es definido en (3.105), tales que*

$$f_0 + f_1 + \hat{\hat{f}}_2 + f_3 = \mathbf{0}.$$

Siendo (x_h, h) un punto regular del problema $(\widetilde{\widetilde{\mathrm{PE}}})$ entonces $\widetilde{\mathcal{K}}_1 \bigcap \widetilde{\widetilde{\mathcal{K}}}_2 \bigcap \widetilde{\mathcal{K}}_3 \neq \emptyset$ luego, de acuerdo a la Observación 15, si $f_0 \in \mathcal{K}_0^*$, $f_0 \neq 0$, y como $f_0 = -\lambda_0 \tilde{f}(x_0)$, entonces λ_0 es no nulo, por lo cual es posible considerar $\lambda_0 = 1$.

Por lo tanto para todo $(x, \xi) \in \widetilde{X} = X \times X$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0)(x,\xi) + \sum_{k \in \tilde{I}_h(x_0)} \langle \bar{\mu}_k,\ (\tilde{g}_k(x_0))'(x_h, h)(x,\xi)\rangle \\ + \sum_{k=1}^{l} \langle \bar{\psi}_k^*, (\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)(x,\xi)\rangle = f_3(x,\xi). \end{aligned} \tag{3.106}$$

Ahora bien, debido a las definiciones de $\widetilde{F}_k(x_0)$ en (3.97), de producto directo para el espacio $\widetilde{Y}_k^*$ y dado que $\bar{\psi}_k^* = (\psi_k^*, \check{\psi}_k^*)$ en $\widetilde{Y}_k^*$, podemos establecer, usando el mismo argumento, para obtener (3.90), la existencia $\psi_k, \check{\psi}_k$ en Y_k^*, tal que para todo x, ξ en X

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_k^*, (\widetilde{F}_k(x_0))'(x_h, h)(x,\xi)\rangle &= \langle \psi_k^*, F_k'(x_0)\xi)\rangle + \langle \check{\psi}_k^*, F_k'(x_0)x + 2F_k''(x_0)[h,\xi]\rangle \\ &= \langle \psi_k, F_k'(x_0)\xi)\rangle + \langle \check{\psi}_k, F_k'(x_0)x + 2F_k''(x_0)[h,\xi]\rangle \\ &= \langle (F_k'(x_0))^*\psi_k + (F_k''(x_0)h)^*(2\check{\psi}_k), \xi)\rangle + \langle (F_k'(x_0))^*\check{\psi}_k, x\rangle, \end{aligned} \tag{3.107}$$

donde $\psi_k, \check{\psi}_k$ en Y_k^* son extensiones lineales y continuas de ψ_k^* en $[\mathrm{Im}F_k'(x_0)]^*$ y de $\check{\psi}_k^*$ en $[Y \setminus \mathrm{Im}F_k'(x_0)]^* = [\mathrm{Im}F_k'(x_0)]^\perp$, respectivamente, para todo $k = 1, \cdots, l$.

Entonces reemplazando $\tilde{f}(x_0)$, definida en (3.96), y las igualdades (3.107) y (3.91) en (3.106), que se cumple, para todo (x, ξ) en $\widetilde{X}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Big\langle f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)(2\check{\mu}_i) \\ + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\psi + \sum_{k=1}^{l} F_k''^*(x_0)(h)(2\check{\psi}),\quad \xi \Big\rangle &= \bar{f}_s(\xi), \\ \Big\langle \sum_{k \in \tilde{I}_h(x_0)} g_k'^*(x_0)\check{\mu}_k + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\check{\psi},\ x \Big\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos por dos la segunda igualdad, denotamos $\tilde{\mu} = 2\check{\mu}$ y $\tilde{\psi} = 2\check{\psi}$ y, además, consideramos que la primera igualdad se cumple para todo ξ en X y la segunda igualdad se cumple para *todo x en X, obtenemos*

$$\begin{aligned} f'(x_0) + \sum_{i\in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i\in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\psi + \sum_{k=1}^{l} F_k''^*(x_0)(h)\tilde{\psi} &= \bar{f}_s, \\ \sum_{i\in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x_0)\tilde{\psi} &= 0, \end{aligned}$$

donde $\bar{f}_s$ es soporte del $\mathbb{Q}$, en el punto x_0 y donde, por simplicidad, denotamos $(F_k'(x_0))^* = F_k'^*(x_0)$, $(F_k''(x_0)h)^* = F_k''^*(x_0)(h)$, $(g_i'(x_0))^* = g_i'^*(x_0)$, $(g_i''(x_0)h)^* = g_i''^*(x_0)(h)$.

El teorema queda así demostrado.

Debemos hacer notar que una condición suficiente para asegurar que la igualdad

$$(\bigcap_{i=1}^{l} K_i)^* = \sum_{i=1}^{l} K_i^*$$

se cumpla es que $K := \bigcap_{i=1}^{l} K_i$ es no vacío, donde los conos K_i, $i = 1, \cdots, l$ son abiertos y convexos, (ver Lema 5.10 [43]), los cuales corresponden a las restricciones de desigualdad, o bien, los conos K_i, $i = 1, \cdots, l$ son debílmente cerrados y convexos y la suma algebraíca de sus conos duales es debílmente $*$ cerrada (ver Corolario Lema 5.8 [43]).

Los conos tangentes, correspondientes a las restricciones de igualdad no son abiertos y la suma algebraíca de los conos duales no es siempre debílmente* cerrado. No obstante, en el caso particular cuando $\widetilde{F}'(x_0)(x_h, h)$ es sobreyectivo la igualdad se cumple, donde $K = TC(\widetilde{F}(x_0), (x_h, h))$ y $K_i = TC(\widetilde{F}_i(x_0), (x_h, h))$ ver Lema 1 en [57].

3.2.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

Los últimos dos teoremas, de la Subsección 3.1.1, nos proporciona condiciones necesarias de optimalidad para los problemas ($\hat{\text{PE}}$) y ($\hat{\hat{\text{PE}}}$), aun cuando estos sean no regulares, pero en general, estas condiciones no son suficientes, sin hipótesis adicionales sobre las funciones y restricciones implicadas en el problema a estudiar, en el sentido que cada punto KTA es una solución óptima del ($\hat{\text{PE}}$) o del ($\hat{\hat{\text{PE}}}$). Por lo tanto introduciremos un concepto de convexidad generalizada, adecuado a nuestro problema, para obtener condiciones suficientes de optimalidad.

Más específicamente introducimos la noción de problemas 2KT-invex, que es esencial para mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, para un punto factible 2-regular, son también suficientes, si y solo si, el problema es 2KT-invex.

Definición 46 *Diremos que* ($\hat{\mathrm{P}}$E) *es 2KT-invex en* $x_0 \in M$*, en dirección* h *en* X*, si para cada punto factible* x *en* M*, existen funciones* $\eta_h,\ \xi_h : X \times X \to X$*, tales que*

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta_h && (3.108)\\
F'(x_0)\eta_h &= 0 && (3.109)\\
F'(x_0)\xi_h + F''(x_0)[h, \eta_h] &= 0 && (3.110)\\
-g_i'(x_0)\eta_h &\geq 0,\ i \in I_h(x_0) && (3.111)\\
-g_i'(x_0)\xi_h - g_i''(x_0)[h, \eta_h] &\geq 0,\ i \in \tilde{I}_h(x_0), && (3.112)
\end{aligned}
$$

donde $\eta_h = \eta_h(x, x_0)$ *y* $\xi_h = \xi_h(x, x_0)$.

Definición 47 *Diremos que* ($\hat{\hat{\mathrm{P}}}$E) *es 2KT-invex en* $\hat{\hat{M}}$*, en dirección de* h *en* X*, si para cada punto factible* $x,\ x_0$ *en* $\hat{\hat{M}}$*, existen funciones* $\eta_h,\ \xi_h : X \times X \to X$*, tales que*

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta_h && (3.113)\\
F_i'(x_0)\eta_h &= 0\ i = 1, \cdots, l && (3.114)\\
F_i'(x_0)\xi_h + F_i''(x_0)[h, \eta_h] &= 0,\ i = 1, \cdots, l && (3.115)\\
-g_i'(x_0)\eta_h &\geq 0,\ i \in I_h(x_0) && (3.116)\\
-g_i'(x_0)\xi_h - g_i''(x_0)[h, \eta_h] &\geq 0,\ i \in \tilde{I}_h(x_0), && (3.117)
\end{aligned}
$$

donde $\eta_h = \eta_h(x, x_0) = \hat{\lambda}(x - x_0 - th)$*,* $\hat{\lambda}, t > 0$ *y* $\xi_h = \xi_h(x, x_0)$.

Note que si el ($\hat{\mathrm{P}}$E) y ($\hat{\hat{\mathrm{P}}}$E) es 2KT-invex en M ($\hat{\hat{M}}$), en dirección de $h = 0$, entonces el problema es KT-invex, conforme a las Definiciones 27 y 28 respectivamente. Basta con considerar $\eta = \eta_h = \xi_h$, debido a que $I_h(x_0) = I(x_0)$.

El próximo resultado, caracteriza completamente los problemas 2KT-invex.

Teorema 48 *Un punto KTA,* x_0 *en* M*, en dirección* $h \in H_M(x_0)$*, (*x_0 *en* $\hat{\hat{M}}$*, en dirección* $h \in H_{\hat{\hat{M}}}(x_0)$*) es una solución óptima del* ($\bar{\mathrm{P}}$E) *((*$\hat{\bar{P}}E$*)) si y solo si el* ($\bar{\mathrm{P}}$E) *((*$\hat{\bar{P}}E$*)) es 2KT-invex en* M*, con respecto al mismo* $h \in H_M(x_0)$ *(*$h \in H_{\hat{\hat{M}}}(x_0)$*).*

Demostración: *Supongamos inicialmente que cada punto KTA, en dirección* h *en* $H_M(x_0)$ *es una solución óptima, demostraremos que el problema* ($\hat{\mathrm{P}}$E) *es 2KT-invex, en dirección al mismo* h *en* $H_M(x_0)$.

Sean x*,* x_0 *en* M.
i) Si $f(x) \geq f(x_0)$*, para todo* x *en* M*, podemos elegir* $\eta_h \equiv 0$ *y* $\xi_h \equiv 0$ *y las condiciones de la*

Definición 46 son verificadas trivialmente.

ii) Si $f(x) < f(x_0)$ entonces x_0 no es una solución optima del ($\hat{\text{PE}}$) *y por hipótesis x_0 no es un punto KTA, para ningún h en $H_{\hat{M}}(x_0)$. Esto implica, de acuerdo a la Observación 41, que para todo h en $H_M(x_0)$, (x_h, h) no es un punto KT del ($\tilde{PE}$), entonces, conforme a la Observación 15,*

$$\bigcap_{i=0}^{2} \widetilde{\mathcal{K}}_i \neq \emptyset, \tag{3.118}$$

donde recordemos que $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ es el cono de direcciones de descenso del funcional $\tilde{f}(x_0)$, en el punto (x_h, h), dado en (3.82), $\widetilde{\mathcal{K}}_1$ es el cono de direcciones factibles, del conjunto $\widetilde{H}_g(x_0)$ para el punto (x_h, h), dado en (3.83) y $\widetilde{\mathcal{K}}_3$ es el cono de direcciones tangentes a $\widetilde{H}_F(x_0)$, dado en (3.85).

Por lo tanto, para $h \in H_M(x_0)$, existe (z_1, z_2) en $\bigcap_{i=0}^{2} \widetilde{\mathcal{K}}_i$, es decir, existe (z_1, z_2) tal que

$$\begin{aligned} f'(x_0)z_2 &< 0 &(3.119)\\ F'(x_0)z_2 &= 0 &(3.120)\\ F'(x_0)z_1 + F''(x_0)[h, z_2] &= 0 &(3.121)\\ -g_i'(x_0)z_2 &\geq 0,\ i \in I_h(x_0) &(3.122)\\ -g_i'(x_0)z_1 - g_i''(x_0)[h, z_2] &\geq 0,\ i \in \tilde{I}_h(x_0). &(3.123) \end{aligned}$$

Si definimos

$$c \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(z_2)},$$

se sigue, debido a que $f(x) - f(x_0) < 0$ y a (3.119), que $c > 0$.

Y definiendo, en término de c, para cada $h \in H_M(x_0)$

$$\xi_h = cz_1, \quad \eta_h = cz_2,$$

se verifica que el ($\bar{\text{PE}}$) *es 2KT-invex para h en $H_M(x_0)$. En efecto, a partir de las condiciones precedentes, se sigue que*

$$\begin{aligned} f'(x_0)\eta_h = f'(x_0)cz_2 = cf'(x_0)z_2 &\leq f(x) - f(x_0)\\ F'(x_0)\eta_h = F'(x_0)cz_2 = cF'(x_0)z_2 &= 0\\ F'(x_0)\xi_h + F''(x_0)[h, \eta_h] &= F'(x_0)cz_1 + F''(x_0)[h, cz_2]\\ &= c(F'(x_0)z_1 + F''(x_0)[h, z_2]) = 0\\ -g_i'(x_0)\eta_h = -g_i'(x_0)cz_2 = -cg_i'(x_0)z_2 &> 0,\ i \in I_h(x_0)\\ -g_i'(x_0)\xi_h - g_i''(x_0)[h, \eta_h] &= -g_i'(x_0)cz_1 - g_i''(x_0)[h, cz_2]\\ &= -c(g_i'(x_0)z_1 + g_i''(x_0)[h, z_2])\\ &> 0,\ i \in \tilde{I}_h(x_0), \end{aligned}$$

esto es, para cada h en $H_M(x_0)$ existen η_h y ξ_h, dependiendo de los puntos factibles x y x_0, tales que las condiciones de la Definición 46 son verificadas.

Inversamente, suponga que el ($\hat{\text{PE}}$) *es KTA-invex. Mostraremos que cada punto KTA es una solución optima del* ($\hat{\text{PE}}$).

Sea x_0 un punto KTA, por la definición de KTA, existen $\bar{\mu} = (\mu, \tilde{\mu})$ y $\bar{\psi} = (\psi, \tilde{\psi})$, no idénticamente nulos, satisfaciendo las condiciones de la Definición 39. Tomando en consideración (3.108) y aplicando $\psi,\ \tilde{\psi} \in \bar{Y}^*$, $\mu_i,\ \tilde{\mu}_i \in \mathbb{R}_+$, en (3.109), (3.110), (3.111) y (3.112) respectivamente, obtenemos, para todo punto factible x,

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta_h \\
\langle \psi, F'(x_0)\eta_h \rangle &= 0 \\
\langle \tilde{\psi},\ F'(x_0)\xi_h + F''(x_0)[h, \eta_h] \rangle &= 0 \\
\langle \mu_i, -g_i'(x_0)\eta_h \rangle &\geq 0,\ i \in I_h(x_0) \\
\langle \tilde{\mu}_i, -g_i'(x_0)\xi_h - g_i''(x_0)[h, \eta_h] \rangle &\geq 0,\ i \in \tilde{I}_h(x_0).
\end{aligned}
$$

Sumando en i correspondiente en la cuarta y quinta desigualdad, obtenemos,

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta_h \\
\langle \psi, F'(x_0)\eta_h \rangle &= 0 \\
\langle \tilde{\psi},\ F'(x_0)\xi_h + F''(x_0)[h, \eta_h] \rangle &= 0 \\
-\sum_{i \in I_h(x_0)} \langle \mu_i,\ g_i'(x_0)\eta_h \rangle &\geq 0, \\
-\sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \langle \tilde{\mu}_i,\ g_i'(x_0)\xi_h + g_i''(x_0)[h, \eta_h] \rangle &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Reordenando los términos

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)\eta_h + \sum_{i \in I_h(x_0)} \langle \mu_i, g_i'(x_0)\eta_h \rangle + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} \langle \tilde{\mu}_i, g_i'(x_0)\xi_h + g_i''(x_0)[h, \eta_h] \rangle \\
&+ \langle \psi,\ F'(x_0)\eta_h \rangle + \langle \tilde{\psi},\ F'(x_0)\xi_h + F''(x_0)[h, \eta_h] \rangle \\
&= \langle f'(x_0) + \sum_{i \in I_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i''^*(x_0)(h)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\psi + F''(x_0)(h)\tilde{\psi},\ \eta_h \rangle \\
&+ \langle \sum_{i \in \tilde{I}_h(x_0)} g_i'^*(x_0)\tilde{\mu}_i + F'^*(x_0)\tilde{\psi},\ \xi \rangle.
\end{aligned}
$$

Considerando que $\mu_i,\ \tilde{\mu}_i,\ \psi$ y $\tilde{\psi}$ son los multiplicadores de Lagrange-Avakov, los cuales satisfacen las condicions (3.76) y(3.77), de la Definition 39, se sigue que

$$f(x) - f(x_0) \geq 0,$$

para todo punto factible $x \in M$, esto es, x_0 es solución optima.

Finalmente observamos que, si se considera el problema ($\hat{\bar{P}}\!\!E$ en vez (P̄E)*, la demostración del teorema va en la misma dirección, sólo que se debe condiderar las condiciones* $\bar{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_l(x)) = \mathbf{0}$ *y que* x *pertenece a* $\mathbb{Q}$*, en este caso, ii)*$f(x) < f(x_0)$*) implica, en vez de (3.118), la condición*

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \widetilde{\mathcal{K}}_0 \bigcap \widetilde{\mathcal{K}}_1 \bigcap \hat{\bar{\mathcal{K}}}_2 \bigcap \widetilde{\mathcal{K}}_3 \neq \emptyset,$$

donde $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ *es el cono de direcciones de descenso del funcional* $\tilde{f}(x_0)$*, en el punto* (x_h, h)*, dado en (3.82),* $\widetilde{\mathcal{K}}_1$ *es el cono de las direcciones factibles, del conjunto* $\widetilde{H}_{M_g}(x_0)$ *para el punto* x_0*, dado en (3.83),* $\tilde{\bar{\mathcal{K}}}_2$ *es el cono de direcciones tangentes a* $\widetilde{H}_{\bar{F}}(x_0)$*, dado en (3.102) y el cono de las direcciones tangentes de* $\mathbb{Q}$*, en el punto* x_0*, dado en (3.104).*

Luego, para $h \in H_{\hat{\bar{M}}}(x_0)$*, existe* (z_1, z_2) *en* $\widetilde{\mathcal{K}}$*, esto es, existe* (z_1, z_2)*,* $z_2 = \lambda(z - h)$*,* $z \in K_{\mathbb{Q}}$ *tal que*

$$\begin{aligned} f'(x_0)z_2 &< 0 \\ F_i'(x_0)z_2 &= 0, \; i = 1, \cdots, l \\ F_i'(x_0)z_1 + F_i''(x_0)[h, z_2] &= 0 \; i = 1, \cdots, l \\ -g_i'(x_0)z_2 &\geq 0, \; i \in I_h(x_0) \\ -g_i'(x_0)z_1 - g_i''(x_0)[h, z_2] &\geq 0, \; i \in \tilde{I}_h(x_0). \end{aligned}$$

Posteriormente se define $\xi_h = cz_1$ *y* $\eta_h = cz_2$*, donde* $z_2 = \lambda(z - h)$*,* $z \in K_{\mathbb{Q}}$*, esto es*

$$z_2 = \lambda(z - h) = \lambda(\bar{\lambda}(x - x_0) - h) = \lambda\bar{\lambda}(x - x_0 - \frac{1}{\bar{\lambda}}h) = \hat{\lambda}(x - x_0 - th),$$

donde $\hat{\lambda} = \lambda\bar{\lambda} > 0$ *y* $t = \frac{1}{\bar{\lambda}} > 0$*, y se continua con la demostración dada.*

El teorema queda así demostrado.

El resultado anterior nos permite caracterizar completamente los problemas 2KT-invex, en el siguiente sentido, un problema es 2KT-invex, si y solamente si, cada punto KTA es un mínimo global. La clase más amplia de problemas que cumple esta proposición son la clase de problemas 2KT-invex.

Para finalizar este capítulo, mencionaremos que el concepto de problemas 2KT-invex introducido en este trabajo, generaliza el concepto de problemas 2KT-invex, introducido en [49], donde se considera un problema no regular únicamente con restricciones de desigualdad.

Capítulo 4

Control óptimo

En este capítulo presentaremos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, para problemas de control óptimo, con restricciones, sobre el estado y los controles, regulares y no regulares, cuando la variable de control es restricta a un conjunto convexo, con interior no vacío. En la sección 4.2, bajo supuesto de regularidad, incluimos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de primer orden. Las condiciones necesarias son establecidas por el Principio del Máximo Local, que es una versión del Principio del Máximo de Pontryagin clásico, uno de los resultados principales de la teoría de control óptimo. Las condiciones suficientes, son obtenidas, bajo el supuesto de KT-invexidad.

En la sección 4.3 presentaremos el objetivo principal del capítulo, que es la obtención de condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, no degeneradas de segundo orden, para problemas de control óptimo, aún cuando no se satisfacen condiciones de regularidad, pero si condiciones de 2-regularidad.

Las condiciones necesarias de optimalidad, son establecidas por el Principio del Máximo Local Extendido, el cual generaliza: el Principio del Máximo Local clásico, para problemas regulares, (ver [39], [43]), el Principio del Máximo Local para problemas no regulares, sin restricciones de desigualdad, formulado en [62], y el Principio el Máximo Local, para problemas con restricciones de igualdad no regulares y de desigualdad regulares, formulado en [63]. Las condiciones suficientes son obtenidas bajo el supuesto de 2-KT-invexidad, que generaliza la noción de KT-invexidad presentada en la sección 4.2.

4.1. Formulación

En esta sección formulamos un problema de control óptimo, con restricciones mixtas, de igualdad y desigualdad, con horizonte temporal fijo y condiciones de contorno para el estado, inicial y final. Determinamos los espacios adecuados, para la obtención de condiciones de optimalidad, establecidas en los capítulos subsiguientes.

Como ya hemos mencionado, los problemas de control óptimo con funcional objetivo en la forma Bolza, Mayer y Lagrange son equivalentes [31]. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, estudiaremos problemas de control óptimo escalares, considerando el funcional objetivo en la forma de Lagrange, esto es, estudiamos el siguiente Problema de Control Óptimo Escalar (P1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar}\,\Phi(x,u)=\displaystyle\int_{t_0}^{T} f(x(t),u(t),t)dt \\ \text{sujeto a :} \\ \qquad x'(t)=\varphi(x(t),u(t),t), \\ \qquad x(t_0)=\alpha, \quad q(x(T))=0 \\ \qquad m(x(t),u(t),t)=0 \\ \qquad g(x(t),u(t),t)\leqq 0 \\ \qquad u(t)\in\mathbb{U}, \quad t\in[t_0,T] \text{ c.t.p,} \end{array}\right\} (P1) \tag{4.1}$$

donde la variable temporal final T es libre, el conjunto de controles $\mathbb{U}$ es cerrado convexo, con interior no vacío, de $\mathbb{R}^m$,

$$f:\ \mathbb{R}^n\times\ \mathbb{R}^m\times[t_0,T]\to\ \mathbb{R}, \qquad\qquad \varphi:\ \mathbb{R}^n\times\ \mathbb{R}^m\times[t_0,T]\to\ \mathbb{R}^n,$$

$$q:\ \mathbb{R}^n\to\ \mathbb{R}^k, \qquad m:\ \mathbb{R}^n\times\ \mathbb{R}^m\times[t_0,T]\to\ \mathbb{R}^l, \qquad g:\ \mathbb{R}^n\times\ \mathbb{R}^m\times[t_0,T]\to\ \mathbb{R}^r,$$

y donde consideramos las siguiente hipótesis sobre las funciones, f, φ, q y g continuamente Frêchet diferenciables, con respecto a (x,u) y todas ellas, para cada (x,u), medibles en t. Además $g(x,u,t)\leqq 0$, es equivalente a que $g_i(x,u,t)\leq 0$, para todo i en $I=\{1,\cdots,r\}$.

Para establecer condiciones necesarias de optimalidad, para el problema (P1), asumiremos que x pertenece a $W^n_{1,1}[t_0,T]:=W_{1,1}([t_0,T],\ \mathbb{R}^n)$, esto es, al conjunto de las funciones absolutamente continuas, con derivadas en $L^n_1[t_0,T]:=L_1([t_0,T],\ \mathbb{R}^n)$, luego x satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)+\int_{t_0}^{t} x'(\tau)d\tau \\ &= \alpha+\int_{t_0}^{t}\varphi(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau, \end{aligned}$$

con u en $L^m_\infty[t_0,T]:=L_\infty([t_0,T],\ \mathbb{R}^m)$, esto es, el conjunto de la funciones medibles esencialmente acotadas.

Los espacios vectoriales normados $X:=(W^n_{1,1}[t_0,T],\|\cdot\|_0)$ y $U^m:=(L^m_\infty[t_0,T],\|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach con la norma

$$\|x\|_0=|x(t_0)|+\int_{t_0}^{T}|\dot{x}(t)|dt$$

y la norma del supremo esencial, esto es

$$\|x\|_\infty = \text{ess sup } \mid x(t) \mid = \min\{k > 0,\ |x(t)| < k, \text{c.t.p. en } [t_0, T]\}.$$

Diremos que (x, u) es un proceso factible del problema (P1) si

$$\begin{array}{ccc} x'(t) = \varphi(x(t), u(t), t), & x(t_0) = \alpha, & q(x(T)) = 0, \\ g(x(t), u(t), t) \leqq 0, & m(x(t), u(t), t) = 0, & u(t) \in \mathbb{U} \ \text{ c.t.p. en } \ [t_0, T]. \end{array}$$

Si denotamos por Q, al conjunto de proceso factible del problema (P1), entonces

$$Q \ = \ Q_1 \bigcap Q_2 \bigcap Q_3 \tag{4.2}$$

donde Q_1 es el el conjunto de restricciones, de interior vacío, del problema (P1),

$$\begin{aligned} Q_1 \ &= \ \Big\{(x, u) \in X \times U,\ x'(t) = \varphi(x(t), u(t), t),\ x(t_0) = \alpha, \\ &\qquad\qquad m(x(t), u(t), t) = 0,\ q(x(T)) = 0\Big\} \\ &= \ \Big\{(x, u) \in X \times U,\ \ x(t) - \alpha - \int_{t_0}^{t} \varphi(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = 0,\ t_0 \leq t \leq T, \\ &\qquad\qquad m(x(t), u(t), t) = 0,\ q(x(T)) = 0\Big\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$Q_2 = \bigcap_{j=1}^{r} Q_j$ es el conjunto de restricciones, con interior no vacío del problema (P1), donde

$$Q_j \ = \ \Big\{(x, u) \in X \times U,\ g_j(x(t), u(t), t) \leq 0, \Big\},\ j = 1, \cdots, r \tag{4.4}$$

y

$$Q_3 \ = \ \Big\{(x, u) \in X \times U, u \in \mathcal{U}\Big\}, \tag{4.5}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{u \in U,\ u(t) \in \mathbb{U}, \text{c.t.p. en } [t_0, T]\}. \tag{4.6}$$

Con esta notación obtenemos el Problema Abstracto Escalar (PAE), que podemos escribir como:

$$\left.\begin{array}{l} \text{“mín”}\Phi(x, u) \\ \text{sujeto a} \\ (x, u) \in Q \subset X \times U. \end{array}\right\} \qquad \text{(PAE)}$$

el cual es equivalente al problema de control óptimo (P1).

Por lo tanto (x, u) es un proceso factible del problema (P1) si y solo si (x, u) pertenece a Q.

Si denotamos $U = U^m$ e introducimos el funcional y los operadores:

(1) $\Phi : X \times U \to \mathbb{R}$, definido

$$\Phi(x,u) = \int_{t_0}^{T} f(x(t),u(t),t)dt, \tag{4.7}$$

(2) $\bar{F} : X \times U \to X \times U^l \times \mathbb{R}^k$, tal que

$$\bar{F}(x,u) = (F_1(x,u), F_2(x,u), F_3(x,u)) \tag{4.8}$$

donde $F_1(x,u)$ y $F_2(x,u)$ son definido para cada t en $[t_0,T]$,

$$F_1(x,u)(t) = x(t) - \alpha - \int_{t_0}^{t} \varphi(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau, \tag{4.9}$$

$$F_2(x,u)(t) = m(x(t),u(t),t) \tag{4.10}$$

y $F_3(x,u)$ es definido por

$$F_3(x,u) = q(x(T)). \tag{4.11}$$

(3) $G : X \times U \to U^r$, $G(x,u)(t) = g(x(t),u(t),t)$, $t \in [t_0,\ T]$, donde consideramos el conjunto $U^r = L^r_\infty[t_0,T]$ como un espacio normado, ordenado por el siguiente cono convexo

$$P = \{p \in L^r_\infty[t_0,T],\ p(t) \ \geqq\ 0_{\ \mathbb{R}^r} \ \text{ c.t.p. } t \in [t_0,T]\},$$

por lo tanto escribiremos,

$$\begin{aligned} G(x,u) \in -P \Longleftrightarrow G(x,u) \leqslant 0_{L^r_\infty} \ &\Longleftrightarrow\ G(x,u)(t) \leqq 0_{\ \mathbb{R}^r}, \ \text{ c.t.p. } \ [t_0,T] \\ &\Longleftrightarrow\ G_j(x,u)(t) \leq 0_{\ \mathbb{R}}, \ \text{ c.t.p. } \ [t_0,T], \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,\cdots,r. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Con esta notación podemos escribir, el problema (P1) como el siguiente Problema de Optimización Escalar (POE), definido sobre el espacio de Banach $\hat{X} = X \times U$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{“mín”}\Phi(\bar{x}) \\ \text{ sujeto a} \\ \bar{F}(\bar{x}) = 0 \\ G(\bar{x}) \leqslant 0 \\ \bar{x} \in \mathcal{X} \subset \hat{X}. \end{array}\right\} \qquad \text{(POE)}, \tag{4.13}$$

donde $\bar{x} = (x,u)$ y $\mathcal{X} = X \times \mathcal{U}$, con $\mathcal{U}$ definido en (4.6).

El conjunto factible lo denoratemos por $\bar{M} = M_{\bar{F}} \cap M_G \cap \mathcal{X}$, donde

$$\begin{aligned} M_{\bar{F}} &= \{\bar{x} \in \hat{X},\ \bar{F}(\bar{x}) = 0\} \\ M_G &= \{\bar{x} \in \hat{X},\ G_j(\bar{x}) \leqslant 0,\ j = 1,\cdots,r\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De acuerdo a las hipótesis impuestas a f, φ, m, h y q, el funcional Φ y el operador G son Frêchet diferenciables y el operador $\bar{F}$, es continuamente Frêchet diferenciable.

La primera derivada del funcional Φ, en (x_0, u_0), es definida, para cada (h, v) en $X \times U$, (ver [43]),

$$\Phi'(x_0, u_0)(h, v) \quad = \quad \int_{t_0}^{T} (f_x(x_0(t), u_0(t), t)h(t) + f_x(x_0(t), u_0(t), t)v(t))dt. \tag{4.15}$$

La primera derivada de $\bar{F}$ en (x_0, u_0) es el operador $\bar{F}'(x_0, u_0) : X \times U \to X \times U^l \times \mathbb{R}^k$ definido, para cada (h, v) en $X \times U$,

$$\bar{F}'(x_0, u_0)(h, v) \quad = \quad \Big(F_1'(x_0, u_0)(h, v), F_2'(x_0, u_0)(h, v), F_3'(x_0, u_0)(h, v)\Big), \tag{4.16}$$

tal que para cada t en $[t_0, T]$

$$\begin{aligned} F_1'(x_0, u_0)(h, v)(t) &= h(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)h(\tau) + \varphi_u(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)v(\tau)d\tau, \\ F_2'(x_0, u_0)(h, v)(t) &= m_x(x_0(t), u_0(t), t)h(t) + m_u(x_0(t), u_0(t), t)v(t) \end{aligned}$$

y

$$F_3'(x_0, u_0)(h, v) \quad = \quad q'(x_0(T))h(T).$$

La segunda derivada de $\bar{F}$ en (x_0, u_0), para (h, v) en $X \times U$, es el operador $(\bar{F}'(x_0, u_0))'(h, v) : X \times U \to U^r$, definido para cada $(\tilde{h}, \tilde{v})$ en $X \times U$,

$$\begin{aligned} &(\bar{F}'(x_0, u_0)(h, v))'(\tilde{h}, \tilde{v}) = \bar{F}''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})] \\ &\quad = \Big(F_1''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})], F_2''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v}], F_3''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v}]\Big), \end{aligned} \tag{4.17}$$

tal que para todo t en $[t_0, T]$,

$$\begin{aligned} F_1''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})](t) &= -\int_{t_0}^{t} (\varphi_{xx}(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)h(\tau)\tilde{h}(\tau) + \varphi_{xu}(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)h(\tau)\tilde{v}(\tau) \\ &\quad + \varphi_{ux}(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)v(\tau)\tilde{h}(\tau) + \varphi_{uu}(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)v(\tau)\tilde{v}(\tau))d\tau, \\ F_2''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})](t) &= m_{xx}(x_0(t), u_0(t), t)h(t)\tilde{h}(t) + m_{xu}(x_0(t), u_0(t), t)h(t)\tilde{v}(t) + \\ &\quad m_{ux}(x_0(t), u_0(t), t)v(t)\tilde{h}(t) + m_{uu}(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{v}(t)\tilde{v}(t) \end{aligned}$$

y

$$F_3''(x_0, u_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})] \quad = \quad q''(x_0(T))[h(T), \tilde{h}(T)].$$

Los corchetes cuadrados denotan la acción de una forma bilineal sobre (h, v) y $(\tilde{h}, \tilde{v})$, esto es, para todo (h, v) en $X \times U$, $\bar{F}''(x_0, y_0)(h, v) : X \times U \to X \times U^l \times \mathbb{R}^k$ es tal que

$$(\bar{F}'(x_0, y_0)(h, v))'(\tilde{h}, \tilde{v}) = \bar{F}''(x_0, y_0)[(h, v), (\tilde{h}, \tilde{v})] = (\tilde{h}, \tilde{v}) \begin{pmatrix} \bar{F}_{xx}(x_0, u_0) & \bar{F}_{xu}(x_0, u_0) \\ \bar{F}_{ux}(x_0, u_0) & \bar{F}_{uu}(x_0, u_0) \end{pmatrix} (h, v)^t.$$

La primera derivada de G en (x_0, u_0) es el operador $G'(x_0, u_0) : X \times U \to U^r$, tal que para cada (h, v) en $X \times U$, $G'(x_0, u_0)(h, v)$ pertenece a U^r, y es definido para casi todo t en $[t_0, T]$,

$$\begin{aligned} G'(x_0, u_0)(h, v)(t) &= g'(x_0(t), u_0(t), t)(h(t), v(t)), \\ &= g_x(x_0(t), u_0(t), t)h(t) + g_u(x_0(t), u_0(t), t)v(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

La segunda derivada de G en (x_0, u_0), para (h, v) en $X \times U$, es el operador $G'(x_0, u_0)(h, v) : X \times U \to U^r$ tal que para todo $(\tilde{h}, \tilde{v})$ en $X \times U$, $(G'(x_0, y_0)(h, v))'(\tilde{h}, \tilde{v})$ pertenece a U^r, y es definido para casi todo t en $[t_0, T]$,

$$\begin{aligned} (G'(x_0, y_0)(h, v))'(\tilde{h}, \tilde{v})(t) &= g''(x_0(t), y_0(t), t)[(h(t), v(t)), (\tilde{h}(t), \tilde{v}(t))] \\ &= g_{xx}(x_0(t), y_0(t), t)[h(t), \tilde{h}(t)] + g_{xu}(x_0(t), y_0(t), t)[h(t), \tilde{v}(t)] + \\ &+ g_{ux}(x_0(t), y_0(t), t)[v(t), \tilde{h}(t)] + g_{uu}(x_0(t), y_0(t), t)[v(t), \tilde{v}(t)]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En el transcurso de las demostraciones de los resultados obtenidos en las secciones posteriores, necesitaremos el siguiente Lema y Teoremas de Representaciones.

Lema 49 *Suponga que* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *pertenece a la frontera de* Q_j, $\mathrm{Fr}(Q_j)$, *entonces*

$$t \in R_j(\bar{x}_0) \Longleftrightarrow j \in I(G, \bar{x}_0), \ j = 1, \cdots, r, \tag{4.20}$$

con Q_j *definido en (4.4),*

$$R_j(\bar{x}_0) = \{t \in [t_0, T], \quad g_j(\bar{x}_0(t), t) = 0\}, \ j = 1, \cdots, r, \tag{4.21}$$

y donde $I(G, \bar{x}_0)$ *es el conjunto de índices de las restricciones activas de* G, *esto es,*

$$I(G, \bar{x}_0) = \{j \in \{1, \cdots, r\}, \ G_j(\bar{x}_0) = 0\}. \tag{4.22}$$

Demostración: *Sea* t *perteneciente a* $R_j(\bar{x}_0)$ *y supongamos que* j *no pertenece* $I(G, \bar{x}_0)$, *esto es,* $G_j(\bar{x}_0) \neq 0$, *entonces existe un subconjunto* $\bar{R}_j(\bar{x}_0)$ *de* $R_j(\bar{x}_0)$, *de medida no nula, tal que* $G_j(\bar{x}_0)(t) \neq 0$, *esto es* $g_j(\bar{x}_0(t), t)) \neq 0$ *en* $\bar{R}_j(\bar{x}_0)$, *lo que implica que* $\bar{x}_0$ *no pertenece a* $\mathrm{Fr}(Q_j)$, *esto contradice la hipótesis, luego* j *pertenece* $I(G, \bar{x}_0)$.

Por otro lado si j *petenece a* $I(G, \bar{x}_0)$, $G_j(\bar{x}_0) = 0$ *entonces para todo* t *en* $[t_0, T]$, *excepto quizás en un conjunto de medida nula,* $G_j(\bar{x}_0)(t) = 0$, *por lo tanto*

$$G_j(\bar{x}_0)(t) = g_j(\bar{x}_0(t), t) = 0, \text{c.t.p.} \ \ [t_0, T], \ j = 1, \cdots, r,$$

lo que implica, t *pertenece a* $R_j(\bar{x}_0)$, $j = 1, \cdots, r$.

El lema queda de esta forma demostrado.

Usando la misma argumentación de la demostración del Lema 49, se puede mostrar que si $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ pertenece a $\mathrm{Fr}(Q_j)$ y $\bar{h} = (h, v)$ es tal que $g'_j(\bar{x}_0(t), t)\bar{h} = 0$, $j \in I(\bar{x}_0)$, entonces

$$t \in R_j(\bar{x}_0, \bar{h}) \Longleftrightarrow j \in I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0), \tag{4.23}$$

donde

$$R_j(\bar{x}_0;\bar{h}) = \{t \in R_j(\bar{x}_0), \quad g_j'(\bar{x}_0(t),t)\bar{h} = 0\}, \; j \in I(\bar{x}_0). \tag{4.24}$$

y

$$I_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0) = \{j \in I(G,\bar{x}_0), \quad G_j'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0\}. \tag{4.25}$$

Las demostraciones de los siguientes Teoremas de Representaciones, pueden ser encontrado en [52] y [41], respectivamente.

- Cada funcional lineal y continua ψ^* definido sobre el espacio $W_{1,1}^n([t_0,T])$ puede ser únicamente representado en la forma, (ver Sec. 0.1 de [52]),

$$\langle \psi^*, x(\cdot)\rangle \;\; = \;\; (a_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^{T} y(t)x'(t)dt, \; \forall x = x(\cdot) \in W_{1,1}^n([t_0,T]), \tag{4.26}$$

  donde a_0 pertenece a $\mathbb{R}^n$ e $y = y(\cdot)$ a $L_\infty^n([t_0,T])$.

