UNA APROXIMACIÓN A LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO. ¿QUÉ SE PRETENDE QUE APRENDAN LOS ALUMNOS?

Sánchez, María Victoria[1]; **García, Mercedes**[1]; **Escudero, Isabel**[1]; **Gavilán, José María**[1] y **Sánchez-Matamoros, Gloria**[2]

[1] Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Sevilla

[2] I.E.S. Andrés Benítez, Jerez de la Frontera, Cádiz

Resumen. En este artículo nos hemos planteado indagar sobre la forma en la que se presentan los metaconceptos *definir*, *probar* y *modelar* en los textos escolares, considerados estos últimos como un contexto en el que «mirar» unos significados que, de alguna manera, van a intervenir en lo que aprenden los estudiantes. Nos centramos, en primer lugar, en la elaboración de un marco común que fije unas variables que permitan caracterizar dichos metaconceptos. En segundo lugar, presentaremos algunos resultados, como son la potenciación de la adquisición de un vocabulario básico, la relativa importancia de probar, y la poca importancia del metaconcepto *modelar*, que se vincula a la resolución de problemas concretos y aplicados.

Palabras clave. Definir, probar, modelar, aprendizaje matemático, bachillerato.

An Approach to Mathematics for 16-18 Year-Old Students. What Are They Expected to Learn?

Summary. In this paper, we explore the way in which metaconcepts such as defining, proving and modeling are presented in school texts, considering these textbooks as a context for «seeing» the meanings that are somehow going influence what students learn. Firstly, we focus on creating a common framework that considers the variables which make it possible to characterize those metaconcepts. Secondly, we will present some results including the importance of the acquisition of basic vocabulary, the relative importance of proving, and the little importance of modeling, which is almost always tied to the resolution of applied problems.

Keywords. Defining, Proving, Modeling, Mathematical learning, High School Level.

INTRODUCCIÓN

Dos características generales sitúan el trabajo que aquí presentamos:

– un objetivo de investigación, en el que nos planteamos obtener información sobre el aprendizaje matemático de los alumnos del bachillerato, considerado como una etapa no obligatoria clave para el acceso a la universidad;

– una comunidad de indagación, cuyos miembros asumen ese objetivo y se plantean alcanzarlo (Jaworski, 2003 a,b; García et al., 2003, 2006a). Entendemos dicha comunidad en el sentido de Jaworski (2005), cuando señala que «es una comunidad (de práctica) en la que una de las normas es una actitud de indagación (incluyendo, por ejemplo, cuestionamiento crítico), la indagación *no* es la práctica, pero es una forma de aproximarse a la práctica, la indagación se puede usar como una *herramienta* para desarrollar la indagación como una *forma de ser*» (Jaworski, 2005, p. 16). Asumimos que esa comunidad, constituida en nuestro caso por profesores universitarios de Didáctica de las Matemáticas/investigadores y profesores de matemáticas de secundaria/investigadores, es el contexto adecuado para llevar a cabo un proyecto de estas características.

Ahora bien, antes de pensar en qué aprenden los alumnos de bachillerato y qué características tiene ese aprendizaje debemos plantearnos qué se pretende que aprendan. En este sentido, los textos escolares siguen unos principios ideológicos de control de la cultura escolar por parte del

Estado, la sociedad y determinadas instituciones corporativas, imponiendo unos valores culturales dominantes. Por tanto, pueden ser considerados como un «reflejo» del significado que da a las orientaciones curriculares oficiales una cultura matemática política y socialmente asumida, recogiendo de alguna manera el aprendizaje pretendido.

