suma+ 64
Junio 2010, pp. 25-34

Cabalgando con las matemáticas

En este artículo se sugiere la posibilidad de introducir el tema de Combinatoria en las Matemáticas de Secundaria o Bachillerato mediante la utilización del Juego del Salto del Caballo. Se dan algunas notas sobre su evolución histórica, a efectos de que puedan servirle al profesor como apoyo para conseguir una mayor motivación del alumno a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas; también se muestran las reglas de este juego, señalando las ventajas que puede ofrecer su uso en las clases de Matemáticas de Secundaria, fundamentalmente a la hora de introducir la Combinatoria.

Palabras Clave: Salto del caballo, ajedrez, grafos, camino hamiltoniano, Vandermonde.

Riding with mathematics

In this article we suggest the possibility of introducing the Combinatorics or other related topics of Mathematics in High Level by using the so-called knight's tour on the chess board. We show the rules of this play and of the other ones related and emphasize the advantages of using them to get a bigger motivation of students in the class. A historical evolution of this play is also shown.

Key words: Knight's tour, chess, graphs, hamiltonian path, Vandermonde.

> Si doce mil ajedrecistas estuvieran ocupados constantemente en la búsqueda de las mejores jugadas en todas las posiciones imaginables, y en cada una de ellas invirtieran una décima de segundo, necesitarían más de un trillón de siglos para analizarlas
>
> (Max Euwe, campeón del mundo de ajedrez 1935-1937)

Introducción

No deja de ser preocupante, por más que exista total constancia de ello, la total despreocupación, falta de interés y de motivación por parte de los alumnos de Secundaria o Bachillerato a la hora de atender a las explicaciones del profesor de cualquier disciplina de estos niveles, si bien este asunto parece que se agudiza aún más cuando esa disciplina son las Matemáticas.

Cuántas veces hemos oído quejarse amargamente a los profesores de Matemáticas de la escasa atención con la que los alumnos se disponen a escuchar sus explicaciones, sea cual sea el tema que en ese momento les esté impartiendo y sea cual sea la época del año en la que esto sucede. Obviamente, siempre se producen excepciones, pero éstas, por poco significativas, no sirven ni para atenuar levemente la constatación del hecho descrito.

Los profesores entonces no tienen más remedio que echar mano de todos sus recursos pedagógicos y de todas las "tretas metodológicas" que conocen, a fin de conseguir atraer la atención de esos alumnos y de intentar crear un clima en la clase lo suficientemente atractivo para que el alumno, al menos, se disponga a escucharlo cuando éste empiece su disertación.

Es aquí entonces donde aparece uno de los objetivos de este artículo. Concretamente, el de proporcionarle al profesor de Matemáticas una información habitualmente no muy conocida, por no ser usual, que le permita llevar a los alumnos a su terreno y despertar en ellos la curiosidad e inquietud por conocer cómo las Matemáticas pueden ser muy útiles para resolver problemas o juegos, aparentemente separados de

Juan Núñez Valdés
Serafín Ruiz Cabello
Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla

ella, de una forma que en ningún momento ellos mismos hubiesen podido llegar a intuir. Si además estos juegos permiten la introducción de determinados temas del currículo de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, como pueda ser la Combinatoria en el caso que nos ocupa, entonces, qué más se puede pedir.

El juego denominado habitualmente como *Juego del Salto del Caballo del Ajedrez,* cuyo nombre alude a su protagonista, un caballo de ajedrez, consiste en hacer pasar esta pieza por cada uno de los 64 escaques de un tablero de ajedrez mediante movimientos válidos (en ajedrez, el recorrido del caballo, en forma de L, es ciertamente extraño: consta de un movimiento horizontal o vertical de dos casillas y de un movimiento horizontal o vertical de un cuadro en la dirección perpendicular) de forma que no ocupe dos veces la misma posición. De ahí su nombre. Cuando de la última casilla podamos pasar a la primera diremos que se trata de un recorrido cerrado.

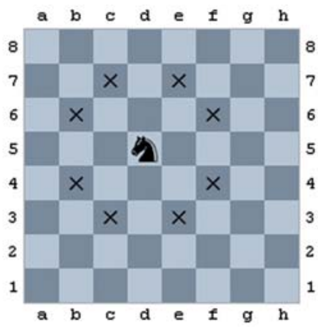

Figura 1: Movimiento de un caballo de ajedrez

Nos gustaría aclarar que nosotros hemos seleccionado este juego porque consideramos que, sin dejar de ser de una dificultad considerable, es muy sencillo de jugar, y por tanto constituye un atrayente desafío para cualquier persona, sin importar sus conocimientos de matemáticas o ajedrez. Esto lo hace especialmente indicado para alumnos de educación secundaria. Al mismo tiempo, el problema permite al alumno acercarse a la forma de razonamiento matemática empleada no sólo para resolver el problema, sino para plantear dicha resolución de múltiples formas, variando la forma de afrontarlo e incluso variando las condiciones iniciales del problema, como puede ser modificando las dimensiones del tablero.