- Cada funcional lineal ϕ definido sobre el espacio $L_\infty^m[t_0,T]$ puede ser representado en la forma $\phi = \phi_a + \phi_s$, donde ϕ_a es absolutamente continua y ϕ_s es una función simple, para la parte absolutamente continua existe v perteneciente $L_1^m[t_0,T]$, denominado derivada de Radom Nikodym, tal que, (ver [52], [63]),

$$\phi_a(x) = \int_{t_0}^{T} v(t)x(t)dt. \tag{4.27}$$

4.2. Problemas Regulares

En esta sección presentaremos el Principio del Máximo Local clásico, que proporciona condiciones necesarias de optimalidad, para el problema de control óptimo (P1) formulado en la sección anterior. Estas condiciones, como veremos, son no degeneradas siempre que el problema sea regular o no degenerado.

La noción de regularidad es fundamental, tanto para la obtención de condiciones necesarias, de primer orden no degeneradas, como para la derivación de condiciones suficientes de optimalidad. Es importante, por tanto, establecer condiciones que aseguren que un problema dado sea regular. Estas condiciones, denominadas condiciones de regularidad, o cualificación de restricciones, en el caso de Programación Matemática (ver [39], [43], [67] y [14]), son introducidas en esta sección, las cuales nos permiten garantizar que las condiciones de optimalidad de primer orden, para nuestro problema formulado, establecidas por el Principio del Máximo Local clásico, son no degeneradas y que estas, también son suficientes, bajo supuesto de KT-invexidad. El caso no regular es visto en la próxima sección.

Inicialmente daremos la definición de proceso regular del conjunto factible Q, del problema (P1) que es equivalente al problema de optimización escalar (POE), y condiciones de regularidad, es decir condiciones suficientes, que aseguren que un proceso sea regular.

Definición 50 *Diremos que* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *es un proceso regular del conjunto factible* Q *del problema* (P1)*, si el espacio tangente a las restricciones de igualdad, en* $\bar{x}_0$ *es determinado por aproximaciones lineales, esto es,*

$$\begin{aligned} T_{Q_1}(\bar{x}_0) = \Big\{&(h,v) \in X \times U,\ h'(t) = \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t), \\ &m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t) = 0,\ q'(x_0(T))h(T) = 0\Big\}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

y además existe $(\tilde{h}, \tilde{v})$*, con* $\tilde{v} = \lambda(u - u_0)$*, donde* u *pertenece a* $\operatorname{Int} \mathcal{U}$ *y* $\lambda > 0$*, tal que*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t) & = & 0, \\ \tilde{h}(t_0) & = & 0 \\ m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t) & = & 0 \\ q'(x_0(T))\tilde{h}(T) & = & 0 \\ g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t) & < & 0, \text{ c.t.p. en } R_j(\bar{x}_0), \end{array} \tag{4.29}$$

donde $R_j(\bar{x}_0)$ *es definido en (4.21).*

No es difícil mostrar, debido al Teorema de Lyusternik, Teorema 7, que una condición suficiente para asegurar que (4.28) se cumpla es que para todo $a(\cdot)$ en X, $b(\cdot)$ en U^l y c en $\mathbb{R}^n$, exista un elemento (h, v) en $X \times U$ tal que, c.t.p. en $[t_0, T]$,

$$\begin{array}{rcl} h(t) - \displaystyle\int_{t_0}^{t} (\varphi_x(x_0(\tau),u_0(\tau),\tau)h(\tau) + \varphi_u(x_0(\tau),u_0(\tau),\tau)v(\tau))d\tau & = & a(t) \\ m_x(\bar{x}_0(t),t)h + m_u(\bar{x}_0(t),t)v & = & b(t) \\ q'(x_0(T))h(T) & = & c. \end{array} \tag{4.30}$$

Por lo tanto si las condiciones (4.29) y (4.30) se cumplen simultáneamente entonces el proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es un proceso regular del conjunto factible Q.

En general la condición (4.30) no es fácil de verificar, es por ello que se hace necesario formular condiciones, más explícita, que sean suficientes para su verificación.

Sea D el conjunto de todos los $(\tilde{b}(\cdot), q'(x_0(T))h(T))$ en $L^l_\infty([t_0,T]) \times \mathbb{R}^k$, tal que $h(t)$, c.t.p. en $[t_0, T]$, satisface la ecuación diferencial,

$$\begin{array}{lcl} \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t) & = & h'(t) \\ m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t) & = & \tilde{b}(t) \\ h(t_0) & = & 0, \end{array} \tag{4.31}$$

con $v(\cdot)$ variando en todo el espacio $U := L^m_\infty[t_0, T]$.

Diremos que la ecuación variacional (4.31) es no degenerada o completamente controlable si $D = L^l_\infty([t_0, T]) \times \mathbb{R}^k$.

Los siguientes resultados son una generalización de aquellos presentados en la Sec 9 de [43].

Lema 51 *Si $D = L^l_\infty([t_0, T]) \times \mathbb{R}^k$ entonces la condición (4.30) es verificada.*

Demostración: Inicialmente observemos que para todo función continua $a(\cdot)$, en particular para todo $a(\cdot)$ en $W^n_{1,1}([t_0, T])$, existe $z(\cdot)$ en $W^n_{1,1}([t_0, T])$ solución de la ecuación integral

$$z(t) \;=\; a(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) z(\tau) d\tau, \;\; t_0 \leq t \leq T, \tag{4.32}$$

que es una ecuación lineal de Volterra de segunda especie.

Por otro lado ya que $D = L^l_\infty([t_0, T]) \times \mathbb{R}^k$, entonces todo elemento $(\tilde{b}(\cdot), \tilde{c})$ en $L^l_\infty([t_0, T]) \times \mathbb{R}^k$ pertenece a D. En particular $(\tilde{b}(\cdot), \tilde{c})$ pertenece a D, donde c.t.p en $[t_0, T]$,

$$\begin{aligned} \tilde{b}(t) &= b(t) - m_x(\bar{x}_0(t), t) z(t) \\ \tilde{c} &= c - q'(x_0(T)) z(T), \end{aligned}$$

entonces podemos encontrar $y(\cdot)$ con $\tilde{c} = q'(x_0(T)) y(T)$ y $v(\cdot)$ en $L^l_\infty([t_0, T])$, tal que $y(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_x(\bar{x}_0(t), t) y(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t), t) v(t) &= y'(t) \\ m_x(\bar{x}_0(t), t) y(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t) v(t) &= \tilde{b}(t) \\ y(t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo tanto para todo $(a(\cdot), b(\cdot), c)$ en $X \times U^l \times \mathbb{R}^k$, donde $X := W^n_{1,1}([t_0, T])$, $U^l := L^l_\infty([t_0, T])$, existe $h(\cdot) = z(\cdot) + y(\cdot)$ en X y $v(\cdot)$ en U^m, donde $z(t)$ e $y(t)$ satisfacen (4.32) y (4.33) respectivamente tal que

$$\begin{aligned} h(t) \;-\; & \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) h(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau) v(\tau)) d\tau \\ &= z(t) + y(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) z(\tau) + \varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) y(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau) v(\tau)) d\tau \\ &= z(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) z(\tau) d\tau + y(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau) y(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau) v(\tau)) d\tau \\ &= a(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_x(\bar{x}_0(t), t) h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t) v(t)) &= m_x(\bar{x}_0(t), t) z(t) + m_x(\bar{x}_0(t), t) y(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t) v(t)) \\ &= m_x(\bar{x}_0(t), t) z(t) + \tilde{b}(t) \\ &= m_x(\bar{x}_0(t), t) z(t) + b(t) - m_x(\bar{x}_0(t), t) z(t) \\ &= b(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q'(x_0(T))h(T) &= q'(x_0(T))z(T) + q'(x_0(T))y(T)\\ &= q'(x_0(T))z(T) + \tilde{c}\\ &= q'(x_0(T))z(T) + c - q'(x_0(T))z(T)\\ &= c.\end{aligned}$$

Lema 52 *Si toda solución $\psi_1(t), \psi_2(t)$, no nula, de la ecuación*

$$\psi_1'(t) \quad = \quad -\varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t) - m_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t) \tag{4.34}$$

satisface la condición $\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t) + m_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t) \neq 0$, salvo en un conjunto de medida nula entonces $D = L_\infty^l([t_0,T]) \times \mathbb{R}^k$.

Demostración: Supongamos que $D \neq L_\infty^l([t_0,T]) \times \mathbb{R}^k$, entonces, dado que D es un subespacio, de acuerdo a la Observación 3, existe (b^*, c^*) no nulo, en el cono dual de D, D^*, tal que $\langle (b^*,c^*), (\tilde{b},\tilde{c})\rangle = 0$, para todo $(\tilde{b},\tilde{c}) \in D$, esto es $(b^*,\tilde{b}) + (c^*, q'(x_0(T))h(T)) = 0$, donde $h(t)$, c.t.p. en $[t_0,T]$, satisface la ecuación variacional (4.31).

Dado que b^* pertenece a $(L_\infty^l([t_0,T]))^*$, existe $\omega : [t_0,T] \to \mathbb{R}^l$ de variación acotada, esto es ω pertenece a $b^l.a.(t_0,T)$ (ver [41]), tal que

$$(b^*,\tilde{b}) = \int_{t_0}^{T} \tilde{b}(t)\ d\omega,\ \forall \tilde{b} \in L_\infty^l([t_0,T]),$$

por tanto

$$\int_{t_0}^{T} \tilde{b}(t)\ d\omega + (c^*, q'(x_0(T))h(T)) = 0, \quad \forall \tilde{b} \in L_\infty^l([t_0,T]). \tag{4.35}$$

Fijemos $\psi_2(t) = \dfrac{d\omega}{dt}$, tal que $(b^*,\tilde{b})$ es no nulo y consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\psi_1'(t) &= -\varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t) - m_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t)\\ \psi_1(T) &= q'^*(x_0(T))c^*.\end{aligned}$$

Observemos que siendo $(b^*,\tilde{b})$ no nulo entonces, debido a (4.35), $\psi_1(T) = q'^*(x_0(T))c^*$ también es no nulo.

Por lo tanto para todo h en X, en particular para todo h solución de la ecuación variacional (4.31),

$$\begin{aligned}0 \quad = \quad & \int_{t_0}^{T} (\psi_1'(t) + \varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t) + m_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t)h(t))dt\\ = & \int_{t_0}^{T} \psi_1'(t)h(t)dt + \int_{t_0}^{T} \varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t)h(t)dt + \int_{t_0}^{T} m_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t)h(t)dt.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Integrando por parte y considerando que $h(t)$ es solución de la ecuación variacional (4.31),

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T}\psi_1'(t)h(t)dt &= \langle\psi(T),h(T)\rangle-\langle\psi(t_0)h(t_0)\rangle-\int_{t_0}^{T}\psi_1(t)h'(t)dt\\ &=\langle q'^*(x_0(T))c^*,h(T)\rangle-\int_{t_0}^{T}\psi_1(t)(\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+\varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt\\ &=\langle c^*,q'(x_0(T))h(T)\rangle-\int_{t_0}^{T}(\varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t)h(t)+\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)^*\psi_1(t)v(t))dt,\end{aligned}$$

con $v(\cdot)$ variando en todo el espacio $U := L_\infty^m[t_0,T]$.

Reemplazando el término anterior y $m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)=\tilde{b}(t)-m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t)$ en (4.36), obtenemos para todo $v(\cdot)$ en $U := L_\infty^m[t_0,T]$,

$$\begin{aligned}0 &= \langle c^*,q'(x_0(T))h(T)\rangle-\int_{t_0}^{T}(\varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t),h(t))+(\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t),v(t))dt\\ &\quad\int_{t_0}^{T}(\varphi_x^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t)h(t))dt+\int_{t_0}^{T}(\psi_2(t),\tilde{b}(t)-m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt\\ &= -\int_{t_0}^{T}(\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)^*\psi_1(t)+m_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t),v(t))dt\\ &\quad\quad\langle c^*,q'(x_0(T))h(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}(\psi_2(t),\tilde{b}(t))dt\\ &= -\int_{t_0}^{T}(\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)^*\psi_1(t)+m_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t),v(t))dt,\end{aligned}$$

donde hemos considerado, de acuerdo a (4.35),

$$\langle c^*,q'(x_0(T))h(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}(\psi_2(t),\tilde{b}(t))dt \quad = \quad \langle c^*,q'(x_0(T))h(T)\rangle+\int_{t_0}^{T}\tilde{b}(t)\frac{d\omega}{dt}dt=0.$$

Como la igualdad anterior es válida para todo $v(\cdot)$ en $U := L_\infty^m[t_0,T]$, esto implica que

$$\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)^*\psi_1(t)+m_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t)=0.$$

Por lo tanto hemos demostrado que si $D\neq L_\infty^l([t_0,T])\times\ \mathbb{R}^k$, entonces existe una solución ψ_1,ψ_2 no nula, de (4.34), satisfaciendo $\varphi_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_1(t)+m_u^*(\bar{x}_0(t),t)\psi_2(t)=0$.

El lema queda así demostrado.

Debemos hacer notar que la hipótesis del lema anterior es completamente constructiva y de mayor simplicidad su verificación, a diferencia de la verificación de la condición $D=L_\infty^m[t_0,T]\times\mathbb{R}^k$, es por ello su formulación, y que además, bajo esta hipótesis, es posible garantizar la condición (4.28), en efecto, si la hipótesis del lema anterior se cumple entonces $D=L_\infty^m[t_0,T]\times\mathbb{R}^k$, lo que a su vez implica que la condición (4.30) se cumple, que debido al Teorema de Lyusternik, Teorema 7, es una condición suficiente, para garantizar (4.28).

Podemos concluir entonces, que una condición suficiente para que el proceso (x_0, u_0) sea un proceso regular del problema (P1), de acuerdo a la Definición 50, es que la hipótesis del lema anterior se cumple y el sistema (4.29) admita solución, y en este caso, como es referido por algunos autores, el sistema es completamente controlable, lo que permite establecer condiciones necesarias de optimalidad de primer orden no degeneradas.

4.2.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

Ahora presentaremos una versión del Principio de Pontryagin, el Principio del Máximo Local, el cual establece condiciones de optimalidad de primer orden, no degeneradas, para el problema (P1), cuando el problema es regular. Estas condiciones se obtienen a partir de las condiciones Karush-Kuhn-Tucker, en espacios de Banach, presentado en sección 3.

Teorema 53 *Si un proceso factible $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es solución del problema* (P1)*, tal que $g_j'(\bar{x}_0(t), t)$ es no nulo en $R_j(\bar{x}_0)$, definido en (4.21), entonces existe un número $\lambda_0 \geq 0$, un vector a en $\mathbb{R}^k$ y funciones $\psi : [t_0, T] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ω en $b^l.a.(t_0, T)$ y γ_j en $b.a.(t_0, T)$, con soporte en $R_j(\bar{x}_0)$, $j = 1, \cdots, r$, no nulos simultáneamente tales que,*

$$\lambda_0 f_x(\bar{x}_0, t) + \sum_{j=1}^{r} g_{j_x}^*(\bar{x}_0, t)\hat{\gamma}_j(t) - \varphi_x^*(\bar{x}_0, t)\psi(t) + m_x^*(\bar{x}_0, t)\hat{\omega}(t) = \psi'(t) \tag{4.37}$$

con la condición final

$$\psi(T) = -q'^*(x_0(T))a, \tag{4.38}$$

donde $\hat{\omega}(t)$ y $\hat{\gamma}_j(t)$, $j = 1, \cdots, r$, son las derivadas de Radon Nikodym de los funcionales absolutamente continuos f_ω^a y $f_{\gamma_j}^a$, dado por

$$f_\omega^a(z(t)) = \int_{t_0}^{T} z(t)d\omega, \qquad f_{\gamma_j}^a(z(t)) = \int_{R_j(\bar{x}_0)} z(t)d\gamma_j, \quad j = 1, \cdots, r. \tag{4.39}$$

Además satisfacen la condición del máximo,

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 \int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t), t)u_0 dt + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{T} g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)u_0 d\gamma_j \\
&\qquad - \int_{t_0}^{T} \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)u_0 dt + \int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0(t), t)u_0 d\omega \\
\leq\ &\lambda_0 \int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t), t)u dt + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{T} g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)u\ d\gamma_j \\
&\qquad - \int_{t_0}^{T} \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)u dt + \int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0(t), t)u d\omega,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

para casi todo $t_0 \leq t \leq T$ y para todo $u \in U$, tal que $u(t)$ pertenece $\mathbb{U}$, donde $g^*_{j_x}$, $g^*_{j_u}$, φ^*_x y φ^*_u son los operadores adjuntos de g_{j_x}, g_{j_u}, φ_x y φ_u, respectivamente.

***Demostración**: La demostración que daremos es basada en la aplicación del Teorema 26, por lo tanto verificaremos que las hipótesis de este teorema se cumplan.*

Para ello supondremos, inicialmente, que el proceso factible (x_0, u_0) es un proceso regular del problema de control (P1). *Si $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es un proceso regular del conjunto factible Q del problema* (P1), *de acuerdo a la Definición 50, es inmediato, considerando la definición de Q_1 en (4.3) y de $\bar{F}'(\bar{x}_0)$ en (4.16), que*

$$T_{Q_1}(\bar{x}_0) = \left\{\bar{h} \in \hat{X},\ \bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0\right\}$$

y que existe, de acuerdo a la definición de $G'_j(\bar{x}_0)\tilde{\bar{h}}$ en (4.18) y al Lema 49, un $\tilde{\bar{h}} = (\tilde{h}, \tilde{v})$ en $\hat{X}$, tal que

$$\begin{aligned} \bar{F}'(\bar{x}_0)\tilde{\bar{h}} &= 0 \\ G'_j(\bar{x}_0)\tilde{\bar{h}} &< 0,\ j \in I(G, \bar{x}_0), \end{aligned}$$

donde $\hat{X} = X \times U$ y $\tilde{\bar{h}} = \lambda(\bar{x} - \bar{x}_0)$, con $\bar{x}$ en $\mathrm{Int}\mathcal{X}$, donde $\mathcal{X} := X \times \mathcal{U}$ es cerrado convexo con interior no vacío, esto se debe a que $\mathcal{U} = \{u \in L^m_\infty[t_0, T] : u(t) \in \mathbb{U}, \mathrm{c.t.p.},\ t \in [t_0, T]\}$ es cerrado, convexo y con interior no vacío, en U, lo que implica, de acuerdo a la Definición 24, que $\bar{x}_0$ es un punto regular del conjunto factible $\bar{M}$ del (POE).

Además, siendo el problema (P1) *equivalente al problema de optimización escalar* (POE), *si (x_0, u_0) es un proceso óptimo del problema de control (*P1*) entonces el punto $\bar{x}_0$ es un punto regular del* (POE).

La diferenciablidad de Φ, G y $\bar{F}$ son obtenidas, de acuerdo a las hipótesis impuestas a f, φ, m, h y q, siendo el funcional Φ y el operador G Frêchet diferenciables y, el operador $\bar{F}$ continuamente Frêchet diferenciable, con respecto a (x, u), y todos ellos, para cada (x, u), medibles en t, además el conjunto $X \times \mathcal{U}$ es cerrado, convexo con interior no vacío.

Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 26, si $\bar{x}_0$ es una solución óptima, local o global, y es un punto regular del problema (POE), *entonces existen $\mu_j \in (L^1_\infty[t_0, T])^*$, $j = 1, \cdots, k$, y $\bar{\psi} = (\psi_1,\ \psi_2, \psi_3)$ en $Y^* = (W^n_{1,1}[t_0, T] \times L^l_\infty[t_0, T] \times\ \mathrm{I\!R}^k)^*$, no identicamente nulos, tales que,*

$$f_s = \Phi'(\bar{x}_0) + \sum_{j \in I(G, \bar{x}_0)} G'^*_j(\bar{x}_0)\mu_j + \sum_{j=1}^{3} F'^*_j(\bar{x}_0)\psi_j, \tag{4.41}$$

donde el valor de $\mu_j(z)$ es no negativo, para todo z en $L_\infty[t_0, T]$, $f_s = (0, \tilde{f}_s)$, con $\tilde{f}_s$ funcional soporte para el conjunto $\mathcal{U}$, en u_0, es decir

$$\tilde{f}_s(u) \geqslant \tilde{f}_s(u_0), \quad \forall\ u \in\ \mathcal{U}.$$

y donde $I(G,\bar{x}_0)$ *es el conjunto de índices de las restricciones activas, definido en (4.22).*

Considerando, ahora, la definición de operador adjunto, obtenemos para todo (h,v) *en* $X\times U = W^n_{1,1}[t_0,T]\times(L^m_\infty[t_0,T]$,

$$\tilde{f}_s(v) \;=\; \Phi'(\bar{x}_0)(h,v)+\sum_{j\in I(G,\bar{x}_0)}\langle\mu_j, {G'}_j(\bar{x}_0)(h,v)\rangle_{U^*U}+\langle\bar{\psi},\bar{F}'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle_{Y^*Y}, \quad (4.42)$$

donde $f_s(h,v)=(0,\tilde{f}_s)(h,v)=\tilde{f}_s(v)$.

En lo que sigue determinaremos explícitamente los términos de la expresión (4.42).

1. *La primera derivada del funcional* Φ, *en* $\bar{x}_0=(x_0,u_0)$, *es definida, para cada* (h,v) *en* $X\times U$,

$$\Phi'(\bar{x}_0)(h,v) \;=\; \int_{t_0}^{T}(f_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+f_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt. \quad (4.43)$$

2. *Tomando en consideración, que para todo* $\bar{h}=(h,v)$ *en* $X\times U$, $G'_j(\bar{x}_0)\bar{h}$ *pertenece a* $L_\infty[t_0,T]$, *la existencia de un isomorfismo isométrico entre el espacio dual de* $L_\infty[t_0,T]$ *y el espacio de las funciones de variación acotada b.a.*(t_0,T), *ver [41], y el Lema (49), podemos garantizar que para todo* μ_j, j *en* $I(G,\bar{x}_0)$ *en* $(L_\infty[t_0,T])^*$, *tal que* $\mu_j(z)\geq 0$, *para todo* z *en* $L_\infty[t_0,T]$, *existen* γ_j *en b.a.*(t_0,T), *con soporte en* $R_j(\bar{x}_0)$, *tal que para* ${G'}_j(\bar{x}_0)(h,v)$ *en* $L_\infty[t_0,T]$,

$$\begin{aligned}\langle\mu_j,{G'}_j(\bar{x}_0)(h,v)\rangle &= \int_{t_0}^{T}({g_j}_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+{g_j}_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\gamma_j\\ &= \int_{R_j(\bar{x}_0)}({g_j}_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+{g_j}_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\gamma_j.\end{aligned}$$

Si denotamos esta última expresión por $f_{\gamma_j}({g_j}_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+{g_j}_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))$, *entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I(G,\bar{x}_0)}\langle\mu_j,{G'}_j(\bar{x}_0)(h,v)\rangle &= \sum_{j=1}^{r}\int_{t_0}^{T}({g_j}_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+{g_j}_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\gamma_j\\ &:= \sum_{j=1}^{r}f_{\gamma_j}({g_j}_x(\bar{x}_0(t),t)h(t)+{g_j}_u(\bar{x}_0(t),t)v(t)).\end{aligned} \quad (4.44)$$

Como cada funcional μ_j *definido sobre* $L_\infty[t_0,T]$, *puede ser representado como* $\mu_j := \mu_j^a+\mu_j^s$, *donde* μ_j^a *es absolutamente continua y* μ_j^s *es singular, para la parte absolutamente continua, de acuerdo a (4.27), existe* $\hat{\gamma}_j$ *en* $L_1[t_0,T]$, $j=1,\cdots,r$, *llamada derivada de Radon Nikodym, tal que para to* z *en* $L_\infty[t_0,T]$

$$\mu_j^a(z)=\int_{t_0}^{T}z(t)\hat{\gamma}_j(t)dt, \quad j=1,\cdots,r$$

o bien

$$\mu_j^a(z) = \int_{R_j(\bar{x}_0)} z(t)\hat{\gamma}_j(t)dt := f^a_{\gamma_j}(z(t)), \qquad j = 1, \cdots, k. \tag{4.45}$$

3. *Dado que* $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ *está en* $Y^* = (W^n_{1,1}[t_0,T] \times L^l_\infty[t_0,T] \times \mathbb{R}^k)^*$, *tenemos*

$$\langle \bar{\psi}, \bar{F}'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle = \langle \psi_1, F_1'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle + \langle \psi_2, F_2'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle + \langle \psi_3, F_3'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle,$$

donde $F_i'(\bar{x}_0)$, $i = 1,2,3$ *están definidos en (4.16).*

Ahora por la representación de ψ_1 *en* $X^* = (W^n_{1,1}[t_0,T])^*$, *(ver cap.0 [52]), existen,* ψ *en* $L^n_\infty[t_0,T]$ *y* b *en* $\mathbb{R}^n$ *tales que*

$$\begin{aligned}\langle \psi_1, F_1'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle &= \langle b, F_1'(\bar{x}_0)(h,v)(t_0)\rangle + \int_{t_0}^T \psi(t)\frac{d}{dt}F_1'(\bar{x}_0)(h,v)(t)dt\\ = \langle b, h(t_0)\rangle &+ \int_{t_0}^T \psi(t)(h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt,\end{aligned}$$

similarmente como en el item anterior, si ψ_2 *pertenece a* $U^{l*} := (L^l_\infty[t_0,T])^*$, *existe* ω *en* $b^l.a(t_0,T)$ *tal que*

$$\begin{aligned}\langle \psi_2, F_2'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle &= \int_{t_0}^T (m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\omega\\ &:= f_\omega(m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t)),\end{aligned}$$

y como ψ_3 *pertenece a* $(\mathbb{R}^k)^* \cong \mathbb{R}^k$, *existe un vector* a *en* $\mathbb{R}^k$, *tal que*

$$\langle \psi_3, F_3'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle = \langle a, q'(x_0(T))h(T)\rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle \bar{\psi}, \bar{F}'(\bar{x}_0)(h,v)\rangle &= \langle b, h(t_0)\rangle + \int_{t_0}^T \psi(t)(h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt\\ &\quad + \int_{t_0}^T (m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\omega\\ &\quad + \langle a, q'(x_0(T))h(T)\rangle.\end{aligned}$$

Reemplazando esta última igualdad conjuntamente con (4.43) (4.44) en (4.42),

$$\begin{aligned}\tilde{f}_s(v) &= \int_{t_0}^T (f_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + f_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt\\ &\quad + \sum_{j=1}^k \int_{t_0}^T (g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)h(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\gamma_j\\ &\quad + \langle b, h(t_0)\rangle + \int_{t_0}^T \psi(t)(h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))dt\\ &\quad + \int_{t_0}^T (m_x(\bar{x}_0(t),t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)v(t))d\omega + \langle a, q'(x_0(T))h(T)\rangle.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Como la identidad (4.46) es válida para todo (h, v) en $X \times U$, en particular es válida, para $(h, v) = (h, 0)$ en $X \times U$, con $h(t_0) = 0$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \int_{t_0}^{T} f_x(\bar{x}_0(t), t)h(t)dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{T} g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h(t)d\gamma_j \\ & + \int_{t_0}^{T} \psi(t)(h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)h(t)dt + \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t), t)h(t)d\omega + \langle a, q'(x_0(T)h(T)) \rangle. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Tomando en consideración (4.44) y (4.45), escribimos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)hd\gamma_j \quad & = \quad f_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) \\ & = \quad f^a_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) + f^s_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) \\ & = \quad \int_{t_0}^{T} (g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h)\hat{\gamma}_j(t)dt + f^s_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) \end{aligned} \tag{4.48}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t), t)hd\omega \quad & = \quad f_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)h) \\ & = \quad f^a_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)h) + f^s_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)\bar{h}) \\ & = \quad \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t), t)h\hat{\omega}dt + f^s_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)\bar{h}). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Reemplazamos (4.48) y (4.49) en (4.47), obtenemos,

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{k} f^s_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) - f^s_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)h) = \int_{t_0}^{T} \Big(f_x(\bar{x}_0(t), t)h + \sum_{j=1}^{k} g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h\hat{\gamma}_j(t) \\ + \psi(t)(h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)h) + m_x(\bar{x}_0(t), t)h\hat{\omega}(t) \Big) dt + \langle \psi(T), h(T) \rangle + \langle a, q'(x_0(T))h(T) \rangle, \end{aligned} \tag{4.50}$$

para todo $h = h(\cdot)$ en $X = W^n_{1,1}[t_0, T]$, con $h(t_0) = 0$.

Cambiando $\psi(t)$ sobre un conjunto de medida nula, si es necesario, establecemos la existencia de una función absolutamente continua, satisfaciendo (4.50), por lo tanto la expresión al lado izquierdo de (4.50) es, simultáneamente, singular y absolutamente continua, lo que implica

$$-\sum_{j=1}^{k} f^s_{\gamma_j}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h) - f^s_\omega(m_x(\bar{x}_0(t), t)h) = 0.$$

y si integramos por partes, donde consideramos $h(t_0) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} \psi(t)\ h'(t)\ dt \quad & = \quad \langle \psi(T), h(T) \rangle - \langle \psi(t_0), h(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{T}\ h(t)\psi'(t)\ dt \\ & = \quad \langle \psi(T), h(T) \rangle - \int_{t_0}^{T}\ h(t)\psi'(t)dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas últimas expresiones en (4.50) y usando la definición de operador adjunto obtenemos, para todo $h = h(\cdot)$ en $X = W_{1,1}^n[t_0, T]$, con $h(t_0) = 0$,

$$\int_{t_0}^{T} \Big(f_x(\bar{x}_0(t), t) + \sum_{j=1}^{k} {g_j}_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\gamma}_j(t) - \varphi_x^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t) - \psi'(t) + m_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\omega}(t) \Big) h(t) dt$$
$$+ \langle \psi(T) + q'^*(x_0(T))a, h(T) \rangle = 0.$$

Si denotamos,

$$A(t) := f_x(\bar{x}_0(t), t) + \sum_{j=1}^{k} {g_j}_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\gamma}_j(t) - \varphi_x^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t) - \psi'(t) + m_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\omega}(t)$$
$$\tilde{A}(t) := \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau, \quad B(T) := \psi(T) + q'^*(x_0(T))a,$$

e integramos por partes, obtenemos para todo $h = h(\cdot)$ en $X = W_{1,1}^n[t_0, T]$, con $h(t_0) = 0$,

$$\int_{t_0}^{T} \tilde{A}(t) h'(t) dt + \langle \tilde{A}(T) + B(T), h(T) \rangle \quad = \quad 0,$$

entonces debido a (4.26), esto es, a la unicidad de representación de los funcionales lineales sobre el espacio $W_{1,1}^*([t_0, T])$, $\tilde{A}(t) = 0$ $\tilde{A}(T) + B(T) = 0$, esto implica que,

$$f_x(\bar{x}_0(t), t) + \sum_{j=1}^{k} {g_j}_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\gamma}_j(t) - \varphi_x^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t) - \psi'(t) + m_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\omega}(t) \quad = \quad 0$$

y

$$\psi(T) + q'^*(x_0(T))a \quad = \quad 0.$$

De lo anteriormente expuesto, concluimos que existen ψ en $L_\infty^n[t_0, T]$, γ_j en b.a.(t_0, T), con soporte en $R_j(\bar{x}_0)$, $j = 1, \cdots, r$, donde $\hat{\gamma}_j(t)$, $j = 1, \cdots, r$, son las derivadas de Radon Nikodym de los funcionales absolutamente continuos, definidos en (4.91) y un vector a en $\mathbb{R}^k$, que satisfacen,

$$f_x(\bar{x}_0(t), t) + \sum_{j=1}^{k} {g_j}_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\gamma}_j(t) - \varphi_x^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t) + m_x^*(\bar{x}_0(t), t)\hat{\omega}(t) \quad = \quad \psi'(t),$$

con condiciones finales

$$\psi(T) \quad = \quad -q'^*(x_0(T))a,$$

que corresponde, con $\lambda_0 = 1$, a la ecuación (4.37) y (4.38), respectivamente.

Similarmente, como la identidad (4.46) es válida para todo (h, v) en $X \times U$, en particular es válida para $(h, v) = (0, v)$. Considerando, por tanto, $(h, v) = (0, v)$ en (4.46) y usando la *definición de operadores adjuntos obtenemos,*

$$\begin{aligned}\tilde{f}_s(v) = \int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t), t)v dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{T} g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)v d\gamma_j \\ - \int_{t_0}^{T} \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)v dt + \int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0(t), t)v d\omega,\end{aligned} \tag{4.51}$$

donde $\tilde{f}_s$ *es una función soporte del conjunto* $\mathcal{U}$*, para* u_0*, es decir,*

$$\tilde{f}_s(u_0) \leq \tilde{f}_s(u), \ \forall u \in \ \mathcal{U},$$

y donde $\mathcal{U}$*, es un subconjunto cerrado y convexo, con interior no vacío, del espacio* $U = L_\infty^m[t_0, T]$*, definido en (4.6).*

Por lo tanto se cumple la condición del máximo (4.40), con $\lambda_0 = 1$*, esto es, en casi toda partes en* $[t_0, T]$ *y para todo* u *en* U *tal que* $u(t)$ *pertenezca* M*,*

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t), t)u_0 dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{T} g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)u_0 d\gamma_j \\ & \qquad - \int_{t_0}^{T} \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)u_0 dt + \int_{t_0}^{T} m_u^*(\bar{x}_0(t), t)u_0 d\omega \\ \leq \ & \int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t), t)u dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{T} g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)u \ d\gamma_j \\ & \qquad - \int_{t_0}^{T} \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)u dt + \int_{t_0}^{T} m_u^*(\bar{x}_0, t)u d\omega. \end{aligned}$$

Para finalizar la demostración observemos que

- *Si* $\Phi'(\bar{x}_0) = 0$*, entonces el teorema se satisface trivialmente, basta con considerar* $\lambda_0 = 1$ *y las funciones* $\gamma_j, \ j = 1, \cdots, k, \ \psi$ *y* ω *identicamente nulas.*
- *Si el proceso óptimo* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es regular, entonces, de acuerdo a la Observación 22,* $\bar{F}'(\bar{x}_0)$ *no es sobreyectivo o* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *es un punto estacionario del operador* $G(x, u)$ *esto es equivalente, siempre que el subespacio* $\mathrm{Im}\bar{F}'(x_0)$ *sea cerrado en* $Y = W_{1,1}^n[t_0, T] \times L_\infty^n[t_0, T] \times \ \mathbb{R}^k$ *, ver [41] y [87], a que existe un elemento* $\bar{\psi}^* = (\psi^*, \ \omega^*, a^*)$ *en* Y^**, no identicamente nulo, en* $[\mathrm{Im}\bar{F}'(\bar{x}_0)]^\perp = \mathrm{Ker}\bar{F}'^*(\bar{x}_0)$ *o existen* $\mu_j \geq 0, \ j \in I_G(\bar{x}_0)$*, tal que*

$$\sum_{j \in I_G(\bar{x}_0)} G_j'^*(\bar{x}_0)\mu_j = 0,$$

entonces, debido a los teoremas de representaciones, podemos garantizar la existencia, de funciones $\hat{\psi}$ *en* $L_\infty^n[t_0, T], \ \hat{\omega}$ *en* $b^l.a.(t_0, T)$ *y de un vector* $\hat{a}$ *en* $\mathbb{R}^k$*, no todos nulos o la* *existencia de funciones, $\check{\gamma}_j,\ j = 1, \cdots, k$, en b.a.$(t_0, T)$, con soporte en $R_j(\bar{x}_0)$, no todas nulas. Por lo tanto si el proceso óptimo $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ no es regular, podemos tomar $\lambda = 0$, $\gamma_j = \check{\gamma}_j,\ j = 1, \cdots, k$, $\psi = \hat{\psi}$, $\omega = \hat{\omega}$ y $a = \hat{a}$.*

El teorema queda de esta forma demostrado.

Hacemos notar que si en la formulación del problema de control óptimo, hay ausencia de restricciones del tipo $g(x, u) \leq 0$ y $m(x, u) = 0$, entonces las integrales,

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{T} g_{j\,u}(\bar{x}_0(t), t) v d\gamma_j, \quad \int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0(t), t) v d\omega$$

que son en sentido Lebegue, no están pesente en la condición (4.51), es decir,

$$\tilde{f}_s(v) \quad = \quad \int_{t_0}^{T} (f_u(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)) v dt.$$

Y como $\tilde{f}_s$ es una función soporte del conjunto $\mathcal{U}$ en $L_\infty^m[t_0, T]$, para u_0, entonces (ver 10.5 en [43]) $f_u(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)$ es soporte del conjunto $\mathbb{U}$ en $\mathbb{R}^m$, para u_0, esto es,

$$f_u(\bar{x}_0(t), t) - \varphi_u^*(\bar{x}_0(t), t)\psi(t)(u - u_0) \geq 0, \ \text{c.t.p. en } [\mathrm{t_0}, \mathrm{T}].$$

Observemos además que si λ_0 es nulo, las condiciones de optimalidad, para el proceso $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$, determinadas por las ecuaciones (4.37), (4.38) y (4.40), son degeneradas (ver sección 3.1), la función f, y por tanto la función a minimizar Φ, no interviene en dichas condiciones, es por ello la necesidad de establecer condiciones de regularidad, que aseguren que λ_0 es no nulo. Las condiciones suficientes para asegurar que $\lambda_0 > 0$ son denominadas condiciones de regularidad o normalidad, ver [39] y [43], y en el contexto de optimización Matemática, son denominadas restricción de cualificación ver [14], [39] y [67].

Finalmente debemos notar que en ausencia de restricciones de igualdad, desigualdad y de condiciones sobre la variable de estado, en el tiempo final T, es decir, m, g nulas y $x(T)$ libre, las condiciones necesarias de optimalidad, establecidas por el Principio del Máximo Local, donde en este caso surge la condición $\psi(T) = 0$, son siempre no degeneradas. Esto se debe a que la condición de regularidad (4.30), con v nulo, es una ecuación lineal de Volterra de segunda especie, la cual siempre admite solución en $C[t_0, T]$, para todo $a(\cdot)$ en $C[t_0; T]$, en particular tiene solución $h(\cdot)$, si $h(\cdot)$ es absolutamente continuo, para todo $a(\cdot)$ absolutamente continuo. En este caso, todo proceso óptimo es un KT-proceso.

Si en el Principio del Máximo Local, Teorema 53, se considera como hipótesis, que el proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es regular del conjunto factible Q, entonces, necesariamente λ_0 es no nulo y, en este caso, es posible asumir $\lambda_0 = 1$.

Con base a esta observación daremos la definición de un KT-proceso.

Definición 54 *Diremos que un proceso factible* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *es un KT-proceso, del problema* (P1)*, si satisface las ecuaciones (4.37), (4.38) y (4.40), del Teorema del Principio del Máximo Local, con* $\lambda_0 = 1$*.*

4.2.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

Las condiciones necesarias de optimalidad, de primera orden, no degeneradas, establecidas por el Principio de Pontryagin, para problemas de control óptimo, en general, no son suficientes sin hipótesis adicionales. No obstante, bajo el supuesto de que el problema es KT-invex, noción que extendemos desde optimización Matemática, al problema de control óptimo escalar (P1), es posible mostrar que estas condiciones necesarias de optimalidad, son también suficientes, si y solamente si, el problema es KT-invex. Estos problemas tienen una importante propiedad: el mínimo local y global coinciden.