Para indagar sobre el aprendizaje de los alumnos, necesitamos hacer explícito cómo lo consideramos en este trabajo. Entendemos el aprendizaje como la construcción del conocimiento, en este caso matemático, y asumimos que este aprendizaje es situado, por lo que la adquisición de habilidades intelectuales y el contexto sociocultural no pueden separarse (Brown et al., 1989; Lave y Wenger, 1991). Por ello, en un primer paso, es necesario fijar cuáles son los elementos clave en dicha construcción. Definir, probar y modelar han sido considerados por muchos autores elementos básicos en el desarrollo del «hacer matemáticas». Aunque con matices diferentes (en algunos más próximos a una consideración como conceptos y en otros casos como procesos) su importancia ha sido destacada por investigadores como Borasi (1991), Balacheff (1987), Healy y Hoyles (2000), García y Llinares (2001), Cobb (2002), Lesh y Doerr (2003), Lesh y Lehrer (2003), Zaslavsky y Shir (2005), entre muchos otros. Sin embargo, en muchas ocasiones, su estudio se ha desarrollado por separado.

En nuestra comunidad, hemos adoptado algunas decisiones básicas:

– asumir que definir, probar y modelar son elementos clave en la construcción del conocimiento matemático,

– considerarlos como metaconceptos, vinculando este término en nuestro caso a su configuración compleja, multidimensional y universal, admitiendo que cada uno de ellos incluye numerosos aspectos de complejidad muy diferente,

– abordar su estudio conjunto. Pensamos que los tres metaconceptos aportan diferentes referentes que se interrelacionan en la construcción del conocimiento matemático, y por lo tanto en el proceso de aprendizaje. Así, por ejemplo, se crean modelos de situaciones en los que intervienen definiciones de conceptos, y propiedades/teoremas que han sido probados. Y todo ello con una validez local, marcada por un determinado nivel cognitivo y contextual, que es a su vez un primer paso para alcanzar la validez universal.

La consideración conjunta de los tres metaconceptos desde el punto de vista de la investigación nos ha llevado a tener que elaborar un marco común que fije unas variables que permitan caracterizar su construcción. En este artículo nos centramos en dos objetivos. En primer lugar, la elaboración de ese marco común. En segundo lugar, apoyándonos en él, nos hemos planteado indagar sobre la forma en la que se consideran definir, probar y modelar en los textos escolares, como paso previo para abordar el aprendizaje de los estudiantes.

No pretendemos en ningún caso en este estudio realizar un análisis de textos, sino que los textos son el contexto en el que nosotros, como investigadores, «miramos» unos significados que de alguna manera van a intervenir en la construcción del conocimiento de los estudiantes.

EL PROCESO DE ELABORACIÓN DEL MARCO CONCEPTUAL

Para esta elaboración, siguiendo un proceso inductivo, se partió de una propuesta inicial basada en la información recogida en la revisión de la bibliografía, que se ha ido refinando/ampliando/mejorando a medida que se iba aplicando al análisis de los textos escogidos (García et al., 2006b; Sánchez et al., 2006). Los trabajos de diferentes autores fueron las fuentes que nos sirvieron para una primera aproximación a los elementos teóricos que permitían identificar las ***características*** que debían cumplir los mencionados metaconceptos (denominada **variable de identificación**) y lo que íbamos a considerar como elementos discriminatorios, como fueron el ***papel*** y ***tipo*** (**variables de discriminación**). Junto con estas variables teóricas, fueron tenidas en cuenta otras de un origen empírico, más ligadas al texto específico (**variables empíricas** como ***forma de acceder*** y ***consideración en el texto***). Esta información se discutió tanto inicialmente (para compartir significados de partida) como *a posteriori*, es decir, una vez identificados en los textos. El marco final se recoge en el cuadro 1.

Cuadro 1
Marco de análisis elaborado.