Como veremos a lo largo de este artículo, este juego puede ser modelado mediante la teoría matemática de grafos. Desde el punto de vista de esta teoría, este juego tendrá solución si se consigue un ciclo hamiltoniano en un determinado grafo, que va a tener como vértices las casillas del tablero y por aristas el movimiento que hace el caballo (ver la siguiente sección). Este nuevo enfoque puede ser también aprovechado por el profesor para la introducción en sus clases de algunos otros temas del currículo de Matemáticas, no solamente de la Combinatoria.

Este juego fue propuesto en forma de problema, alrededor del año 1700, por el matemático inglés Brook Taylor (Edmonton, 1685 - Londres, 1731) quien se preguntaba qué recorrido de un caballo debía existir en un tablero habitual de ajedrez 8×8. Muchos matemáticos, como Abraham de Moivre, Pierre de Montmort, Leonard Euler o Alexandre-Théophile Vandermonde, entre otros, expresaron un especial interés por este problema. Euler y Vandermonde dieron un tratamiento sistemático al problema y ofrecieron soluciones que serán analizadas más adelante.

La belleza y la sencillez de este problema han favorecido su transmisión a través de las generaciones, y hoy aún supone un reto difícilmente superable para cualquier persona que conozca los fundamentos del ajedrez.

Preliminares

Se recuerdan a continuación en esta sección aquellos conceptos más básicos y elementales de la Teoría de Grafos a los que nos referiremos en este artículo. Para una visión más completa y detallada de los conceptos propios esta teoría, el lector puede consultar (Gross and Yellen, 2004), por ejemplo.

Un *grafo* es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto numerable (no vacío) y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (eventualmente vacío). Los elementos de V se denominan *vértices (o puntos o nodos)* y los de A se denominan *aristas (o líneas).*

Por lo general, se considera que en un grafo no pueden existir aristas repetidas o múltiples (en cuyo caso se hablaría mejor de multigrafos) ni lazos: aristas que unan un vértice consigo mismo (en cuyo caso se hablaría de seudografos).

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista en el grafo. Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices extremos. Y *dos aristas* que comparten un extremo se dicen *incidentes.*

Se denomina *grado* (anteriormente *valencia)* de un vértice de un grafo o bien al número de aristas del grafo que son incidentes con él o bien al número de vértices del grafo que son adyacentes con él (por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo).

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Un *camino* en G es una sucesión finita de vértices y aristas alternados, cuyo primer elemento es un vértice, tal que dos elementos consecutivos de la misma sean siempre incidentes. Un *recorrido* en G es un camino en el cual todas las aristas que lo forman son distintas. Un *arco* en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos y un *ciclo* en G es un camino cerrado en G que es un arco salvo el hecho de que el primer y el último vértice coinciden.

Un camino en un grafo se dice *euleriano (resp. hamiltoniano)* si en él entran todas las aristas (resp. vértices) y además una sola vez cada una de ellas/os. Los caminos eulerianos pueden ser abiertos o cerrados. Todo grafo que posea un camino euleriano (resp. hamiltoniano) se denomina *grafo euleriano (resp. hamiltoniano)*.

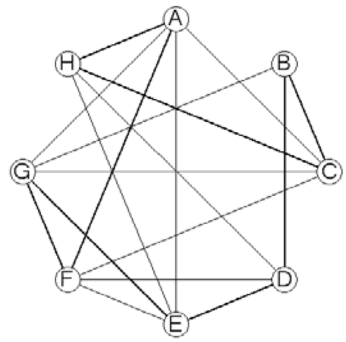

Figura 2: Grafo con un camino hamiltoniano

El Juego del Salto del Caballo y su relación con la teoría de grafos

El Juego del Salto del Caballo repercutió notablemente en el desarrollo de la Teoría de Grafos, la cual empezó a gestarse con la solución dada por Leonhard Euler al Problema de los Puentes de Konigsberg, en 1735 (para mayor información sobre este problema, puede consultarse (Alfonso et al., 2004). Efectivamente, nuestro problema constituye un caso especial de un problema general sobre grafos: la cuestión de cuándo es posible, en un grafo dado, encontrar un camino que pase a través de cada vértice sólo una vez (recuérdese que un camino con esta propiedad es denominado camino hamiltoniano, y el grafo correspondiente, grafo hamiltoniano). En el caso particular del juego del caballo, el grafo correspondiente posee sesenta y cuatro vértices, y dos vértices están unidos por una arista cuando el caballo puede legalmente moverse de uno a otro.