En lo que sigue introduciremos la noción de KT-invex, para el problema (P1).

Definición 55 *Se dice que el problema* (P1) *es KT-invex, en el proceso factible,* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, si para cada proceso factible* $\bar{x} = (x, u)$*, en* $X \times U$*, existe una función* $\eta : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$*, arbitraria y una función* $\chi : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$*, tales que,*

$$\int_{t_0}^{T} [f(\bar{x}, t) - f(\bar{x}_0(t), t)]dt \geq \int_{t_0}^{T} [f_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + f_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t)]dt, \tag{4.52}$$

$$\eta'(t) = \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t), \text{ c.t.p. en } [t_0, T], \tag{4.53}$$

$$\eta(t_0) = 0, \tag{4.54}$$

$$m_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t) = 0, \tag{4.55}$$

$$q'(x_0(T))\eta(T) = 0, \tag{4.56}$$

$$0 \geq g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)\ \chi(t), \text{ c.t.p. en } t \in\ R_j(\bar{x}_0), \tag{4.57}$$

donde $R_j(\bar{x}_0)$ es definido en (4.21), $\eta := \eta(\bar{x}, \bar{x}_0)$ y $\chi := \chi(\bar{x}, \bar{x}_0)$ es definida para casi todo t en $[t_0, T]$, $\chi(t) = \lambda(u(t) - u_0(t))$, $\lambda > 0$ y u en Int$\mathcal{U}$, con $\mathcal{U}$ definido en (4.6).

En ausencia de restricciones de igualdad, de restricciones de desigualdad en la variable estado y de condiciones finales, en el tiempo T, la noción de KT-invex introducida en este trabajo coincide, con la introducida por Oliveira et al en [80].

Teorema 56 *Un KT-proceso* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, es una solución óptima del problema* (P1) *si y solo si el problema* (P1) *es KT-invex en* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*.*

Demostración*: Inicialmente supondremos que cada KT-proceso, es una solución óptima del problema* (P1) *y demostraremos que el problema* (P1) *es KT-invex en* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*.*

Supongamos que cada KT-proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, en $\hat{X} := X \times \mathcal{U}$, con $\mathcal{U}$ definido en (4.6), es una solución óptima del problema (P1)*, esto implica, debido a la equivalencia de los problemas* (P1) *y* (POE)*, que cada punto KT, $\bar{x}_0$, es un es una solución óptima, del* (POE)*, entonces, debido al Teorema 29, el problema* (POE) *es KT-invex, en $\bar{x}_0$. Por lo tanto de acuerdo a la Definición 28, existe una función $\bar{\eta} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{X}$, tal que, para cada punto factible $\bar{x} = (x, u)$ en $\hat{X}$,*

$$\Phi(\bar{x}) - \Phi(\bar{x}_0) \geq \Phi'(\bar{x}_0)\bar{\eta} \tag{4.58}$$

$$\bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{\eta} = 0 \tag{4.59}$$

$$-G_j'(\bar{x}_0)\bar{\eta} \geq 0, \ j \in I(G, \bar{x}_0), \tag{4.60}$$

donde $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{x}_0)$ y donde $I(G, \bar{x}_0)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas, definido en (4.22).

Como $\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{x}_0)$ pertenece a $\hat{X} := X \times \mathcal{U}$, entonces existen $\eta = \eta(\bar{x}, \bar{x}_0)$ en $X = W_{1,1}^n[t_0, T]$ y $\chi = \chi(\bar{x}, \bar{x}_0)$ en $\mathcal{U}$, componenetes de $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{x}_0)$, tales que $\eta : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ y $\chi : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación,

$$\bar{\eta}(t) = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{x}_0)(t) = (\eta(\bar{x}, \bar{x}_0)(t), \chi(\bar{x}, \bar{x}_0)(t)) = (\eta(t), \chi(t)), \tag{4.61}$$

donde $\bar{x} = (x, u)$, $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ son procesos factibles en $X \times \mathcal{U}$.

Obsevemos que como χ pertenece a $\mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un subconjunto cerrado convexo, con interior no vacío de $L_\infty^m[t_0, T]$, entonces existe $\lambda > 0$ y u en $\mathrm{Int}\,\mathcal{U}$,

$$\chi(t) = \lambda(u(t) - u_0(t)), \ \text{c.t.p. en } [t_0, T]. \tag{4.62}$$

Por otro lado, de acuerdo a la definición de $\Phi'(\bar{x}_0)$ y $\bar{F}'(\bar{x}_0)$, dadas en (4.15) y (4.16), respectivamente, obtenemos,

$$\Phi'(\bar{x}_0)\bar{\eta} = \Phi'(\bar{x}_0)(\eta, \chi) = \int_{t_0}^{T} (f_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + f_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t))dt \tag{4.63}$$

y, para t en $[t_0, T]$,

$$\bar{F}'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t) = \Big(F_1'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t), F_2'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t), F_3'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t)\Big), \tag{4.64}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t) &= \eta(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau)\eta(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau)\chi(\tau)d\tau, \\
F_2'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t) &= m_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t), \\
F_3'(\bar{x}_0)(\eta, \chi)(t) &= q'(x_0(T))\eta(T).
\end{aligned}$$

Además como,

$$-G_j'(\bar{x}_0)\bar{\eta} \geqslant 0_{L_\infty^1} \Longleftrightarrow -(G_j'(\bar{x}_0)\bar{\eta})(t) \geq 0_{\mathbb{R}}, \ \text{c.t.p. en } [t_0, T],$$

con $(G'_j(\bar{x}_0)\bar{\eta})(t) = g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\chi(t)$.

Entonces, de acuerdo al Lema 49,

$$-G'_j(\bar{x}_0)\bar{\eta} \geqslant 0_{L^1_\infty}, j \in I(G,\bar{x}_0) \iff -(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\chi(t)) \geq 0, \quad t \in R_j. \tag{4.65}$$

Por lo tanto, reemplazando Φ*, definido en (4.7) y las expresiones (4.63), (4.64) y (4.65), en (4.58), (4.59) y (4.60) respectivamente, obtenemos,*

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T} [f(\bar{x},t) - f(\bar{x}_0(t),t)]dt \geq \int_{t_0}^{T} [f_x(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + f_u(\bar{x}_0(t),t)\chi(t)]dt \\
&\eta(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau),\tau)\eta(\tau) + \varphi_u(x_0(\tau),y_0(\tau),\tau)\chi(\tau)d\tau = 0, \text{ c.t.p. en } [t_0,T], \\
&m_x(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)\chi(t) = 0, \text{c.t.p. en } [t_0,T] \\
&q'(x_0(T))\eta(T) = 0 \\
&0 \geq g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\ \chi(t), \text{ c.t.p. en } t \in R_j(\bar{x}_0),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es equivalente a,

$$\eta'(t) = \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\eta(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\chi(t), \quad \eta(t_0) = 0.$$

De lo anteriormente expuesto podemos asegurar la existencia de funciones $\eta = \eta(\bar{x},\bar{x}_0)$ *y* $\chi = \chi(\bar{x},\bar{x}_0)$*, tal que* $\chi(t) = \lambda(u(t) - u_0(t))$*, con* u *en* $\mathrm{Int}\mathcal{U}$*, las cuales satisfacen las ecuaciones (4.52)-(4.57), lo que implica que el problema* (P1) *es KT-invex.*

Recíprocamente, supondremos ahora que el problema (P1) *es KT-invex, en el proceso* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$*, y mostraremos que si* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$ *es un KT-proceso del problema* (P1)*, entonces necesariamente, es solución óptima del problema* (P1)*.*

Supongamos que el problema (P1) *es KT-invex, en el proceso* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$*, esto implica que el* (POE) *es KT-invex, en el punto* $\bar{x}_0$*, que es una condición necesaria y suficiente, de acuerdo al Teorema 29, para que cada punto KT sea un punto óptimo del* (POE)*.*

Ahora como los problemas (P1) *y* (POE) *son equivalentes, se sigue que: si el punto factible* $\bar{x}_0$ *es un punto óptimo del* (POE)*, entonces el proceso factible* (x_0,u_0) *es óptimo del problema* (P1) *y, como es probado en el trancurso de la demostración del Teorema 53, si* $\bar{x}_0$ *es un punto KT del* (POE)*, entonces,* (x_0,u_0) *es un KT-proceso del problema* (P1)*, podemos concluir, por tanto, que* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$ *es un proceso óptimo del problema* (P1)*.*

El teorema queda así demostrado.

El teorema anterior, caracteriza completamente los problemas de control KT-invex.

4.3. Problemas No Regulares

Las condiciones necesarias de optimalidad, de primer orden, establecidas por el Principio del Máximo Local, clásico, presentado en el capítulo anterior, son útiles cuando el problema es regular o normal, esto es, cuando el multiplicador asociado a la función objetivo, es no nulo, es decir λ_0 es no nulo. Las condiciones suficientes para asegurar que $\lambda_0 > 0$ son denominadas condiciones de regularidad o normalidad, ver [39], [6] y [43]. Si las restricciones de igualdad y desigualdad satisfacen alguna condición de regularidad para un proceso dado, $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, entonces se dice que $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es un proceso regular, o bien, que las restricciones son regulares en el proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, en caso contrario el proceso es denominado no regular o anormal.

En esta sección presentaremos el Principio del Máximo Local Extendido, el cual generaliza el Principio del Máximo Local clásico, presentado en la sección anterior, que establece condiciones necesarias de optimalidad, de segundo orden no degeneradas, para un problema de control óptimo, aún cuando sea no regular. Previamente introduciremos, el concepto 2-regularidad que, como veremos, es fundamental para establecer condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden no degeneradas. Introduciremos la noción de 2-KTinvexidad, para la obtención de condiciones suficientes de optimalidad.

Para establecer condiciones de optimalidad de segundo orden, para el problema (P1), consideramos las siguientes hipótesis sobre las funciones: f es continuamente diferenciable, φ, q, h y g son dos veces continuamente diferenciables, con respecto a (x, u) y todas ellas, para cada (x, u), medibles en t. y que el subespacio $\mathrm{Im}\bar{F}'(\bar{x}_0)$ es cerrado en $Y = (W_{1,1}[t_0, T] \times L^m_\infty[t_0, T] \times \mathbb{R}^k)$, donde $\bar{F}'(\bar{x}_0)$ es definido en (4.16). Denotaremos por $(\hat{\mathrm{P}1})$ y $(\mathrm{P\hat{O}E})$ para indicar los problemas (P1) y (POE) respectivamente, con las hipótesis antes mencionadas.

Inicialmente daremas la definición de proceso 2-regular, para las restricciones del problema $(\hat{\mathrm{P}1})$ que es equivalente al problema abstracto (POE), y condiciones suficientes que aseguren que un proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ sea regular.

Definición 57 *Diremos que $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es un proceso 2-regular del conjunto factible Q, del problema $(\hat{\mathrm{P}1})$, si el cono tangente a las restricciones de igualdad, en el proceso factible $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, es,*

$$\begin{aligned} T_{Q_1}(\bar{x}_0) = \Big\{ &\bar{h} = (h, v) \in X \times U,\ \exists\ \bar{x}_{\bar{h}} = (x_h, u_v) \in X \times U; \\ &h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)v(t) = 0, \\ &h(t_0) = 0, m_x(\bar{x}_0(t), t)h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)v(t) = 0, q'(x_0(T))h(T) = 0, \\ &x'_h(t) - \varphi_x(\bar{x}_0, t)x_h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0, t)u_v(t) - \varphi_{xx}(\bar{x}_0, t)[h(t), h(t)] - \\ &2\varphi_{xu}(\bar{x}_0, t)[h(t), v(t)] - \varphi_{uu}(\bar{x}, t)[v(t), v(t)] = 0,\ x_h(t_0) = 0, \\ &q'(x_0(T))x_h(T) + q''(x_0(T))[h(T), h(T)] = 0,\ t_0 \leq t \leq T \Big\}, \end{aligned} \tag{4.66}$$

y además para todo $\bar{h} = (h, v)$ en $H_Q(\bar{x}_0)$, con Q definido en (4.2), existen (h_1, v_1), (h_2, v_2), tales que,

$$\begin{aligned} h_2'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)h_2(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)v_2(t) &= 0, \\ m_x(\bar{x}_0(t), t)h_2(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)v_2(t) &= 0 \\ h_1'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t), t)h_1(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)v_1(t) - \varphi_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h, h_1] - & \\ \varphi_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h, v_1] - \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t), t)[v, h_1] - \varphi_{uu}(\bar{x}, t)[v, v_1] &= 0, \quad (4.67) \\ m_x(\bar{x}_0(t), t)h_1(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)u_1(t) + m_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), h_2(t)] + & \\ m_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), v_2(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), h_2(t)] + m_{uu}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), v_2(t)] &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h_2(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)v_2(t) < 0, \quad t \in R_j(\bar{x}_0; \bar{h}), \text{ c.t.p.} \\ g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)h_1(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)v_1(t) \\ +g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), h_2(t)] + g_{j_{xu}}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), v_2(t)] + g_{j_{ux}}\bar{x}_0(t), t)[v(t), h_2(t)] + \\ g_{j_{uu}}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), v_2(t)] < 0, \ t \in \tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h}), \text{ c.t.p.} \end{aligned} \quad (4.68)$$

con condiciones de borde,

$$\begin{gathered} h_1(t_0) = 0, \qquad h_2(t_0) = 0, \qquad q'(x_0(T))h_2(T) = 0 \\ q'(x_0(T))h_1(T) + q''(x_0(T))[h(T), h_2(T)] = 0, \end{gathered} \quad (4.69)$$

donde

$$\begin{aligned} H_Q(\bar{x}_0) = \Big\{ & \bar{h} = (h, v) \in T_{Q_1}(\bar{x}_0), \ g_j'(\bar{x}_0(t), t)\bar{h} \leq 0, \ j \in R_j(\bar{x}_0), \\ & g_j'(\bar{x}_0(t), t)\bar{x}_{\bar{h}} + g_j''(\bar{x}_0(t), t)[\bar{h}, \bar{h}] < 0, \ j \in R_j(\bar{x}_0, \bar{h}), \ j = 1, \cdots, r \Big\}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$R_j(\bar{x}_0, \bar{h})$ es definido en (4.24) y

$$\tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h}) = \{t \in R_j(\bar{x}_0, h), \ \ g_j'(\bar{x}_0(t), t)\bar{h} + g_j''(\bar{x}_0(t), t)[\bar{h}, \bar{h}] = 0\}, \ j = 1, \cdots, r. \quad (4.71)$$

El siguiente lema nos será útil, para la demostración del Teorema del Principio del Máximo Local Extendido, presentado en la siguiente sección.

Lema 58 *El proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es un proceso 2-regular del conjunto factible Q, del problema* $(\hat{\text{P1}})$ *si y solamente si, $\bar{x}_0$ es un punto 2-regular del conjunto factible $\bar{M}$ del problema* $(\overline{\text{POE}})$.

***Demostración**: De forma inmediata, podemos ver que la ecuación diferencial,*

$$h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0, t)h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0, t)v(t) = 0, \ h(t_0) = 0$$

o bien la ecuación integral,

$$h(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau)h(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau)v(\tau)d\tau = 0 \tag{4.72}$$

y las condiciones,

$$\begin{aligned} m_x(\bar{x}_0, t)h(t) + m_u(\bar{x}_0, t)v(t) &= 0 & (4.73)\\ q'(x_0(T))h(T) &= 0, & (4.74) \end{aligned}$$

son equivalentes a que $\bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0$, *donde* $\bar{F}'(\bar{x}_0) = (F_1'(\bar{x}_0),\ F_2'(\bar{x}_0),\ F_3'(\bar{x}_0))$, *es definido en (4.16).*

Similarmente, es fácil ver que la condición de que existe (x_h, u_v), *tal que,*

$$\begin{aligned} x_h'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0, t)x_h(t) - \varphi_u(\bar{x}_0, t)u_v(t) - \varphi_{xx}(\bar{x}_0, t)[h(t), h(t)] - \\ 2\varphi_{xu}(\bar{x}_0, t)[h(t), v(t)] - \varphi_{uu}(\bar{x}, t)[v(t), v(t)] &= 0\\ x_h(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} x_h(t) - \int_{t_0}^{t} \Big(\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau)x_h(\tau) + \varphi_u(\bar{x}_0(\tau), \tau)u_v(\tau) - \varphi_{xx}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[h(\tau), h(\tau)] - \\ 2\varphi_{xu}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[h(\tau), v(\tau)] - \varphi_{uu}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[v(\tau), v(\tau)]\Big)d\tau &= 0, \end{aligned}$$

y las condiciones,

$$\begin{aligned} m_x(\bar{x}_0(t), t)x_h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)u_v(t) + m_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), h(t)] + \\ 2m_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), v(t)] + m_{uu}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), v(t)] &= 0\\ q'(x_0(T))x_h(T) + q''(x_0(T))[h(T), h(T)] &= 0, \end{aligned}$$

son equivalentes, a la condición que existe $\bar{x}_{\bar{h}}$ *en* $\hat{X}$, *talque* $\bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{x}_{\bar{h}} + \bar{F}''(\bar{x}_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0$, *donde* $\bar{F}''(\bar{x}_0)$ *es definido en (4.17).*

Por lo tanto el cono tangente a las restricciones de interior no vacío, en el punto $\bar{x}_0$ *del (*PCO*), es*

$$T_{M_{\bar{F}}}(x_0) = \Big\{\bar{h} \in \hat{X},\ \exists\ \bar{x}_{\bar{h}} \in \hat{X},\ \bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0, \bar{F}'(x_0)\bar{x}_{\bar{h}} + \bar{F}''(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0\Big\}. \tag{4.75}$$

Por otro lado si observamos que $\tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h})$ *está formado por los* t *en* $R_j(\bar{x}_0, \bar{h})$, *definido en (4.24), tal que* $g_j'(\bar{x}_0(t), t)\bar{x}_{\bar{h}} + g_j''(\bar{x}_0(t), t)[\bar{h}, \bar{h}] = 0$, *que es equivalente a,*

$$\begin{aligned} G_j'(\bar{x}_0)\bar{h}(t) &= 0\\ (G_j'(\bar{x}_0)\bar{x}_{\bar{h}} + G_j''(\bar{x}_0)[\bar{h}, \bar{h}])(t) &= 0 \end{aligned}$$

y, tomamos en consideración la equivalencia (4.23), es posible probar de manera análoga a la demostración del Lema 49, que

$$t \in \tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h}) \Longleftrightarrow j \in \tilde{I}_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0), \tag{4.76}$$

donde

$$\tilde{I}_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0) = \{j \in I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0),\ G'_j(x_0)\bar{x}_{\bar{h}} + G''_j(x_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0\}, \tag{4.77}$$

con $I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0)$, definido en (4.25).

Por lo tanto, la condición, para todo $\bar{h} = (h, v)$ en $H_Q(\bar{x}_0)$, con Q definido en (4.2), existen (h_1, v_1), (h_2, v_2) satisfaciendo (4.67), (4.68) y (4.69) simultáneamente, es equivalente a decir, debido a la equivalencia (4.12), que para todo $\bar{h}$ en $H_{\bar{M}}(x_0)$, el sistema,

$$\begin{cases} \bar{F}'(\bar{x}_0)\xi_2 & = & 0 \\ \bar{F}'(\bar{x}_0)\xi_1 + \bar{F}''(\bar{x}_0)[\bar{h}, \xi_2] & = & 0, \\ G'_j(\bar{x}_0)\xi_2 & < & 0,\ \forall\ j \in\ I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0) \\ G'_j(\bar{x}_0)\xi_1 + G''_j(\bar{x}_0)[\bar{h}, \xi_2] & < & 0,\ \forall\ j \in \tilde{I}_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0), \end{cases} \tag{4.78}$$

tiene solución $\xi_1, \xi_2 \in \hat{X}$, con $\xi_1 = (h_1, v_1), \xi_2 = (h_2, v_2)$, donde

$$\begin{aligned} H_{\bar{M}}(\bar{x}_0) = \Big\{&\bar{h} \in \hat{X},\ \bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0,\ G'_j(\bar{x}_0)\bar{h} \leqslant 0,\ j \in I(G, \bar{x}_0),\ \exists\ \bar{x}_{\bar{h}} \in \hat{X},\ \bar{F}'(\bar{x}_0)\bar{x}_{\bar{h}} + \\ &\bar{F}''(\bar{x}_0)[\bar{h}, \bar{h}] = 0, G'_j(\bar{x}_0)\bar{x}_{\bar{h}} + G''_j(\bar{x}_0)[\bar{h}, \bar{h}] < 0,\ i \in I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0)\Big\} \end{aligned} \tag{4.79}$$

y $\bar{M}$ es el conjunto factible del ($\hat{\mathrm{PO}}$E*).*

Por lo tanto de acuerdo a la Definición 36, el punto $\bar{x}_0$, es un punto 2-regular del ($\hat{\mathrm{PO}}$E*).*

4.3.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

Nosotros ahora presentaremos el Principio del Máximo Local Extendido que establece condiciones de optimalidad de segundo orden, no degeneradas, para el problema ($\hat{\mathrm{P1}}$), aún cuando el problema sea no regular. Estas condiciones se obtienen a partir de las condiciones 2-Karush-Kuhn-Tucker-Avakov, en espacios de Banach, presentado en sección 3.2.1.

Teorema 59 *Para que un proceso factible $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ sea solución del problema ($\hat{\mathrm{P1}}$), es necesario que, para todo $\bar{h} = (h, v)$ en $H_Q(\bar{x}_0)$, definido en (4.70), tal que $\Phi'(\bar{x}_0)\bar{h} = 0$, existan un número $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{h})$, $\lambda_0 \geq 0$, vectores $a = a(\bar{h}), \tilde{a} = \tilde{a}(\bar{h})$ en $\mathrm{I\!R}^k$ y funciones $\psi = \psi(\bar{h})$, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\bar{h}) : [t_0, T] \to \mathrm{I\!R}^n$, $\omega = \omega(\bar{h})$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\bar{h})$ en $b^l.a.(t_0, T)$, y $\gamma_j = \gamma_j(\bar{h})$, $\tilde{\gamma}_j = \tilde{\gamma}_j(\bar{h})$ en $b.a.(t_0, T)$, con soporte en $R_j(\bar{x}_0, \bar{h})$ y en $\tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h})$, $j = 1, \cdots, k$, definidos en (4.24) y (4.71)* *respectivamente, no todos nulos simultáneamente, tales que,*

$$\begin{aligned}\lambda_0 f_x(\bar{x}_0,t)+\sum_{j=1}^{k} g_{j_x}^{*}(\bar{x}_0,t)\hat{\gamma}_j(t)+\sum_{j=1}^{k} g_{j\,xx}^{*}(\bar{x}_0,t)(h)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)+\sum_{j=1}^{k} g_{j\,ux}^{*}(\bar{x}_0,t)(v)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)\\ -\varphi_x^{*}(\bar{x}_0,t)\psi(t)+m_x^{*}(\bar{x}_0,t)\hat{\omega}(t)-\varphi_{xx}^{*}(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t)-\varphi_{ux}^{*}(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t)\\ +m_{xx}^{*}(\bar{x}_0,t)(h)\hat{\tilde{\omega}}(t)+m_{ux}^{*}(\bar{x}_0,t)(v)\hat{\tilde{\omega}}(t)=\psi'(t),\end{aligned}\tag{4.80}$$

con la condición final,

$$\psi(T)=-q'^{*}(x_0(T))a-(q''(x_0(T))h(T))^{*}\tilde{a},\tag{4.81}$$

y

$$\tilde{\psi}'(t)=-\sum_{j=1}^{k} g_{j_x}^{*}(\bar{x}_0,t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)+\varphi_x^{*}(\bar{x}_0,t)\tilde{\psi}(t)-m_x^{*}(\bar{x}_0,t)\hat{\tilde{\omega}}(t)\tag{4.82}$$

con la condición,

$$\tilde{\psi}(T)=-q'^{*}(x_0(T))\tilde{a}.\tag{4.83}$$

Además satisfacen la condición del máximo,

$$\begin{aligned}\lambda_0\int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0,t)(u-u_0)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{t\in R_j(\bar{x}_0)} g_{j_u}(\bar{x}_0,t)(u-u_0)d\gamma_j\\ +\sum_{j=1}^{k}\int_{t\in R_j(\bar{x}_0;\bar{h})}(g_{j_{xu}}(\bar{x}_0,t)(u-u_0)g_{j_{uu}}(\bar{x}_0,t))(u-u_0)d\tilde{\gamma}_j\\ -\int_{t_0}^{T}\varphi_u^{*}(\bar{x}_0,t)\psi(t)(u-u_0)dt+\int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0,t)(u-u_0)d\omega\\ -\int_{t_0}^{T}\varphi_{xu}^{*}(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t)+\varphi_{uu}^{*}(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t))(u-u_0)dt\\ +\int_{t_0}^{T}(m_{ux}(\bar{x}_0,t)(h)+m_{uu}(\bar{x}_0,t)(v))(u-u_0)d\tilde{\omega}\ \geq 0\end{aligned}\tag{4.84}$$

y

$$\sum_{j=1}^{k} g_{j\,u}^{*}(\bar{x}_0(t),t)\hat{\tilde{\gamma}}_j-\varphi_u^{*}(\bar{x}_0,t)\tilde{\psi}(t)+m'^{*}(\bar{x}_0,t)\hat{\tilde{\omega}}=0,\tag{4.85}$$

para casi todo $t_0\leq t\leq T$ y para todo $u\in\mathcal{U}$, tal que $u(t)$ pertenezca $\mathbb{U}$, donde $g_{j_x}^{*}$, $g_{j_u}^{*}$, φ_x^{*} y φ_u^{*} son los operadores adjuntos de g_{j_x}, g_{j_u}, φ_x y φ_u, respectivamente y donde $\hat{\omega}(t)$, $\hat{\tilde{\omega}}(t)$, $\hat{\gamma}_j(t)$, $\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)$,

$j=1,\cdots,r$, son las derivadas de Radon Nikodym de los funcionales absolutamente continuos f^a_ω, $f^a_{\tilde\omega}$, $f^a_{\gamma_j}$ y $f^a_{\tilde\gamma_j}$ dado por,

$$
\begin{aligned}
f^a_\omega(z(t)) &= \int_{t_0}^T z(t)d\omega & f^a_{\tilde\omega}(z(t)) &= \int_{t_0}^T z(t)d\tilde\omega,\\
f^a_{\gamma_j}(\bar h)(z(t)) &= \int_{R_j(\bar x_0,\bar h)} z(t)d\gamma_j & \tilde f^a_{\tilde\gamma_j}(\bar h)(z(t)) &= \int_{\tilde R_j(\bar x_0,\bar h)} z(t)d\tilde\gamma_j \quad j=1,\cdots,k.
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

***Demostración**: La demostración que daremos es en la misma dirección de la demostración del Teorema 53, solo que ahora se basa en la aplicación del Teorema 45, por lo tanto verificaremos que las hipótesis de este teorema se cumplan.*

De acuerdo a las hipótesis impuestas a las funciones que definen el problema f, φ, m, h y q, $(\hat{\mathrm{P}}1)$, es inmediato que, el funcional Φ, definido en (4.7), es Frechêt diferenciable, en tanto que los operadores G y $\bar F$, definidos en (1) y (2), son dos veces continuamente diferenciables, con respecto a (x,u) y todas ellas, para cada (x,u), medibles en t.

Supongamos inicialmente que el proceso óptimo $\bar x_0=(x_0,u_0)$ del problema $(\hat{\mathrm{P}}1)$, es un proceso 2-regular, entonces, siendo el problema $(\hat{\mathrm{P}}1)$ equivalente al Problema de Optimización Escalar $(\mathrm{P\hat{O}E})$, el punto $\bar x_0$ es un punto óptimo del $(\mathrm{P\hat{O}E})$ y de acuerdo al Lema 58, también es un punto 2-regular.

Por lo tanto como el punto factible $\bar x_0$, es una solución óptima, local o global, y es un punto 2-regular del $(\overline{\mathrm{PE}})$, tal que $\Phi'(\bar x_0)\bar h \geq 0$, para todo $\bar h$ en $H_M(\bar x_0)$ entonces, de acuerdo al Teorema 45, $\bar x_0$ es un punto KTA, en la dirección $\bar h$ en $H_M(\bar x_0)$, lo que implica, de acuedo a la Definición 44, que existen funciones $\mu_j=\mu_j(\bar h)$ en $(L^1_\infty[t_0,T])^*$, $j=1,\cdots,l$, $\bar\psi=(\psi_1,\ \psi_2,\psi_3)$, $\bar{\tilde\psi}=(\tilde\psi_1,\ \tilde\psi_2,\tilde\psi_3)$ en $Y^*=(W^n_{1,1}[t_0,T]\times L^l_\infty[t_0,T]\times\ \mathbb{R}^k)^*$, $\psi_i=\psi_i(h)$, $\tilde\psi_i=\tilde\psi_i(h)$, $i=1,2,3$, no todas identicamente nulos, tales que,

$$
\begin{aligned}
\Phi'(\bar x_0)+\sum_{j\in I_{\bar h}(G,\bar x_0)} G'^*_j(\bar x_0)\mu_j+\sum_{j\in \tilde I_h(G,x_0)} G''^*_j(x_0)(\bar h)\tilde\mu_j+\sum_{i=1}^3 F'^*_i(x_0)\psi_i \qquad&\\
+\sum_{i=1}^3 F''^*_i(x_0)(\bar h)\tilde\psi_i &= f_s(\bar h)\\
\sum_{j\in \tilde I_{\bar h}(G,\bar x_0)} G'^*_j(x_0)\tilde\mu_j+\sum_{i=1}^3 F'^*_i(x_0)\tilde\psi_i &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $\mu_j(z)$ y $\tilde\mu_j(\tilde z)$ son no negativos para todo z en $\mathrm{Im}G'_j(x_0)$, subespacio cerrado $L^1_\infty[t_0,T]$, y $\tilde z$ en $L^1_\infty[t_0,T]\setminus \mathrm{Im}G'_j(x_0)$, $f_s(\bar h)=(0,\tilde f_s(\bar h))$, con $\tilde f_s$ funcional soporte para el conjunto $\mathcal{U}$, en u_0, es decir,

$$\tilde f_s(\bar h)(u-u_0)\geqslant 0,\quad \forall\ u\in\ \mathcal{U}$$

y donde $I_{\bar h}(G,\bar x_0)$, $\tilde I_{\bar h}(G,\bar x_0)$ son definidos en (4.25) y (4.77) respectivamente.

Notemos que, por ser $\mathrm{Im}G'_j(x_0)$*, un subespacio cerrado en* $L^1_\infty[t_0,T]$*, (Ver cap. 4 [87])*

$$\begin{array}{l}\mu_j \in (\mathrm{Im}G'_j(\bar{x}_0))^* \cong (L^1_\infty[t_0,T])^* \setminus [\mathrm{Im}G'_j(\bar{x}_0))]^\perp \cong b.a.(t_0,T) \setminus [\mathrm{Im}G'_j(\bar{x}_0)]^\perp \\ \tilde{\mu}_j \in (L^1_\infty[t_0,T] \setminus \mathrm{Im}G'_j(\bar{x}_0))^* \cong [\mathrm{Im}G'_j(\bar{x}_0)]^\perp \cong \mathrm{Ker}(G'_j(\bar{x}_0))^* \subset b.a.(t_0,T),\end{array} \tag{4.87}$$

donde $\cong$ *indica la relación de isomorfismo isométrico.*

Considerando ahora la definición de operador adjunto obtenemos, para todo $(\tilde{h},\tilde{v})$ *en* $X \times U = W^n_{1,1}[t_0,T] \times L^m_\infty[t_0,T]$,

$$\begin{aligned}\Phi'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v}) + \sum_{j\in I_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)} \langle \mu_j, G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle + \sum_{j\in \tilde{I}_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)} \langle \tilde{\mu}_j, G''_j(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})\rangle \\ + \sum_{i=1}^{3} \langle \psi_i, F'_i(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v}) + \sum_{i=1}^{3} \langle \tilde{\psi}_i, F''_i(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})\rangle = \tilde{f}_s(\bar{h})(\tilde{v}).\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\sum_{j\in \tilde{I}_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)} \langle \tilde{\mu}_j, G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle + \sum_{i=1}^{3} \langle \tilde{\psi}_i, F'_i(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle = 0. \tag{4.89}$$

En lo que sigue determinaremos explícitamente los términos de la expresión (4.88) y, posteriormente los términos de la expresión (4.89).

1. *La primera derivada del funcional* Φ*, en* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$*, es definida, para cada* $(\tilde{h},\tilde{v})$ *en* $X \times U$,

$$\Phi'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v}) \;\; = \;\; \int_{t_0}^{T} (f_x(\bar{x}_0,t)\tilde{h}(t) + f_u(\bar{x}_0,t)\tilde{v}(t))dt. \tag{4.90}$$

2. *Tomando en consideración (4.23), (4.76) y (4.87), podemos asegurar, dado que* μ_j*,* j *en* $I_{\bar{h}}(\bar{x}_0)$*, y* $\tilde{\mu}_j$*,* j *en* $\tilde{I}_{\bar{h}}(\bar{x}_0)$*, pertenecen* $(L^1_\infty[t_0,T])^*$*, que existen* $\gamma_j(t)$*,* $\tilde{\gamma}_j(t)$*, en* $b.a.(t_0,T)$ *con soporte en* $R_j(\bar{x}_0,\bar{h})$ *y* $\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})$ *respectivamente, tales que, para* $G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})$*,* $G''_j(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})$ *en* $L^1_\infty[t_0,T]$*,*

$$\begin{aligned}\langle \mu_j, G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T} G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})(t)d\gamma_j \\ &= \int_{t_0}^{T} (g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))d\gamma_j \\ &= \int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})} (g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))d\gamma_j,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mu}_j, G_j''(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T} G_j''(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})(t)d\tilde{\gamma}_j \\ &= \int_{t_0}^{T} \Big(g_{j_{xx}}\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + g_{j_{xu}}\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)] \\ &\qquad g_{j_{ux}}\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)] + g_{j_{uu}}\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big) d\tilde{\gamma}_j \\ &= \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} \Big(g_{j_{xx}}\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + g_{j_{xu}}\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)] \\ &\qquad g_{j_{ux}}\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)] + g_{j_{uu}}\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big) d\tilde{\gamma}_j.\end{aligned}$$

Si usamos la notación,

$$f_{\gamma_j}(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))) := \int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})} g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))d\gamma_j$$

$$\tilde{f}_{\gamma_j}(\bar{h})(g_j{}''(\bar{x}_0(t),t)[(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))]) := \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} g_j{}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)]d\tilde{\gamma}_j,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\langle \mu_j, G'{}_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= f_{\gamma_j}(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))) \\ \langle \tilde{\mu}_j, G''{}_j(\bar{x}_0)(\bar{h})(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_j{}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))]).\end{aligned} \tag{4.91}$$

Como todo funcional lineal definido sobre $L_\infty[t_0,T]$, puede ser representado, (ver [41]), como la suma directa de un funcional absolutamente continuo y un funcional singular, entonces es posible, la siguiente representación, para μ_j y $\tilde{\mu}_j$, $j=1,\cdots,k$, en $(L_\infty[t_0,T])^*$, $\mu_j := \mu_j^a + \mu_j^s$, y $\tilde{\mu}_j := \tilde{\mu}_j^a + \tilde{\mu}_j^s$, donde μ_j^a y $\tilde{\mu}_j^a$ son absolutamente continuas y μ_j^s y $\tilde{\mu}_j^s$ son singulares.