VARIABLES CONSIDERADAS EN EL ANÁLISIS	LO QUE POSIBILITAN
Características	Permiten identificar claramente el metaconcepto
Papel	Presentan diferentes facetas del metaconcepto
Tipo	Establece diferencias dentro del metaconcepto
Forma de acceder/Acercarse	Informa sobre cómo se introduce en el texto
Consideración en el texto	Recoge los mensajes implícitos sobre la importancia del metaconcepto que se incluye en el texto

Este marco se concretó para cada uno de los metaconceptos considerados. Así, referencias previas como son los trabajos de Borasi (1991), Mariotti y Fischbein (1997), Winicki-Landman y Leikin (2000), Shir y Zaslavsky (2002), van Dormolen y Zaslavsky (2003), Weber (2004), Zaslavsky y Shir (2005), en relación con el metaconcepto *definir* nos llevó a identificarlo como aquello que prescribe el significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de propiedades que tienen que ser todas verdaderas. Esa prescripción tiene unas características que pueden ser imperativas (no contradictoria, no ambigua, invariante bajo el cambio de representación, naturaleza jerárquica) u opcionales, como es el caso de la minimalidad. Los diferentes papeles y tipos (procedimental y estructural), que como posteriormente indicaremos son, junto con las características, las variables en las que nos vamos a centrar en este artículo, y se recogen en el cuadro 2. El tipo procedimental hace referencia a lo que diferentes autores denominan definiciones *por génesis* (Leron, 1988; Pimm, 1993), que incluyen lo que se tiene que hacer para obtener el objeto matemático definido (p. e., una circunferencia puede definirse como una forma particular de seccionar un cono). El tipo estructural hace referencia a una propiedad común del objeto que se define, o de los elementos que constituyen dicho objeto (p. e., circunferencia como lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen una determinada condición).

Cuadro 2
Aspectos considerados respecto al papel y tipo en *definir*.

PAPEL	1. Introducir los objetos de una teoría, capturando la esencia de un concepto comunicando sus características y propiedades 2. Establecer componentes fundamentales para la formación de un concepto 3. Establecer fundamentos para pruebas/demostraciones y resolver problemas 4. Crear uniformidad en el significado de los conceptos, que permita comunicar las ideas matemáticas más fácilmente	
TIPO	**Procedimental (P)**	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto
	Estructural (E)	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto

Las aportaciones de diferentes autores (Balacheff, 1987; Moore, 1994; Hanna, 2000; Healy y Hoyles, 2000; García y Llinares, 2001; Knuth, 2002; Weber, 2002) nos llevaron a caracterizar *probar* con base en la existencia de una premisa/enunciado/proposición y de una secuencia de inferencias lógicas aceptadas como válidas por parte de la comunidad matemática en el sentido de «no erróneas». Como en el caso anterior, en el cuadro 3 recogemos de forma sintetizada los aspectos que tuvimos en cuenta en el caso de su papel y tipo (pragmático, intelectual y demostración). El tipo pragmático está restringido por la singularidad del suceso de que se trata, fallando en aceptar el carácter genérico y siendo en ocasiones dependiente de un material contingente que puede ser impreciso o de particularidades demasiado locales. El intelectual requiere la expresión lingüística de los objetos matemáticos que intervienen y de sus relaciones. Por último, el tipo demostración conlleva hacer uso de unas reglas y convenciones aceptadas universalmente como válidas por la comunidad matemática. (Para más información sobre los tres tipos incluidos, Balacheff 1987 y García y Llinares 2001).

Cuadro 3
Aspectos considerados respecto al papel y tipo en *probar*.

PAPEL	1. Verificar que una declaración es cierta 2. Explicar por qué una declaración es cierta 3. Comunicar conocimiento matemático 4. Descubrir o crear nuevas matemáticas 5. Sistematizar declaraciones en un sistema axiomático 6. Construir una teoría empírica 7. Explorar el significado de una definición o las consecuencias de una suposición 8. Incorporar un hecho bien conocido en una base nueva y por lo tanto vista desde una perspectiva reciente		
TIPO	**Pragmático (P)**	Directa (D) Indirecta (I) Recurrencia (R)	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto
	Intelectual (I)	Directa Indirecta Recurrencia	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto
	Demostración (D)	Directa Indirecta Inducción completa	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto

El metaconcepto *modelar* se caracterizó como un esquema conceptual susceptible de ser tratado matemáticamente, que permite interpretar y predecir una situación (Cobb, 2002; Lesh y Doerr, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh y Harel, 2003). El papel y tipo son los considerados en el cuadro 4. Por «*modelo de*» entendemos un modelo de situaciones específicas. Por «*modelo para*», un modelo para situaciones similares.