Históricamente, el problema de los ciclos hamiltonianos se remonta al siglo XVIII, cuando Thomas Kirkman (1806 – 1895) propuso averiguar qué grafos admitían un ciclo pasando por todos los vértices. Dos años después, de la mano de Hamilton, el problema trascendió más allá de lo imaginario, lo que le proporcionó un hueco en la historia de los grafos.

Al tener el grafo resultante del recorrido del caballo un ciclo hamiltoniano, el número de casillas ha de ser par. Para ver esto, dividamos el tablero en dos conjuntos: V1, formado por los cuadros blancos, y V2, por los negros. Cada arista es incidente con un vértice de V1 y V2, es decir, de una casilla blanca sólo podemos ir a una casilla negra respetando el movimiento del caballo, y al contrario. Por esta razón la longitud del ciclo hamiltoniano ha de ser par. Luego para que haya solución del problema el número de casillas ha de ser par.

Es importante distinguir este concepto de grafo hamiltoniano del de grafo euleriano, en el cuál existe un camino, llamado camino euleriano, que pasa por cada una de las aristas del grafo una y sólo una vez. La diferencia entre ambos caminos puede ser comparada con la distinción entre un explorador y un pasajero; el explorador examina todas las rutas posibles, mientras que el pasajero simplemente quiere visitar cada lugar de interés una sola vez.

La denominación *hamiltoniano* procede del matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), que descubrió la existencia de álgebras no conmutativas a partir de un estudio que puede ser interpretado en términos de caminos en el grafo de un dodecaedro regular. Fue el creador del conocido *juego icosaédrico*, que consiste, entre otras posibilidades, en encontrar un camino que recorra las aristas de un dodecaedro regular pasando una sola vez por cada vértice (ver siguiente figura). Para mayor información sobre este juego, el lector puede consultar (Aranda et al., 2007).

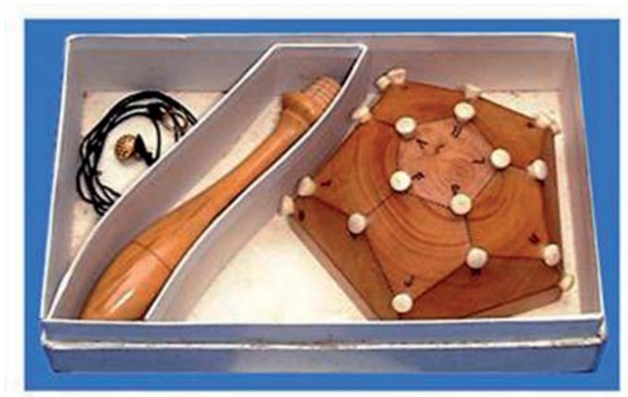

Figura3: Imagen del juego icosaédrico

Relacionados con los anteriores, los problemas consistentes en dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel y sin describir dos veces una misma arista fueron estudiados por diversos matemáticos, como el francés Louis Poinsot (1777–1859) o el alemán Johann Benedict Listing (1808–1852), durante el siglo XIX. En un artículo de este último autor, en 1847, encontramos un análisis de las posibilidades de estos juegos y se determina que el número mínimo de trazos para dibujar una figura dada coincide con $p/2$, donde p es el número de vértices con valencia impar. Así, por ejemplo, para dibujar los cuatro lados y las diagonales de un cuadrado son necesarios por lo menos dos trazos.

Otro ejemplo más complicado puede ser el de recorrer, sin levantar el lápiz del papel, todos los vértices de los escaques de un tablero de ajedrez, que requiere no menos de catorce trazos, ya que hay veintiocho vértices con valencia impar. Louis Poinsot (1777–1859) estudió también el problema que, en formulación moderna, consiste en investigar la existencia de un camino euleriano en un grafo completo de *n* vértices, K_n. Llegó a la conclusión de que esto es imposible para *n* par mayor que dos, pues en esos casos había más de dos vértices con valencia impar, y dio un método de construcción cuando *n* es impar.

Existe también una interesante interpretación del resultado anterior en términos del *juego de dominó:* Si eliminamos los dobles (0–0, 1–1 … 6–6) las restantes veintiún fichas corresponden a las aristas de K_7, y un camino euleriano representa una secuencia de las veintiún fichas con todas las uniones acordes con el juego. Como los dobles pueden ser intercalados en lugares adecuados se deduce que es posible encadenar todas las fichas de dominó en una sola secuencia.