Para las partes absolutamente continuas existen $\hat{\gamma}_j$ y $\hat{\tilde{\gamma}}_j$ en $L_1[t_0,T]$, $j=1,\cdots,r$, llamadas derivadas de Radon Nikodym, tales que, para z, $\tilde{z}$ en $L_\infty[t_0,T]$,

$$\begin{aligned}\langle \mu_j^a,\ z\rangle &= \int_{t_0}^{T} z(t)\hat{\gamma}_j(t)dt = \int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})} z(t)\hat{\gamma}_j(t)dt := f^a_{\gamma_j}(\bar{h})(z(t)), \quad j=1,\cdots,k \\ \langle \tilde{\mu}_j^a,\ \tilde{z}\rangle &= \int_{t_0}^{T} \tilde{z}(t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt = \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} \tilde{z}(t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt := \tilde{f}^a_{\gamma_j}(\bar{h})(\tilde{z}(t)), \quad j=1,\cdots,k.\end{aligned} \tag{4.92}$$

3. *Puesto que $\bar{\psi} = (\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ y $\bar{\tilde{\psi}} = (\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2,\tilde{\psi}_3)$ están en $Y^* = (W^n_{1,1}[t_0,T] \times L^l_\infty[t_0,T] \times \mathbb{R}^k)^*$ podemos garantizar, por la representación única de ψ_1 y $\tilde{\psi}_1$ en $X^* = (W^n_{1,1}[t_0,T])^*$, (ver cap.0 [52]), la existencia de ψ, $\tilde{\psi}$ en $L^n_\infty[t_0,T]$ y b, $\tilde{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que,*

$$\begin{aligned}\langle \psi_1, F_1'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \langle b, F_1'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{T} \psi(t)\frac{d}{dt}F_1'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})(t)dt \\ &= \langle b, \tilde{h}(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{T} \psi(t)(\tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))dt,\end{aligned}$$

y

$$\langle\tilde{\psi}_1, F_1''(\bar{x}_0)[(h,v),(\tilde{h},\tilde{v})]\rangle = \langle\tilde{b}, F_1''(\bar{x}_0)[(h,v),(\tilde{h},\tilde{v})](t_0)\rangle - \int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)\frac{d}{dt}(F_1''(\bar{x}_0)(h,v))(\tilde{h},\tilde{v})(t)dt$$

$$= -\int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)\Big(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + \varphi_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)]$$

$$+\varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)] + \varphi_{uu}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big)dt.$$

Además dado que ψ_2, $\tilde{\psi}_2$ pertenecen a $U^{l*} := L_\infty^l[t_0,T]^*$, existen ω, $\tilde{\omega}$ en $b^l.a.(t_0,T)$ tales que,

$$\begin{aligned}\langle\psi_2, F_2'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T}(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))d\omega \\ &:= f_\omega(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\psi}_2, (F_2''(\bar{x}_0)(h,v))(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T}\Big(m_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + m_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)] \\ &\quad +m_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)] + m_{uu}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big)d\tilde{\omega} \\ &:= f_{\tilde{\omega}}(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))])\end{aligned}$$

y dado que ψ_3, $\tilde{\psi}_3$, pertenecen a $(\mathbb{R}^k)^* \cong \mathbb{R}^k$, existen vectores a y $\tilde{a}$ en $\mathbb{R}^k$, tal que,

$$\langle\psi_3, (F_3'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v}))\rangle = \langle a, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle,$$

y

$$\langle\tilde{\psi}_3, (F_3''(\bar{x}_0)(h,v))(\tilde{h},\tilde{v})\rangle = \langle\tilde{a}, q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\langle\psi_i, F_i'(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T}\psi(t)(\tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))dt \\ &+ \langle b,\tilde{h}(t_0)\rangle + f_\omega(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)) + \langle a, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle\end{aligned} \tag{4.93}$$

y

$$\sum_{i=1}^{3}\langle\tilde{\psi}_i, (F_i''(\bar{x}_0)(h,v))(\tilde{h},\tilde{v})\rangle = -\int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}\Big(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)]$$

$$+\varphi_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)] + \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)] + \varphi_{uu}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big)dt \tag{4.94}$$

$$+f_{\tilde{\omega}}(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)]) + \langle\tilde{a}, q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle.$$

Reemplazando (4.90) (4.91), (4.93) y (4.94) en (4.88),

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T}(f_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)+f_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))dt+\sum_{j=1}^{k}f_{\gamma_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)))\\
&+\sum_{j=1}^{k}\tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))])+\int_{t_0}^{T}\psi(t)\Big(\tilde{h}'(t)-\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)\\
&\quad-\varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\Big)dt+\langle b,\tilde{h}(t_0)\rangle+f_\omega(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))+\langle a,q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle\\
&\qquad-\int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)\Big(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)]+\varphi_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{v}(t)]\\
&\qquad\qquad+\varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)]+\varphi_{uu}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{v}(t)]\Big)dt\\
&\qquad+f_{\tilde{\omega}}(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))])+\langle\tilde{a},q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle=\tilde{f}_s(\bar{h})(\tilde{v}).
\end{aligned}\tag{4.95}$$

Como la identidad (4.95) es válida para todo $(\tilde{h},\tilde{v})$ en $X\times U$, en particular es válida, para $(\tilde{h},\tilde{v})=(\tilde{h},0)$ en $X\times U$, con $\tilde{h}(t_0)=0$, de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T}f_x(\bar{x}_0,t)\tilde{h}(t)dt+\sum_{j=1}^{k}f_{\gamma_j}({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))+\sum_{j=1}^{k}\tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])\\
&+\int_{t_0}^{T}\psi(t)(\tilde{h}'(t)-\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))dt+f_\omega(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0))+\langle a,q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle\\
&\quad-\int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)]+\varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])dt\\
&\quad+f_{\tilde{\omega}}(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])+\langle\tilde{a},q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle=0.
\end{aligned}\tag{4.96}$$

Tomando en consideración (4.91) y (4.92), escribimos,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T}g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)d\gamma_j &= f_{\gamma_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))\\
&= f^a_{\gamma_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))+f^s_{\gamma_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))\\
&= \int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})}(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))\hat{\gamma}_j(t)dt+f^s_{\gamma_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))
\end{aligned}\tag{4.97}$$

y

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T}(g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)]+g_{j_{ux}}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])d\gamma_j\\
&= \tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])\\
&= \tilde{f}^a_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])+\tilde{f}^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])\\
&= \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})}(g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)]+g_{j_{ux}}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt\\
&\qquad+\tilde{f}^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)]).
\end{aligned}\tag{4.98}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)d\omega &= f_\omega(\bar{h})(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))\\ &= f_\omega^a(\bar{h})(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)) + f_\omega^s(\bar{h})(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)) \\ &= \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)\hat{\omega}(t)dt + f_\omega^s(\bar{h})(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))\end{aligned} \tag{4.99}$$

y

$$\int_{t_0}^{T}(m_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])d\tilde{\omega}$$

$$= \tilde{f}_{\tilde{\omega}}(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])$$

$$= \tilde{f}_{\tilde{\omega}}^a(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)]) + \tilde{f}_{\tilde{\omega}}^s(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])$$

$$= \int_{t_0}^{T}(m_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\omega}(t)dt$$

$$+\tilde{f}_{\tilde{\omega}}^s(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)]).$$

Reemplazando el término anterior y los términos (4.97), (4.98) y (4.99) en (4.96), obtenemos,

$$\begin{aligned}&-\sum_{j=1}^{k} f_{\gamma_j}^s(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0) - \sum_{j=1}^{k}\tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}^s(\bar{h})(g_j{}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])\\ &-f_\omega^s(\bar{h})(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0) - \tilde{f}_{\tilde{\omega}}^s(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])\\ =&\int_{t_0}^{T} f_x(\bar{x}_0,t)\tilde{h}(t)dt + \sum_{j=1}^{k}\int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})} g_{j\,x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)\hat{\gamma}_j(t)dt+\\ &\sum_{j=1}^{k}\int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})}(g_{j\,xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + g_{j\,ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt\\ &+\int_{t_0}^{T}\psi(t)(\tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))dt + \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)dt\\ &+\langle a, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle - \int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])dt\\ &+\int_{t_0}^{T}(m_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\omega}(t)dt\\ &+\langle\tilde{a}, q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle,\end{aligned} \tag{4.100}$$

para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ en $X = W_{1,1}^n[t_0,T]$, con $\tilde{h}(t_0) = 0$.

Cambiando $\psi(t)$ sobre un conjunto de medida nula, si es necesario, establecemos la existencia de una función absolutamente continua, satisfaciendo (4.100). Por tanto el lado izquierdo de *esta última la expresión es, simultáneamente, singular y absolutamente continua, lo que implica,*

$$-\sum_{j=1}^{k} f_{\gamma_j}^s(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{f}_{\tilde{\gamma}_j}^s(\bar{h})(g_j{}''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)])$$
$$-f_{\omega}^s(\bar{h})(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0) - \tilde{f}_{\tilde{\omega}}^s(\bar{h})(m''(\bar{x}_0(t),t)[(h(t),v(t)),(\tilde{h}(t),0)]) = 0.$$

Usando este hecho e integración por partes donde consideramos $\tilde{h}(t_0) = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} \psi(t)\ \tilde{h}'(t)\ dt &= \langle \psi(T), \tilde{h}(T)\rangle - \langle \psi(t_0), \tilde{h}(t_0)\rangle - \int_{t_0}^{T}\ \tilde{h}(t)\psi'(t)\ dt \\ &= \langle \psi(T), \tilde{h}(T)\rangle - \int_{t_0}^{T}\ \tilde{h}(t)\psi'(t)dt,\end{aligned}$$

obtenemos que,

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T} f_x(\bar{x}_0,t)\tilde{h}(t)dt + \sum_{j=1}^{k}\int_{R_j(\bar{x}_0,\bar{h})} g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)\hat{\gamma}_j(t)dt + \\ &\sum_{j=1}^{k}\int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})}(g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + g_{j_{ux}}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt \\ &+\langle \psi(T), \tilde{h}(T)\rangle - \int_{t_0}^{T}\psi'(t)\tilde{h}(t)dt - \int_{t_0}^{T}\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)dt + \int_{t_0}^{T} m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)dt \quad (4.101) \\ &+\langle a, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle - \int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])dt \\ &+\int_{t_0}^{T}(m_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\tilde{h}(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\tilde{h}(t)])\hat{\omega}(t)dt \\ &\qquad\qquad +\langle \tilde{a}, q''(x_0(T))[h(T),\tilde{h}(T)]\rangle = 0,\end{aligned}$$

para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ *en* $X = W_{1,1}^n[t_0,T]$*, con* $\tilde{h}(t_0) = 0$.

Considerando la notación (4.92) y la definición de operador adjunto, obtenemos, desde (4.101),

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T}\Big(f_x(\bar{x}_0,t) + \sum_{j=1}^{k} g_{j_x}^*(\bar{x}_0,t)\hat{\gamma}_j(t) + \sum_{j=1}^{k}(g_{j\,xx}^*(\bar{x}_0,t)(h) + g_{j\,ux}^*(\bar{x}_0,t)(v))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \psi'(t) \\ &-\varphi_x^*(\bar{x}_0,t)\psi(t) + m_x^*(\bar{x}_0,t)\hat{\omega}(t) - \varphi_{xx}^*(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t) - \varphi_{ux}^*(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t) + m_{xx}^*(\bar{x}_0,t)(h)\hat{\tilde{\omega}}(t) \\ &\quad +m_{ux}^*(\bar{x}_0,t)(v)\hat{\tilde{\omega}}(t)\Big)\tilde{h}(t)dt + \langle \psi(T) + q'^*(x_0(T))a + (q''^*(x_0(T))h(T))^*\tilde{a}, \tilde{h}(T)\rangle = 0,\end{aligned}$$

para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ *en* $X = W_{1,1}^n[t_0,T]$*, con* $\tilde{h}(t_0) = 0$.

Si denotamos,

$$\hat{A}(t) := f_x(\bar{x}_0,t) + \sum_{j=1}^{k} g^*_{j_x}(\bar{x}_0,t)\hat{\gamma}_j(t) + \sum_{j=1}^{k}(g^*_{j\,xx}(\bar{x}_0,t)(h) + g^*_{j\,ux}(\bar{x}_0,t)(v))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \psi'(t)$$
$$-\varphi^*_x(\bar{x}_0,t)\psi(t) + m^*_x(\bar{x}_0,t)\hat{\omega}(t) - \varphi^*_{xx}(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t)$$
$$-\varphi^*_{ux}(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t) + m^*_{xx}(\bar{x}_0,t)(h)\hat{\tilde{\omega}}(t) + m^*_{ux}(\bar{x}_0,t)(v)\hat{\tilde{\omega}}(t)$$
$$\tilde{A}(t) := \int_{t_0}^{t}\hat{A}(\tau)d\tau, \quad \hat{B}(T) := \psi(T) + q'^*(x_0(T))a + (q''^*(x_0(T))h(T))^*\tilde{a},$$

e integramos por partes, obtenemos para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ en $X = W^n_{1,1}[t_0,T]$, con $\tilde{h}(t_0) = 0$,

$$\int_{t_0}^{T}\tilde{A}(t)\tilde{h}'(t)dt + \langle\tilde{A}(T) + \hat{B}(T), \tilde{h}(T)\rangle \;=\; 0.$$

Como la relación anterior es válida para $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$, con $\tilde{h}(t_0) = 0$ arbitrario en $X = W^n_{1,1}[t_0,T]$, entonces por la unicidad de representación de los funcionales lineales y continuos sobre el espacio $W_{1,1}([t_0,T])$, (4.26), $\tilde{A}(t) = 0$ $\tilde{A}(T) + B(T) = 0$, lo que implica

$$f_x(\bar{x}_0,t) + \sum_{j=1}^{k} g^*_{j_x}(\bar{x}_0,t)\hat{\gamma}_j(t) + \sum_{j=1}^{k}(g^*_{j\,xx}(\bar{x}_0,t)(h) + g^*_{j\,ux}(\bar{x}_0,t)(v))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)$$
$$-\varphi^*_x(\bar{x}_0,t)\psi(t) + m^*_x(\bar{x}_0,t)\hat{\omega}(t) - \varphi^*_{xx}(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t) - \varphi^*_{ux}(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t)$$
$$+m^*_{xx}(\bar{x}_0,t)(h)\hat{\tilde{\omega}}(t) + m^*_{ux}(\bar{x}_0,t)(v)\hat{\tilde{\omega}}(t) = \psi'(t)$$

y

$$\psi(T) = -q'^*(x_0(T))a - (q''^*(x_0(T))h(T))^*\tilde{a},$$

que corresponde a la ecuación (4.80) y (4.81), respectivamente.

De manera similar, como la identidad (4.95) es válida para todo $(\tilde{h},\tilde{v})$ en $X \times U$, en particular es válida para $(\tilde{h},\tilde{v}) = (0,\tilde{v})$. Considerando, por tanto, $(\tilde{h},\tilde{v}) = (0,\tilde{v})$ en (4.95), la notación (4.86) y la definición de operadores adjuntos, obtenemos,

$$\int_{t_0}^{T} f_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}dt + \sum_{j=1}^{k}\int_{t\in R_j(\bar{x}_0)} g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}d\gamma_j$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{t\in R_j(\bar{x}_0;\bar{h})}(g_{j_{xu}}(\bar{x}_0(t),t)g_{j_{uu}}(\bar{x}_0(t),t))\tilde{v}d\tilde{\gamma}_j$$
$$-\int_{t_0}^{T}\varphi^*_u(\bar{x}_0,t)\psi(t)\tilde{v}dt + \int_{t_0}^{T} m_u(\bar{x}_0,t)\tilde{v}d\omega$$
$$-\int_{t_0}^{T}(\varphi_{xu}(\bar{x}_0,t)(h))^*\tilde{\psi}(t) + (\varphi_{uu}(\bar{x}_0,t)(v))^*\tilde{\psi}(t))\tilde{v}dt$$
$$+\int_{t_0}^{T}(m_{ux}(\bar{x}_0,t)(h) + m_{uu}(\bar{x}_0,t)(v))\tilde{v}d\tilde{\omega} \;= \tilde{f}_s(\bar{h})(\tilde{v}),$$

que corresponde, debido a que $\tilde{f}_s(\bar{h})(\tilde{v})$ es el funcional soporte para el conjunto $\mathcal{U}$, en u_0, esto es $\tilde{f}_s(\bar{h})(u-u_0) \geqslant 0, \quad \forall\, u \in\ \mathcal{U}$ tal que $u(t)$ pertenece a $\mathbb{U}$, a la condición del máximo (4.84).

Ahora determinaremos explícitamente los téminos de la expresión (4.89).

1. *Dado que $\tilde{\mu}_j$, j en $\tilde{I}_{\bar{h}}(\bar{x}_0)$, pertenecen $(L^1_\infty[t_0,T])^*$, existen $\tilde{\gamma}_j(t)$, en b.a.(t_0,T) con soporte en $\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})$, tales que, para $G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})$ en $L^1_\infty[t_0,T]$,*

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mu}_j, G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} (g_{j\,x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j\,u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))d\tilde{\gamma}_j \\
&= f_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)) \\
&= f^a_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{h})(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)) + f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)) \\
&= \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} (g_{j\,x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j\,u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt \\
&\qquad\qquad + f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)),
\end{aligned}$$

   y debido a (4.76) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)} \langle \tilde{\mu}_j, G'_j(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} (g_{j\,x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j\,u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt \\
&\qquad + f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)).
\end{aligned}$$

2. *Considerando ahora (4.93), (4.94) y que para $\bar{\tilde{\psi}} = (\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2,\tilde{\psi}_3)$ en $Y^* = (W^n_{1,1}[t_0,T] \times L^l_\infty[t_0,T] \times\ \mathbb{R}^k)^*$ existen $\tilde{\psi}$ en $L^n_\infty[t_0,T]$, $\tilde{\omega}$ en b.a.$^l(t_0,T)$ y $\tilde{a}$ en $\mathbb{R}^k$, obtenemos*

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^3 \langle \tilde{\psi}_i, F'_i(\bar{x}_0)(\tilde{h},\tilde{v})\rangle &= \int_{t_0}^{T} \tilde{\psi}(t)(\tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{T} (m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\hat{\tilde{\omega}}(t)dt \\
&\qquad + f^s_{\tilde{\omega}}(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))) + \langle \tilde{a}, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle,
\end{aligned}$$

donde $\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)$, j en $I_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)$, con soporte en $\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})$ y $\hat{\tilde{\omega}}$ son la derivada de Radon Nikodym dadas en (4.86).

Reemplazando las dos últimas igualdades en (4.89) obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} (g_{j\,x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + g_{j\,u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt + f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})({g_j}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)) \\
&\int_{t_0}^{T} \tilde{\psi}(t)(\tilde{h}'(t) - \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) - \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t))dt \\
&\qquad + \int_{t_0}^{T} (m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t) + m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\hat{\tilde{\omega}}(t)dt \\
&\qquad\quad + f^s_{\tilde{\omega}}(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t))) + \langle \tilde{a}, q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Como esta identidad es válida para todo $(\tilde{h},\tilde{v})$ en $X\times U$, en particular es válida, para $(\tilde{h},0)$ en $X\times U$, con $\tilde{h}(t_0)=0$, considerando entonces $(\tilde{h},\tilde{v})=(\tilde{h},0)$, con $\tilde{h}(t_0)=0$ obtenemos,

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})} g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)dt + f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),0)$$
$$\int_{t_0}^{T}\tilde{\psi}(t)(\tilde{h}'(t)-\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t))dt+\int_{t_0}^{T}(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}(t)+m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\hat{\tilde{\omega}}(t)dt$$
$$+f^s_{\tilde{\omega}}(m'(\bar{x}_0(t),t)(\tilde{h}(t),\tilde{v}(t)))+\langle\tilde{a},q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle=0.$$

Integrando por partes y reordenando los términos obtenemos,

$$\begin{aligned}-\sum_{j=1}^{k} f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h})-\tilde{f}^s_{\tilde{\omega}}(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h})&=\int_{t_0}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{k} g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)\\ -\tilde{\psi}'(t)\tilde{h}-\tilde{\psi}\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}+m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h}\hat{\tilde{\omega}}(t)\Big)dt&+\langle\tilde{\psi}(T),\tilde{h}(T)\rangle+\langle a,q'(x_0(T))\tilde{h}(T)\rangle,\end{aligned}\tag{4.103}$$

para todo $\tilde{h}=\tilde{h}(\cdot)$ en $X=W^n_{1,1}[t_0,T]$, con $\tilde{h}(t_0)=0$ y donde $\tilde{\psi}$ pertenece $U=L^m_\infty[t_0,T]$.

Similarmente como la identidad (4.102) es válida para todo $(\tilde{h},\tilde{v})$ en $X\times U$, en particular es válida, para $(\tilde{h},\tilde{v})=(0,\tilde{v})$ en $X\times U$, si reemplazamos entonces $(0,\tilde{v})$ en (4.102), obtenemos,

$$\begin{aligned}&-\sum_{j=1}^{k} f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_j{}'(\bar{x}_0(t),t)(0,\tilde{v}(t))-f^s_{\tilde{\omega}}(m'(\bar{x}_0(t),t)(0,\tilde{v}(t)))\\ &\int_{t_0}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{k} g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)-\tilde{\psi}(t)\varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)+m_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)\hat{\tilde{\omega}}(t)\Big)dt=0,\end{aligned}\tag{4.104}$$

donde $\tilde{\psi}$ y $\varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v}(t)$ pertenecen a $W^n_{1,1}([t_0,T])$ y $U=L^m_\infty[t_0,T]$, respectivamente.

Cambiando $\tilde{\psi}(t)$ sobre un conjunto de medida nula, si es necesario, establecemos nuevamente la existencia de una función absolutamente continua, satisfaciendo las identidades (4.103) y (4.104) simultáneamente, por tanto cada uno de los términos del lado izquierdo de estas identidades es, simultáneamente, singular y absolutamente continua, lo que implica,

$$-\sum_{j=1}^{k} f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{\tilde{h}})-f^s_{\omega}(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{h})=0$$

y

$$-\sum_{j=1}^{k} f^s_{\tilde{\gamma}_j}(\bar{h})(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v})-f^s_{\omega}(m_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{v})=0.$$

Usando este hecho y la definición de operador adjunto obtenemos,

1. *desde (4.103)*

$$\int_{t_0}^{T}\Big(\sum_{j=1}^{k} g^*_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t)-\tilde{\psi}'(t)-\varphi^*_x(\bar{x}_0(t),t)\tilde{\psi}+m^*_x(\bar{x}_0(t),t)\hat{\tilde{\omega}}(t)\Big)\tilde{h}dt$$
$$+\langle\tilde{\psi}(T)+q'^*(x_0(T))\tilde{a},\tilde{h}(T)\rangle=0,$$

para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ *en* $X = W^n_{1,1}[t_0, T]$, *con* $\tilde{h}(t_0) = 0$.

Si denotamos

$$A(t) := \sum_{j=1}^{k} g^*_{j\,x}(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \tilde{\psi}'(t) - \varphi^*_x(\bar{x}_0(t), t)\tilde{\psi} + m^*_x(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\omega}}(t)$$

$$\tilde{A}(t) := \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau, \quad B(T) := \tilde{\psi}(T) + q'^*(x_0(T))\tilde{a},$$

e integramos por partes, obtenemos para todo $\tilde{h} = \tilde{h}(\cdot)$ *en* $X = W^n_{1,1}[t_0, T]$, *con* $\tilde{h}(t_0) = 0$,

$$\int_{t_0}^{T} \tilde{A}(t)\tilde{h}'(t)dt + \langle \tilde{A}(T) + B(T), \tilde{h}(T)\rangle \quad = \quad 0,$$

entonces debido a (4.26), esto es, a la unicidad de representación de los funcionales lineales sobre el espacio $W^*_{1,1}([t_0, T])$, $\tilde{A}(t) = 0$ $\tilde{A}(T) + B(T) = 0$, *lo que implica,*

$$\sum_{j=1}^{k} g^*_{j\,x}(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \varphi^*_x(\bar{x}_0(t), t)\tilde{\psi} + m^*_x(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\omega}}(t) \quad = \quad \tilde{\psi}'(t)$$

y

$$q'^*(x_0(T))\tilde{a} \quad = \quad -\tilde{\psi}(T)$$

que corresponden a las condiciones (4.82) y (4.83) respectivamente.

2. *desde (4.104)*

$$\int_{t_0}^{T} \Big(\sum_{j=1}^{k} g_j{}^*_u(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \varphi^*_u(\bar{x}_0(t), t)\tilde{\psi}(t) + m^*_u(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\omega}}(t)\Big)\tilde{v}(t)dt = 0,$$

para todo $\tilde{v}$ *en* $U = L^m_\infty[t_0, T]$, *lo que implica,*

$$\sum_{j=1}^{k} g_j{}^*_u(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\gamma}}_j(t) - \varphi^*_u(\bar{x}_0(t), t)\tilde{\psi}(t) + m^*_u(\bar{x}_0(t), t)\hat{\tilde{\omega}}(t) = 0,$$

que corresponde a la condición (4.85).

Para finalizar la demostración observemos que,

- *Si* $\Phi'(\bar{x}_0) = 0$, *entonces el teorema se satisface trivialmente, basta con considerar* $\lambda_0 = 1$ *y las funciones* γ_j, $\tilde{\gamma}_j$ $j = 1, \cdots, k$, $\psi, \tilde{\psi}$ *y* ω, $\tilde{\omega}$, a, $\tilde{a}$ *identicamente nulas.*

- *Si el proceso óptimo* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es un proceso 2-regular de* M, *entonces,* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es un proceso 2-regular de* $M_{\bar{F}}$ *o de* M_g. *Si* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es un proceso 2-regular de* $M_{\bar{F}}$, *de acuerdo a la Definición 43, existe un* $\bar{h}$ *en* $H_{\hat{\bar{M}}}$, *tal que* $\bar{F} = (F_1, \cdots, F_l)$ *no* *satisface la condición (3.41), lo que implica que el operador* $(\tilde{\bar{F}}(\bar{x}_0))'(\bar{x}_{\bar{h}}, \bar{h}) : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$*, donde* $\widetilde{Y} = \mathrm{Im}\bar{F}'(x_0) \times Y/\mathrm{Im}\bar{F}'(x_0)$*, no es sobreyectivo esto es equivalente, siempre que el subespacio* $\mathrm{Im}(\tilde{\bar{F}}'(x_0))(x_h, \bar{h})$ *sea cerrado en* $\tilde{Y}$*, ver [41] y [87], a que el subespacio anulador (o aniquilador) de* $\mathrm{Im}(\tilde{\bar{F}}(x_0))'$ *es no nulo, entonces existe un elemento no nulo* $\bar{\Psi}^* = (\Psi^*, \tilde{\Psi}^*)$ *en* $\widetilde{Y}^*$*, tal que* $(\tilde{\bar{F}}(\bar{x}_0))'^*(\bar{x}_h, \bar{h})\bar{\Psi}^* = \mathbf{0}$ *donde* $\Psi^* = (\psi_1^*,\ \psi_2^*, \psi_3^*)$ *pertenece* $(\mathrm{Im}F'(x_0))^*$ *y* $\tilde{\Psi}^* = (\tilde{\psi}_1^*,\ \tilde{\psi}_2^*, \tilde{\psi}_3^*)$ *pertenece a* $(Y \backslash \mathrm{Im}F'(x_0))^* \equiv [\mathrm{Im}F'(x_0)]^{\perp} = \mathrm{Ker}F'^*(x_0)$*. Si* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es un proceso 2-regular de* M_g*, de acuerdo al Teorema 34,* $(x_{\bar{h}}, \bar{h})$ *es un punto estacionario de* $\widetilde{G}$*,* $\{\widetilde{G}_i, i \in \tilde{I}_{\bar{h}}(x_0)\}$*, por tanto, existe un elemento no nulo* $\bar{\mu}_j^* = (\mu_j^*, \tilde{\mu}_j^*), \mu_j^*, \tilde{\mu}_j^* \ \geq 0, j \in \tilde{I}_{\bar{h}}(x_0)$ *en* $\widetilde{W}^* = (\mathrm{Im}G_j'(x_0) \times [\mathrm{Im}G_j'(x_0)]^{\perp})^*$*, donde* $[\mathrm{Im}G_j'(\bar{x}_0)]^{\perp} = \mathrm{Ker}G_j'^*(\bar{x}_0)$*.*

Esto implica, por los teoremas de representación, la existencia de funciones $\psi_1, \tilde{\psi}_1$ *en* $L_\infty^n[t_0, T]$*,* $\psi_2, \tilde{\psi}_2$ *en* $b^l.a.(t_0, T)$ *y vectores* $\psi_3, \tilde{\psi}_3$ *en* $\mathrm{I\!R}^k$*, no todos nulos o la existencia de funciones* γ_{1j}*,* γ_{2j} *en b.a.*(t_0, T)*, no todas nulas, con soporte en* $R_j(\bar{x}_0, \bar{h})$ *y en* $\tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h})$*,* $j = 1, \cdots, k$*, definidos en (4.24) y (4.71), respectivamente. Por lo tanto si el proceso óptimo* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *no es un proceso 2-regular, podemos tomar* $\lambda = 0$*,* $\psi = \psi_1$*,* $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1$*,* $\omega = \psi_2$*,* $\tilde{\omega} = \tilde{\psi}_2$*,* $a = \psi_3$*,* $\tilde{a} = \tilde{\psi}_3$*,* $\gamma_j = \gamma_{1j}$ *y* $\tilde{\gamma}_j = \gamma_{2j}$*,* $j = 1, \cdots, k$*, no todos identicamnte nulos, que satisfacen las condiciones (4.80)-(4.85) del Teorema.*

El teorema queda de esta forma demostrado.

Si en el Principio del Máximo Local Extendido, Teorema 59, se considera como hipótesis, que el proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ es 2-regular del conjunto factible Q, entonces, necesariamente λ_0 es no nulo y, en este caso, es posible asumir $\lambda_0 = 1$.

Con base esta observación daremos la definición de un KTA proceso.

Definición 60 *Diremos que un proceso factible* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *es un KTA proceso, en dirección de* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*, del problema* $(\hat{\mathrm{P1}})$*, si satisface las condiciones (4.80) - (4.85), del Teorema del Principio del Máximo Local Extendido, con* $\lambda_0 = 1$*.*

4.3.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

En esta sección introduciremos la noción de 2KT-invexidad, noción que extendemos desde optimización Matemática, al problema de control óptimo escalar $(\hat{\mathrm{P1}})$, la cual es escencial, para mostrar que las condiciones necesarias de optimalidad, establecidas por el Teorema 59, son también suficientes. Este tipo de problemas tienen una importante propiedad: el mínimo local y global coinciden.

En lo que sigue introduciremos la noción de 2KT-invex, para el problema $(\hat{\mathrm{P1}})$.

Definición 61 *Diremos que el problema* $(\hat{P1})$ *es 2KT-invex, en el proceso factible,* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, en la dirección de* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $X \times U$ *si para cada proceso factible* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, en* $X \times U$*, existen funciones* $\eta_h,\ \xi_h : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ *y* $\chi_v, \phi_v : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$*, tales que satisfacen,*

$$\int_{t_0}^{T} [f(\bar{x}(t), t) - f(\bar{x}_0(t), t)]dt \geq \int_{t_0}^{T} [f_x(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + f_u(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t)]dt$$

$$\varphi_x(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t) = \eta_h'(t),$$

$$m_x(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t) = 0$$

$$\begin{aligned} &\varphi_x(\bar{x}_0(t), t)\xi_h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t), t)\phi_v(t) + \varphi_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \eta_h(t)] \\ &\quad -\varphi_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \chi_v(t)] - \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \eta_h(t)] \\ &\qquad -\varphi_{uu}(\bar{x}, t)[v(t), \chi_v(t)] = \xi_h'(t) \end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned} &m_x(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t) + m_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \eta_h(t)] \\ &\quad +m_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \chi_v(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \eta_h(t)] \\ &\qquad +m_{uu}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \chi_v(t)] = 0 \end{aligned}$$

y

$$g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t) < 0, \quad t \in R_j(\bar{x}_0; \bar{h}),\ \text{c.t.p.}$$

$$\begin{aligned} &g_{j_x}(\bar{x}_0(t), t)\xi_h(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t), t)\phi_v(t) + g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \eta_h(t)] \\ &\quad +g_{j_{xu}}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \chi_v(t)] + g_{j_{ux}}\bar{x}_0(t), t)[v(t), \eta_h(t)]+ \\ &\qquad g_{j_{uu}}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \chi_v(t)] < 0,\ t \in \tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h}),\ \text{c.t.p.} \end{aligned} \tag{4.106}$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} &\eta_h(t_0) = 0, \qquad \xi_h(t_0) = 0, \qquad q'(x_0(T))\eta_h(T) = 0 \\ &q'(x_0(T))\xi_h(T) + q''(x_0(T))[h(T), \eta_h(T)] = 0, \end{aligned} \tag{4.107}$$

donde $\eta_h := \eta_h(\bar{x}, \bar{x}_0)$, $\xi_h := \xi_h(\bar{x}, \bar{x}_0)$ pertenecen a $X = W_{1,1}^n[t_0, T]$ y $\chi_v := \chi_v(\bar{x}, \bar{x}_0)$, $\xi_v := \xi_v(\bar{x}, \bar{x}_0)$ pertenecen a $U = L_\infty^m[t_0, T]$, tal que $\chi = \lambda(u - u_0(t) - sv),\ s, \lambda \geq 0\ u$ en Int$\mathcal{U}$, y donde $R_j(\bar{x}_0)$, $\tilde{R}_j(\bar{x}_0, \bar{h})$ son definidos en (4.21) y (4.71) respectivamente.

Este tipo de problemas, tiene una importante propiedad, el mínimo local y global coinciden.

Observemos que si el problema $(\hat{P1})$ es 2KT-invex, en el proceso factible $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, en la dirección de $\bar{h} = (0, 0)$, entonces, de acuerdo a la Definición 55, el problema $(\hat{P1})$ es KT-invex, en el proceso factible, $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$.

Teorema 62 *Cada KTA proceso* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, en dirección* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*, es una solución óptima del problema* $(\hat{P1})$ *si y solo si el problema* $(\hat{P1})$ *es 2KT-invex en* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$*, en la misma dirección* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*.*

Demostración: *Inicialmente supondremos que cada KTA proceso, en dirección* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$ *es una solución óptima del problema* $(\hat{\text{P1}})$ *y demostraremos que el problema* $(\hat{\text{P1}})$ *es 2KT-invex en* $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, *en la misma dirección* $\bar{h} = (h, v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$.

Supongamos que cada KTA proceso $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$, *en dirección* $\bar{h}$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$, *es una solución óptima del problema* $(\hat{\text{P1}})$, *esto implica, debido a la equivalencia de los problemas* $(\hat{\text{P1}})$ *y* $(\text{P}\hat{\text{O}}\text{E})$, *que cada punto KTA,* $\bar{x}_0$, *es un es una solución óptima, del* $(\text{P}\hat{\text{O}}\text{E})$, *entonces, debido al Teorema 48, el problema* $(\text{P}\hat{\text{O}}\text{E})$ *es 2KT-invex, en* $\bar{x}_0$, *en dirección* $\bar{h}$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$. *Por lo tanto de acuerdo a la Definición 47, existen funciones* $\bar{\eta}_{\bar{h}}$, $\bar{\xi}_{\bar{h}} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{X}$, *tales que,*

$$\begin{array}{lll} \Phi(\bar{x}) - \Phi(\bar{x}_0) & \geq & \Phi(\bar{x}_0)\bar{\eta}_{\bar{h}} \\ F_i'(\bar{x}_0)\bar{\eta}_{\bar{h}} & = & 0 \; i = 1, \cdots, 3 \\ F_i'(\bar{x}_0)\bar{\xi}_{\bar{h}} + F_i''(x_0)[\bar{h}, \bar{\eta}_{\bar{h}}] & = & 0, \; i = 1, \cdots, 3 \\ -G_j'(\bar{x}_0)\bar{\eta}_{\bar{h}} & \geqslant & 0, \; j \in I_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0) \\ -G_j'(\bar{x}_0)\bar{\xi}_{\bar{h}} - G_j''(x_0)[\bar{h}, \bar{\eta}_{\bar{h}}] & \geqslant & 0, \; j \in \tilde{I}_{\bar{h}}(G, \bar{x}_0), \end{array} \tag{4.108}$$

donde $\bar{x} = (x, u)$, $\bar{x}_0 = (x_0, u_0)$ *so procesos factibles en* $X \times \mathcal{U}$ *y,*

$$\begin{array}{lll} \bar{\eta}_{\bar{h}}(t) & = & \bar{\eta}_{\bar{h}}(\bar{x}, \bar{x}_0)(t) = (\eta_h(\bar{x}, \bar{x}_0)(t), \chi_v(\bar{x}, \bar{x}_0)(t)) = (\eta_h(t), \chi_v(t)) \\ \bar{\xi}_{\bar{h}}(t) & = & \bar{\xi}_{\bar{h}}(\bar{x}, \bar{x}_0)(t) = (\xi_h(\bar{x}, \bar{x}_0)(t), \phi_v(\bar{x}, \bar{x}_0)(t)) = (\xi_h(t), \phi_v(t)), \end{array} \tag{4.109}$$

con η_h, ξ_h *en* $X = W_{1,1}^n[t_0, T]$ *y* χ_v, ϕ_v *en* $U = L_\infty^m[t_0, T]$, *tal que* $\chi_v(\bar{x}, \bar{x}_0) = \hat{\lambda}(u - u_0 - sv)$, $\hat{\lambda}, s > 0$.

Reemplazando ahora Φ, $\Phi'(\bar{x}_0)$, $\bar{F}_i'(\bar{x}_0)$ *y* $\bar{F}_i''(\bar{x}_0)$, *definidos en (4.7), (4.15), (4.16) y (4.17) respectivamente, obtenemos,*

$$\int_{t_0}^{T} [f(\bar{x}(t), t) - f(\bar{x}_0(t), t)]dt \geq \int_{t_0}^{T} [f_x(\bar{x}_0(t), t)\eta(t) + f_u(\bar{x}_0(t), t)\chi(t)]dt$$

$$\eta_h(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau)\eta_h(\tau) + \varphi_u(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)\chi_v(\tau)d\tau = 0, \; \text{c.t.p. en } [t_0, T]$$

$$m_x(\bar{x}_0(t), t)\eta_h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\chi_v(t) = 0$$

$$q'(x_0(T))\eta_h(T) = 0$$

$$\begin{aligned} &\xi_h(t) - \int_{t_0}^{t} (\varphi_x(\bar{x}_0(\tau), \tau)\xi_h(\tau) + \varphi_u(x_0(\tau), y_0(\tau), \tau)\phi_v(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t} \Big(\varphi_{xx}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[h(\tau), \eta_h(\tau)] - \varphi_{xu}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[h(\tau), \chi_v(\tau)] \\ &\qquad\qquad -\varphi_{ux}(\bar{x}_0(\tau), \tau)[v(\tau), \eta_h(\tau)] - \varphi_{uu}(\bar{x}, \tau)[v(\tau), \chi_v(\tau)]\Big)d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m_x(\bar{x}_0(t), t)\xi_h(t) + m_u(\bar{x}_0(t), t)\phi_v(t) + m_{xx}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \eta_h(t)] \\ &\qquad +m_{xu}(\bar{x}_0(t), t)[h(t), \chi_v(t)] + m_{ux}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \eta_h(t)] \\ &\qquad\qquad\qquad +m_{uu}(\bar{x}_0(t), t)[v(t), \chi_v(t)] = 0, \end{aligned}$$

$$q'(x_0(T))\xi_h(T) + q''(x_0(T))[h(t), \eta_h(T)] = 0,$$

donde la segunda y cuarta igualdades son equivalentes a,

$$\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\eta_h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\chi_v(t) = \eta_h'(t), \qquad \eta_h(t_0) = 0$$

$$\begin{aligned}\varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\xi_h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\phi_v(t) + \varphi_{xx}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\eta_h(t)]\\ -\varphi_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\chi_v(t)] - \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\eta_h(t)]\\ -\varphi_{uu}(\bar{x},t)[v(t),\chi_v(t)] = \xi_h'(t), \quad \xi_h(t_0) = 0,\end{aligned}$$

lo que corresponde a las condiciones (4.105) y (4.107) respectivamente.

Por otro lado, considerando la equivalencia (4.12), para $G_j'(\bar{x}_0)$ *y* $G_j''(\bar{x}_0)$*, es fácil ver, de acuerdo a (4.23) y (4.76), que las desigualdades,*

$$-G_j'(\bar{x}_0)\bar{\eta}_{\bar{h}} \geqslant 0_{L^1_\infty}, j \in I_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0), \qquad -G_j'(\bar{x}_0)\bar{\xi}_{\bar{h}} - G_j''(x_0)[\bar{h},\bar{\eta}_{\bar{h}}] \geqslant 0_{L^1_\infty},\ j \in \tilde{I}_{\bar{h}}(G,\bar{x}_0)$$

son equivalentes a las desigualdades,

$$\begin{aligned}&-(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\eta_h(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\chi_v(t)) \geq 0, \quad t \in R_j(\bar{x}_0,\bar{h}),\ \text{c.t.p.}\\ &-(g_{j_x}(\bar{x}_0(t),t)\xi_h(t) + g_{j_u}(\bar{x}_0(t),t)\phi_v(t) + g_{j_{xx}}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\eta_h(t)]\\ &\qquad +g_{j_{xu}}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\chi_v(t)] + g_{j_{ux}}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\eta_h(t)]\\ &\qquad\qquad +g_{j_{uu}}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\chi_v(t)] < 0,\ t \in \tilde{R}_j(\bar{x}_0,\bar{h})), \quad \text{c.t.p. en } [t_0,T],\end{aligned}$$

que corresponden a la condición (4.106).

De lo anteriormente expuesto podemos asegurar la existencia de funciones η_h, ξ_h *en* $W^n_{1,1}[t_0,T]$ *y* $\chi_v,\ \phi_v$*, tal que* $\chi(t) = \lambda(u(t) - u_0(t) - sv),\ s,\lambda \geq 0$ *, con* u *en* $\mathrm{Int}\mathcal{U}$*, las cuales satisfacen las ecuaciones (4.105)-(4.107), lo que implica que el problema* $(\hat{\mathrm{P1}})$ *es 2KT-invex.*

Recíprocamente, supondremos ahora que el problema $(\hat{\mathrm{P1}})$ *es 2KT-invex, en el proceso* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$*, y mostraremos que si* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$ *es un 2KT-proceso del problema* $(\hat{\mathrm{P1}})$*, entonces necesariamente, es solución óptima del* $(\hat{\mathrm{POE}})$*.*

Supongamos que el problema $(\hat{\mathrm{P1}})$ *es 2KT-invex, en el conjunto de proceso factible* Q*, en la dirección* $\bar{h}$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*, esto implica que el* $(\hat{\mathrm{POE}})$ *es 2KT-invex, en el punto* $\bar{M}$*, en la dirección* $\bar{h}$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*, esto es, de acuerdo al Teorema 48, una condición necesaria y suficiente, para que el punto KTA,* $\bar{x}_0$*, en la dirección* $\bar{h}$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$*, sea un punto óptimo del* $(\hat{\mathrm{POE}})$*.*

Ahora como los problemas $(\hat{\mathrm{P1}})$ *y* $(\hat{\mathrm{POE}})$ *son equivalentes, se sigue que: si el punto factible* $\bar{x}_0$ *es un punto óptimo del* $(\hat{\mathrm{POE}})$*, entonces el proceso factible* (x_0,u_0) *es óptimo del* $(\hat{\mathrm{POE}})$ *y, como es mostrado en el trancurso de la demostración del Teorema 59, si* $\bar{x}_0$ *es un punto KTA del* $(\hat{\mathrm{POE}})$*, entonces,* (x_0,u_0) *es un KTA proceso del problema* $(\hat{\mathrm{P1}})$*, podemos concluir, por tanto, que el proceso* $\bar{x}_0 = (x_0,u_0)$ *es solución óptima del problema* $(\hat{\mathrm{P1}})$*.*

El teorema queda así demostrado.