Cuadro 4
Aspectos considerados respecto al papel y tipo en *modelar*.

PAPEL	1. Plantear y resolver cuestiones abiertas 2. Crear, refinar y validar modelos 3. Matematizar situaciones 4. Diseñar y realizar simulaciones 5. Resolver problemas e intervenir en la resolución de problemas aplicados	
TIPO	**Modelo de (MD)**	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto
	Modelo para (MP)	Simbólico (algebraico o numérico) Gráfico/dibujo Texto

A continuación, pasamos a detallar en el siguiente apartado algunos resultados a los que hemos podido acceder a través de la aplicación del marco construido.

ASPECTOS METODOLÓGICOS Y ALGUNOS RESULTADOS

La obtención y el análisis de datos

Definido el marco inicial, se seleccionaron cuatro colecciones completas de libros de matemáticas de bachillerato correspondientes a diferentes editoriales, que nos iban a servir como referente para aproximarnos a lo que se pretende que los alumnos aprendan. La selección se hizo basándose en las siguientes características: *a*) uso frecuente por parte de los profesores de secundaria, *b*) considerar 1º y 2º de bachillerato de cada rama, y *c*) tener en cuenta todas las especialidades (Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/ Tecnológico y Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, a los que en este artículo, por simplificar, los identificaremos como Ciencias y Sociales).

Se identificaron en cada una de las páginas de los textos considerados unidades de análisis, entendidas como frases que expresaban diferentes declaraciones matemáticas relacionadas con los metaconceptos, y se procedió a una cuidadosa categorización de las mismas apoyándonos en el marco conceptual de partida que, como ya hemos indicado, fue validado y reformulado sucesivamente a lo largo del proceso. Esto permitió identificar en un primer paso, basándose en las características requeridas, las declaraciones que correspondían a los diferentes metaconceptos, anotando todas las particularidades de aquellas que no cumplían dichas características. Se realizó así una doble tabulación: en una tabla se recogían las unidades susceptibles de ser categorizadas como metaconcepto y en otra, las que presentaban alguna particularidad excluyente, procediéndose a un recuento posterior, que nos permite aproximarnos a la forma en la que se presentan los metaconceptos en los textos escolares desde el marco adoptado.

Así, por ejemplo, en el primer análisis la declaración siguiente:

«Una sucesión de números reales es una secuencia de números reales ordenados uno detrás de otro» (página 182, 1º Bachillerato Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/ Tecnológico de la editorial considerada).

no fue considerada para su posterior análisis debido a que no cumplía las características necesarias para considerarla definición de un objeto matemático (por ejemplo, la no ambigüedad).

En un segundo paso, para cada uno de los metaconceptos se elaboró una tabla de doble entrada. En el eje vertical se fueron situando las diferentes declaraciones (correspondientes al metaconcepto considerado) recogidas en el primer análisis y en el horizontal, las diferentes variables consideradas: discriminatorias y empíricas. Se identificó en cada caso el papel y tipo para las variables discriminatorias, y la forma de acceder y consideración en el texto para las variables empíricas.

Dada la extensión de los resultados obtenidos (basta reseñar que en el caso del curso 1º de bachillerato de ciencias se recogieron 275 declaraciones de las que 203 cumplían, desde las características identificadas en nuestro marco, las condiciones para ser definición) y que nuestro objetivo no es generalizar sino profundizar en un estudio conjunto que puede sentar las bases para un trabajo posterior, en este artículo vamos a centrarnos en:

– una colección de libros (1º y 2º de bachillerato de todas las ramas de una misma editorial, escogida por su amplia implantación en nuestra Comunidad Autónoma), y

– las **variables de discriminación**, es decir, en dos de los elementos teóricos, papel y tipo, que han fundamentado nuestro trabajo.