Soluciones dadas por diferentes matemáticos al Juego del Salto del Caballo

Mostramos a continuación las soluciones con las que diferentes matemáticos respondieron al desafío planteado por Taylor referente a la resolución del Juego del Salto del Caballo:

Solución de Vandermonde

Una de las primeras soluciones que fue enviada a Taylor tras su propuesta de resolución del Juego del Salto del Caballo fue la del matemático Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermonde (París, 1735–París, 1796) fue un matemático francés cuyos trabajos versaron principalmente sobre los determinantes y sobre la teoría de los grupos de sustitución. Indicó que toda ecuación de la forma $x^p - 1 = 0$, con *p* primo, es resoluble por radicales. También se ocupó de temas de mecánica y metalurgia.

Figura 4: A. T. Vandermonde

En lo que a Teoría de Grafos se refiere, podemos destacar que Vandermonde empleó la resolución del problema como un modo de ilustrar sus ideas acerca de lo que por entonces se conocía como *Geometría de la Posición o Analisis Situs*, antecedente directo de la rama de las Matemáticas actualmente llamada *Topología.* En uno de sus artículos, publicado por la Academia Real de las Ciencias de París en 1771 (Vandermonde, 1771), Vandermonde explica el procedimiento empleado para hallar la solución al problema. Es relevante también este texto porque contiene la formulación de alguna de las inquietudes que dieron pie a la investigación en la Teoría de Grafos. Los siguientes párrafos están extraídos de dicho artículo y contienen las ideas más importantes:

> Cualquiera que sea la complicación de un sistema de líneas en el espacio, uno puede siempre obtener una expresión para el cálculo de su dimensión, pero esta expresión será de poca utilidad en la práctica. Al artesano que tensa una red o hace un nudo no le concernirán cuestiones de medida, sino de posición. Lo que él ve es la manera en la que los hilos están entrelazados. Será útil, por tanto, disponer de un sistema de cálculo más adecuado a la forma de actuar del trabajador, una notación que representaría su forma de pensar, y que podría ser usada para la reproducción de objetos similares.
>
> Mi objetivo aquí es simplemente demostrar la posibilidad de una notación así, y mostrar su uso en cuestiones referentes a sistemas de líneas. Para ilustrar mis ideas consideraré un conocido problema que pertenece a esta categoría, el de la peregrinación del caballo en ajedrez, resuelto por Euler en 1759. El método de aquel gran geómetra presupone que tenemos un tablero de ajedrez a mano. Yo he reducido el problema a simple aritmética, usando números que no representan cantidades en absoluto, sino regiones del espacio.
>
> Considero el espacio dividido en arbitrarios elementos finitos, distinguidos por su orden. Esto es, el plano estará dividido por líneas paralelas en una serie de bandas, y luego dividido de nuevo por otro conjunto de paralelas que cortan a las del primer conjunto. Distingo las diferentes bandas por la designación primero, segundo, tercero, cuarto, etc., en ambas divisiones. Puedo así describir un punto dado, perteneciente a alguno de los paralelogramos formado por las divisiones, escribiendo dos números, uno encima del otro, donde un número es le orden de la primera división y el otro el de la segunda. Así, por ejemplo, 3/4 pertenece al paralelogramo que es común a la cuarta banda en la primera división y a la tercera en la segunda división.
>
> El problema de cómo un caballo puede visitar todas las casillas de un tablero de ajedrez, sin pasar dos veces por la misma, se reduce a la determinación de una cierta ruta. O igualmente, si uno supone que una aguja está fija en el centro de cada cuadro, el problema se reduce a la determinación de un camino tomado por un hilo que pasa una vez a través de cada aguja siguiendo una regla cuya formulación buscamos.

Si *b/a* denota un escaque en el tablero, entonces *a* y *b* pueden ser cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8. Dadas dos posiciones sucesivas de una pieza, *b/a* y *b'/a'*, el movimiento de esa pieza representa una condición en *a*, *a'*, *b* y *b'*. Por ejemplo, un caballo puede ir desde *b/a* a *b*+1/*a*+1, a *b*+1/*a*+2, a *b*-1/*a*+2, etc.

El problema de la peregrinación del caballo se convierte en el de ordenar los 64 términos 1/1, 1/2, 1/3, ..., 2/1, 2/2, 2/3, 3/1, 3/2, …, 8/8 en cierta forma tal que la siguiente regla rija para cada dos términos adyacentes: la diferencia entre los números de arriba es 1 y la diferencia entre los de abajo es 2, o la diferencia entre los números de arriba es 2 y la diferencia entre los números de abajo es 1.

Para simplificar la solución uno puede buscar una ruta simétrica para el caballo. Procederé desde este punto de vista.

El camino del caballo será simétrico si, cuando intercambiamos los números 8 y 1, 7 y 2, 6 y 3, 5 y 4, y viceversa, así en los números de arriba como en los de abajo, o en ambos a la vez, no hay cambios en la ruta.