En el siguiente ejemplo, presentado por Avakov en [9], aplicaremos los resultados establecidos en el Teorema 62.

Ejemplo 63 *Considere el siguiente problema de control óptimo escalar,*

$$
\begin{aligned}
&\text{mín}(\Phi(x,u) = \int_0^1 (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + x_1^2)dt), \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0.\\
&\text{sujeto a :}\\
&\qquad x_i'(t) = u_i,\ \ i = 1, \cdots, 3,\\
&\qquad x_4'(t) = x_1u_1 + x_2u_2 - x_1u_3 - x_3u_1,\\
&\qquad x_5'(t) = x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3,\\
&\qquad x_i(0) = 0,\ \ i = 1, \cdots, 3, \quad \text{a.e. in } [0,1],\\
&\qquad (x,u) \in (W_{1,1}^5([0,1]), L_\infty^3([0,1]).
\end{aligned} \tag{4.110}
$$

No es difícil ver que el conjunto factible es,

$$
\begin{aligned}
Q \ &= \ \Big\{p = (x,u) \in X \times U,\ x_4 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_1x_3,\ x_5 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_i' = u_i,\ x_i(0) = 0,\ i = 1, \cdots, 3\Big\},
\end{aligned}
$$

donde $X := W_{1,1}^5([0,1])$ *y* $U := L_\infty^3([0,1]$ *y que* $\bar{x}_0 = (0,0)$ *es un proceso factible.*

Sean $f:\ \mathbb{R}^5 \times\ \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to\ \mathbb{R}$, $\varphi:\ \mathbb{R}^5 \times\ \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to\ \mathbb{R}^5$ *y* $q:\ \mathbb{R}^5 \to\ \mathbb{R}^5$ *definidos*

$$
\begin{aligned}
f(x,u,t) \ &= \ = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + x_1^2\\
\varphi(x(t),u(t),t) \ &= \ (u_1, u_2, u_3, x_1u_1 + x_2u_2 - x_1u_3 - x_3u_1, x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3)\\
q(x(1)) \ &= \ x(1),
\end{aligned}
$$

sus respectivas, primera y segunda derivadas en el proceso factible $\bar{x}_0 = (0,0)$, *para cada* $\bar{h} = (h,v) \in X \times U$, *con* $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, *son,*

$$
\begin{aligned}
f_x(\bar{x}_0,t)h = 0_{\ \mathbb{R}^5} \qquad & f_u(\bar{x}_0,t)v = (a_1, a_2, a_3)\\
\varphi_x(\bar{x}_0,t)h = 0_{\ \mathbb{R}^5} \qquad & \varphi_u(\bar{x}_0,t)v = (v_1, v_2, v_3, 0, 0)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{gathered}
\varphi_{xx}(\bar{x}_0,t)[h,h] = 0_{\ \mathbb{R}^5} \qquad\qquad \varphi_{uu}(\bar{x}_0,t)[v,v] = 0_{\ \mathbb{R}^5}\\
\varphi_{xu}(\bar{x}_0,t)[h,v] = \varphi_{ux}(\bar{x}_0,t)[h,v] = (0,0,0,h_1v_1 - h_3v_1 + h_2v_2 - h_1v_3, h_1v_1 + h_2v_2 - h_3v_3).
\end{gathered}
$$

Condiciones Necesarias

El proceso $\bar{x}_0 = (0,0)$ *es un proceso factible no regular de* Q, *en efecto, sea,* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ *tal que,*

$$
\begin{aligned}
\psi' = \varphi_x^*(\bar{x}_0,t)\psi = 0 \ &\Longrightarrow \ \psi = \text{constante},\\
0 = \varphi_u^*(\bar{x}_0,t)\psi \ &\Longrightarrow \ \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto podemos afirmar que existe $\lambda_0 = 0$ *y* $\psi = (0,0,0,\psi_4,\psi_5) \neq 0$*, satisfaciendo las condiciones (4.37) y (4.40) con* $m = g = 0$*, esto implica* $\mathrm{Ker}F_1'^*(\bar{x}_0)$ *es no nulo, esto es, existe* $\tilde{\psi}^*$ *en* $\mathrm{Ker}F_1'^*(\bar{x}_0)$*, cuyo representante* $\tilde{\psi}$ *en* $L^5_\infty([0,1])$ *es tal que, para casi todo* t *en* $[0,1]$,

$$\tilde{\psi}(t) \in \{\psi_4\mathbf{e}_4 + \psi_5\mathbf{e}_5, \psi_4, \psi_5 \in \mathbb{R}\} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5 \rangle, \tag{4.111}$$

donde para cada t *en* $[0,1]$, $F_1(x,u)(t) = x - \int_0^1 \varphi(x,u,t)dt$ *y* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^5$.

Caracterización del cono $H_Q(\bar{x}_0)$

El cono $H_Q(\bar{x}_0)$ *asociado al problema es,*

$$H_Q(\bar{x}_0) \;=\; \{(h,v) \in X \times U, F_1'(\bar{x}_0)(h,v) = 0,\; F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2 \in \mathrm{Im}F_1'(\bar{x}_0)\},$$

donde $F_1'(\bar{x}_0)(h,v)$ *y* $F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2$ *definidos en (4.16) y (4.17) respectivamente.*

Luego (h,v) *pertenece a* $H_Q(\bar{x}_0)$ *si y solamente si* $F_1'(\bar{x}_0)(h,v) = 0$ *y* $F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2 \in \mathrm{Im}F_1'(\bar{x}_0)$,

- *si* $F_1'(\bar{x}_0)(h,v) = 0$*, entonces* $h' = \varphi_x(\bar{x}_0,t)h + \varphi_u(\bar{x}_0,t)v$ *y* $h(0) = 0$*, esto es,*

$$\begin{array}{rcl} h' &=& (v_1,v_2,v_3,0,0) \\ h(0) &=& 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} h_1' &=& v_1, h_2' \;=\; v_2,\; h_3' \;=\; v_3 \\ h_4 &=& h_5 = 0. \end{array} \tag{4.112}$$

- *si* $F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2 \in \mathrm{Im}F_1'(\bar{x}_0)$*, entonces*

$$\langle \tilde{\psi}^*, F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2 \rangle = 0, \quad \forall\; \tilde{\psi}^* \in \mathrm{Ker}F_1'^*(\bar{x}_0) \equiv [\mathrm{Im}F_1'(\bar{x}_0)]^\perp \subset W^5_{1,1}[0,1],$$

esto es, de acuerdo a (4.26) y (4.111),

$$\langle \tilde{\psi}^*, F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2 \rangle = \int_0^1 \tilde{\psi}(t)\frac{d}{dt}F_1''(\bar{x}_0)[(h,v)]^2(t)dt, \quad = 2\int_0^1 \tilde{\psi}(t)\varphi_{xu}(\bar{x}_0,t)dt = 0,$$
$$\forall\; \tilde{\psi}(t) \in \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5 \rangle,$$

de donde

$$2\int_0^1 \mathbf{e}_4\varphi_{xu}(\bar{x}_0,t)[h,v]dt = 2\int_0^1 (h_1v_1 + h_2v_2 - h_3v_1 - h_1v_3)dt = 0$$
$$2\int_0^1 \mathbf{e}_5\varphi_{xu}(\bar{x}_0,t)[h,v]dt = 2\int_0^1 (h_1v_1 + h_2v_2 - h_3v_3)dt = 0.$$

Considerando (4.112) e integrando, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{array}{rcl} h_1^2(1) + h_2^2(1) - 2h_1(1)h_3(1) &=& 0 \\ h_1^2(1) + h_2^2(1) - h_3^2(1) &=& 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} h_2(1) &=& \pm\sqrt{3}h_1(1) \\ h_3(1) &=& 2\;h_1(1). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$H_Q(\bar{x}_0) = \{(h,v) \in X \times U, h_i' = v_i,\ h_i(0) = 0\ i = 1,2,3, h_2(1) = \pm\sqrt{3}h_1(1), \\ h_3(1) = 2h_1(1), h_4 = h_5 = 0,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

El proceso $\bar{x}_0 = (0,0)$ *será un óptimo si dado* (h,v) *en* $H_Q(\bar{x}_0)$, *existen* $\lambda_0 \geq 0$, $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \cdots, \psi_5(\cdot))$ *y* $\tilde{\psi}(\cdot) = (\tilde{\psi}_1(\cdot), \cdots, \tilde{\psi}_5(\cdot))$, *satisfaciendo las condiciones (4.80), (4.84),*

$$\begin{array}{lcl} \psi'(t) & = & -\varphi_{ux}^*(\bar{x}_0,t)(v)\tilde{\psi}(t),\ \psi_i(1),\ i = 1,2,3, \\ \lambda_0 f_u(\bar{x}_0(t),t) & = & \varphi_u^*(\bar{x}_0,t)\psi(t) + \varphi_{xu}^*(\bar{x}_0,t)(h)\tilde{\psi}(t) \end{array} \tag{4.113}$$

y las condiciones,

$$\tilde{\psi}'(t) = 0,\ \tilde{\psi}_i(1) = 0,\ i = 1,2,3, \quad \varphi_u^*(\bar{x}_0,t)\tilde{\psi}(t) = 0,$$

las cuales son equivalentes a que $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_3 = 0$, $\tilde{\psi}_4, \tilde{\psi}_5$ *constantes.*

A partir de (4.113) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{array}{lcl} \psi_1' & = & -\tilde{\psi}_4(v_1 - v_3) - \tilde{\psi}_5 v_1 \\ \psi_2' & = & -(\tilde{\psi}_4 + \tilde{\psi}_5)v_2, \\ \psi_3' & = & \tilde{\psi}_4 v_1 + \tilde{\psi}_5 v_3 \\ \psi_4' & = & 0, \quad \psi_5' = 0, \end{array} \qquad \psi_i(1) = 0,\ i = 1,2,3.$$

y

$$\begin{array}{lcl} \lambda_0 a_1 & = & \psi_1 + \tilde{\psi}_4(h_1 - h_3) + \tilde{\psi}_5 h_1 \\ \lambda_0 a_2 & = & \psi_2 + \tilde{\psi}_4 h_2 + \tilde{\psi}_5 h_2 \\ \lambda_0 a_3 & = & \psi_3 - \tilde{\psi}_4 h_1 - \tilde{\psi}_5 h_3. \end{array}$$

Por lo tanto una condición necesaria para que $\bar{x}_0 = (0,0)$ *sea un proceso óptimo, es que para todo* (h,v) *en* $H_Q(\bar{x}_0)$, *esto es* $h_i' = v_i$, $h_i(0) = 0$, $i = 1,2,3$, $h_2(1) = \pm\sqrt{3}h_1(1)$, $h_3(1) = 2h_1(1)$, *con* $\tilde{\psi}_4, \tilde{\psi}_5$ *constante, el siguiente sistema tenga solución,* $\lambda_0 \geq 0$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, 0, 0)$, $\tilde{\psi} = (0, 0, \tilde{\psi}_4, \tilde{\psi}_5)$,

$$\begin{array}{lcl} \psi_1 & = & \lambda_0 a_1 - \tilde{\psi}_4(h_1 - h_3) - \tilde{\psi}_5 h_1 \\ \psi_2 & = & \lambda_0 a_2 - (\tilde{\psi}_4 + \tilde{\psi}_5)h_2 \\ \psi_3 & = & \lambda_0 a_3 + \tilde{\psi}_4 h_1 + \tilde{\psi}_5 h_3, \end{array} \qquad \psi_i(1) = 0,\ i = 1,2,3.$$

esto es,

$$\begin{array}{lcl} \lambda_0 a_1 & = & \tilde{\psi}_4(h_1(1) - h_3(1)) + \tilde{\psi}_5 h_1(1) = (\tilde{\psi}_5 - \tilde{\psi}_4)h_1(1) \\ \lambda_0 a_2 & = & (\tilde{\psi}_4 + \tilde{\psi}_5)h_2(1) = \pm\sqrt{3}(\tilde{\psi}_4 + \tilde{\psi}_5)h_1(1) \\ \lambda_0 a_3 & = & -\tilde{\psi}_4 h_1(1) - \tilde{\psi}_5 h_3(1) = -(\tilde{\psi}_4 + 2\tilde{\psi}_5)h_1(1). \end{array}$$

Este sistema tendrá solución no nula si y solo si, el determinante de la matriz,

$$\begin{pmatrix} -h_1(1) & h_1(1) & -a_1 \\ \sqrt{3}h_1(1) & \sqrt{3}h_1(1) & -a_2 \\ -h_1(1) & -2h_1(1) & -a_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -h_1(1) & h_1(1) & -a_1 \\ 0 & 2\sqrt{3}h_1(1) & -a_2-\sqrt{3}a_1 \\ 0 & 0 & -a_3-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1 \end{pmatrix}$$

es nulo, esto equivale a decir $-a_3-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1=0$. *En particular si* $a_2=0$ *y* $a_1=-2a_3$, *el sistema tiene solución, no nula,* $\lambda_0>0$, $\tilde{\psi}_4=\frac{a_1}{2h_1(1)}\lambda_0$ *y* $\tilde{\psi}_5=-\frac{a_1}{2h_1(1)}\lambda_0$.

De lo anterior podemos concluir que,

- *si* $-a_3-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1\neq 0$, *entonces* $\bar{x}_0=(0,0)$ *no es un KTA proceso, lo que implica que no es un proceso óptimo,*
- *si* $a_2=0$ *y* $a_1=-2a_3$, *entonces* $\bar{x}_0=(0,0)$ *es un KTA proceso, y es un candidato a ser un proceso óptimo.*

Condiciones Suficientes

Mostraremos que si el problema es 2KT-invex en dirección $\bar{h}=(h,v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$, *arbitrario, con* $a_1=-2a_3$, *entonces, de acuerdo al Teorema 62, el proceso KTA* $\bar{x}_0=(0,0)$ *realiza un óptimo absoluto.*

Sean $\eta_h:=\eta_h(\bar{x},\bar{x}_0)$, $\xi_h:=\xi_h(\bar{x},\bar{x}_0)$ *en* $X=W^5_{1,1}[0,1]$ *y* $\chi_v:=\chi_v(\bar{x},\bar{x}_0)$, $\xi_v:=\xi_v(\bar{x},\bar{x}_0)$, *en* $U=L^3_\infty[0,1]$, *tal que para todo* $\bar{x},\bar{x}_0$ *en* M *y* $\bar{h}=(h,v)$ *en* $H_Q(\bar{x}_0)$,

$$\begin{gathered} \eta_h=c(\tfrac{t^2}{2},t,e^t-1,0,0), \qquad \chi_v=c(t,1,e^t) \qquad \phi_v=(1,2e^t,0) \\ \xi_h=c(t,2e^t-2,0,(\tfrac{t^2}{2}-e^t+1)h_1-\tfrac{t^2}{2}h_2-e^th_3,\tfrac{t^2}{2}h_1+th_2-(e^t-1)h_3), \end{gathered} \tag{4.114}$$

donde $c=c(\bar{x},\bar{x}_0)\geq\frac{-2x_1(1)+x_2(1)}{e-2}$, *las cuales satisfacen las condiciones de la Definición 61, esto es,*

- $\displaystyle\int_0^1[f(\bar{x},t)-f(\bar{x}_0(t),t)]dt\geq\int_0^1[f_x(\bar{x}_0(t),t)\eta_h(t)+f_u(\bar{x}_0(t),t)\chi_v(t)]dt,$

$$\begin{aligned} &\int_0^1[f(\bar{x},t)-f(\bar{x}_0(t),t)]dt-\int_0^1[f_x(\bar{x}_0(t),t)\eta_h(t)+f_u(\bar{x}_0(t),t)\chi_v(t)]dt \\ &\quad=\int_0^1[a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+x_1^2]dt-c\int_0^1[a_1t+a_3e^t]dt \\ &\quad=\int_0^1[a_3(-2x_1'+x_3')+x_1^2]dt-ca_3\int_0^1[-2t+e^t]dt \\ &\quad=a_3\Big[-2x_1(1)+x_3(1)-c(e-2)\Big]+\int_0^1x_1^2dt\geq 0 \\ &\quad=\int_0^1x_1^2dt\geq 0. \end{aligned} \tag{4.115}$$

- $\eta_h'(t) = \varphi_x(\bar{x}_0(t),t)\eta_h(t) + \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\chi_v(t)$,

$$c(\frac{t^2}{2}, t, e^t-1, 0, 0)' \quad = \quad c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

- $\xi_h'(t) = \varphi_u(\bar{x}_0(t),t)\phi_v(t) + -\varphi_{xu}(\bar{x}_0(t),t)[h(t),\chi_v(t)] - \varphi_{ux}(\bar{x}_0(t),t)[v(t),\eta_h(t)]$,

$$c(t, 2e^t-2, 0, (\frac{t^2}{2} - e^t + 1)h_1 - \frac{t^2}{2}h_2 - e^t h_3, \frac{t^2}{2}h_1 + th_2 - (e^t-1)h_3)'$$

$$= c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2e^t \\ 0 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ h_1 - h_3 & h_2 & -h_1 \\ h_1 & h_2 & -h_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$-c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ v_1 - v_3 & v_2 & -v_1 \\ v_1 & v_2 & -v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ e^t - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- *con las condiciones,*

$$\eta_h(0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5}, \qquad \xi_h(0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5}.$$

Siendo el problema 2KT-invex en dirección de h en $H_Q(\bar{x}_0)$, arbitrario, y $\bar{x}_0$ un KTA proceso, en dirección del mismo h, podemos concluir entonces, de acuerdo al Teorema 62, que $\bar{x}_0$ es un proceso óptimo absoluto.

Capítulo 5

Problemas Multiobjetivo

Es habitual en el estudio de problemas de optimización, el surgimiento de problemas donde se requiere optimizar, simultáneamente, múltiples objetivos que suelen estar en conflictos entre si, el decrecimiento de uno de los objetivos puede inducir el acrecentamiento de uno de los otros, o viceversa. El estudio de estos problemas ha tenido grandes avances en los últimos años, tanto desde el punto de vista teórico, numérico y de las aplicaciones.

La optimización multiobjetivo difiere básicamente de las demás ramas de la optimización, en el sentido que el concepto de solución del problema adquiere. En efecto, se puede definir un problema de optimización multiobjetivo como la optimización de un vector compuesto por funciones escalares, escogidas como forma de evaluar el impacto de las decisiones factibles del problema sobre diferentes índices de desempeño.

Asimismo, como la imagén de funciones vectoriales, por ejemplo en $\mathbb{R}^s$, está definida en un conjunto parcialmente ordenado, pueden existir alternativas factibles que no satisfagan ninguna relación de orden, del tipo "$\leq$", inviabilizando de esta forma la utilización del concepto usual de solución óptima adoptado en problemas mono-objetivos (escalares). Siendo así, la solución del problema dependerá de la " noción de equilibrio" utilizada para solucionar los conflictos que surgen de la consideración simultánea de varios objetivos. La noción que adoptaremos en este trabajo es la noción de equilibrio cooperativo de Pareto, introducida por el economista Vilfredo Pareto (1848-1923).

La finalidad de este capítulo es establecer condiciones necesarias de optimalidad, para problemas multiobjetivos, diferenciables, con restricciones de igualdad y desigualdad, regulares y no regulares. Caracterizar las posibles soluciones óptimas, locales como globales, a través de las llamadas reglas de multiplicadores. También está dentro de nuestros propósitos establecer condiciones suficientes de optimalidad, bajo un supuesto de invexidad generalizada apropiada.

En la sección 5.1 formulamos nuestro problema y presentamos los conceptos elementales para su estudio posterior. En la secciones 5.2 y 5.3, con la ayuda del método de Dubovitskii-Milyutin, establecemos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad Pareto, no degeneradas, para problemas multiobjetivos, regulares y 2-regulares respectivamente.

5.1. Formulación

En esta sección formularemos un problema de optimización matemática multiobjetivo, diferenciable, con restricciones de desigualdad y con más de una restricción de igualdad e introduciremos los conceptos y algunos resultados necesarios, para el estudio del problema formulado.

Consideremos el siguinte problema Multiobjetivo (PM)

$$(PM)\begin{cases} \text{mín } \mathbb{I}(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \bar{F}(x) = 0 \\ \quad g(x) \leqq 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde la función vectorial $\mathbb{I} = (\mathbb{I}_1, \cdots, \mathbb{I}_s) : X \to \mathbb{R}^s$ y el operador $g : X \to \mathbb{R}^m$ son Frêchet diferenciables, el operador $\bar{F} : X \to \bar{Y}$ es Frêchet diferenciable en un entorno $U(x^*)$ de x^* y es tal que para cada x en X, $\bar{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_l(x))$, con $F_k : X \to Y_k$, X e $\bar{Y} = Y_1 \times \cdots \times Y_l$ son espacios de Banach, y donde $g(x) \leqq 0$ es equivalente a que $g_i(x) \leq 0$, para todo i en $I = \{1, \cdots, m\}$.

Si denotamos por $\bar{M} = M_{\bar{F}} \cap M_g$, el conjunto factible, esto es

$$\bar{M} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\},$$

donde $M_{\bar{F}} = \{x \in X,\ \bar{F}(x) = 0\}$ y $M_g = \{x \in X,\ g_i(x) \leq 0,\ i \in I\}$, podemos escribir el problema (PM) como:

$$\text{(PM)}\begin{cases} \text{mín}\, \mathbb{I}(x) \\ \text{ sujeto a } \ x \in \bar{M} = M_{\bar{F}} \cap M_g. \end{cases}$$

Es claro que para el problema multiobjetivo (PM) no se puede hablar de una solución óptima, de igual forma como en un problema de optimización escalar ($s = 1$), ya que la función vectorial $\mathbb{I}$ induce en el conjunto de soluciones factibles $\bar{M}$ un orden parcial (no es un orden lineal como en el caso escalar). Por lo tanto, la solución (o soluciones) para (PM) depende de la noción de concepto de solución que adoptemos para tratar nuestro problema.

En la optimización multiobjetivo existen varias nociones de soluciones, por ejemplo, las soluciones de Pareto, Stackelberg, Nash, entre otras. Nosotros adoptaremos el concepto de solución Pareto óptima, cuya definición, formas de caracterización y propiedades básicas serán discutidas.

Definición 64 *(Dominancia de Pareto) Diremos que un vector* $u = (u_1, \cdots, u_s)$ *domina a otro vector* $v = (v_1, \cdots, v_s)$ *en* $\mathbb{R}^s$, $v \lesssim u$, *en el contexto de minimización, si y solamente si* u *es parcialmente menor que* v, *esto es,* $u_i \leq v_i$ *para todo* $i = 1, \cdots, s$, *y existe al menos un* j *en* $\{1, \cdots, s\}$, *tal que* $u_j < v_j$.

En lo que sigue adaptaremos la siguiente convención, para elementos en $\mathbb{R}^n$.

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall\ i = 1, \cdots, n; \\ x < y &\Leftrightarrow x_i < y_i, \quad \forall\ i = 1, \cdots, n; \\ x \leqq y &\Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall\ i = 1, \cdots, n; \\ x \leq y &\Leftrightarrow x \leqq\ y, \quad \exists\ r,\ x_r < y_r. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Definición 65 *Se dice que* x^* *en* X *es una solución global (local) Pareto óptima débil, o bien solución débilmente eficiente, del (PM), si* x^* *pertenece a* $\bar{M}$ *y no existe* x *en* $\bar{M}$ $(x$ *en* $\bar{M} \cap U(x^*))$, *tal que* $\mathbb{I}_j(x) < \mathbb{I}_j(x^*)$, *para todo* $j = 1, \cdots, s$, *es decir, no existe* x *en* $\bar{M}$ $(x$ *en* $\bar{M} \cap U(x^*))$, *tal que* $\mathbb{I}(x) < \mathbb{I}(x^*)$.

Definición 66 *Se dice que* x^* *en* X *es una solución global (local) Pareto óptima, o bien solución eficiente, del (PM), si* x^* *pertenece a* $\bar{M}$ *y no existe* x *en* $\bar{M}$ $(x$ *en* $\bar{M} \cap U(x^*))$, *distinto de* x^*, *tal que* $\mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)$, $j = 1, \cdots, s$, *con* $\mathbb{I}_r(x) < \mathbb{I}_r(x^*)$, *para al menos un* r *en* $\{1, \cdots, s\}$, *es decir, no existe un* x *en* $\bar{M}$ $(x$ *en* $\bar{M} \cap U(x^*))$, *distinto de* x^*, *tal que* $\mathbb{I}(x) \leq \mathbb{I}(x^*)$.

Si $x^* \in \bar{M}$ es una solución Pareto óptima o solución eficiente, entonces de acuerdo con la definición anterior, cualquiera alternativa x en $\bar{M}$ que proporciona un decrecimiento en algún objetivo, relativo al producido por x^*, debe al mismo tiempo proporcionar un acrecentamiento de por lo menos algún otro objetivo. Así una solución Pareto óptima x^*, es tal que $\mathbb{I}(x^*)$ no es dominado por ningún otro vector $\mathbb{I}(x)$, con x en $\bar{M}$. Hay que observar además que si $\mathbb{I}(x)$ no domina a $\mathbb{I}(x^*)$, con x, x^* en $\bar{M}$, no implica que $\mathbb{I}(x^*)$ domina a $\mathbb{I}(x)$.

Definición 67 *Se define para el (PM) el frente de Pareto,*

$$PF^* = \{\mathbb{I}(x^*) = (\mathbb{I}_1(x^*), \cdots, \mathbb{I}_s(x^*)),\ x^* \in P^*\},$$

donde P^* *es el conjunto de soluciones Pareto óptima, esto es*

$$P^* = \{x^* \in \bar{M},\ \nexists\ x \in \bar{M},\ \mathbb{I}(x^*) \lesssim \mathbb{I}(x)\}. \tag{5.3}$$

En lo que sigue introduciremos una especificación del teorema de Dubovitskii-Milyutin para problemas vectoriales, presentada en [56] (ver también [54], [55]), especificación que usaremos en las secciones posteriores, para la obtención de condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el problema multiobjetivo (PM).

Considérese, inicialmente, el siguiente problema mutiobjetivo:

$$(PM)\begin{cases} \text{mín } \mathbb{I}(x) \\ \text{sujeto a} \\ x \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i \end{cases}$$

donde $\mathbb{I} : X \to \mathbb{R}^s$, $\mathbb{I}(x) = (\mathbb{I}_1(x), \cdots, \mathbb{I}_s(x))$, $\mathcal{Q}_k,\ k = 1, \cdots, m$, son conjuntos de interior no vacío en X, $\mathrm{Int}Q_k \neq \emptyset$ y $Q_k,\ k = m+1, \cdots, n$, son conjuntos de interior vacío en X, $\mathrm{Int}Q_k = \emptyset$.

Para la caracterización de soluciones Pareto óptima del problema (PM), presentamos la definición de dirección de no ascenso desde [55] (ver también [30], [54], [56]), concepto no presente en la teoría, para problemas escalares, expuesta en el capítulo 2.

Definición 68 *Un vector h en X es una dirección de no ascenso de un funcional $f : X \to \mathbb{R}$, en un punto x^*, si existen un $\epsilon_0 > 0$ y un entorno $U(h)$ de h, tal que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,*

$$f(x^* + \epsilon\bar{h}) \leq f(x^*), \forall \bar{h} \in U(h).$$

Las direcciones de no ascenso generan un cono abierto con vértice 0, llamado cono de no ascenso del funcional f, en el punto x^*, denotado por $NC(f, x^*)$, el cual contiene al cono de direcciones de descenso $FC(f, x^*)$.

Esta definición y los conceptos dados en la sección 2.1 están relacionados con el siguiente resultado, ver Lema 4.1 en [55], (ver también [30], [54], [56], [61]).

Lema 69 *Si x^* es una solución Pareto óptima de (PM) entonces*

$$FC(\mathbb{I}_r, x^*) \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*)\Big) \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{m} AC(Q_k, x^*)\Big) \cap \Big(TC(Q, x^*)\Big) = \emptyset, \qquad r = 1, \cdots, s, \tag{5.4}$$

donde $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$ y $NC(\mathbb{I}_j, x^*)$ son los conos de las direcciones de descenso y no ascenso del funcional $\mathbb{I}_j$, $AC(Q_k, x^*)$ es el cono de las direcciones factibles del conjunto $\mathcal{Q}_k,\ k = 1, \cdots, m$, $\mathrm{Int}Q_k \neq \emptyset$ y $TC(Q, x^*)$ es el cono de las direcciones tangentes al conjunto $Q = \bigcap_{k=m+1}^{n} Q_k$, donde $\mathrm{Int}Q_k = \emptyset,\ k = m+1, \cdots, n$, todos en el punto x^*.

Una de las desventajas del método Dubovitskii-Milyutin, en espacio de Banach de dimensión infinita, presentado en la sección 2.1, es que es aplicable sólo a problemas con una única restricción de igualdad. Esto se debe a que la igualdad

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\Big)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*$$

es asegurada siempre que $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$, donde los conos K_i son abiertos y convexos (Lema 5.10 de [43]), que no corresponde al caso de los conos tangentes, asociados a las restricciones de igualdad, los cuales no son abiertos. En general, es posible mostrar desde la propia definición, ver [43],

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^* \quad \subseteq \quad \Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\Big)^*. \tag{5.5}$$

Este incoveniente es superado en [57], donde se presenta una especificación del método de Dubovitskii-Milyutin, en el caso que los conjuntos de interior vacío $Q_k, k = m+1, \cdots, n$, están determinados por funcionales fuertemente Frêchet diferenciables. Como consecuencia directa de este resultado y de los lemas 13 y 69, Kotarski, en [55], obtiene condiciones necesarias de optimalidad en sentido Pareto, para el problema (PM), cuando los conjuntos de interior vacío es determinado por funcionales, esto es,

$$Q_k = \{x \in X,\ \mathcal{F}_k(x) = 0\}, k = m+1, \cdots, n, \tag{5.6}$$

donde para cada $k, k = m+1, \cdots, n$, $\mathcal{F}_k : X \to Y_k$, es fuertemente diferenciable en un entorno $U(x^*)$ de x^* en X y es tal que $\mathcal{F}_k'(x^*)$ es sobreyectivo y además $\mathrm{Im}\mathcal{F}'(x^*)$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $\bar{Y} = Y_{m+1} \times \cdots \times Y_n$ y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{m+1}, \cdots, \mathcal{F}_n)$.

Estas condiciones son establecidas en el próximo teorema el cual generaliza el Teorema 14, para el caso escalar, con un única restricción de igualdad Q_{m+1}.

Teorema 70 (Generalización Dubovitskii-Milyutin) *Asuma que x^* pertenece a $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i$ y que los conos $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$ y $NC(\mathbb{I}_j, x^*)$, $i = 1, \cdots, s$, de las direcciones de descenso y no ascenso del funcional $\mathbb{I}_j$, los conos $AC(Q_k, x^*)$ de direcciones factibles de los conjuntos $\mathcal{Q}_k$, $\mathrm{Int}Q_k \neq \emptyset, k = 1, \cdots, m$ sean no vacíos y que los conos de las direcciones tangentes a la restricciones de igualdad $\mathcal{Q}_k$, definidas en (5.6), $TC(Q_k, x^*)$, $k = m+1, \cdots, n$, todos en el punto x^*, sean convexos. Si x^* es una solución Pareto óptima del problema (*PM*) entonces existen funcionales lineales y continuos, no todos indenticamente nulos, que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange*

$$f_r + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} f_j^{(r)} + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(r)} = 0, \quad r = 1, \cdots, s, \tag{5.7}$$

donde $f_r \in [FC(\mathbb{I}_r, x^*)]^*$, $f_j^{(r)} \in D_j^*$, $j = 1, \cdots, s$, $j \neq r$, donde D_j es un abierto en $[NC(\mathbb{I}_j, x^*)]$, $\varphi_k^{(r)} \in [AC(Q_k, x^*)]^*$, $k = 1, \cdots, m$ y $\varphi_k^{(r)} \in [TC(Q_k, x^*)]^*$, con Q_k definido en (5.6), $k = m+1, \cdots, n$.

El teorema anterior proporciona condiciones necesarias de optimalidad, las cuales son una generalización de la regla de los multiplicadores de Lagrange.

La próxima observación se fundamenta en los lemas 13 y 69 y en la observación 1.5.1 de [56].

Observación 71 *Bajo las condiciones del Teorema 70, se obtienen las siguientes consecuencias, (comparar con la Observación 15).*

- *Una condición suficiente para asegurar que el término* $f_r + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} f_j^{(r)}$*,* $r = 1, \cdots, s$*, en (5.7) es no nulo, es que exista al menos una dirección factible y una dirección tangente, es decir, que*

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{m} AC(Q_k, x^*)\Big) \cap \Big(TC(\bigcap_{k=m+1}^{n} Q_k, x^*)\Big) \neq \emptyset, \tag{5.8}$$

siempre que $FC(\mathbb{I}_r, x^*) \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*)\Big) \neq \emptyset$.

- *La condición (5.4), aún cuando los conos implicados sean no convexos, es una condición necesaria, para que un punto* x^* *llegue a ser una solución Pareto óptima (local o global) del problema (*PM) *y es una condición necesaria y suficiente para obtener la ecuación de Euler y Lagrange, siempre que los conos implicados sean convexos y no vacíos.*

Corolario 72 *Si además de las hipótesis del teorema 70, se considera que los funcionales* $\mathbb{I}_j$ *son tales que, para cada* $j = 1, \cdots, s$*,* $[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$*, entonces las "s" ecuaciones determinadas en (5.7) son reducidas a la única ecuación*

$$\sum_{j=1}^{s} f_j + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = 0, \tag{5.9}$$

donde $f_j \in [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$*,* $j = 1, \cdots, s$*,* $\varphi_k \in [AC(\mathcal{Q}_k, x^*)]^*$*,* $k = 1, \cdots, m$*, y donde* $\varphi_k \in [TC(\mathcal{Q}_k, x^*)]^*$*, con* Q_k *definido en (5.6),* $k = m+1, \cdots, n$*.*

Una condición suficiente para asegurar que la igualdad $[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$ se cumpla es que para todo $j = 1, \cdots, s$, $\mathbb{I}_j : X \to \mathbb{R}$ sea Ponstein convexa y que $\text{Inf } \mathbb{I}_j(x) < \mathbb{I}_j(x^*)$, ver Lema 1.4.3 en [56], (ver también [30], [54], [55] y [60]). No obstante bajo el supuesto de diferenciabilidad tenemos el siguiente lema.

Lema 73 *Sea* $\mathbb{I} : X \to \mathbb{R}^s$, $\mathbb{I}(x) = (\mathbb{I}_1(x), \cdots, \mathbb{I}_s(x))$ *Frêchet diferenciable en* x^**, tal que* x^* *es un punto no estacionario vectorial de* $\mathbb{I}$*, entonces los conos duales de las direcciones de descenso y no ascenso de los funcionales* $\mathbb{I}_j$*, en el punto* x^**, coinciden y además es posible determinarlos explícitamente, esto es*

$$[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = \{f_j \in X^*,\ f_j = -\nu_j \mathbb{I}_j'(x^*),\ \nu_j \geq 0\}, j = 1, \cdots, s. \tag{5.10}$$

Demostración: *Como* x^* *es un punto no estacionario vectorial de* $\mathbb{I}$*, Definición 10, entonces de acuerdo al Lema 12, existe* h *en* X*, tal que* $\mathbb{I}_j'(x^*)h < 0$*,* $j = 1, \cdots, s$*, lo que implica* $\mathbb{I}_j'(x^*) \neq 0$

para todo $j = 1, \cdots, s$, *por tanto* $\text{Inf } \mathbb{I}_j(x) < \mathbb{I}_j(x^*)$, $j = 1, \cdots, s$ *y además*

$$\text{int}\{x,\ \mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \{x,\ \mathbb{I}_j(x) < \mathbb{I}_j(x^*)\} = \text{int}\{x,\ \mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)\}.$$

Podemos concluir entonces que el cono de direcciones de descenso y no ascenso, de $\mathbb{I}_j$, $j = 1, \cdots, s$, *en el punto* x^*, *ver [43] y [55], (ver también [30], [54] y [56]) son respectivamente,*

$$\begin{array}{rcl} FC(\mathbb{I}_j, x^*) & = & \{h,\ \mathbb{I}'_j(x^*)h < 0\} \\ NC(\mathbb{I}_j, x^*) & = & \{h,\ \mathbb{I}'_j(x^*)h \leq 0\}, \end{array} \tag{5.11}$$

y conforme a (iv) de la Observación 3, sus conos duales

$$[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = \{f_j \in X^*,\ f_j = -\nu_j \mathbb{I}'_j(x^*),\ \nu_j \geq 0\ \},\ j = 1, \cdots, s.$$

El lema queda así demostrado.

Para finalizar atendamos las siguientes observaciones.

Observación 74 *Sea* $f_j = -\mathbb{I}'^*_j(x^*)\nu_j = -\nu_j \mathbb{I}'_j(x^*)$, $\nu_j \geq 0$,

1. *si* $f_j = 0$ *entonces:*

   f_j *pertenece a* $[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$, *si* $\mathbb{I}'_j(x^*) \neq 0$,

   f_j *pertenece a* $[NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* \subsetneqq [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$, *si* $\mathbb{I}'_j(x^*) = 0$,

2. *si* $f_j \neq 0$ *entonces* f_j *pertenece a* $[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$, *dado que,*

$$\begin{array}{rcl} f_j(h) & < & 0,\ \forall h \in FC(\mathbb{I}_j, x^*) \subseteq NC(\mathbb{I}_j, x^*), \\ f_j(h) & = & 0,\ \forall h \in NC(\mathbb{I}_j, x^*) \setminus FC(\mathbb{I}_j, x^*), \end{array}$$

3. *si* $\exists\ h \in X$, $\mathbb{I}'_j(x^*)h < 0$, $\forall j = 1, \cdots, s$, *entonces*

$$FC(\mathbb{I}, x^*) = \bigcap_{i=1}^{s} FC(\mathbb{I}_j, x^*) \quad = \quad \bigcap_{i=1}^{s} \{h,\ \mathbb{I}'_j(x^*)h < 0\} \neq \emptyset,$$

   por lo tanto, como $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$, $j = 1, \cdots, s$, *son conos convexos y abiertos, cuya intersección es no vacía tenemos, debido al Lema 5.10 de [43],*

$$[FC(\mathbb{I}, x^*)]^* = [\bigcap_{j=1}^{s} FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = \sum_{j=1}^{s} [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*.$$

   De lo anteriormente expuesto y considerando (5.10) obtenemos

$$[FC(\mathbb{I}, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}, x^*)]^* = \{f_0 \in X^*,\ f_0 = -\sum_{j=1}^{s} \nu_j \mathbb{I}'_j(x^*),\ \nu_j \geq 0\}.$$

5.2. Problemas Vectoriales Regulares

En esta sección presentamos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad Pareto y Pareto débil, de primer orden y no degeneradas, para el problema multiobjetivo (PM). Las condiciones necesarias son obtenidas bajo el supuesto de regularidad fuerte y débil y las suficientes, bajo nociones de invexidad generalizada apropiadas a la naturaleza del problema, introducidas en este trabajo.