Algunos resultados

Este apartado lo vamos a estructurar en dos subapartados. En primer lugar, nos centraremos en los resultados globales obtenidos. En segundo lugar, nos ocuparemos en cada uno de ellos de las variables consideradas.

Los metaconceptos en los textos considerados

En la tabla siguiente se recogen los porcentajes de cada uno de los metaconceptos considerados en relación con su aparición en los textos correspondientes a cada uno de los cursos/bachilleratos.

	DEFINICIONES	PRUEBAS	MODELACIONES
1ºB CIENCIAS	73,82	20,36	5,82
2ºB CIENCIAS	69,87	26,36	3,76
1ºB SOCIALES	81,78	5,93	12,29
2ºB SOCIALES	67,62	15,23	17,15

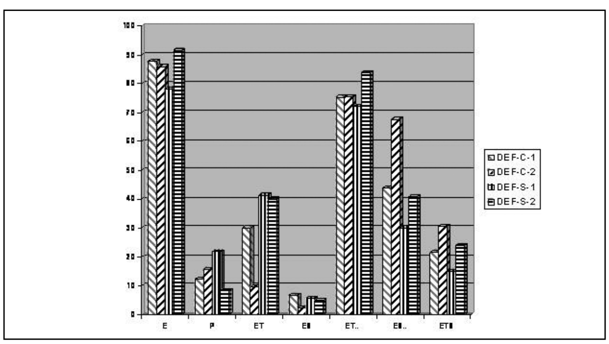
Con todas las prevenciones que se deben tomar en la interpretación de este tipo de datos, parece que en la construcción del conocimiento matemático que se pretende desarrollen los alumnos en este caso concreto, se pone un mayor énfasis en *definir* en todas las ramas y cursos. *Probar* tiene mayor relevancia en el bachillerato de ciencias y *modelar* en el caso de sociales. De algún modo, se aprecia en las matemáticas del bachillerato un esfuerzo por ir «etiquetando» conceptos y procedimientos que vayan constituyendo una base para su posterior utilización en una formación universitaria. El uso de estos objetos no parece ser el objetivo de la formación matemática de estos alumnos. Nos preguntamos hasta qué punto esta parcelación secuenciada de los metaconceptos no justifica algunos problemas que se encuentran los profesores de bachillerato (un exceso de definiciones sin demasiada relación con su uso en pruebas y modelaciones) o los profesores universitarios (un conocimiento matemático fundamentado en el recuerdo de las mencionadas definiciones).

Las variables **tipo** *y* **papel** *en cada uno de los metaconceptos*

Metaconcepto definir: en relación con la variable *tipo*, queremos destacar que en todas las ramas del bachillerato el metaconcepto *definir* se vincula a una búsqueda de propiedades comunes que caractericen al elemento que se define. Esto se pone de manifiesto en la predominancia del tipo estructural sobre el procedimental. El sistema de representación texto se considera un vehículo con suficiente entidad como para poder acceder al metaconcepto. Asimismo, el texto es un medio para la introducción del lenguaje simbólico matemático, mientras que el gráfico le sirve de apoyo. En el gráfico que se recoge en la figura 1 se pueden apreciar estos aspectos. En dicho gráfico, «ET..» corresponde a tipo estructural con sistema de representación texto junto con simbólico o gráfico o ambos, y «ES..» corresponde a tipo estructural con sistema de representación simbólico junto con texto o gráfico o ambos.

Figura 1

Gráfico correspondiente al metaconcepto *definir*.