Por tanto, se requiere encontrar dieciséis movimientos consecutivos, o dieciséis términos de la secuencia tales que si se intercambia 8 y 1, 7 y 2, 6 y 3, 5 y 4, y viceversa, en la secuencia inferior, uno no consigue ningún término que esté en las dieciséis originales, y lo mismo es cierto si uno hace los cambios en la secuencia superior o en ambas a la vez. Después de hacer estas transformaciones, uno tiene cuatro secuencias que cubren los 64 cuadros sin repetición y que forman una figura simétrica; para resolver el problema dado sólo queda unir las cuatro secuencias para formar una sola, de tal forma que la regla rija en las uniones.

Para obtener los 16 términos deseados, empiezo escribiendo los sesenta y cuatro términos:

1/1, 1/2, 1/3, ..., 2/1, 2/2, 2/3, 3/1, 3/2, …, 8/8

en cualquier orden. Después tomo uno de forma aleatoria, por ejemplo 5/5, y escribo debajo las cuatro transformaciones 4/5, 5/4 y 4/4. Ya que éstas no serán de interés en el futuro las elimino de las sesenta y cuatro. De las sesenta restantes tomo una que esté relacionada con 5/5 por un movimiento de caballo, por ejemplo 4/3. Escribo debajo las tres correspondientes transformaciones 5/3, 4/6, 5/6 y las elimino de las sesenta, quedando cincuenta y seis, con las que repetiré el mismo proceso. Así obtengo, por ejemplo, las cuatro secuencias simétricas:

5/4, 4/3, 2/4, 1/2, 3/1, 2/3, 1/1, 3/2, 1/3, 2/1, 4/2, 3/4, 1/5, 2/7, 4/8, 3/6

4/5, 5/3, 7/4, 8/2, 6/1, 7/3, 8/1, 6/2, 8/3, 7/1, 5/2, 6/4, 8/5, 7/7, 5/8, 6/6

5/4, 4/6, 2/5, 1/7, 3/8, 2/6, 1/8, 3/7, 1/6, 2/8, 4/7, 3/5, 1/4, 2/2, 4/1, 3/3

4/4, 5/6, 7/5, 8/7, 6/8, 7/6, 8/8, 6/7, 8/6, 7/8, 5/7, 6/5, 8/4, 7/2, 5/1, 6/3

De las cuatro secuencias obtenidas, la primera puede unirse a la cuarta, y consecuentemente, la segunda a la tercera. Después de esta yuxtaposición tenemos dos secuencias simétricas y cerradas:

5/4, 4/3, 2/4, 1/2, 3/1, 2/3, 1/1, 3/2, 1/3, 2/1, 4/2, 3/4, 1/5, 2/7, 4/8, 3/6, 4/4, 5/6, 7/5, 8/7, 6/8, 7/6, 8/8, 6/7, 8/6, 7/8, 5/7, 6/5, 8/4, 7/2, 5/1, 6/3.

4/5, 5/3, 7/4, 8/2, 6/1, 7/3, 8/1, 6/2, 8/3, 7/1, 5/2, 6/4, 8/5, 7/7, 5/8, 6/6, 5/4, 4/6, 2/5, 1/7, 3/8, 2/6, 1/8, 3/7, 1/6, 2/8, 4/7, 3/5, 1/4, 2/2, 4/1, 3/3.

Para unirlas es necesario destruir un poco la simetría; pero si, por ejemplo, intercalamos la segunda secuencia entre lo términos 2/4 y 1/2 de la primera, entonces la secuencia entera permanece cerrada, y puede empezar, por tanto, desde cualquier casilla que uno quiera. La figura muestra la ruta determinada por esta secuencia.

10	7	12	61	16	57	52	55
13	62	9	6	51	54	17	58
8	11	64	15	60	19	56	53
63	14	5	20	1	50	59	18
34	43	2	49	4	21	30	47
37	40	35	44	31	48	27	24
42	33	38	3	22	25	46	29
39	36	41	32	45	28	23	26

Este artículo de Vandermonde exige pocos comentarios, puesto que en él queda reflejado perfectamente el método seguido para obtener la solución. Además, la estrategia descrita permite obtener una ruta cerrada, de forma que sea indiferente el escaque desde el cuál comienza el caballo en su recorrido. Y nótese que esta condición no se exigía en un primer momento en el enunciado del juego.

Solución de Euler

Otra de las soluciones al Problema del Salto del Caballo que fueron apareciendo, quizás de las más ingeniosas, fue la del matemático suizo Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Petesburgo, 1783). Pueden verse algunos datos biográficos de Euler en el artículo (Alfonso et al., 2004) escrito por uno de los autores de éste, en colaboración con otras compañeras. Euler ofrece una solución que no oculta la genialidad de su autor, puesto que permite construir un *cuadrado mágico* de dimensiones $8{\times}8$ (recuérdese que un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma, la constante mágica. Usualmente los números empleados para rellenar las casillas son consecutivos, de 1 a n^2, siendo n el número de columnas y filas del cuadrado mágico.