La noción de regularidad juega un importante papel, tanto para la obtención de condiciones necesarias, no degeneradas, como para la derivación de condiciones suficientes, de optimalidad. Es por ello que precisaremos la definición de punto regular débil y fuerte, para nuestro problema.

Definición 75 *Diremos que x^* es un punto vectorial regular débil o débilmente regular del problema vectorial (PM), si*

$$T_{M_{\bar{F}}}(x^*) = \{h \in X,\ \bar{F}'(x^*)h = 0\},$$

y existe $\tilde{h} \in X$, tal que,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \bar{F}'(x^*)\tilde{h} & = & 0 \\ g_i'(x^*)\tilde{h} & < & 0,\ i \in I(x^*). \end{array} \right. \tag{5.12}$$

Definición 76 *Diremos que x^* es un punto vectorial regular fuerte, o fuertemente regular, del problema (PM) si*

$$T_{M_{\bar{F}}}(x^*) = \{h \in X,\ \bar{F}'(x^*)h = 0\},$$

y dado un r en $\{1, \cdots, s\}$ existe $\tilde{h} \in X$, tal que,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{I}_j'(x^*)\tilde{h} & < & 0,\ j = 1, \cdots, s,\ j \neq r \\ \bar{F}'(x^*)\tilde{h} & = & 0 \\ g_i'(x^*)\tilde{h} & < & 0,\ i \in I(x^*). \end{array} \right. \tag{5.13}$$

Diremos indistintamente que el problema (PM) es fuertemente regular en x^*.

Observemos que decir que x^* es un punto vectorial regular débil del problema (PM) es equivalente a decir que x^* es un punto regular del conjunto factible $\bar{M}$, de acuerdo a la Definición 24, con $Q = X$. Además si x^* es un punto regular fuerte del problema vectorial (PM) entonces x^* es un punto regular débil.

5.2.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

Ahora estableceremos condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, para el problema (PM), las cuales serán no degeneradas bajo el supuesto de regularidad. Previamente daremos las definiciones de un punto Fritz John y de un punto Karush Kuhn Tucker vectorial, débil y fuerte [29].

Definición 77 (**Fritz John Vectorial**) *Diremos que un punto x^*, en $\bar{M}$, es un punto Fritz John (FJ) vectorial, del problema (PM), si existen ν en $\mathbb{R}^s$, μ_i en $\mathbb{R}$ y ψ_k en Y_k^*, $k = 1, \cdots, l$, no todos identicamente nulos, tales que*

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k = 0, \tag{5.14}$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\mu_i \geq 0$, i en $I(x^*)$ y ψ_k son llamados multiplicadores de Lagrange, Y_k^* es el espacio dual de Y_k, $k = 1, \cdots, l$, y el conjunto $I(x^*)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas de la función g, definido en (2.3).

Definición 78 (**Karush Kuhn Tucker Débil**) *Diremos que un punto x^*, en $\bar{M}$, es un punto Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) vectorial, del problema (PM), si existen ν en $\mathbb{R}^s$, μ_i en $\mathbb{R}$ y ψ_k en Y_k^* no identicamente nulos, tales que*

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k = 0, \tag{5.15}$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\mu_i \geq 0$, i en $I(x^*)$ y ψ_k, $k = 1, \cdots, l$, son llamados multiplicadores de Lagrange, Y_k^* es el espacio dual de Y_k y el conjunto de índices $I(x^*)$ es definido en (2.3).

Definición 79 (**Karush Kuhn Tucker Fuerte**) *Diremos que un punto x^*, en $\bar{M}$, es un punto Karush Kuhn Tucker Vectorial Fuerte (KTF), del problema (PM), si la condición (5.15) se cumple con $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) > 0$, esto es, $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\mu_i \geq 0$, $i \in I(x^*)$ y ψ_k en Y_k^*.*

De acuerdo a las definiciones anteriores, todo punto Karush Kuhn Tucker Fuerte (KTF) (positividad en los multiplicadores $\nu > 0$) es un punto Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) ($\nu \geq 0$, no nulo) y ámbos son puntos Fritz John (FJ).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Karush Kuhn Tucker Fuerte}\\ \text{(KTF)}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Karush Kuhn Tucker Débil}\\ \text{(KTD)}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Fritz John}\\ \text{(FJ)}\end{array}}$$

En lo que sigue presentamos resultados que establecen condiciones necesarias de optimalidad, bajo el supuesto de regularidad débil y fuerte, Definición 75 y 76 respectivamente.

Teorema 80 *Si x^* es una solución Pareto óptima, local o global, del problema (PM), entonces x^* es un punto Fritz John (FJ) vectorial del problema (PM).*

Demostración: Observemos que si x^* es un punto estacionario de $\mathbb{I}$ (o de $g, \{g_i, i \in I(x^*)\}$) entonces, de acuerdo a la Definición 10, existe $\alpha = (\alpha_1 \cdots, \alpha_s) \neq 0$ en $\mathbb{R}^s$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, (existen $\tilde{\mu}_i \geq 0,\ i \in I(x^*)$ en $\mathbb{R}$, no todos nulos) tales que

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\alpha = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mathbb{I}'_j(x^*) = 0, \qquad \Big(\sum_{i\in I(x^*)} \tilde{\mu}_i g'_i(x^*) = 0\Big),$$

por lo tanto podemos escoger $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$, con $\nu_j = \alpha_j,\ j = 1, \cdots, s$, ($\mu_i = \tilde{\mu}_i$, i en $I(x^*)$) no todos nulos y μ_i, i en $I(x^*)$ y $\psi_k,\ k = 1, \cdots, l$, identicamente nulos, ($\nu_j,\ j = 1, \cdots, s$ y $\psi_k,\ k = 1, \cdots, l$, identicamente nulos) y la condición (5.14) se cumple trivialmente, luego x^* es un punto Fritz-John.

Notemos además que si el operadores $F'(x^*)$ no es sobreyectivo entonces, de acuerdo a la Observación 22, existen ψ_k^* en $Y_k^*, k = 1, \cdots, l$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\psi_k^* \ = \ 0,$$

luego si tomamos $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$, $\mu_i = \tilde{\mu}_i$, i en $I(x^*)$ identicamente nulos y $\psi_k = \psi_k^*,\ k = 1, \cdots, l$, y la condición (5.14) se cumple trivialmente, luego x^* es un punto Fritz-John. Podemos entonces afirmar que si el operadores $F'(x^*)$ no es sobreyectivo entonces, x^* no puede ser un punto KTD, y desde luego tampoco un punto KTF.

Es suficiente, por tanto, considerar el caso no trivial, es decir, considerar el caso cuando x^* es un punto no estacionario de $\mathbb{I}$, x^* es un punto no estacionario de $g, \{g_i, i \in I(x^*)\}$ y el operador $F'(x^*)$ es sobreyectivo, esto es,

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu = \textstyle\sum_{j=1}^{s} \nu_j \mathbb{I}'_j(x^*) \neq 0, \quad \sum_{i\in I(x^*)} \mu_i g'_i(x^*) \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\psi_k^* \neq 0,$$

para todo $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0,\ \nu_j \geq 0,\ \mu_i \geq 0,\ i$ en $I(x^*)$, ψ_k^* en Y_k^* no todos identicamente nulos.

Bajo estas hipótesis, en lo que sigue de la demostración, utilizaremos el Corolario 72 del Teorema 70, que es una generalización del formalismo de Dubovitskii-Milyutin a problemas vectoriales, por tanto determinaremos los conos de las direcciones de descenso y no ascenso del funcional $\mathbb{I}_j$, $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$ y $NC(\mathbb{I}_j, x^*),\ j = 1, \cdots, s$, los conos de las direcciones factibles de las restricciones de desigualdad $\mathcal{Q}_i = M_{g_i}$, $AC(M_{g_i}, x^*),\ i$ en $I(x^*)$, y los conos de las direcciones tangentes a la restricciones de igualdad $\mathcal{Q}_k = M_{F_k}$, $TC(M_{F_k}, x^*),\ k = 1, \cdots, l$, todos en el punto x^*.

1. Si x^* es un punto no estacionario de $\mathbb{I}$ entonces debido a (5.11) del Lema 73,

$$FC(\mathbb{I}_j, x^*) = \{h, \mathbb{I}'_j(x^*)h < 0\}, \quad NC(\mathbb{I}_j, x^*) = \{h, \mathbb{I}'_j(x^*)h \leq 0\}, \quad j = 1, \cdots, s, \quad (5.16)$$

   y sus respectivos conos duales

$$[FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^* = \{f_0 \in X^*,\ f_0 = -\nu_j \mathbb{I}'_j(x^*),\ \nu_j \geq 0\}, \quad j = 1, \cdots, s. \quad (5.17)$$

2. Si x^* es un punto no estacionario de $g, \{g_i, i \in I(x^*)\}$ entonces, de acuerdo al Lema 12, existe $h \in X$, $\;g_i'(x^*)h < 0$, $\forall i \in I(x^*)$. Por tanto el cono de las direcciones factibles de M_g, $AC(M_g, x^*)$, y su cono dual, son

$$AC(M_g, x^*) = \bigcap_{i\in I(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*) = \bigcap_{i\in I(x^*)} \{h,\; g_i'(x^*)h < 0\} \tag{5.18}$$

y

$$[AC(M_g, x^*)]^* = \{-\sum_{i\in I(x^*)} \mu_i g_i'(x^*),\; \mu_i \geq 0\}. \tag{5.19}$$

3. Siendo $F'(x^*)$ un operador sobreyectivo, entonces, de acuerdo al Lema 1 en [57], el cono tangente a $M_{\bar{F}} = \bigcap_{k=1}^{l} M_{F_k}$, donde $Q_k = M_{F_k}$, en el punto x^*, y su cono dual son

$$TC(M_{\bar{F}}, x^*) = \bigcap_{k=1}^{l} TC(M_{F_k}, x^*) = \bigcap_{k=1}^{l} T_{M_{F_k}}(x^*) = \bigcap_{k=1}^{l} \{h \in X, F_k'(x^*)h = 0\} \tag{5.20}$$

y

$$[TC(M_{\bar{F}}, x^*)]^* = \Big(\bigcap_{k=1}^{l} T_{M_{F_k}}(x^*)\Big)^* = \Big\{\sum_{k=1}^{l} -\psi_k F_k'(x^*),\; \psi_k \in Y_k^*\Big\}. \tag{5.21}$$

Ahora como x^* es una solución Pareto óptima de (PM) y $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$, $j = 1\ldots, s$, $AC(M_{g_i}, x^*)$, i en $\mathbb{I}(x^*)$ y $TC(M_{F_k}, x^*)$, $k = 1, \cdots, l$, son conos convexos de vértice 0 y como estamos considerando además que $F'(x^*)$ es sobreyectivo, lo que implica que cada componente de $F'(x^*)$ es sobreyectivo y la Im$F'(x^*)$ es cerrada, entonces, de acuerdo al Teorema 70, existen funcionales lineales y continuos, $f_j \in [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$, $j = 1, \cdots, s$, $\varphi_i \in [AC(M_{g_i}, x^*)]^*$, $i \in I(x^*)$ y $\varphi_k \in [TC(M_{F_k}, x^*)]^*$, $k = 1, \cdots, l$, no todos simultáneamente nulos que satisfacen la ecuación (5.7).

La hipótesis de que x^* es un punto no estacionario de $\mathbb{I}$ nos garantiza, de acuerdo al Lema 73, que los conos duales de las direcciones de descenso y no ascenso del funcional $\mathbb{I}$, en el punto x^*, coinciden. Esto implica, debido al corolario 72, que las "s" ecuaciones determinadas en (5.7), son reducida a la única ecuación

$$\sum_{j=1}^{s} f_j + \sum_{i\in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k = 0, \tag{5.22}$$

y en conformidad a (5.17) (5.19) y (5.21), tenemos que para todo h en X,

$$-\sum_{j=1}^{n} \langle \nu_j, \mathbb{I}_j'(x^*)h\rangle - \sum_{i\in I(x^*)} \langle \mu_i, g_i'(x^*)h\rangle - \sum_{k=1}^{l} \langle \psi_k, F_k'(x^*)h\rangle = 0.$$

De lo anteriormente expuesto y usando la definición de operador adjunto obtenemos que, para todo h en X,

$$\langle \mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k, h\rangle = 0,$$

por consiguiente

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k = 0, \tag{5.23}$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, con $\nu_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, s,\ \mu_i \geq 0,\ i$ en $I(x^*)$ y $\psi = (\psi_1 \ldots, \psi_k)$ en $\bar{Y}^*$, correspondiente a la condición (5.14).

El teorema queda así demostrado.

Observación 81 *Observemos que,*

- *si x^* es un punto KTD (en particular KTF) entonces x^* es un punto no estacionario de $g, \{g_i, i \in I(x^*)\}$ y el operadores $F'(x^*)$ es sobreyectivo, ver demostración Teorema 80. Por lo tanto si x^* es un punto KTD (en particular KTF) entonces el cono de direcciones factibles y tangentes, y sus repectivos duales, son determinado en (5.18), (5.19), (5.20) y (5.21) respectivamente.*

- *si $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$ es identicamente nulo entonces las condiciones de optimalidad establecidas por el Teorema 80 no involucran a la función a minimizar $\mathbb{I}$, en este caso, estas condiciones son degeneradas. Una condición suficiente para asegurar que ν no es identicamente nulo, análogamente al caso escalar, es que x^* sea un punto regular del conjunto factible $\bar{M}$, en el sentido de la Definición 75, por tanto, bajo este supuesto, es posible obtener las condiciones de optimalidad de Karush-Tucker débil (ver [29]).*

- *si $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$ no es identicamente nulo y existe una componente nula, digamos $\nu_r = 0$, entonces las condiciones de optimalidad establecidas por el Teorema 80 no involucran a la componente $\mathbb{I}_r$ de la función a minimizar $\mathbb{I}$. Una condición suficiente para asegurar que todas las componentes de ν sean estrictamente positivas, es que x^* sea un punto fuertemente regular en el sentido de la Definición 76, por tanto bajo este supuesto, es posible obtener condiciones de optimalidad no degeneradas, de Karush-Tucker fuerte (ver [29]).*

En los próximos teoremas estableceremos condiciones de optimalidad, no degeneradas, bajos el supuesto de regularidad débil y fuerte.

Teorema 82 *Sea x^* un punto regular débil de (PM). Si x^* es una solución Pareto óptima, local o global, del problema (PM), entonces x^* es un punto Karush Kuhn Tucker (KTD) vectorial del problema (PM).*

Demostración: Supongamos que ν es nulo en (5.23) entonces

$$\sum_{i\in I(x^*)} \mu_i g_i'(x^*) + \sum_{k=1}^{l} \psi_k F_k'(x^*) = 0$$

lo que implica,

$$\sum_{i\in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k = 0,$$

donde para todo i en $I(x^*)$, φ_i pertenece a $(AC(M_{g_i}, x^*))^*$ y, debido a (5.5),

$$\varphi := \sum_{k=1}^{l} \varphi_k \in \sum_{k=1}^{l} [TC(M_{F_k}, x^*)]^* \subseteq \Big(\bigcap_{k=1}^{l} TC(M_{F_k}, x^*) \Big)^* = [TC(M_{\bar{F}}, x^*)]^*. \tag{5.24}$$

Esta condición es necesaria y suficiente, de acuerdo al Lema 13, para que

$$AC(M_g, x^*) \bigcap TC(M_{\bar{F}}, x^*) = \emptyset,$$

donde $AC(M_g, x^*) = \bigcap_{i\in I(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*) = \{h,\ g_i'(x^*)h < 0,\ i \in I(x^*)\}$, es un cono abierto y convexo y $TC(M_{\bar{F}}, x^*) = \{h,\ \bar{F}'(x^*)h = 0\}$ es un cono cerrado y convexo, es decir la intersección de los conos de direcciones factibles y tangentes, es vacía, por lo tanto la condición (3.18) no se cumple, lo que implica que x^* no es un punto regular del conjunto factible $\bar{M}$, de acuerdo a la Definición 75.

El teorema queda así demostrado.

Teorema 83 *Sea x^* un punto regular fuerte del problema* (PM). *Si x^* es una solución Pareto óptima, local o global, del problema (PM), entonces x^* es un punto Karush Kuhn Tucker Fuerte (KTF) vectorial del problema (PM).*

Demostración: La demostración va en la misma dirección del Teorema 82, supongamos que exista una componente ν_r nula en (5.23) entonces

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} \mathbb{I}_j'^*(x^*)\nu_j + \sum_{i\in I(x^*)} \mu_i g_i'(x^*) + \sum_{k=1}^{l} \psi_k F_k'(x^*) = 0,$$

lo que implica,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} f_j + \sum_{i\in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k = 0,$$

donde f_j pertenece a $(FC(\mathbb{I}_j, x^*))^* = (NC(\mathbb{I}_j, x^*))^*$, para todo $j = 1, \cdots, s,\ j \neq r$, φ_i pertenece a $(AC(M_{g_i}, x^*))^*$ para todo i en $\mathbb{I}(x^*)$ y, debido a (5.24), $\varphi := \sum_{k=1}^{l} \varphi_k$ pertenece a $[TC(M_{\bar{F}}, x^*)]^*$.

Esta última condición es necesaria y suficiente, de acuerdo al Lema 13, para que

$$\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq r}} FC(\mathbb{I}_j, x^*) \bigcap AC(M_g, x^*) \bigcap TC(M_{\bar{F}}, x^*) = \emptyset,\ r = 1, \cdots, s,$$

donde $FC(\mathbb{I}_j, x^*) = \{h,\ \mathbb{I}'_j(x^*)h < 0\}$ y $AC(M_g, x^*) = \bigcap_{i\in I(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*) = \{h,\ g'_i(x^*)h < 0,\ i \in I(x^*)\}$, son conos abiertos y convexo, y $TC(M_{\bar{F}}, x^*) = \{h,\ \bar{F}'(x^*)h = 0\}$ es un cono cerrado y convexo, es decir la intersección de los conos de direcciones de ascenso, factibles y tangentes, es vacía, por lo tanto la condición (5.13) no se cumple, lo que implica que x^* no es un punto regular fuerte de acuerdo a la Definición 76.

El teorema queda así demostrado.

5.2.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

En esta sección introduciremos la definición de KT-invexidad vectorial, para el problema (PM), que es una condición suficiente, para asegurar que todo punto Karush-Kuhn-Tucker Fuerte (KTF) vectorial es una solución Pareto óptima y las definiciones de KT-cuasiinvexidad y KT-pseudoinvexidad estricta (KT-cuasiinvexidad estricta y KT-pseudoinvexidad) vectorial, que son condiciones suficientes, y además necesarias, para asegurar respectivamente que cada punto KTF, y cada punto Karush-Kuhn-Tucker Débil (KTD), es una solución Pareto óptimo (Pareto óptimo débil).

Definición 84 *Diremos que (PM) es KT-invex vectorial, si para cada punto factible $x,\ x^*$ en $\bar{M}$, existe una función $\eta : X \times X \to X$ tal que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_r(x) - \mathbb{I}_r(x^*) &> \mathbb{I}'_r(x^*)\eta, && (5.25)\\
\mathbb{I}_j(x) - \mathbb{I}_j(x^*) &\geq \mathbb{I}'_j(x^*)\eta,\ j \neq r,\ j = 1, \cdots, s, && (5.26)\\
F'_k(x^*)\eta &= 0,\ k = 1, \cdots, l, && (5.27)\\
-g'_i(x^*)\eta &\geq 0,\ i \in I(x^*), && (5.28)
\end{aligned}$$

donde $I(x^*)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas y $\eta = \eta(x, x^*)$.

Definición 85 *Diremos que (PM) es KT-cuasiinvex vectorial, si existe una función $\eta : X\times X \to X$ tal que para todo punto factible $x,\ x^*$ en $\bar{M}$,*

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}'_r(x^*)\eta < 0, \\ \mathbb{I}'_j(x^*)\eta \leq 0,\ j \neq r,\ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)\eta = 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)\eta \geq 0,\ i \in I(x^*), \end{cases}$$

donde $I(x^*)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas del operador g y $\eta = \eta(x, x^*)$.

Si $\mathbb{I}(x)$ es estrictamente menor que $\mathbb{I}(x^*)$, esto es $\mathbb{I}(x) < \mathbb{I}(x^*)$, entonces al problema (PM) lo llamaremos KT-cuasiinvex estricto vectorial.

Definición 86 *Diremos que (PM) es KT-pseudoinvex vectorial estricto, si existe una función $\eta : X \times X \to X$ tal que para todo punto factible $x,\ x^*$ en $\bar{M}$,*

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)\eta & < & 0,\ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)\eta & = & 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)\eta & \geq & 0,\ i \in I(x^*), \end{cases}$$

donde $I(x^*)$ es el conjunto de índices de las restricciones activas del operador g y $\eta = \eta(x, x^*)$.

Si $\mathbb{I}(x)$ es estrictamente menor que $\mathbb{I}(x^*)$, esto es $\mathbb{I}(x) < \mathbb{I}(x^*)$, entonces al problema (PM) lo llamaremos KT-pseudoinvex vectorial.

Hacemos notar que las definiciones de KT-pseudoinvex vectorial y KT-pseudoinvex vectorial estricto, son denominadas por algunos autores KT-pseudoinvex I y KT-pseudoinvex II, respectivamente [4].

De acuerdo a las definiciones anteriores podemos verificar, sin mayor dificultad, el siguiente diagrama, bajo supuesto de diferenciabilidad de primer orden.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{KT-pseudoinvex estricto}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{KT-cuasiinvex}} & \Longleftarrow & \boxed{\text{KT-invex}} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \boxed{\text{KT-pseudoinvex}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{KT-cuasiinvex estricto}} & & \end{array}$$

Cuadro 5.1: Relación entre varios tipos de KT-invexidad

Los próximos teorema son análogos a los resultados presentados en la Sección 3.1.2, para el caso escalar.

Teorema 87 *Si el* (PM) *es KT-invex vectorial en $\bar{M}$, entonces cada punto Karush Kuhn Tucker Fuerte vectorial (KTF), x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima del* (PM).

Demostración: Suponga que el (PM) es KT-invex vectorial, mostraremos que si x^* es un punto KTF vectorial entonces x^* es una solución Pareto óptima del (PM).

Sea x^* un punto KTF vectorial entonces existen, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) > 0$ en $\mathbb{R}^s$, μ_i, i en $I(x^*)$, no negativos, en $\mathbb{R}$, y ψ_k, $k = 1 \cdots, l$, en Y_k^*, no todos simultáneamente nulos, satisfaciendo las condiciones de la Definición 79. Si multiplicamos (5.25), (5.26) y (5.28) por $\nu_r > 0$ $\nu_j > 0$, $\mu_i \geq 0$ respectivamente y aplicamos ψ_k a (5.27), obtenemos para todo punto factible x,

$$\begin{aligned}
\nu_r(\mathbb{I}_r(x) - \mathbb{I}_r(x^*)) &> \nu_r \mathbb{I}'_r(x^*)\eta, \\
\nu_j(\mathbb{I}_j(x) - \mathbb{I}_j(x^*)) &\geq \nu_j \mathbb{I}'_j(x^*)\eta, \ j \neq r, \ j = 1, \cdots, s, \\
\psi_k F'_k(x^*)\eta &= 0, \ k = 1, \cdots, l, \\
-\mu_i g'_i(x^*)\eta &\geq 0, \ i \in I(x^*).
\end{aligned}$$

Sumando en j, en i y en k y reordenando los términos, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{s} \nu_j(\mathbb{I}_j(x) - \mathbb{I}_j(x^*) \quad > \quad \sum_{j=1}^{s} \nu_j \mathbb{I}'_j(x^*)\eta + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i g'_i(x^*)\eta + \sum_{k=1}^{l} \psi_k F'_k(x^*)\eta.$$

Considerando la definición y las propiedades de operadores adjunto, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{s} \nu_j(\mathbb{I}_j(x) - \mathbb{I}_j(x^*)) \quad > \quad \langle \mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g_i'^*(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\psi_k, \eta \rangle.$$

Ahora como $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, μ_i, i en $I(x^*)$ y ψ_k, $k = 1, \cdots, l$, son los multiplicadores de Lagrange, de acuerdo a la Definición 79, satisfacen la condición (5.15) se sigue que

$$\sum_{j=1}^{s} \nu_j(\mathbb{I}_j(x) - \mathbb{I}_j(x^*)) > 0,$$

para todo punto factible x en $\bar{M}$.

Esto implica que existe al menos un índice r en $\{1, \cdots, s\}$ tal que $\mathbb{I}_r(x) > \mathbb{I}_r(x^*)$, para todo punto factible x, por consiguiente no existe un x en $\bar{M}$ tal que $\mathbb{I}(x)$ domine a $\mathbb{I}(x^*)$, en el sentido Pareto, por lo tanto x^* es una solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

El próximo teorema carateriza a los problemas KT-cuasiinvex vectorial.

Teorema 88 *Cada punto KTF vectorial x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima del* (PM)*, si y solo si el* (PM) *es KT-cuasiinvex vectorial en $\bar{M}$.*

Demostración: Si cada punto KTF vectorial, es una solución Pareto óptima, demostraremos que el problema (PM) es KT-cuasiinvex vectorial.

Suponga que existe al menos un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x)$ domina a $\mathbb{I}(x^*)$, en el sentido Pareto, esto es, $\mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)$, para todo $j = 1, \cdots, s$, y al menos se cumple una desigualdad estricta,

$\mathbb{I}_r(x) < \mathbb{I}_r(x^*)$, entonces x^* no es una solución Pareto óptima del (PM) y por hipótesis x^* no es un punto KTF vectorial, por lo tanto para todo $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j > 0$, j en $J = \{1, \cdots, s\}$, $\mu_i \geq 0$, i en $I(x^*)$ y ψ_k en Y_k^*, k en $L = \{1, \cdots, l\}$.

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k \neq 0,$$

$$\mathbb{I}'^*_r(x^*)\nu_r + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{s} \mathbb{I}'^*_j(x^*)\nu_j + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k \neq 0.$$

Notemos que,

1) si $\mathbb{I}'_j(x^*) \neq 0$, $g'_i(x^*) \neq 0$ y $F'_k(x^*) \neq 0$ entonces, de acuerdo a la Observación 3, tenemos respectivamente

$$\begin{array}{lll} f_j = \mathbb{I}'^*_j(x^*)\nu_j \in K_j^*,\ \nu_j \geq 0, & \text{donde} & K_j = \{h, \mathbb{I}'_j(x^*)h < 0\}, j \in J. \\ \varphi_i = g'^*_i(x^*)\mu_i \in K_i^*,\ \mu_i \geq 0, & \text{donde} & K_i = \{h, g'_i(x^*)h < 0, \}, i \in I(x^*). \\ \varphi_k = F'^*_k(x^*)\psi_k \in K_k^*, \psi_k \in Y_k^*, & \text{donde} & K_k = \{h, F'_k(x^*)h = 0\}, k \in L. \end{array} \tag{5.29}$$

2) si $\mathbb{I}'_j(x^*) = 0$, $g'_i(x^*) = 0$ y $F'_k(x^*) = 0$ para algún $j \neq r$ en J, $i \in I(x^*)$ y $k \in L$ respectivamente entonces, $\mathbb{I}'_j(x^*)h = 0$, $g'_i(x^*)h = 0$ y $F'_k(x^*)h = 0$, $\forall h \in X$.

Si denotamos $\bar{J} = \{j \in J, \mathbb{I}'_j(x^*) \neq 0\}$, $\bar{I}(x^*) = \{i \in I(x^*), g'_i(x^*) \neq 0\}$, $\bar{L} = \{k \in L, F'_k(x^*) \neq 0\}$ y tomamos en consideración que $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$ $\mu_i \geq 0, i \in \bar{I}(x^*)$ y que, debido a (5.5),

$$\tilde{\varphi} := \sum_{k \in \bar{L}} F'^*_k(x^*)\psi_k \in \sum_{k \in \bar{L}} K_k^* \subset (\bigcap_{k \in \bar{L}} K_k)^*$$

podemos afirmar,

$$\sum_{j \in \bar{J}}^{s} f_j + \sum_{i \in \bar{I}(x^*)} \varphi_i + \tilde{\varphi} \neq 0,$$

para todos los $f_j \in K_j^*$, $j \in \bar{J}$, $\varphi_i \in K_i^*$, $i \in \bar{I}(x^*)$ y $\tilde{\varphi} \in (\bigcap_{k \in \bar{L}} K_k)^*$.

Como los conos K_j, j en $\bar{J}$, K_i, i en $\bar{I}(x^*)$ y K_k, k en $\bar{L}$, determinados en (5.29), son todos convexos y no vacíos, entonces, conforme al Lema 13, podemos afirmar

$$\Big(\bigcap_{j \in \bar{J}} K_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in \bar{I}(x^*)} K_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{k \in \bar{L}} K_k\Big) \neq \emptyset. \tag{5.30}$$

Por lo tanto podemos concluir, a partir de (5.30), de 1) y 2) y considerando que $\bar{J} \neq \emptyset$, que existe h en X tal que

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{I}'_r(x^*)h & < & 0, \\ \mathbb{I}'_j(x^*)h & \leq & 0,\ j \neq r,\ \ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)h & = & 0,\ \ k = 1, \cdots l, \\ -g'_i(x^*)h & \geq & 0,\ i \in I(x^*), \end{array} \tag{5.31}$$

esto es

$$\mathbb{I}(x)-\mathbb{I}(x^*)\leq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{I}_r'(x^*)h & < & 0, \\ \mathbb{I}_j'(x^*)h & \leq & 0,\ j\neq r,\ j=1,\cdots,s, \\ F_k'(x^*)h & = & 0,\ k=1,\cdots,l, \\ -g_i'(x^*)h & \geq & 0,\ i\in I(x^*). \end{array}\right.$$

Luego las condiciones de la Definición 85 se cumplen, con $\eta := h$, dependiendo de los puntos factibles x y x^*, esto implica que el problema (PM) es KT-cuasiinvex vectorial.

Inversamente, suponga que el (PM) es KT-cuasiinvex vectorial, mostraremos que cada punto KTF vectorial es una solución Pareto óptima del (PM).

Sea x^* un punto KTF y suponga que x^* no es una solución Pareto óptima, entonces existe un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x)-\mathbb{I}(x^*)\leq 0$, esto implica, dado que (PM) es KT-cuasiinvex vectorial, que existe un $\eta=\eta(x,x^*)$ en X tal que

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{I}_r'(x^*)\eta & < & 0, \\ \mathbb{I}_j'(x^*)\eta & \leq & 0,\ j\neq r,\ j=1,\cdots,s, \\ F_k'(x^*)\eta & = & 0,\ k=1,\cdots,l, \\ -g_i'(x^*)\eta & \geq & 0,\ i\in I(x^*). \end{array}\right.$$

Esto nos permite afirmar, considerando el primer item de la Observación 81, que

$$FC(\mathbb{I}_r,x^*)\cap\Big(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j,x^*)\Big)\cap\Big(\bigcap_{i\in I(x^*)} AC(M_{g_i},x^*)\Big)\cap\Big(TC(M_{\bar{F}},x^*)\Big)\neq\emptyset,$$

que es equivalente a decir, de acuerdo a la Lema 13, que existe un r, $1\leq r\leq s$ tal que,

$$f_r+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} f_j+\sum_{i\in I(x^*)}\varphi_i+\sum_{k=1}^{l}\varphi_k\neq 0,$$

para todos los $f_r\in[FC(\mathbb{I}_r,x^*)]^*,\ f_j\in[NC(\mathbb{I}_j,x^*)]^*,\ j=1,\cdots,s,\ j\neq r$, definidos en (5.17), $\varphi_i\in[AC(M_{g_i},x^*)]^*,\ i\in I(x^*)$, definidos en (5.19), y $\varphi_k\in[TC(M_{F_k},x^*)]^*,\ k=1,\cdots,l$, definidos en (5.21).

Por lo tanto no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, esto implica que x^* no es un punto KTF vectorial, lo que contradice la hipótesis, podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

Mediante el siguiente ejemplo mostraremos que la cuasiinvexidad no es una condición suficiente, para garantizar que todo punto KTD es un punto óptimo Pareto, el Teorema 88 no es verificado.

Ejemplo 89 *considere el siguiente problema*

$$\begin{cases} \text{mín}\,(x_1, x_1 + x_2) \\ \text{sujeto a :} \\ \qquad -x_1 - x_2 \leq 0 \\ \qquad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{5.32}$$

donde la función vectorial $\mathbb{I} = (\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{I}_1(x_1, x_2) = x_1$, $\mathbb{I}_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ $g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ *y* $F \equiv 0$.

El conjunto factible es $M = \{\bar{x} = (x_1, x_2), -x_1 - x_2 \leq 0\}$ *y, para todo* $\bar{x}$ *en* $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{I}_1'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Todo punto $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ *en* $\mathbb{R}^2$, *satisfaciendo* $-x_1^* - x_2^* = 0$ *es un punto KTD, con* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \mu) = (0, 1, 1)$,

$$\nu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

y además el problema es cuasiinvex, esto es, para todo x, x^* *en* M, *tal que* $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0$ *existe* $\eta(\bar{x}, \bar{x}^*) = (-1, 1)$, *tal que*

$$I_1'(x^*)\eta(x, x^*) = -1 < 0, \quad I_1'(x^*)\eta(x, x^*) = 0, \quad g'(x^*)\eta(x, x^*) = 0.$$

En particular $\bar{x}^* = (0, 0)$ *es un punto KTD y no es un óptimo Pareto, ya que para todo* $\bar{x} = (-x_2, x_2)$, $x_2 > 0$, $\bar{x}$ *pertenece a* $\bar{M}$ *y* $\mathbb{I}_1(\bar{x}) < \mathbb{I}_1(x^*)$, $\mathbb{I}_2(\bar{x}) = \mathbb{I}_2(x^*)$.

Observemos que todo punto x^* *en* M, *es un punto débilmente regular, Definición 75, esto es, existe* h *en* $\mathbb{R}^2$, *tal que* $g'(x^*)h < 0$, *que garantiza, a la vez, la existencia de* $\nu = (\nu_1, \nu_2) \neq 0$, $\nu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, *y todo punto* x^* *en* M *no es fuertemente regular, Definición 76, esto es, dado* $r = 1$ *no existe un* $h = (h_1, h_2)$ *en* $\mathbb{R}^2$, *tal que satisfaga simultáneamente las ecuaciones* $I_2(x^*)h < 0$ *y* $g'(x^*)h < 0$, *esto es,* $h_1 + h_2 < 0, -h_1 - h_2 < 0$.

El próximo teorema carateriza a los problemas KT-pseudoinvex vectorial estricto, mediante los puntos Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) vectorial.

Teorema 90 *Cada punto Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) vectorial* x^* *en* $\bar{M}$, *es una solución Pareto óptima del* (PM), *si y solo si el* (PM) *es KT-pseudoinvex estricto vectorial en* $\bar{M}$.

Demostración: Si cada punto KTD vectorial, es una solución Pareto óptima, demostraremos que el problema (PM) es KT-pseudoinvex estricto vectorial en $\bar{M}$.

Análogamente a la demostración del Teorema 88, suponga que existe al menos un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x)$ domina a $\mathbb{I}(x^*)$, en el sentido Pareto, entonces x^* no es una solución Pareto óptima del (PM) y por hipótesis x^* no es un punto KTD vectorial, por lo tanto, para todo $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, con $\nu_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, s,\ \mu_i \geq 0,\ i$ en $I(x^*)$, y $\psi = (\psi_1 \ldots, \psi_k)$ en $\bar{Y}^*$,

$$\mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I(x^*)} g'^*_i(x^*)\mu_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*_k(x^*)\psi_k \neq 0,$$

esto implica, usando los mismos argumento de la demostración del Teorema 88, que la condición (5.30) se cumple.

Donde ahora necesariamente $\mathbb{I}'_j(x^*) \neq 0$, para todo j en $J := \{1, \cdots, s\}$, en efecto, caso contrario suponga que existe j en J, tal que $\mathbb{I}'_j(x^*) = 0$ esto implica que no existe un h tal que, $\mathbb{I}'_j(x^*)h < 0$, para todo j en J, entonces de acuerdo al Lema 12, x^* es un punto estacionario de $\mathbb{I}$, y por tanto es un punto KTD, con multiplicadores $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$ y $\mu_i,\ i$ en $I(x^*)$ y ψ_k en $Y^*_k,\ k = 1, \cdots, l$, identicamente nulos, lo que contradice el hecho de que x^* no es un punto KTD vectorial.

Por tanto considerando que $\bar{J} = J := \{1, \cdots, s\}$ en la condición (5.30) obtenemos,

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{s} K_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in \bar{I}(x^*)} K_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{k \in \bar{L}} K_k\Big) \neq \emptyset,$$

donde los conos $K_j,\ j$ en J, $K_i,\ i$ en $\bar{I}(x^*)$ y $K_k,\ k$ en $\bar{L}$, determinados en (5.29), son todos convexos y no vacíos.

Podemos afirmar entonces, que existe h en X, tal que

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)h & < & 0,\ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)h & = & 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)h & \geq & 0,\ i \in I(x^*), \end{cases}$$

y las condiciones de la Definición 86 se cumplen, con $\eta := h$, dependiendo de los puntos factibles x y x^*, esto implica que el problema (PM) es KT-pseudoinvex estricto vectorial.

Inversamente, bajo el supuesto de que el problema (PM) es KT-pseudoinvex estricto vectorial demostraremos que cada punto KTD vectorial x^* es una solución Pareto óptima.

Sea x^* un punto KTD y suponga que x^* no es una solución Pareto óptima, entonces existe un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0$, esto implica, dado que (PM) es KT-pseudoinvex vectorial estricto, que existe un $\eta = \eta(x, x^*)$ en X tal que

$$\begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)\eta & < & 0,\ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)\eta & = & 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)\eta & \geq & 0,\ i \in I(x^*). \end{cases}$$

Esto implica, considerando el primer item de la Observación 81, que

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{s} FC(\mathbb{I}_j, x^*)\Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in \bar{I}(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*)\Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*)\Big) \neq \emptyset,$$

que es equivalente a decir, de acuerdo a la Lema 13, que existe un r, $1 \leq r \leq s$ tal que,

$$\sum_{j=1}^{s} f_j + \sum_{i \in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k \neq 0,$$

para todos los $f_j \in [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*,\ j = 1, \cdots, s$, definidos en (5.17), $\varphi_i \in [AC(M_{g_i}, x^*)]^*,\ i \in I(x^*)$, definidos en (5.19), y $\varphi_k \in [TC(M_{F_k}, x^*)]^*,\ k = 1, \cdots, l$, definidos en (5.21).

Por lo tanto no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, esto implica que x^* no es un punto KTD vectorial, lo que contradice la hipótesis, podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

Si consideramos ahora soluciones Pareto óptima débil o débilmente eficientes, en vez de soluciones Pareto óptima o eficientes, podemos caracterizar los problemas KT-cuasiinvex estricto y KT-pseudoinvex vectorial, como lo indican los siguientes resultados.