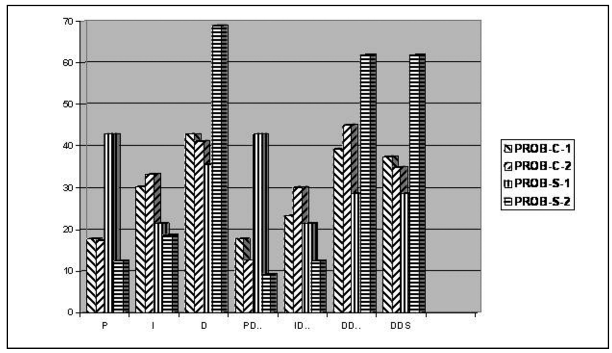


Entre los aspectos a destacar en la presentación del metaconcepto con respecto a la variable *papel*, podemos mencionar que el lenguaje común necesario para la introducción de la teoría matemática en estos niveles parece que necesita unos significados comunes que se proporcionan a través de las definiciones. Podríamos decir que *definir* está considerado como un medio para posibilitar esa comunicación. Eso se ve en la clara predominancia del intento de crear uniformidad en el significado de los conceptos que permita comunicar las ideas matemáticas mas fácilmente (papel 4)**.**

Metaconcepto probar: como se puede apreciar en el siguiente gráfico, con respecto a la variable *tipo* este metaconcepto se construye con distintas facetas. Esto lleva a un tipo de construcción que podríamos llamar «completo», en el sentido de que aparecen los tres tipos de pruebas considerados (pragmática, intelectual, demostración) en todos los cursos y ramas. En la figura 2 se recoge el gráfico que permite visualizar estos resultados. En dicho gráfico «PD..» corresponde a prueba pragmática directa con cualquier sistema de representación, «ID..», sería intelectual directa con cualquier sistema de representación y «DD..» se refiere a demostración directa con cualquier sistema de representación.

Figura 2

Gráfico correspondiente al metaconcepto *probar*.



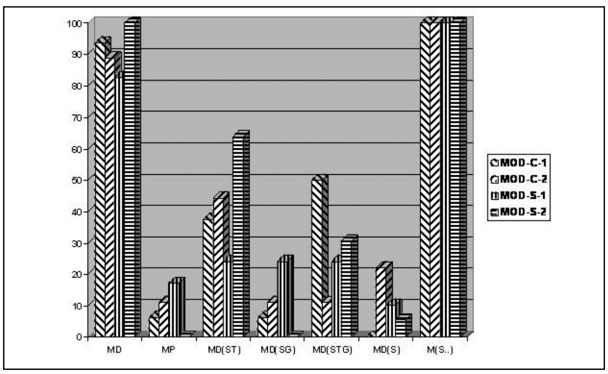
La presencia mayoritaria de la variante «directa» en todas las ramas del bachillerato puede indicar que la idea de probar se vincula a una determinada secuencia, en particular, premisa-desarrollo-conclusión. Llama la atención la fuerte presencia de la demostración directa en 2º de bachillerato de sociales, hecho cuya explicación necesitaría de un estudio posterior más profundo, en el que las propias orientaciones curriculares serían evidentemente una variable a considerar.

En relación con los sistemas de representación, *probar* está muy vinculado al lenguaje simbólico-matemático, siendo el texto y gráfico complementarios. El sistema de representación gráfico se considera en ocasiones un vehículo con suficiente entidad como para poder visualizar el metaconcepto (a diferencia de lo que sucedía con el metaconcepto *definir*, en el que el texto sólo es en algunos casos suficiente). En relación con las diferencias en cursos y/o especialidades, en la rama de ciencias hay una cierta «graduación» en la progresión de formalización con la que se introduce el metaconcepto *probar*. Esto se muestra en el uso de las distintas facetas pragmática, intelectual, demostración en este mismo orden y de menor a mayor cantidad.

La variable *papel* nos indica que la construcción del metaconcepto se vincula a validación, lo que se pone de manifiesto en el predominio del papel «Verificar que una declaración es cierta» (papel 1).