Figura5: Leonhard Euler

La solución dada por Euler es además muy importante porque él trató el caso general, es decir, no se limitó sólo al estudio de este problema tal como fue planteado, sino que obtuvo la solución del *Problema del Salto del Caballo* siguiendo un camino cerrado en un tablero de dimensiones arbitrarias $n \times n$, llegando a la conclusión de que es necesario que n sea un número par. Esto puede verse fácilmente, ya que el caballo siempre parte de una casilla de distinto color a la que llega; de esta forma, el recorrido será del tipo *BNBNBNB…N* ó *NBNBNBN…B*. Vemos, por tanto, que es necesario que haya el mismo número de casillas blancas que negras si se quiere que la ruta sea cerrada, de forma que el número total de cuadros ha de ser par. Esto lleva inmediatamente a la imposibilidad de que n sea impar, pues si no n^2 también lo sería.

Para encontrar, según Euler, la ruta seguida por el caballo en su itinerario en el tablero habitual *8×8*, basta solamente numerar las casillas en el orden en que son ocupadas por el caballo en su peregrinación. El resultado son los 64 números *1, 2, 3… 64* distribuidos en el tablero de la siguiente forma:

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Como se comprueba fácilmente la suma de los números en filas y columnas da siempre como resultado 260, constituyendo entonces el tablero un cuadrado mágico de orden 8. Teniendo en cuenta que se dispone de 64 casillas y que en cada movimiento hay de dos a ocho posiciones posibles para mover el caballo, podemos hacernos una idea del gran número de posibilidades que hay si además se impone que todas las filas y todas columnas sumen 260. En esto consistió la genialidad de Euler.

Otras soluciones

Otra solución vino de manos del matemático Maurice Kraitchik (Rusia, 1892 – Bélgica, 1957), que estudió el recorrido del caballo suponiendo que uno de los lados del tablero tiene siete casillas.

Los matemáticos ingleses W. Rouse Ball (1850–1925) y Henry Dudeney (1857–1930) también presentaron sus aportaciones al problema, pero ya en su forma habitual de un tablero *8×8.*

Se muestran a continuación dos soluciones más del problema, indicadas en los siguientes tableros:

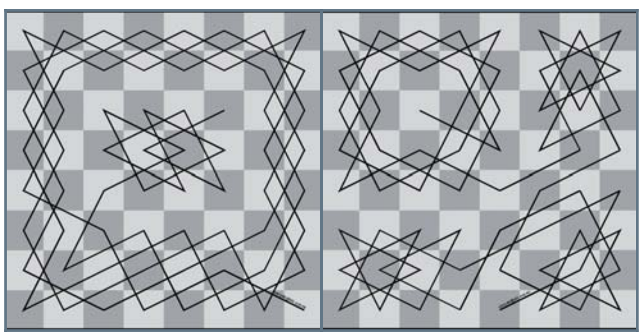

Figura 6

Finalmente, si el lector quiere experimentar por sí mismo y no dispone de un tablero de ajedrez a la mano, puede practicar el juego en http://www.borderschess.org/KnightTour.htm .

Otros problemas relacionados con el Problema del Salto del Caballo

Mostramos a continuación algunos otros problemas que guardan una cierta relación con el del *Salto del Caballo*. Pueden consultarse más problemas de este tipo, así como practicar on-line con un tablero virtual, en las direcciones

http://www.velucchi.it/mathchess/knight.htm
http://www.velucchi.it/mathchess/knight.htm
http://www.borderschess.org/KnightTour.htm

El salto del caballo infinito

Nos planteamos en primer lugar resolver el *Problema del Salto del Caballo* en un tablero de dimensiones infinitas. En principio, supondremos que dicho tablero es infinito hacia arriba y hacia la derecha; es decir, que la esquina inferior izquierda es un extremo de dicho tablero, expandiéndose éste desde ahí. Una manera de intentar resolver este problema, planteada por José Fernández-Prida, es empezar numerando los cuadros de un tablero infinito de ajedrez de la siguiente forma:
http://www.albaiges.com/matematicas/saltocaballoinfinito.htm

10				
6	11			
3	7	12		
1	4	8	13	
0	2	5	9	14

Figura 7

Es decir, correlativamente según las diagonales, como se hace cuando quieren ordenarse los números fraccionarios. Seguidamente, partiendo de la casilla 0, un caballo va saltando hacia las demás según las reglas habituales, eligiendo siempre la casilla de número mas bajo que no haya sido previamente ocupada. Éste es el aspecto del tablero tras 39 saltos:

36	46	57	69	80	92	103	115
37 28	**18** 37	47	58	70	81	93	104
20 21	**15** 29	**38** 38	48	59	71	82	94
17 15	**36** 22	**19** 30	39	49	68	72	83
14 10	**21** 16	**16** 23	**36** 31	40	50	61	73
9 3	**4** 11	**13** 17	**22** 24	**29** 32	**34** 41	51	62
6 3	**1** 7	**8** 12	**31** 18	**12** 25	**25** 33	**28** 42	52
3 1	**10** 4	**5** 8	**26** 13	**23** 19	**30** 26	**33** 34	43
0 0	**7** 2	**2** 5	**11** 9	**32** 14	**27** 20	**24** 27	35

Figura 8

Se plantean de inmediato dos preguntas:
- -¿Habrá siempre una casilla disponible para el caballo?
- -¿Acabará cada casilla del tablero siendo ocupada alguna vez?

Todos los aficionados al ajedrez saben que una de las soluciones más sencillas consiste en procurar saltar siempre hacia una casilla desde donde el repertorio disponible sea mínimo. Aún con esta guía, resolver el problema suele exigir varios tanteos, pues es frecuente llegar a algún callejón sin salida. Se intuye que otro tanto acabará sucediendo con ese ajedrez infinito, ya que en cada salto el caballo acaba metiéndose en escaques que pueden ser una trampa.

Efectivamente, con cualquier programa de computación simbólica no excesivamente complicado, por ejemplo, con el Basic, puede resolverse el problema. En la figura siguiente mostramos los pasos finales del caballo, que termina su recorrido tras 2401 saltos.

1833 1374 (48,3)	2008 1427 (49,3)	2003 1481 (50,3)	2132 1536 (51,3)	2309 1592 (52,3)	2138 1649 (53,3)	1707 (54,3)
1830 1374(48,2)	1707 1427 (49,2)	1832 1481 (50,2)	1827 1536 (51,2)	2006 1592 (52,2)	2135 1650 (53,2)	
1825 1273 (48,1)	1828 1324 (49,1)	2007 1376 (50,1)	2004 1429 (51,1)	2133 1482 (52,1)	2400 1538 (53,1)	2137 1594 (54,1)
1706 1224 (48,0)	1831 1274 (49,0)	1826 1325 (40,0)	2401 1377 (51,0)	2136 1430 (52,0)	2005 1484 (53,0)	2134 1539 (54,0)

Figura 9

Como era de esperar, el final forzado se produce también con tableros infinitos por los cuatro cuadrantes y otros sistemas de numeración de las casillas, como por ejemplo el de la siguiente figura:

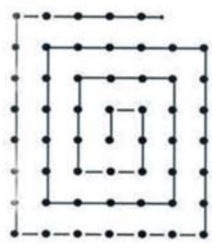

Figura 10

Resulta curiosa la ruta asimétrica del caballo para este sistema, que termina en el movimiento 2015:

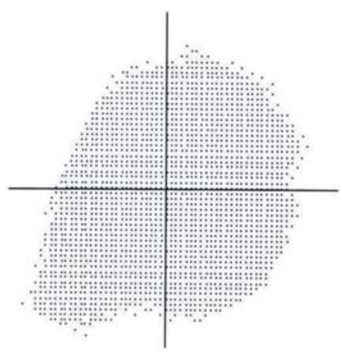

Figura 11

El Problema del Salto del Caballo en otros tableros

Louis Pósa (matemático húngaro nacido en la década de los 40 del siglo pasado) demostró, siendo adolescente, que no hay recorrido cerrado en tableros *4×n,* siendo *n* cualquier número natural. Su idea consiste en ver que el grafo no contiene ciclos hamiltonianos dividiendo el tablero en cuadros exteriores, que son los cuadros de la parte superior y la parte inferior; y cuadros exteriores, que son los restantes.

En esta situación el caballo debe llegar desde un cuadrado interior a un cuadrado exterior. Por lo tanto cada cuadrado exterior va a ir precedido de un cuadro interior y seguido de uno o varios cuadros interiores. Como existe igual número de cuadros interiores que exteriores, los cuadros interiores y exteriores han de ir alternándose al recorrer el ciclo. Sea v(*i*), con *i* impar, los vértices que corresponden a las casillas exteriores y v(*i*), con *i* par, los vértices que corresponden a las casillas interiores. Al observar los movimientos del caballo vemos que los v(*i*), donde *i* es impar, corresponden a las casillas blancas y los v(*i*) con *i* par corresponden a las casillas negras. Por lo tanto el ciclo no puede ser hamiltoniano. Téngase en cuenta que dicha demostración es válida por simetría si en vez de tomar tableros *4×n* tomamos tableros *n×4.*

Allen J. Schwenk, actualmente en la Universidad de Michigan Oeste en Kalamazoo, observó que se había trabajado sobre tableros concretos, olvidándose de la verdadera intuición matemática; la cuál lleva a preguntarse para qué tableros *m×n* (rectangulares, es decir, con *m* distinto de *n*, ya que el caso de los cuadrados es el habitual) es posible el recorrido del caballo. Fue en 1993 cuando este matemático demostró para qué tableros de *m×n* es posible el recorrido del caballo. Veamos un esbozo de su razonamiento:

Para los casos en que *m* y *n* sean ambos impares, ya hemos visto que no hay recorrido, por ser el número de casillas impar.