Teorema 91 *Cada punto KTF vectorial x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima débil del* (PM)*, si y solo si el* (PM) *es KT-cuasiinvex estricto vectorial en $\bar{M}$.*

Demostración: Si cada punto KTF vectorial, es una solución Pareto óptima débil, mostraremos que el problema (PM) es KT-cuasiinvex estricto vectorial en $\bar{M}$.

Supongamos que el problema $\bar{M}$ no es KT-cuasiinvex estricto vectorial en $\bar{M}$, entonces no es KT-cuasiinvex vectorial en $\bar{M}$, ver cuadro 5.1, lo que implica, debido al Teorema 88, que existe al menos, x^* en $\bar{M}$, tal que x^* un punto KTF y x^* no es solución Pareto óptimo, por lo tanto existe al menos un punto KTF, x^*, el cual no es solución Pareto óptimo débil, lo que contradice la hipótesis.

Inversamente, bajo el supuesto de que el problema (PM) es KT-cuasiinvex estricto vectorial demostraremos que cada punto KTF vectorial x^* es una solución Pareto óptima débil.

Sea x^* un punto KTF y suponga que no es una solución Pareto óptima débil, entonces, de acuerdo a la Definición 65 existe un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) < 0$, por lo tanto, dado que (PM) es KT-cuasiinvex vectorial estricto, Definición 85, podemos afirmar que existe un $\eta = \eta(x, x^*)$ en X tal que

$$\begin{cases} \mathbb{I}_r'(x^*)\eta & < & 0, \\ \mathbb{I}_j'(x^*)\eta & \leq & 0,\ j \neq r,\ j = 1, \cdots, s, \\ F_k'(x^*)\eta & = & 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g_i'(x^*)\eta & \geq & 0,\ i \in I(x^*). \end{cases}$$

Esto nos permite afirmar, considerando el primer item de la Observación 81, que

$$FC(\mathbb{I}_r, x^*) \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*) \Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in I(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*) \Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*) \Big) \neq \emptyset,$$

que es equivalente a decir, de acuerdo a la Lema 13, que existe un r, $1 \leq r \leq s$ tal que,

$$f_r + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{s} f_j + \sum_{i \in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k \neq 0,$$

para todos los $f_r \in [FC(\mathbb{I}_r, x^*)]^*$, $f_j \in [NC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*$, $j = 1, \cdots, s$, $j \neq r$, definidos en (5.17), $\varphi_i \in [AC(M_{g_i}, x^*)]^*$, $i \in I(x^*)$, definidos en (5.18), y $\varphi_k \in [TC(M_{F_k}, x^*)]^*$, $k = 1, \cdots, l$, definidos en (5.21).

Por lo tanto no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, esto implica que x^* no es un punto KTF vectorial, lo que contradice la hipótesis, podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

Teorema 92 *Cada punto Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) vectorial x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima débil del* (PM)*, si y solo si el* (PM) *es KT-pseudoinvex vectorial en $\bar{M}$.*

Demostración: Si cada punto KTD vectorial, es una solución Pareto óptima débil, mostraremos que el problema (PM) es KT-pseudoinvex vectorial en $\bar{M}$.

Supongamos que el problema (PM) no es KT-pseudoinvex vectorial en $\bar{M}$, entonces no es KT-pseudoinvex vectorial estricto en $\bar{M}$, lo que implica, debido al Teorema 90, que existe al menos un punto KTD, x^*, tal que no es solución Pareto óptimo, por lo tanto existe al menos un punto KTD, x^*, el cual no es solución Pareto óptimo débil, lo que contradice la hipótesis.

Inversamente, bajo el supuesto de que el problema (PM) es KT-pseudoinvex vectorial demostraremos que cada punto KTD vectorial x^* es una solución Pareto óptima débil. Esta demostración es básicamente la demostración del Teorema 92.

Sea x^* un punto KTD y suponga que no es una solución Pareto óptima débil entonces, de acuerdo a la Definición 65, existe un x en $\bar{M}$ tal que $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) < 0$, por lo tanto, dado que (PM) es KT-pseudoinvex vectorial, podemos afirmar que existe un $\eta = \eta(x, x^*)$ en X tal que

$$\begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)\eta & < & 0, \ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)\eta & = & 0, \ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)\eta & \geq & 0, \ i \in I(x^*). \end{cases}$$

Esto implica, considerando el primer item de la Observación 81, que

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{s} FC(\mathbb{I}_j, x^*) \Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in I(x^*)} AC(M_{g_i}, x^*) \Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*) \Big) \neq \emptyset,$$

que es equivalente a decir, de acuerdo a la Lema 13, que existe un r, $1 \leq r \leq s$ tal que,

$$\sum_{j=1}^{s} f_j + \sum_{i \in I(x^*)} \varphi_i + \sum_{k=1}^{l} \varphi_k \neq 0,$$

para todo $f_j \in [FC(\mathbb{I}_j, x^*)]^*,\ j = 1, \cdots, s$, definidos en (5.17), $\varphi_i \in [AC(M_{g_i}, x^*)]^*,\ i \in I(x^*)$, definidos en (5.19), y $\varphi_k \in [TC(M_{F_k}, x^*)]^*,\ k = 1, \cdots, l$, definidos en (5.21).

Por lo tanto no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, esto implica que x^* no es un punto KTD vectorial, lo que contradice la hipótesis, podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima débil.

El teorema queda así demostrado.

De acuerdo a las definiciones presentadas en [81] y en esta sección tenemos los siguientes diagramas, bajo supuesto de diferenciabilidad de primer orden.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{KTD}} & \underset{\longrightarrow}{\overset{\text{Reg.Débil}}{\longleftarrow}} & \boxed{\text{Pareto Débil}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{KT-pseudoinvex}} \\
 & & \Downarrow & & \Uparrow \\
\boxed{\text{KTD}} & \underset{\longrightarrow}{\overset{\text{Reg.Débil}}{\longleftarrow}} & \boxed{\text{Pareto (Fuerte)}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{KT-pseudoinvex estricto}} \\
\Uparrow & & & & \Downarrow \\
\boxed{\text{KTF}} & \underset{\longrightarrow}{\overset{\text{Reg.Fuerte}}{\longleftarrow}} & \boxed{\text{Pareto (Fuerte)}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{KT-cuasiinvex}} \\
 & & \Uparrow & & \Downarrow \\
\boxed{\text{KTF}} & \underset{\longrightarrow}{\overset{\text{Reg.Fuerte}}{\longleftarrow}} & \boxed{\text{Pareto Débil}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{KT-cuasiinvex estricto}}
\end{array}$$

Cuadro 5.2: Condiciones de optimalidad Pareto y Pareto débil de primer orden

5.3. Problemas Vectoriales No Regulares

En esta sección estableceremos condiciones de optimalidad, necesarias y suficientes, de segundo orden, no degeneradas, para problemas multiobjetivos con restricciones de igualdad y desigualdad, aún cuando el problema no sea fuerte o débilmente regular.

Las condiciones necesarias son establecidas en 5.3.1, las cuales por una parte generalizan las condiciones Karush-Kuhn-Tucker vectorial, fuerte y débil, cuando el problema es regular, presentadas en la Sección 5.2, y por otra parte, cuando el problema es escalar y el conjunto de restricciones es no regular, son reducidas a las condiciones Karush-Kuhn-Tucker-Avakov, determidas en la Sección 3.2.

En la Sección 5.3.2 son obtenidas condiciones suficientes de optimalidad, Pareto y débil Pareto, bajo el supuesto 2KT-cuasiinvex (2KT-cuasiinvex estricta), 2KT-pseudoinvex (2KT-pseudoinvex estricta) vectorial, que generaliza a los problemas, presentados en la Sección 5.2.2.

Denotaremos por $(\hat{\mathrm{PM}})$, el Problema Multiobjetivo definido en (5.1) con el supuesto de que los operadores $\bar{F}: X \to \bar{Y}$ y $g: X \to \mathbb{R}^m$ son dos veces Frêchet diferenciables, en un entorno $U(x^*)$ de x^* en X y el subespacio $\mathrm{Im}F_k'(x^*)$ es cerrado en Y_k, para todo $k = 1, \cdots, l$.

Así como la noción de regularidad es esencial para la obtención de condiciones necesarias y suficientes de optimalidad, de primer orden no degeneradas, la noción de 2-regularidad, que introduciremos en este trabajo, también lo es, para la obtención de condiciones de segundo orden no degeneradas. Es por ello que precisaremos la definición de punto 2-regular, fuerte y débil, para nuestro problema.

Definición 93 *Diremos que un punto x^* es un punto 2-regular fuerte del $(\hat{\mathrm{PM}})$, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, si $\bar{F}$ satisface la condición (3.41) y dado un r en $\{1, \cdots, s,\}$ el sistema*

$$\begin{cases} \mathbb{I}_j'(x^*)\xi_2 & < \ 0, \ j = 1, \cdots, s, \ j \neq r \\ \bar{F}'(x^*)\xi_2 & = \ 0, \\ \bar{F}'(x^*)\xi_1 + \bar{F}''(x^*)[h, \xi_2] & = \ 0, \\ g_i'(x^*)\xi_2 & < \ 0, \ \forall \ i \in \ I_h(x^*) \\ g_i'(x^*)\xi_1 + g_i''(x^*)[h, \xi_2] & < \ 0, \ \forall \ i \in \tilde{I}_h(x^*) \end{cases}$$

tiene solución $\xi_1, \xi_2 \in X$, donde

$$\begin{aligned} H_{\bar{M}}(x^*) = \Big\{ h, \ \bar{F}'(x^*)h = 0, \ g_i'(x^*)h \leq 0, \ i \in I(x^*), \\ \exists \ x_h \in X, \ \bar{F}'(x^*)x_h + \bar{F}''(x^*)[h, h] = 0, g_i'(x^*)x_h + g_i''(x^*)[h, h] < 0, \ i \in I_h(x^*) \Big\}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Definición 94 *Diremos que un punto x^* es un punto 2-regular débil del conjunto factible $\bar{M}$, del $(\hat{\mathrm{PM}})$, si para todo h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, definido en (5.33), $\bar{F}$ satisface la condición (3.41) y el sistema*

$$\begin{cases} \bar{F}'(x^*)\xi_2 & = \ 0, \\ \bar{F}'(x^*)\xi_1 + \bar{F}''(x^*)[h, \xi_2] & = \ 0, \\ g_i'(x^*)\xi_2 & < \ 0, \ \forall \ i \in \ I_h(x^*) \\ g_i'(x^*)\xi_1 + g_i''(x^*)[h, \xi_2] & < \ 0, \ \forall \ i \in \tilde{I}_h(x^*) \end{cases}$$

tiene solución $\xi_1, \xi_2 \in X$.

De acuerdo a las definiciones anteriores tenemos,

$$\boxed{\text{2-Regularidad Fuerte}} \Longrightarrow \boxed{\text{2-Regularidad Débil}}$$

5.3.1. Condiciones Necesarias de Optimalidad

En esta sección estableceremos condiciones necesarias de optimalidad, de segundo orden, para problemas vectoriales no regulares, mediante el método Dubovitskii-Milyutin. Las cuales son una generalización de las condiciones necesarias de optimalidad obtenidas en la Sección 5.2, para problemas vectoriales fuerte y débilmente regulares.

Observemos que si x^* es una solución Pareto óptima del $(\hat{\text{PM}})$ entonces, de acuerdo a la Observación 69,

$$FC(\mathbb{I}_r, x^*) \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*) \Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} AC(M_{g_i}, x^*) \Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*) \Big) = \emptyset,$$
$$r = 1, \cdots, s,$$

donde $FC(\mathbb{I}_j, x^*)$ y $NC(\mathbb{I}_j, x^*)$ son los conos de las direcciones de descenso y no ascenso del funcional $\mathbb{I}_j$, $\bigcap_{i=1}^{m} AC(M_{g_i}, x^*) = G_{M_g}(x^*)$, es el cono de las direcciones factibles del conjunto de restricciones de desigualdad M_g y $TC(M_{\bar{F}}, x^*) = T_{M_{\bar{F}}}(x^*)$ es el cono de las direcciones tangentes al conjunto de restricciones de igualdad $M_{\bar{F}}$, todos en el punto x^*.

Entonces si $\Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*) \Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} AC(M_{g_i}, x^*) \Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*) \Big) \neq \emptyset$, obtenemos, de forma inmediata, el siguiente resultado de optimalidad, que corresponde a la Proposición 38 para el caso escalar.

Proposición 95 *Sea* x^* *es una solución Pareto óptima, local o global, del problema* $(\hat{\text{PM}})$, *entonces la siguiente proposición es verdadera,*

$$\mathbb{I}'_r(x^*)z \;\; \geq \;\; 0, \; \forall \; z \; \in \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{s} NC(\mathbb{I}_j, x^*) \Big) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} AC(M_{g_i}, x^*) \Big) \cap \Big(TC(M_{\bar{F}}, x^*) \Big), \qquad (5.34)$$
$$r = 1, \cdots, s.$$

En lo que sigue introduciremos la definición de punto Karush Kuhn Tucker Avakov Débil (KTAD) y de punto Karush Kuhn Tucker Avakov Fuerte (KTAF) vectorial, en una cierta dirección, del problema $(\hat{\text{PM}})$, que son generalizaciones de las definiciones 78 y 79, de un punto Karush Kuhn Tucker Débil (KTD) y Karush Kuhn Tucker Fuerte (KTF) vectorial, del problema (PM), respectivamente.

Definición 96 (**Karush Kuhn Tucker Avakov Débil**) *Diremos que un punto factible x^* es un punto Karush Kuhn Tucker Avakov Débil (KTAD), vectorial en dirección de h en X, del* $(\hat{\mathrm{PM}})$, *si existen $\nu = \nu(h)$ en $\mathrm{I\!R}^s$, $\mu = \mu(h), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(h)$ en $\mathrm{I\!R}^m, \psi_k = \psi_k(h), \tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_k(h)$ en Y_k^*, $k = 1, \cdots, l$, no todos identicamente nulos tal que*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} g_i''^*(x^*)(h)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\psi_k & \\ + \sum_{k=1}^{l} F_k''^*(x^*)(h)\tilde{\psi}_k &= 0 \qquad (5.35) \\ \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\tilde{\psi}_k &= 0, \qquad (5.36) \end{aligned}$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\mu_i \geq 0$, $\tilde{\mu}_i \geq 0$, ψ_k y $\tilde{\psi}_k$ son los multiplicadores de Lagrange-Avakov y donde los conjuntos de índices $I_h(x^*)$ e $\tilde{I}_h(x^*)$, son definidos en (3.54) y (3.60), respectivamente.

Definición 97 (**Karush Kuhn Tucker Avakov Fuerte**) *Diremos que un punto factible x^* es un punto Karush Kuhn Tucker Avakov Fuerte (KTAF) vectorial, en dirección de h en X, del* $(\hat{\mathrm{PM}})$, *si existen $\nu = \nu(h)$ en $\mathrm{I\!R}^s$, $\mu = \mu(h), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(h)$ en $\mathrm{I\!R}^m, \psi_k = \psi_k(h), \tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_k(h)$ en Y_k^*, $k = 1, \cdots, l$, no todos identicamente nulos satisfaciendo (5.35) y (5.36), donde todas las componenentes de ν son estrictamente positivas, esto es $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s)$, $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$ y $\mu_i \geq 0$, $\tilde{\mu}_i \geq 0$, ψ_k y $\tilde{\psi}_k$ son los multiplicadores de Lagrange-Avakov.*

Karush Kuhn Tucker Avakov Fuerte (KTAF)	$\Longrightarrow$	Karush Kuhn Tucker Avakov Débil (KTAD)

En lo que sigue usaremos el método de Dubovitskii-Milyutin y los resultados de las secciones previas, para probar el siguiente teorema.

Teorema 98 *Sea x^* en $\bar{M}$ un punto 2-regular fuerte, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, si x^* es una solución Pareto óptima, local o global, del* $(\hat{\mathrm{PM}})$ *y es tal que $\mathbb{I}'(x^*)h = 0$, entonces x^* es un punto KTAF vectorial, en la dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$.*

Demostración: Consideremos el operador vectorial, no nulo, $\tilde{\mathbb{I}}(x^*) = (\tilde{\mathbb{I}}_1(x^*), \cdots, \tilde{\mathbb{I}}_s(x^*)) : \widetilde{X} \to \mathrm{I\!R}^s$, definido para cada (x, z) en $\widetilde{X} := X \times X$,

$$\tilde{\mathbb{I}}(x^*)(x, z) = \mathbb{I}'(x^*)z \qquad (5.37)$$

y el siguiente problema vectorial,

$$
(\tilde{PM}) \begin{cases} \text{mín}\, \tilde{\mathbb{I}}(x^*)(x,z) & \\ \text{ sujeto a } \ \tilde{\tilde{F}}(x^*)(x,z) & = \ 0 \\ \qquad\qquad \tilde{g}(x^*)(x,z) & \leq \ 0 \\ (x,z) \in \widetilde{X}, & \end{cases} \tag{5.38}
$$

donde $\tilde{\tilde{F}}(x^*)(x,z) = (\widetilde{F}_1(x^*)(x,z), \cdots, \widetilde{F}_l(x^*)(x,z))$, con $\widetilde{F}_k(x^*) : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}_k,\ k = 1, \cdots, l$, definido para cada (x,z) en $\widetilde{X}$, como en (3.97),

$$
\widetilde{F}_k(x^*)(x,z) \quad = \quad (F_k'(x^*)z, F_k'(x^*)x + F_k''(x^*)z),
$$

es continuamente Frêchet diferenciable y $\tilde{g}(x^*) : \widetilde{X} \to \tilde{W}$, $\tilde{g}(x^*) = (\tilde{g}_1(x^*), \cdots, \tilde{g}_p(x^*))$, definido para cada (ξ_1, ξ_2) en $\widetilde{X}$, como en (3.58),

$$
\tilde{g}_i(x^*)(\xi_1, \xi_2) = (g_i'(x^*)\xi_2, g_i'(x^*)\xi_1 + g_i''(x^*)[h, \xi_2]),\ i = 1, \cdots, p,
$$

es Frêchet diferenciable, donde $\tilde{X} := X \times X$, $\widetilde{Y}_k = \mathrm{Im}F_k'(x^*) \times Y_k/\mathrm{Im}F_k'(x^*)$, $k = 1, \cdots, l$, $\tilde{W} = \mathrm{Im}g'(x^*) \times [\mathrm{Im}g'(x^*)]^\perp$ son espacios de Banach y p es la cardinalidad del conjunto de índice $I(x^*)$, definido en (2.3).

El conjunto factible es

$$
\tilde{\tilde{H}}(x^*) = \widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x^*) \cap \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*),
$$

donde $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*)$ y $\widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x^*)$ son definidos en (3.62) y (3.99) respectivamente.

De acuerdo a las suposiciones impuestas a las funciones $\mathbb{I}$, g y $\bar{F}$, el operador $\tilde{\mathbb{I}}$ es Frêchet diferenciable y los operadores $\tilde{g}$ y $\tilde{\bar{F}}$ son continuamente Frêchet diferenciables. Considerando además, (3.85), (3.87) y que para todo (x,z) en $\tilde{X} := X \times X$,

$$
\tilde{\mathbb{I}}'(x^*)(x_h, h)(x,z) = \tilde{\mathbb{I}}(x^*)(x,z) := \mathbb{I}'(x^*)z,
$$

es fácil ver que si x^* es un punto 2-regular fuerte del problema $(\hat{\mathrm{PM}})$, Definición 93, entonces (x_h, h) en un punto regular fuerte del $(\tilde{\mathrm{PM}})$, de acuerdo a la Definición 76.

Mostraremos ahora que si x^* es una solución Pareto óptima del problema $(\hat{\mathrm{PM}})$ entonces (x_h, h) es una solución Pareto óptima del problema $(\tilde{\mathrm{PM}})$.

Si x^* es una solución Pareto óptima y es un punto 2-regular fuerte del problema $(\hat{\mathrm{PM}})$, entonces, debido a la condición de optimalidad (5.34) y a la Observación 37, para todo z en $H_{\bar{F}}(x^*) \bigcap H_g(x^*)$,

$$
\mathbb{I}_j'(x^*)z \leq 0, \forall\ j \neq r \implies \mathbb{I}_r'(x^*)z \geq 0,\ r = 1, \cdots, s,
$$

y dado que

$$
z \in H_{\bar{F}}(x^*) \bigcap H_{\tilde{g}}(x^*) \Longleftrightarrow (x,z) \in \widetilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x^*) \bigcap \widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*), \tag{5.39}
$$

tenemos, por la propia definición (5.37) de $\tilde{\mathbb{I}}(x^*)$, que para todo (x,z) en $\widetilde{\widetilde{H}}(x^*)$,

$$\tilde{\mathbb{I}}_j(x^*)(x,z) \leq 0,\ \forall\, j \neq r \implies \tilde{\mathbb{I}}_r(x^*)(x,z) \geq 0,\ r = 1, \cdots, s. \tag{5.40}$$

Como por hipótesis $\mathbb{I}'(x^*)h = 0$, para todo h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, definido en (5.33), entonces, debido a que $H_{\bar{M}}(x^*)$ está contenido en $H_{\bar{F}}(x^*) \bigcap H_{\tilde{g}}(x^*)$, (x_h, h) pertenece a $\widetilde{\widetilde{H}}(x^*)$, y de acuerdo a la definición de $\tilde{\mathbb{I}}(x^*)$, tenemos que

$$\tilde{\mathbb{I}}(x^*)(x_h, h) = 0. \tag{5.41}$$

De (5.40) y (5.41) podemos concluir entonces, que no existe (x,z) en $\widetilde{H}(x^*)$, tal que $\tilde{\mathbb{I}}(x,z)$ domine a $\tilde{\mathbb{I}}(x_h,h)$, luego (x_h,h) es solución Pareto óptima de ($\tilde{\mathrm{PM}}$).

Por tanto siendo (x_h,h) un punto regular fuerte y una solución Pareto óptima de ($\tilde{\mathrm{PM}}$), conforme al teorema 83, (x_h,h) es un punto KTF vectorial, del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), entonces existen $\nu := \nu(h)$ en $\mathbb{R}^s$, $\bar{\mu} := \bar{\mu}(h)$ y $\bar{\psi}^* := \bar{\psi}^*(h)$, no identicamente nulos, tales que

$$\tilde{\mathbb{I}}'^*(x^*)(x_h,h)\nu + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} \tilde{g}_i'^*(x^*)(x_h,h)\bar{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} \widetilde{F}_k'^*(x^*)(x_h,h)\bar{\psi}_k^* = 0,$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\bar{\mu}_i = (\mu_i, \check{\mu}_i) \geqq 0$, $i \in \tilde{I}_h(x^*)$, con $\tilde{I}_h(x^*)$ el conjunto de las restricciones activas del operador $\tilde{g}(x^*)$, definido en (3.60) y $\bar{\psi}_k^*$, son tales que para todo $k = 1, \cdots, l$,

$$\bar{\psi}_k^* = (\psi_k^*, \check{\psi}_k^*) \in \widetilde{Y}_k^* := [\mathrm{Im} F_k'(x^*)]^* \times [Y/\mathrm{Im} F_k'(x^*)]^* \equiv [\mathrm{Im} F_k'(x^*)]^* \times \mathrm{Ker} F_k'^*(x^*).$$

Y por lo tanto para todo (ξ_1, ξ_2) en $X \times X$,

$$\langle \nu,\ \tilde{\mathbb{I}}'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2)\rangle + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} \langle \bar{\mu}_i,\ (\tilde{g}_i(x^*))'(x_h,h)(\xi_1,\xi_2)\rangle + \sum_{k=1}^{l} \langle \bar{\psi}_k^*, \widetilde{F}_k(x^*)'(x_h,h)(\xi_1,\xi_2)\rangle = 0.$$

Tomando en consideración (3.89), reemplazando $\tilde{\mathbb{I}}'(x^*)(x_h,h) = \tilde{\mathbb{I}}(x^*)$, definida en (5.37), y los términos (3.91) y (3.107), en la igualdad anterior, la cual se cumple para todo (ξ_1,ξ_2) en $\widetilde{X}$, obtenemos

$$\Big\langle \mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i \in I_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\mu_i + \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} g_i''^*(x^*)(h)(2\check{\mu}_i)$$
$$+ \sum_{k=1}^{l} (F_k'^*(x^*)\psi_k + F_k''^*(x^*)(h)(2\check{\psi}_k)),\quad \xi_2 \Big\rangle = 0,$$

$$\Big\langle \sum_{i \in \tilde{I}_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\check{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F'^*(x^*)\check{\psi}_k,\ \xi_1 \Big\rangle = 0.$$

Denotando $\tilde{\mu} = 2\breve{\mu}$ y $\tilde{\psi} = 2\breve{\psi}$ y considerando que la primera igualdad se cumple para todo ξ_2 en X y la segunda se cumple para todo ξ_1 en X, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{I}'^*(x^*)\nu + \sum_{i\in I_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\mu_i + \sum_{i\in \tilde{I}_h(x^*)} g_i''^*(x^*)(h)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\psi_k & \\ + \sum_{k=1}^{l} F_k''^*(x^*)(h)\tilde{\psi}_k &= 0, \\ \sum_{i\in \tilde{I}_h(x^*)} g_i'^*(x^*)\tilde{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} F_k'^*(x^*)\tilde{\psi}_k &= 0. \end{aligned}$$

El teorema queda así demostrado.

Teorema 99 *Sea x^* en $\bar{M}$ un punto 2-regular débil, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, si x^* es una solución Pareto óptima, local o global, del (*$\hat{\mathrm{PM}}$*) y es tal que $\mathbb{I}'(x^*)h = 0$, entonces x^* es un punto KTAD vectorial, en la dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$.*

Demostración: La demostración que daremos se basa en los argumentos utilizados en la demostración del Teorema 98. Considerando (3.85) y (3.87) se demuestra, sin dificultad, que si x^* es un punto 2-regular débil del problema ($\hat{\mathrm{PM}}$), Definición 94, entonces (x_h, h) es un punto regular débil, del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), Definición 75, y además como x^* es una solución Pareto óptima problema ($\hat{\mathrm{PM}}$), (x_h, h) es una solución Pareto óptima del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), entonces, conforme al teorema 82, (x_h, h) es un punto KTD vectorial, del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$) y por lo tanto existen $\nu := \nu(h)$ en $\mathbb{R}^s$, $\bar{\mu} := \bar{\mu}(h)$ y $\bar{\psi}^* := \bar{\psi}^*(h)$, no identicamente nulos, tales que

$$\tilde{\mathbb{I}}'^*(x^*)(x_h, h)\nu + \sum_{i\in \tilde{I}_h(x^*)} \tilde{g}_i'^*(x^*)(x_h, h)\bar{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} \widetilde{F}_k'^*(x^*)(x_h, h)\bar{\psi}_k^* = 0,$$

donde $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\bar{\mu}_i = (\mu_i, \breve{\mu}_i) \geqq 0$, $i \in \tilde{I}_h(x^*)$, con $\tilde{I}_h(x^*)$ el conjunto de las restricciones activas del operador $\tilde{g}(x^*)$, definido en (3.60) y $\bar{\psi}_k^*$, son tales que para todo $k = 1, \cdots, l$,

$$\bar{\psi}_k^* = (\psi_k^*, \breve{\psi}_k^*) \in \widetilde{Y}_k^* := [\mathrm{Im}F_k'(x^*)]^* \times [Y/\mathrm{Im}F_k'(x^*)]^* \equiv [\mathrm{Im}F_k'(x^*)]^* \times \mathrm{Ker}F_k'^*(x^*).$$

Esto implica la existencia de $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\mu_i \geq 0$, $\tilde{\mu}_i = 2\breve{\mu}_i \geq 0$, ψ_k y $\tilde{\psi}_k = 2\breve{\psi}_k$, satisfaciendo las condiciones (5.35) y (5.36), por lo tanto, de acuerdo a la Definición 96, x^* es un punto KTAD.

El teorema queda así demostrado.

De lo anteriormente expuesto, análoga a la observación 42 para el caso escalar, podemos hacer la siguiente observación.

Observación 100 *Si x^* es una solución Pareto óptimo, de acuerdo a los Teoremas 98 y 99, es cierta una de las siguientes afirmaciones,*

- *si x^* es un punto regular fuerte (débil), las ecuaciones de Euler-Lagrange, (5.35) - (5.36), son válidas con $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, ($\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$), $\mu_i \geq 0$, ψ_k en Y_k^* no todos nulos y $\tilde{\psi}_k$ y $\tilde{\mu}_i$ identicamente nulos.*

- *si x^* no es un punto regular fuerte (débil), pero si un punto 2-regular fuerte, (2-regular débil) en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, entonces hay un familia de ecuaciones de Euler-Lagrange, (5.35) - (5.36), que son válidas con $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, ($\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \cdots, s$), $\mu_i \geq 0$, $\tilde{\mu}_i \geq 0$, ψ_k y $\tilde{\psi}_k$ en Y_k^*, dependiendo del parámetro h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, no todos identicamente nulos.*

5.3.2. Condiciones Suficientes de Optimalidad

En esta sección introducimos las nociones de 2KT-cuasiinvexidad (2KT-cuasiinvexidad estricta) y 2KT-pseudoinvexidad estricta (2KT-pseudoinvexidad) vectorial, para el problema ($\hat{\text{PM}}$), que es una condición necesaria y suficiente, para asegurar que todo punto KTAF y KTAD vectorial, es una solución Pareto óptimo (solución Pareto óptimo débil) respectivamente.

Definición 101 *Diremos que* ($\hat{\text{PM}}$) *es 2KT-cuasiinvex vectorial en $\bar{M}$, en dirección de h en X, si para cada punto factible x, x^* en $\bar{M}$, existen funciones η_h, $\xi_h : X \times X \to X$, tales que*

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}_r'(x^*)\eta_h < 0, \qquad \mathbb{I}_j'(x^*)\eta_h & \leq & 0, \ j \neq r, \ j = 1, \cdots, s, \\ F_k'(x^*)\eta_h & = & 0, \ k = 1, \cdots, l, \\ F_k'(x^*)\xi_h + F_k''(x^*)[h, \eta_h] & = & 0, \ k = 1, \cdots, l, \\ -g_i'(x^*)\eta_h & \geq & 0, \ i \in I_h(x^*), \\ -g_i'(x^*)\xi_h - g_i''(x^*)[h, \eta_h] & \geq & 0, \ i \in \tilde{I}_h(x^*), \end{cases} \tag{5.42}$$

donde $\eta_h = \eta_h(x, x^*)$, $\xi_h = \xi_h(x, x^*)$ y los conjuntos $I_h(x^*)$, $\tilde{I}_h(x^*)$ son definidos en (3.54) y (3.60) respectivamente.

Si $\mathbb{I}(x)$ es estrictamente menor que $\mathbb{I}(x^*)$, esto es $\mathbb{I}(x) < \mathbb{I}(x^*)$, entonces al problema ($\hat{\text{PM}}$) *lo llamaremos 2KT-cuasiinvex estricto vectorial.*

Definición 102 *Diremos que* ($\hat{\text{PM}}$) *es 2KT-pseudoinvex estricto vectorial en $\bar{M}$, en dirección de h en X, si para cada punto factible x, x^* en $\bar{M}$, existen funciones η_h, $\xi_h : X \times X \to X$, tales* *que*

$$\mathbb{I}(x)-\mathbb{I}(x^*)\leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)\eta_h & < \; 0, \; j=1,\cdots,s, \\ F'_k(x^*)\eta_h & = \; 0, \; k=1,\cdots,l, \\ F'_k(x^*)\xi_h + F''_k(x^*)[h,\eta_h] & = \; 0, \; k=1,\cdots,l, \\ -g'_i(x^*)\eta_h & \geq \; 0, \; i\in I_h(x^*), \\ -g'_i(x^*)\xi_h - g''_i(x^*)[h,\eta_h] & \geq \; 0, \; i\in \tilde{I}_h(x^*), \end{cases} \tag{5.43}$$

donde $\eta_h=\eta_h(x,x^*)$, $\xi_h=\xi_h(x,x^*)$ *y los conjuntos* $I_h(x^*)$, $\tilde{I}_h(x^*)$ *son definidos en (3.54) y (3.60) respectivamente.*

Si $\mathbb{I}(x)$ *es estrictamente menor que* $\mathbb{I}(x^*)$*, esto es* $\mathbb{I}(x)<\mathbb{I}(x^*)$*, entonces al problema* $(\mathrm{P\hat{M}})$ *lo llamaremos 2KT-pseudoinvex vectorial.*

Diremos simplemente que el $(\mathrm{P\hat{M}})$ es 2KT-cuasiinvex (2KT-cuasiinvex estricto), 2KT-pseudoinvex (2KT-pseudoinvex estricto) vectorial, en $\bar{\mathrm{M}}$, si lo es para toda dirección h en X, además si lo es en dirección de $h=0$, entonces el problema es KT-cuasiinvex (KT-cuasiinvex estricto), KT-pseudoinvex (KT-pseudoinvex estricto) vectorial, conforme a las Definición 85 (Definición 86), basta con considerar $\eta=\eta_h=\xi_h$, debido a que $I_h(x^*)=I(x^*)$.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto tenemos los siguientes diagramas, bajo supuesto de diferenciabilidad de segundo orden, ver cuadro 5.1.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{2KT-pseudoinvex estricto}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{2KT-cuasiinvex}} & \Longleftarrow & \boxed{\text{2KT-invex}} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \boxed{\text{2KT-pseudoinvex}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{2KT-cuasiinvex estricto}} & & \end{array}$$

Cuadro 5.3: Relación entre varios tipos de 2KT-invexidad

El próximo teorema, que generaliza al Teorema 88 en el caso regular, nos da una caracterización de los problemas 2KT-cuasiinvex.

Teorema 103 *Cada punto KTAF vectorial* x^* *en* $\bar{M}$*, en dirección* h *en* $H_{\bar{M}}(x^*)$*, es una solución Pareto óptima del* $(\mathrm{P\hat{M}})$*, si y solo si el* $(\mathrm{P\hat{M}})$ *es 2KT-cuasiinvex vectorial en* $\bar{M}$*, en la misma dirección* h*.*

Demostración: Si cada punto KTAF vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, del $(\mathrm{P\hat{M}})$, es una solución Pareto óptima, mostraremos que el problema $(\mathrm{P\hat{M}})$ es 2KT-cuasiinvex vectorial, en la misma dirección h.

Suponga que existe al menos un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x) = (\mathbb{I}_1(x), \cdots, \mathbb{I}_s(x))$ domina a $\mathbb{I}(x^*) = (\mathbb{I}_1(x^*), \cdots, \mathbb{I}_s(x^*))$, en el sentido Pareto, esto es, $\mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)$, para todo $j = 1, \cdots, s$, y al menos se cumple una desigualdad estricta $\mathbb{I}_r(x) < \mathbb{I}_r(x^*)$, entonces x^* no es una solución Pareto óptima del ($\hat{\mathrm{PM}}$) y por hipótesis x^* no es un punto KTAF vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$.

Esto equivale a decir, que para todo h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, (x_h, h) no es un punto KTF vectorial del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), definido en (5.38), no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, por lo tanto,

$$\tilde{\mathbb{I}}'^*(x^*)(x_h, h)\nu + \sum_{i\in\tilde{I}_h(x^*)} \tilde{g}_i'^*(x^*)(x_h, h)\bar{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} \widetilde{F}_k'^*(x^*)(x_h, h)\bar{\psi}_k^* \neq 0,$$

para todo $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_s) \neq 0$, $\nu_j > 0$, j en $J = 1, \cdots, s$, $\bar{\mu}_i = (\mu_i, \breve{\mu}_i) \geqq 0$, $i \in \tilde{I}_h(x^*)$, con $\tilde{I}_h(x^*)$ el conjunto de las restricciones activas del operador $\tilde{g}(x^*)$, definido en (3.60) y $\bar{\psi}_k^*$ en $\tilde{Y}_k^*$, para todo k en $L = \{1, \cdots, l\}$.

Adoptando los mismos argumentos usados en la demostración del Teorema 88, donde denotamos ahora $\bar{\tilde{J}} = \{j \in J, \tilde{\mathbb{I}}_j'(x^*)(x_h, h) \neq 0\}$, $\bar{\tilde{I}}_h(x^*) = \{i \in \tilde{I}_h(x^*), \tilde{g}_i'(x^*)(x_h, h) \neq 0\}$, $\bar{\tilde{L}} = \{k \in L, \widetilde{F}_k'(x^*)(x_h, h) \neq 0\}$ y tomamos en consideración que $\nu_j > 0$, $j = 1, \cdots, s$, $\bar{\mu}_i \geq 0, i \in \bar{\tilde{I}}_h(x^*)$ y que, debido a (5.5),

$$\tilde{\varphi} := \sum_{k\in\bar{\tilde{L}}} \widetilde{F}_k'^*(x^*)(x_h, h)\bar{\psi}_k \in \sum_{k\in\bar{\tilde{L}}} \tilde{K}_k^* \subset (\bigcap_{k\in\bar{\tilde{L}}} \tilde{K}_k)^*$$

podemos afirmar que para todos los $f_j \in \tilde{K}_j^*$, $j \in \bar{\tilde{J}}$, $\varphi_i \in \tilde{K}_i^*$, $i \in \bar{\tilde{I}}_h(x^*)$ y $\tilde{\varphi} \in (\bigcap_{k\in\bar{\tilde{L}}} \tilde{K}_k)^*$.

$$\sum_{j\in\bar{J}}^{s} f_j + \sum_{i\in\bar{I}(x^*)} \varphi_i + \tilde{\varphi} \neq 0,$$

donde, para cada j en $\bar{\tilde{J}}$, el cono $\tilde{K}_j$ es

$$\tilde{K}_j \quad = \quad \{(\xi_1, \xi_2), \tilde{\mathbb{I}}_r'(x^*)(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) < 0\},$$

y conforme a la definición (5.37), para todo (ξ_1, ξ_2) en $\widetilde{X}$,

$$(\tilde{\mathbb{I}}_j(x^*))'(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\mathbb{I}}_j(x^*)(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{I}_j'(x^*)\xi_2, \ j \in \bar{\tilde{J}}$$

entonces,

$$\tilde{K}_j \quad = \quad \{(\xi_1, \xi_2), \mathbb{I}_j'(x^*)\xi_2 < 0\}, j \in \bar{\tilde{J}}.$$

El cono $\tilde{K}_i$, para cada i en $\bar{\tilde{I}}_h(x^*)$, es

$$\tilde{K}_i \quad = \quad \Big\{(\xi_1, \xi_2) \in \widetilde{X}, \ (\tilde{g}_i(x^*))'(x_h, h)(\xi_1, \xi_2) < 0\Big\},$$

con $(\tilde{g}_i(x^*))'(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = (g_i'(x^*)\xi_2, g_i'(x^*)\xi_1 + 2g_i'(x^*)[h,\xi_2])$.

El cono $\tilde{K}_k$, para cada k en $\tilde{\tilde{L}}$,

$$\tilde{K}_k \quad = \quad \{(\xi_1,\xi_2) \in \widetilde{X}, (\widetilde{F}_k(x^*))'(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = 0\},$$

con $(\widetilde{F}_k(x^*))'(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = (F_k'(x^*)\xi_2, F_k'(x^*)\xi_1 + 2F_k''(x^*)[h,\xi_2])$.