Si *m = 1*, el caballo no tiene casillas para saltar. Si *m = 2*, el caballo no tiene casillas para dar la vuelta al tablero, sea quien sea *n*. Para *m = 4* ó *n = 4*, Louis Pósa demostró que el recorrido no era posible.

Se puede comprobar que para los tableros *3×6* y *6×8* tampoco es posible el recorrido.

Nos faltaría comprobar que el recorrido sí es posible para el resto de tableros. Para ello, se basa en que todo recorrido sobre un tablero *m×n* puede ampliarse a un recorrido sobre un tablero *m*×(*n+4*). Además, por simetría también puede ampliarse a un tablero (*m+4*)×*n*. Por esta razón, si tenemos un tablero *5* x *8* donde es posible el recorrido del caballo, también será posible para los tableros de tamaños *9×8*, *5×12*, *9×12*, *13×8*, *13×12*, y así sucesivamente. Con esto queda garantizada la existencia de recorridos.

Si encontrásemos un número de tableros de diferentes dimensiones, los cuáles nos asegurasen la existencia de los demás, el problema del recorrido del caballo quedaría demostrado. Con todos los tableros de tamaños *5×6*, *5×6*, *6×6*, *7×6*, *7×8*, *8×6*, *8×8*, *10×3* y *12×3* es posible generar todos los tableros que nos faltaban. En las siguientes figuras se muestra el recorrido del caballo en estos nueve tableros: ■

32	27	30	1	12	17	22	3
29	38	33	18	23	2	11	16
26	31	28	35	8	13	4	21
37	34	39	24	19	6	15	10
40	25	36	7	14	9	20	5

5×8

1	16	31	36	3	18
30	35	2	17	22	37
15	48	21	32	19	4
34	29	44	9	38	23
47	14	33	20	5	10
28	43	8	45	24	39
13	46	41	26	11	6
42	27	12	7	40	25

8×6

1	46	29	18	37	48	9	20
28	17	2	47	30	19	38	49
45	56	33	36	5	8	21	10
16	27	6	3	34	31	50	39
55	44	35	32	7	4	11	22
26	15	42	53	24	13	40	51
43	54	25	14	41	52	23	12

7×8

1	10	5	20	25	16
4	21	2	17	6	19
11	30	9	24	15	26
22	3	28	13	18	7
29	12	23	8	27	14

5×6

1	26	29
28	7	2
25	30	27
6	3	8
19	24	5
4	9	20
21	18	23
10	15	12
13	22	17
16	11	14

3×10

1	32	35
34	19	2
31	36	33
18	3	20
21	30	17
16	27	4
5	22	29
28	15	26
25	6	23
12	9	14
7	24	11
10	13	8

3×12

1	14	7	28	35	22
8	27	2	23	6	29
15	42	13	34	21	36
26	9	24	3	30	5
41	16	33	12	37	20
10	25	18	39	4	31
17	40	11	32	19	38

7×6

34	37	26	29	32	43	48	45
25	30	33	36	27	46	51	42
38	35	28	31	40	49	44	47
7	24	39	18	1	52	41	50
14	19	8	23	12	55	64	53
9	6	13	2	17	58	61	56
20	15	4	11	22	63	54	59
5	10	21	16	3	60	57	62

8×8

1	8	31	16	3	10
30	23	2	9	32	17
7	36	15	24	11	4
22	29	6	33	18	25
35	14	27	20	5	12
28	21	34	13	26	19

6×6

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfonso, M., Bueno, S., Diánez, M.R., De Elías, M. C. y Núñez, J. (2004). Siete puentes, un camino: Konigsberg, *Suma* nº 20, 69-78.

Aranda, B., De Elías, M. C. y Núñez, J. (2007). Un divertido juego inventado por un matemático infeliz, *Números* nº 66. (Revista Electrónica sin paginación).

Gross, J. J. & Yellen, J. (Eds.) (2004). *Handbook of the Graph Theory.* Boca Raton. Florida: CRC Press.

Vandermonde, A. (1771), *Remarques sûr des problèmes de situation. Académie des Sciences.*

Este artículo fue recibido en SUMA en Abril de 2009 y aceptado en abril de 2010