Como los conos $\tilde{K}_j$, j en $\tilde{\tilde{J}}$, $\tilde{K}_i$, i en $\tilde{\tilde{I}}_h(x^*)$ y $\tilde{K}_k$, k en $\tilde{\tilde{L}}$, determinados anteriormente, son convexos y no vacíos, entonces, conforme al Lema 13, podemos afirmar

$$\Big(\bigcap_{j\in\tilde{\tilde{J}}} \tilde{K}_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in\tilde{\tilde{I}}_h(x^*)} \tilde{K}_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{k\in\tilde{\tilde{L}}} \tilde{K}_k\Big) \neq \emptyset. \tag{5.44}$$

Si consideramos además que $\tilde{\mathbb{I}}_j'(x^*)(x_h,h) = 0$, $\tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h) = 0$ y $\tilde{F}_k'(x^*)(x_h,h) = 0$ para algún $j \neq r$ en J, $i \in \tilde{I}_h(x^*)$ y k en $\tilde{L}$ respectivamente, entonces para todo (ξ_1,ξ_2) en $\tilde{X}$,

$$\tilde{\mathbb{I}}_j'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = 0, j \neq r, \quad \tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = 0, \quad \widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2) = 0,$$

esto implica de acuerdo a las definiciones de $\tilde{\mathbb{I}}_j(x^*)(x_h,h)$, $\tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)$ y $\widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)$, que

$$\begin{array}{lll} \mathbb{I}_j'(x^*)\xi_2 = 0,\ j \neq r, & g_i'(x^*)\xi_2 = 0, & F_k'(x^*)\xi_2 = 0, \\ F_k'(x^*)\xi_1 + 2F_k''(x^*)[h,\xi_2] = 0, & & g_i'(x^*)\xi_1 + 2g_i''(x^*)[h,\xi_2] = 0. \end{array} \tag{5.45}$$

Por consiguiente, de acuerdo a (5.44) y (5.45) concluimos que para cada h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, existen ξ_1, ξ_2, en X, tales que

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{I}_r'(x^*)\xi_2 < 0, \quad \mathbb{I}_j'(x^*)\xi_2 & \leq & 0,\ j \neq r,\ j = 1,\cdots,s, \\ F_k'(x^*)\xi_2 & = & 0,\ k = 1,\cdots,l, \\ F_k'(x^*)\xi_1 + 2F_k''(x^*)[h,\xi_2] & = & 0,\ k = 1,\cdots,l, \\ -g_i'(x^*)\xi_2 & \geq & 0,\ i \in I_h(x^*), \\ -g_i'(x^*)\xi_1 - 2g_i''(x^*)[h,\xi_2] & \geq & 0,\ i \in \tilde{I}_h(x^*). \end{array} \right.$$

Por lo tanto podemos afirmar que para cada $x,\ x^*$ en $\bar{M}$ existen $\eta_h := \xi_1$ y $\xi_h := 2\xi_2$, en X, dependiendo de los puntos factibles x y x^* y de h, tales que, satisfacen la condición (5.42), esto implica que el problema (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-cuasiinvex vectorial, conforme a la Definición 101.

Inversamente, suponga que el (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-cuasiinvex vectorial, mostraremos que cada punto KTAF vectorial es una solución Pareto óptima del (P$\hat{\text{M}}$).

Sea x^* un punto KTAF vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, entonces (x_h,h) es un punto KTF del problema (P$\tilde{\text{M}}$), definido en (5.38), y suponga que x^* no es una solución Pareto óptima, entonces existe un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0$, esto implica, dado que (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-cuasiinvex, que existe un $\eta_h = \eta_h(x, x^*)$ y $\xi_h = \xi_h(x, x^*)$ en X tal que

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}_r'(x^*)\eta_h < 0, \quad \mathbb{I}_j'(x^*)\eta_h & \leq \; 0, \; j \neq r, \; j = 1, \cdots, s, \\ F_k'(x^*)\eta_h & = \; 0, \; k = 1, \cdots, l, \\ F_k'(x^*)\xi_h + F_k''(x^*)[h, \eta_h] & = \; 0, \; k = 1, \cdots, l, \\ -g_i'(x^*)\eta_h & \geq \; 0, \; i \in I_h(x^*), \\ -g_i'(x^*)\xi_h - g_i''(x^*)[h, \eta_h] & \geq \; 0, \; i \in \tilde{I}_h(x^*), \end{cases}$$

lo que implica, de acuerdo al primer item de la Observación 81, considerando en este caso que las funciones involucradas son $\tilde{\mathbb{I}}$, $\tilde{g}$ y $\tilde{\tilde{F}}$,

$$FC(\tilde{\mathbb{I}}_r(x^*), (x_h, h)) \cap \Big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{s} NC(\tilde{\mathbb{I}}_j(x^*), (x_h, h)) \Big) \cap AC(\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*), (x_h, h))$$
$$\cap \; TC(\tilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x^*), (x_h, h)) \neq \emptyset,$$

donde $\tilde{\mathbb{I}}(x^*)$, $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*)$ y $\tilde{H}_{\tilde{\tilde{F}}}(x^*)$ son definidos en (5.37), (3.62) y (3.99) respectivamente.

Por consiguiente, de acuerdo al Lema 13, no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, por lo tanto (x_h, h) no es un punto KTF vectorial del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), esto equivale a afirmar que x^* no es un punto KTAF vectorial, en la dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$ del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), lo que contradice la hipótesis. Podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

El próximo teorema, que generaliza al Teorema 90 en el caso regular, nos da una caracterización de los problemas 2KT-pseudoinvex estricto. Su demostración es análoga a la demostración del Teorema 103 usando la misma argumentación empleada en la demostración del Teorema 90.

Teorema 104 *Cada punto KTAD vectorial x^* en $\bar{M}$, en dirección h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, es una solución Pareto óptima del* ($\hat{\mathrm{PM}}$)*, si y solo si el* ($\hat{\mathrm{PM}}$) *es 2KT-pseudoinvex estricto vectorial en $\bar{M}$, en la misma dirección h.*

Demostración: Si cada punto KTAD vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, del ($\hat{\mathrm{PM}}$), es una solución Pareto óptima, mostraremos que el problema ($\hat{\mathrm{PM}}$) es 2KT-pseudoinvex estricto vectorial en $\bar{M}$, en la misma dirección h.

Suponga que existe al menos un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x)$ domina a $\mathbb{I}(x^*)$, en el sentido Pareto, esto es, $\mathbb{I}_j(x) \leq \mathbb{I}_j(x^*)$, para todo $j = 1, \cdots, s$, y al menos se cumple una desigualdad estricta $\mathbb{I}_r(x) < \mathbb{I}_r(x^*)$, entonces x^* no es una solución Pareto óptima del ($\hat{\mathrm{PM}}$) y por hipótesis x^* no es un punto KTAD vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$.

Esto equivale a decir, que para todo h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, (x_h, h) no es un punto KTD vectorial del problema ($\tilde{\mathrm{PM}}$), definido en (5.38), no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, por lo tanto,

$$\tilde{\mathbb{I}}'^{*}(x^*)(x_h,h)\nu + \sum_{i\in \tilde{I}_h(x^*)} \tilde{g}_i'^{*}(x^*)(x_h,h)\bar{\mu}_i + \sum_{k=1}^{l} \widetilde{F}_k'^{*}(x^*)(x_h,h)\bar{\psi}_k^* \neq 0,$$

para todo $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_s)\neq 0$, $\nu_j\geq 0,\ j$ en $J=\{1,\cdots,s\}$, $\bar{\mu}_i=(\mu_i,\check{\mu}_i)\geqq 0,\ i\in \tilde{I}_h(x^*)$, con $\tilde{I}_h(x^*)$ el conjunto de las restricciones activas del operador $\tilde{g}(x^*)$, definido en (3.60) y $\bar{\psi}_k^*$ en $\widetilde{Y}_k^*$, para todo k en $L=\{1,\cdots,l\}$.

Lo que implica, siguiendo la misma demostración del Teorema 103, la condición (5.44), esto es

$$\Big(\bigcap_{j\in\bar{\bar{J}}}\tilde{K}_j\Big)\cap\Big(\bigcap_{i\in\bar{\bar{I}}_h(x^*)}\tilde{K}_i\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\in\bar{\bar{L}}}\tilde{K}_k\Big)\neq\emptyset,$$

donde $\bar{\bar{J}}=\{j\in J, \tilde{\mathbb{I}}_j'(x^*)(x_h,h)\neq 0\}$, $\bar{\bar{I}}_h(x^*)=\{i\in \tilde{I}_h(x^*), \tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)\neq 0\}$, $\bar{\bar{L}}=\{k\in L, \widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)\neq 0\}$.

Pero ahora necesariamente $\mathbb{I}_j'(x^*)\neq 0$, para todo j en $J:=\{1,\cdots,s\}$, en efecto, caso contrario suponga que existe j en J, tal que $\mathbb{I}_j'(x^*)=0$ esto implica que no existe un h tal que, $\mathbb{I}_j'(x^*)h<0$, para todo j en J, entonces de acuerdo al Lema 12, x^* es un punto estacionario de $\mathbb{I}$, y por tanto es un punto KTAD, con multiplicadores $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_s)\neq 0$, $\nu_j\geq 0, j$ en J y $\mu_i,\ i$ en $I(x^*)$ y ψ_k en $Y_k^*,\ k=1,\cdots,l$, identicamente nulos, lo que contradice el hecho de que x^* no es un punto KTAD vectorial. Por tanto considerando que $\bar{J}=J:=\{1,\cdots,s\}$ en la última condición obtenemos,

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{s}\tilde{K}_j\Big)\cap\Big(\bigcap_{i\in\bar{\bar{I}}_h(x^*)}\tilde{K}_i\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\in\bar{\bar{L}}}\tilde{K}_k\Big)\neq\emptyset, \tag{5.46}$$

donde $\bar{\bar{I}}_h(x^*)=\{i\in \tilde{I}_h(x^*), \tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)\neq 0\}$, $\bar{\bar{L}}=\{k\in L, \widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)\neq 0\}$.

Notemos además que si i no pertenece a $\bar{\bar{I}}_h(x^*)$ y k no pertenece a $\bar{\bar{L}}$ entonces, para todo (ξ_1,ξ_2) en $\tilde{X}$, $\tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2)=0, \widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)(\xi_1,\xi_2)=0$, esto implica de acuerdo a las definiciones (3.59) y (3.47) de $\tilde{g}_i'(x^*)(x_h,h)$ y $\widetilde{F}_k'(x^*)(x_h,h)$ respectivamente, que

$$\begin{array}{cc} g_i'(x^*)\xi_2=0, & F_k'(x^*)\xi_2=0,\\ F_k'(x^*)\xi_1+2F_k''(x^*)[h,\xi_2]=0, & g_i'(x^*)\xi_1+2g_i''(x^*)[h,\xi_2]=0, \forall\ \xi_1,\xi_2\in X. \end{array} \tag{5.47}$$

Por consiguiente, de acuerdo a (5.46) y (5.47) concluimos que para cada h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, existen ξ_1,ξ_2 en X, tales que

$$\mathbb{I}(x)-\mathbb{I}(x^*)\leq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{I}_r'(x^*)\xi_2 & < & 0,\ j=1,\cdots,s,\\ F_k'(x^*)\xi_2 & = & 0,\ k=1,\cdots,l,\\ F_k'(x^*)\xi_1+2F_k''(x^*)[h,\xi_2] & = & 0,\ k=1,\cdots,l,\\ -g_i'(x^*)\xi_2 & \geq & 0,\ i\in I_h(x^*),\\ -g_i'(x^*)\xi_1-2g_i''(x^*)[h,\xi_2] & \geq & 0,\ i\in \tilde{I}_h(x^*). \end{array}\right.$$

Por lo tanto podemos afirmar que para cada $x,\ x^*$ en $\bar{M}$ existen $\eta_h := \xi_1$ y $\xi_h := 2\xi_2$, en X, dependiendo de los puntos factibles x y x^* y de h, tales que, satisfacen la condición (5.43), esto implica que el problema (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-pseudoinvex estricto vectorial, conforme a la Definición 102.

Inversamente, suponga que el (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-pseudoinvex estricto vectorial, mostraremos que cada punto KTAD vectorial es una solución Pareto óptima del (P$\hat{\text{M}}$).

Sea x^* un punto KTAD vectorial, en dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$ y suponga que x^* no es una solución Pareto óptima, entonces existe un x en $\bar{M}$, tal que $\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0$, esto implica, dado que (P$\hat{\text{M}}$) es 2KT-pseudoinvex estricto, que existe un $\eta_h = \eta(x, x^*)$ y $\xi_h = \xi(x, x^*)$ en X tal que

$$\mathbb{I}(x) - \mathbb{I}(x^*) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{I}'_j(x^*)\eta_h & < \ 0,\ j = 1, \cdots, s, \\ F'_k(x^*)\eta_h & = \ 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ F'_k(x^*)\xi_h + F''_k(x^*)[h, \eta_h] & = \ 0,\ k = 1, \cdots, l, \\ -g'_i(x^*)\eta_h & \geq \ 0,\ i \in I_h(x^*), \\ -g'_i(x^*)\xi_h - g''_i(x^*)[h, \eta_h] & \geq \ 0,\ i \in \tilde{I}_h(x^*), \end{cases}$$

que equivale a decir, atendiendo al primer item de la Observación 81, considerando en este caso que las funciones involucradas son $\tilde{\mathbb{I}}$, $\tilde{g}$ y $\tilde{\bar{F}}$,

$$FC(\tilde{\mathbb{I}}_r(x^*), (x_h, h)) \cap AC(\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*), (x_h, h)) \cap \ TC(\bar{H}_{\tilde{\bar{F}}}(x^*), (x_h, h)) \neq \emptyset,$$

donde $\tilde{\mathbb{I}}(x^*)$, $\widetilde{H}_{\tilde{g}}(x^*)$ y $\tilde{H}_{\tilde{\bar{F}}}(x^*)$ son definidos en (5.37), (3.62) y (3.99) respectivamente.

Por consiguiente, de acuerdo al Lema 13, no es posible obtener la ecuación de Euler y Lagrange, por lo tanto (x_h, h) no es un punto KTD vectorial del problema (P$\tilde{\text{M}}$), esto equivale a afirmar que x^* en $\bar{M}$ no es un punto KTAD vectorial del problema (P$\hat{\text{M}}$), en la dirección de h en $H_{\bar{M}}(x^*)$, lo que contradice la hipótesis. Podemos concluir entonces que x^* es solución Pareto óptima.

El teorema queda así demostrado.

Si consideramos como hipótesis solución Pareto óptima débil o solución débilmente eficiente, Definición 65, en vez de solución Pareto óptima, de manera similar al caso regular presentado en la sección anterior, podemos mostrar, analógamente a la demostración de los teoremas 103 y 104, usando los mismo argumentos de los teoremas 88 y 90, los siguiente resultados de optimalidad Pareto débil.

Teorema 105 *Cada punto KTAF vectorial x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima débil del problema* (P$\hat{\text{M}}$)*, si y solo si* (P$\hat{\text{M}}$) *es 2KT-cuasiinvex estricto vectorial en $\bar{M}$.*

Teorema 106 *Cada punto KTAD vectorial x^* en $\bar{M}$, es una solución Pareto óptima débil del problema* (P$\hat{\text{M}}$)*, si y solo si* (P$\hat{\text{M}}$) *es 2KT-pseudoinvex vectorial en $\bar{M}$.*

De acuerdo a las definiciones presentadas en esta sección tenemos los siguientes diagramas, bajo supuesto de diferenciabilidad de segundo orden.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\boxed{\text{KTAD en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[r, shift left, leftarrow, "\substack{\text{2Reg.Débil}\\ +\mathbb{I}'(x^*)h=0}"] \arrow[r, shift right] & \boxed{\text{Pareto Débil}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{2KT-pseudoinvex en dirección de } h \in H(x^*)} \\
\boxed{\text{KTAD en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[r, shift left, leftarrow, "\substack{\text{2Reg.Débil}\\ +\mathbb{I}'(x^*)h=0}"] \arrow[r, shift right] & \boxed{\text{Pareto (Fuerte)}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\text{2KT-pseudoinvex estricto en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{KTAF en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, shift left, leftarrow, "\substack{\text{2Reg.Fuerte}\\ +\mathbb{I}'(x^*)h=0}"] \arrow[r, shift right] & \boxed{\text{Pareto (Fuerte)}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\text{2KT-cuasiinvex en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{KTAF en dirección de } h \in H(x^*)} \arrow[r, shift left, leftarrow, "\substack{\text{2Reg.Fuerte}\\ +\mathbb{I}'(x^*)h=0}"] \arrow[r, shift right] & \boxed{\text{Pareto Débil}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\text{2KT-cuasiinvex estricto en dirección de } h \in H(x^*)}
\end{tikzcd}
$$

Cuadro 5.4: Condiciones de optimalidad Pareto y Pareto débil de segundo orden

Futuros Trabajos

Dada la eficacia del formalismo de Dubovitskii-Milyutin y la aplicabilidad de la noción de invexidad y sus generalizaciones, para establecer condiciones de optimalidad, para una amplia clase y de variada índole, de problemas de extremos, consideramos interesante, según nuestro punto de vista, el estudio de problemas regulares y no regulares.

- **Soluciones propiamente eficientes**, carecterizar las soluciones propiamente eficientes, mediante el formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

- **Control óptimo vectorial**, extender los resultados obtenidos en este trabajo a problemas de control óptimo vectoriales, estudiar la existencia de soluciones, tanto local como global, establecer condiciones de optimalidad, necesaria y suficiente, a partir de las condiciones de optimalidad obtenidas para problemas vectoriales de optimización matemática, presentadas en el capitulo 5.

- **Escalarización**, asociar a los problemas vectoriales, tanto de optimización matemática como de control óptimo, una familia de problemas escalares, y determinar bajo que condiciones es posible asegurar la equivalencia de soluciones entre el problema vectorial y la familia de problemas escalares asociada. Responder a esta cuestión no solamente es de importancia teórica, sino también es de importancia práctica, existen algunos resultados parciales en esta dirección, como es posible ver en [24], [88], [89].

- **Dualidad**, proponer un problema dual, que generalice los problemas duales tipo Wolfe y/o Mond -Weir, y mostrar que la noción de 2KT-invexity es una condición necesaria y suficiente para establecer resultados de dualidad débil y fuerte, y para asegurar además que los dos problemas, no regular y su dual, tienen la misma solución. Hasta ahora se han propuesto problemas duales, para problemas de control óptimo regular tipo Mond -Weir en [5] y [48], sin restricciones mixtas.

- **Problemas discretos**, establecer condiciones de optimalidad para problemas discretos, próximos a los obtenidos en este trabajo.

- **Problemas de Control impulsivos**, en este tipo de problemas la ecuación que gobierna el estado del sistema es dada por

  $$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t))\mu(dt)$$

  donde aparecen además del control convencional $u(t)$, un control llamado impulsivo, representado por una medida positiva μ. Una de las motivaciones para estudiar estas ecuaciones tiene su origen en el problema de controlar el gasto de combustible en vehículos espaciales. El control $\mu(\cdot)$ es una idealización del control convencional y modela la situación en la cual un vehículo puede asumir altas velocidades en un periodo corto de tiempo. Un problema interesante de ser estudiado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & h(x(0), x(1) \\ \text{sujeto a} & dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + g(t, x(t))\mu(dt), \\ & u(t) \in U_t \;\; c.t.p. \in [0,1], \\ & \psi(t, x(t)) \leq 0 \;\; \forall\, t \in [0,1], \\ & \mu \geq 0, \;\; (x(0), x(1)) \in C. \end{array}\right\} \tag{CI}$$

Aquí $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones dadas. U es un subconjunto boreliano de $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ (U_t denota la sección $\{x : (t,x) \in U\}$ y C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La función $\psi : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una restricción de desigualdad del problema (CI). Un problema interesante es extender los resultados del Capítulo 4, tanto en el caso normal o anormal.

- **Programación con tiempo continuo**, un problema de programación con tiempo continuo es de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \phi(x) = \displaystyle\int_0^T f(t, x(t))dt \\ & \\ \text{sujeto a} & g(t, x(t)) \leq 0 \text{ c.t.p. en } [0,T], \\ & x \in X, \end{array}\right\} \tag{PTC}$$

donde X es un subconjunto abierto, convexo y no vacio del espacio de Banach $L_\infty^n[0,T]$, $\phi : X \to \mathbb{R}$, $f(t, x(t)) = \xi(x)(t)$ y $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$, con $\xi : X \to \Lambda_1^1[0,T]$ y $\gamma : X \to \Lambda_1^m[0,T]$. $L_\infty^n[0,T]$ denota el espacio de todas las funciones vectoriales n-dimensionales que son Lebesgue medibles y esencialmente acotadas, definidas en el intervalo compacto $[0,T] \subset \mathbb{R}$, con norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \operatorname{ess\,sup}\{|x_j(t)|, \; 0 \leq t \leq T\},$$

donde para cada $t \in [0,T]$, $x_j(t)$ es la j-ésima componente de $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\Lambda_1^m[0,T]$ denota el espacio de todas las funciones vectoriales m-dimensionales que son esencialmente acotadas y Lebesgue medibles, definidas en $[0,T]$, con la norma $\|\cdot\|_1$ definida por

$$\|y\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \int_0^T |y_j(t)|dt.$$

Este problema de programación con tiempo continuo tiene particularidades interesantes y complejas, pues el espacio $\Lambda_1^m[0,T]$ no es completo y su cono no-negativo $\{y \in \Lambda_1^m[0,T] : y(t) \geq 0 \text{ c.t.p. en } [0,T]\}$ posee interior vacio. Estas propiedades son invariablemente admitidas en formulaciones abstractas.

El primer autor que estudió el problema con tiempo continuo fue Bellman en [15], él estudió un tipo de problema de optimización, que ahora es conocido como problema de programación lineal con tiempo continuo. Posteriormente, otros autores estudiaron problemas de tiempo continuo más generales, considerando, por ejemplo, problemas no lineales. En [95], Zalmai obtuvó condiciones de optimalidad del tipo Kuhn-Tucker, los resultados obtenidos son generalizaciones naturales de las condiciones de Kuhn-Tucker en dimensión finita. El caso no diferenciable fue estudiado, por ejemplo, en [28], [79], [76], [75], [85], [26]. Una buena lista de referencias sobre problemas con tiempo continuo puede ser encontrada en [95].

- **Problemas de programación infinita**, esta clase de problemas se formulan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_\alpha(x) \leq 0, \;\; \alpha \in A, \\ & h_\beta(x) = 0, \;\; \beta \in B. \end{array}\right\} \qquad \text{(PPI)}$$

  donde $f, g_\alpha, h_\beta : X \to \mathbb{R}$ para $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, X es un espacio real de Banach y A y B son los conjuntos de índices. Generalmente, A y B son subconjuntos de espacios Euclidianos.

  Este tipo de problemas fueron abordados en [92], [77], [78] y las referencias citadas allí. Problemas interesantes en abierto son condiciones necesarias y/o suficientes para el caso anormal.

- **Técnicas de deformación**, una interesante técnica empleada en la obtención de condiciones de optimalidad para problemas de programación no lineal son los llamados Métodos de Deformación. El método consiste, a groso modo, en “deformar” un problema de optimización en un problema más simples. Entre otras hipótesis, esta deformación debe preservar los puntos óptimos. Bobylev [20], [21] estudió varios problemas de deformación. Un problema interesante y hasta ahora no estudiado sería adaptar el método de deformación a los problemas de control, tiempo continuo, programación infinita, entre otros.

- **Problemas no diferenciables**, cuando las funciones involucradas en los problemas no regulares descritos en este trabajo, o en trabajos futuros, no son diferenciables en el sentido clásico, se podrían utilizar las herramientas del llamado nonsmooth analysis [38], [84]. En este caso, no existe prácticamente nada en la literatura vía formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Así, abordar esta problemática abre un amplia gama de posibilidades.

- **Problemas débilmente diferenciables**, estudiar problemas con hipótesis de diferenciabilidad más débiles, observamos que el Teorema de Lyusternik exige estricta diferenciabilidad en el punto, ver [1] o Fréchet diferenciabilidad en una vecindad, con derivada continua en el punto, ver [51]. Para el caso de Gâteaux diferenciabilidad, ver [58], usando el método de direcciones contractivas introducido por Altman [2].

El caso de funciones localmente Lipschitz, no obstante considerando solamente restricciones de desigualdad, es estudiado en [93] usando la noción de gradiente generalizado en el sentido de Clarke. En el caso con restricciones de igualdad fué estudiado en [82] usando los subdiferenciales de Dini, introducidos anteriormente en [51] en análisis no diferenciable.

Bibliografía

[1] V.M. Alekseev, V.M. Tikhomirov, S.V. Fomin, Commande optimale, Mir, Moscow, 1982.

[2] M. Altman, A unified theory of nonlinear operator and evolution equations with applications, Marcel Dekker, Inc. 1986.

[3] M. Arana, R. Osuna-Gómez, G. Ruiz-Garzón, M.A. Rojas-Medar, On variational problems: characterization of solutions and duality. J. Math. Anal. Appl. 311, no. 1, 1-12 (2005).

[4] M. Arana-Jiménez, A. Rufián-Lizana, R. Osuna-Gómez, G. Ruiz-Garzón, Pseudoinvexity, optimality conditions and eficiency in multiobjective problems; duality. Nonlinear Analysis 68, 24-34 (2008).

[5] M. Arana, G. Ruiz; A. Beato; M. J. Zafra, A necessary and sufficient condition for duality in control problems: KT-invex functionals, Optimization: J. of Math. Prog. and Operations Research, 89-97 (2010).

[6] A. V. Arutyunov, Optimality conditions: abnormal and degenarate problem, Kluwer Acad. Publ. 2000.

[7] A. V. Arutyunov, Example of a Linear Abnormal Optimal Control Problem, ISSN 0012-2661, Differential Equations, Vol. 46, No. 12, pp. 1786-1788 (2010).

[8] E.R. Avakov, E. R. Conditions for an extremum for smooth problems with constraints of equality type. (Russian) Zh. Vychisi. Mat. mat. Fiz., no. 5, 680–693 25 (1985).

[9] E.R. Avakov, E. R. Necessary conditions for an extremum for smooth abnormal problems with constraints of equality and inequality type. (Russian) Moscow State University. Translated from Matematicheskie Zametki, Vol. 45, No. 6, pp. 12-22, June, 1989. Original article submitted October 26, (1988).

[10] E.R. Avakov, Necessary conditions for a minimum for nonregular problems in Banach spaces. The maximum principle for abnormal optimal control problems. (Russian) Translated in Proc. Steklov Inst. Math. 1990, no. 2, 1–32. Optimal control and differential games (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov. 185, 3-29 (1988).

[11] E.R. Avakov, The maximum principle for abnormal optimal control problems, Soviet Math. Dokl. 37, 134-231 (1988).

[12] E. R. Avakov, Necessary First-Order Conditions for Anormal Variational-Calculus Problems, Diff. Uravn. 27 (5), 739 -745 (1991) (Diff. Eqns. 27, 495-500 (1991)).

[13] E.R. Avakov, A. V. Arutyunov, A. F. Izmailov, Necessary Conditions for an Extremum in a Mathematical Programming Problem, ISSN 0081-5438, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 256, pp. 2-25 (2007).

[14] M.S. Bazaara, H.D. Sherali, C.M. Shetty, Nolinear Pogramming. Theory and Algorihms, John Wiley and Sons, Inc. New York, (1993).

[15] R. Bellman. Bottleneck problems and dynamics programming. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39:947–951, (1953).

[16] A. Ben-Tal, J. Zowe, A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces, Math. Programming Study 19, 39-76 (1982).

[17] V.I. Blagodat.Skikh, The Maximun Principle for Differential Inclusions, Proccedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 1, pp. 23-43 (1984).

[18] V.I. Blagodat.Skikh and A.F. Filippov, Differential Inclusions and Optimal Control, Proccedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 4, pp. 199-259 (1986).

[19] V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and L. S. Pontryagin, Dokl. Akad. Nauk SSSR 110 (1), 7 (1956).

[20] N. A. Bobylev "Deformation method of investigation of nonlinear programming problems I ", Automation and Remote Control, pp. 917-924, v. 50, no. 7, Part I (1989).

[21] N. A. Bobylev "Deformation method of investigation of nonlinear programming problems II ", Automation and Remote Control, pp. 1018-106, v. 50, no.8, Part I (1989).

[22] P. Bosch, J.A. Gómez, A proof of local maximum principle for optimal control problems with mixed state constraints, Inv. Oper., 239-262 (2000).

[23] P. Bosch, J.A. Gómez, Karush-Kunn-Tucker Theorem for operator constraints and the local Pontryaguin maximum principle, Rev. Mat. Apl. 18, 79-106 (1997).

[24] A.J. V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, G.N. Silva, Optimality conditions for Pareto nonsmooth nonconvex programming in Banach spaces, JOTA 103, 65-73 (1999).

[25] A.J. V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, G.N. Silva, Invex nonsmooth alternative theorem and applications, Optimization 48, 239-253(2000).

[26] A.J. V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, G.N. Silva, Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions, Comp. Math. with Appl. 41, 1477-1486 (2001).

[27] A.J. V. Brandão, M.A. Rojas-Medar, G.N. Silva, Uma introdução as funções invexas diferenciáveis com aplicações em otimização, Bol. Soc. Parana. Mat. (2) 19 (1999), no. 1-2, 51–65 (2002).

[28] Brandão, A.J.V., Antunes de Oliveira, V., Rojas-Medar, M.A., Batista dos Santos, L., Necessary and sufficient optimality conditions for continuous-time multiobjective optimization problems, In optimality conditions in vector optimization, Bentham eBooks, 2010, 143-163. ISBN: 978-1-60805-110-6, (2010).

[29] R.S. Burachik, M. Rizvi, On Weak and Strong Kuhn-Tucker Conditions for Smooth Multiobjective Optimization, J Optim. Theory Appl., DOI 10.1007 s10957-012-0078-6, (2012).

[30] Y. Censor. Pareto Optimality in Multiobjective Problems. Appl. Math. Optim. 4, 41-59, (1977).

[31] E. Cerda, Optimización dinámica, Editora Prentice, Practica, Madrid, 2001.

[32] J. Cervelati, M. A. Rojas-Medar, El rol de la invexidad en cálculo variacional, A aparecer em Atas do 59 Seminário Brasileiro de Análise, USP-Riberão Preto, (2004).

[33] J. Cervelati, M. A. Rojas-Medar, Condiciones necesarias y suficientes en cálculo variacional.

[34] L. Cesari, Optimization, theory and applications, Springer-Verlag, New York, 1983.

[35] Y. Chalco Cano, Controle ótimo via inclusões diferenciais. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Campinas (2000).

[36] V. Chankong, Y. Y. Haimes. Multiobjective decision making: theory and methodology. North-Holland. Amsterdam 1985.

[37] G.S. Christensen, M.E. El-Hawary, S.A. Soliman, Optimal Control Applications in Electric Power Systems, Plenum, New York, 1987.

[38] F.H. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis, Wiley, New York, 1983.

[39] B.D. Craven, Control and Optimization, Chapman&Hall, London, 1995.

[40] B.D. Craven, B.M. Glover, Invex functions and duality, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 39 (1985), 97-99.

[41] N. Dunford, J.Shawartz, Linear Operators Part I: General Theory, Wiley Classics Library, 1988.

[42] T.M. Flett, Differential Analysis. Differentiation, differential equations and differential inequalities, Cambrigde University Press, 1980.

[43] I.V. Girsanov, Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, Springer, New York 1972. (Lectures notes in economics and mathematical systems, 67).

[44] J. Gregory, C. Lin, Constrained optimization in the calculus of variations and optimal control theory, Chapman&Hall, London, 1996.

[45] A.F. Izmailov, Optimality Conditions for Degenerate Extremum Problems with Inequality-Type Constraints Comp. Maths Math. Phys., Vol. 34, Vol. 66, No. 6, pp. 723-736, (1994).

[46] A.F. Izmailov, Optimality Conditions in Extremal Problems with Nonregular Inequality Constraints A. Translated from Matematieheskie Zametki, Vol. 66, No. 1, pp. 89-101, July, 1999. Original article submitted September 22, (1997).

[47] M.A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, J. Math. Anal. Appl. 80, 545-550 (1981).

[48] I. Husain, A. Ahmed and B. Ahmad, Sufficiency And Duality In Control Problems With Generalized Invexity, Journal of Applied Analysis Vol. 14, No. 1, pp. 27-42 (2008).

[49] M.B. Hernández-Jiménez, M.A. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez, A. Beato-Moreno, Generalized convexity in non-regular scalar programming problem with inequality-type constraints, Journal of Mathematical Analysis and Applications 352, 604-613 (2009).

[50] M.D. Intriligator, Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[51] A. D. Ioffe. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings. Trans. Amer. Math. Soc. 266 1-56 (1981).

[52] A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov. Theory of Extremal Problems. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[53] J. Jahn, Introduction to the theory of nonlinear optimization Springer-Verlag, 1994.

[54] W. Kotarski, Characterization of Pareto optimal points in problems with multi-equality constraints, Optimization 20, 93-106 (1989).

[55] W. Kotarski, On some specification of the Dubovitskii-Milyutin Theorem for Pareto optimal problems, Nonl. Analysis 14 (1990), 287-291.

[56] W. Kotarski, Some problems Pareto optimal control for distributed parameter systems, Wydawnictwo Uniwersytetu Ślaskiago, Nr 1668, Katowice (1997).

[57] U. Ledzewicz-Kowalewska, On some specification of the Dubovitskii-Milyutin method. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, Vol. 10, No. 12, 1367-1371 (1986).

[58] U. Ledzewicz-Kowalewska, A necessary condition for the extremal problems under Gateaux differentiability. J. Math. Anal. Appl. 134, no. 1, 158-169 (1988).

[59] Ledzewicz, U., Schaettler H., Second Order Conditions for Extremum Problems with Nonregular Equality Contraints. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 86, No. 1, pp. 113-144 (1995).

[60] U. Ledzewicz-Kowalewska, Euler-Lagrange Equation in the Case of Nonregular Equality Constraints. Jota. Vol. 71 no. 3 (1991).

[61] U.Ledzewicz-Kowalewska. Optimality and Pareto optimality for the problems with nonregular operator equality constraints. Nonlinear Anal. Theory and Appl., v. 17, no. 4, 347-360, (1991).

[62] U. Ledzewicz-Kowalewska, U. Extension of the Local Maximum Principle to Abnormal Optimal Control Problems. J. Optim. Theory Appl. 77, no. 3, 661-681 (1993).

[63] U. Ledzewicz, On Abnormal Control Problems with Mixed Equality and Inequality Constraints, J. Math. Anal. Appl. 173 (1993), 18-42.

[64] U. Ledzewicz, H. Schättler, An Extended Maximum Principle. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, Vol. 29, No. 2, 159-183 (1997).

[65] U. Ledzewicz-Kowalewska,H. Schättler, A High-order Generalized Local Maximum Principle. SIAM J. Control Optim. 38, no. 3, 823-854 (2000).

[66] D.H. Martin, The essence of invexity, Jota 47, 65-76 (1985).

[67] M. Minoux. Mathematical Programming, Theory and Algorithms, John Wiley and Sons 1986.

[68] B. Mond, S. Chandra, I. Husain, Duality for variational problems with invexity, J. Math. anal. appl. 134, 322-328 (1988).

[69] B. Mond, I. Husain, Sufficient optimality criteria and duality for variational problems with generalized invexity, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 31, 108-121 (1989).

[70] B. Mond, I. Smart, Duality and sufficiency in control problems with invexity, J. Math. Anal. Appl. 136, 325-333 (1998).

[71] B. Mond, I. Smart, Duality with invexity for a class of nondifferentiable static and continuous programming problems, J. Math. anal. Appl. 141, 373-388 (1989).

[72] R. Montgomery, A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 1, No. 1, 49-90 (1995).

[73] C. Nahak, S. Nanda, Duality for variational problems with pseudo-invexity, Optimization 34, 365-371 (1995).

[74] C. Nahak, S. Nanda, Symmetric duality with pseudo-invexity in variational problems, J. Oper. Res. 122, 145-150 (2000).

[75] V.A. de Oliveira, V., Rojas-Medar, M.A. Continuous-time multiobjective optimization problems via invexity, Abstract and Applied Analysis, 1-11 (2007).

[76] de Oliveira, V.A., Rojas-Medar, M.A., Continuous-time optimization problems involving invex functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 327, 1320-1334 (2007).

[77] Oliveira, V.A.; Rojas-Medar, M.A., Multiobjective infinite programming, Computers, Mathematics with Applications, 55 (2008). 1907-1922.

[78] Oliveira, V.A.; Rojas-Medar, M.A., Proper efficiency in vector infinite problems. Optimization Letters, vol. 3, no. 3, pp. 319-328 (2008).

[79] Oliveira, V.A.; Rojas-Medar, M.A.; Brandão, A.J.V., A note on KKT-invexity in nonsmooth continuous-time optimization, Proyecciones 26(3), 283-293 (2007).

[80] Oliveira V.A., Silva G.N., Rojas-Medar M.A., KT-Invexity in optimal control problems, Nonlinear Analysis 71, 4790-4797 (2009).

[81] R. Osuna-Goméz, A. Beato-Moreno, A. Rufián-Lizana, Generalized Convexity in Multiobjective Programming, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233, 205-220 (1999).

[82] Z. Páles. Optimum problems with nonsmooth equality onstraints. Nonlinear Analysis 63, e2575-e2581, (2005).

[83] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mischenko, The mathematical theory of optimal control processes, Interscience, New York, (1962).

[84] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets. Variational Analysis, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 317, Springer-Verlag, 1997.

[85] M.A. Rojas-Medar, A.J.V. Brandão, G.N. Silva, Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions, J. Math. Anal. Appl. 227 (1998), 305-318.

[86] H. Román-Flores, M.A. Rojas-Medar, Level-continuity of functions and applications. Comput. Math. Appl. 38, no. 3-4, 143-149 (1999).

[87] W. Rudin, Análisis Funcional, editorial Reverté, España, (2002).

[88] L.B. dos Santos, M.A. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez, A. Rufián-Lizana, Preinvex functions and weak efficient solutions for some vectorial optimization problem in Banach spaces. Comput. Math. Appl. 48, no. 5-6, 885-895 (2004).

[89] L.B. dos Santos, R. Osuna-Gómez, R., M.A. Rojas-Medar, A. R. Lizana, Invexidade generalizada e soluções fracamente eficientes de problemas de otimização vetorial entre espaços de Banach, TEMA Tend. Comput. Math. Appl. 5, no. 2, 327-336 (2004).

[90] W. Swam, Applications of Optimal Control Theory in Biomedicine, Marcel Dekker, New York, (1984).

[91] Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino. Theory of multiobjective optimization. Mathematics in Science and Engineering. Acadenic Press. Orlando (1985).

[92] R. A. Tapia and M. W. Trosset. An extension of the Karush-Kuhn-Tucker necessity conditions to infinite programming. SIAM Review, 36:1–17, (1994).

[93] G.G. Watkins, Nonsmooth Milyutin-Dubovitskii theory and Clarke´s tangente cone, Math. Oper. Research 11, 70-80 (1986).

[94] S. Walczak, Some properties of cones in normed spaces and their application to investigating extremal problems, Jota 44, 561-582 (1984).

[95] G. J. Zalmai. The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming. J. Math. Anal. Appl., 110:503–518, (1985).

[96] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications. III. Variational methods and optimization, Springer-Verlag, (1985).