Metaconcepto modelar: un aspecto a destacar en la presentación del metaconcepto en relación con la variable *tipo* es que en todos los cursos y especialidades la construcción del metaconcepto se vincula a la idea de que el proceso de modelar se considera un *modelo de* una situación preestablecida, a diferencia del *modelo para* en el que se busca un modelo para aplicar a diferentes situaciones del mismo tipo. En la figura 3 presentamos el gráfico correspondiente, en el que MD(ST) responde a «modelar de» con sistemas de representación simbólico y texto; MD(SG) se refiere a «modelar de» con sistemas de representación simbólico y gráfico MD(STG) sería «modelar de» con sistemas de representación simbólico, texto y gráfico; MD(S) corresponde a «modelar de» sólo con sistema de representación simbólico, y con M(S..) nos referimos a cualquiera de los tipos de «modelar», con el sistema de representación simbólico junto con texto o gráfico o ambos.

Figura 3
Gráfico correspondiente al metaconcepto *modelar*.



Podemos decir que el simbólico es el sistema de representación fundamental en la presentación de este metaconcepto, siendo texto y gráfico complementarios de él. Aunque estos dos sistemas de representación no tienen la misma relevancia que el simbólico, el par simbólico-textual es el vehículo que se presenta como más adecuado para la introducción del metaconcepto.

Algunos aspectos a destacar en la presentación del metaconcepto en relación con la variable *papel* serían que en todos los cursos y especialidades, mayoritariamente el *modelar* se ve como resolver problemas aplicados. Esto se pone de manifiesto en la predominancia de resolver problemas e implicar en la resolución de problemas aplicados (papel 5).

A través del análisis de la colección de textos considerada, se aprecia que no existen grandes diferencias entre las distintas ramas respecto a lo que se pretende que aprendan los alumnos, aunque se pueden indicar algunos matices. En general, se potencia en gran medida el aprendizaje de un vocabulario básico, dando una cierta importancia a probar en matemáticas vinculada casi siempre a hechos matemáticos de cierta relevancia (teoremas y proposiciones «clásicas» con una potencialidad asumida culturalmente). Se da así una idea muy «formal» del metaconcepto *probar* en un doble sentido: se traslada la importancia a lo que hay que probar y no al proceso y se vincula a una secuencia muy estructurada y determinada (premisa-desarrollo-conclusión, puesto de manifiesto en la predominancia de la demostración directa) que encorseta de alguna manera desarrollos posteriores del quehacer matemático. Se minimiza la importancia del metaconcepto *modelar*, vinculándose a la resolución de problemas concretos y aplicados. En relación con los modos de representación, el sistema de representación simbólico-matemático es el lenguaje a través del cual se comunican las ideas matemáticas en estos niveles. En general, el gráfico y el texto sirven de apoyo.

CONCLUSIONES

Cuatro ideas van a centrar estas conclusiones. La primera de ellas se refiere al marco elaborado en nuestro estudio. La segunda aborda una nueva forma de considerar los contenidos matemáticos en estos niveles y las correspondientes implicaciones curriculares. La tercera se ocupa de lo que ha aportado el estudio en relación con la construcción del conocimiento matemático. Por último, nos centramos en el propio desarrollo de la comunidad de indagación en la que el estudio ha estado inmerso. A través de estas cuatro ideas queremos incidir tanto en los objetivos planteados en el artículo como en las características generales que situaban nuestro trabajo.

En relación con la primera idea, el marco elaborado se ha mostrado útil en una doble vertiente: como instrumento de investigación y como instrumento de reflexión. En el primer caso, el marco ha sido lo suficientemente potente para permitirnos identificar e interpretar elementos clave en la construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, el proceso recursivo que ha formado parte de su generación continúa, ya que hemos detectado aspectos que deben ser mejorados (caracterización de algunas variables) y otros que deben ser incorporados (mejor discriminación entre los modos de representación). Asimismo, ha proporcionado un instrumento de reflexión para «mirar» los contenidos matemáticos desde una perspectiva diferente, lo que abre nuevos marcos de discusión.

Hemos considerado los contenidos basándonos en otros referentes distintos de los bloques que los han articulado tradicionalmente. Los hemos visto a través de unos metaconceptos bajo los cuales se pueden ver todos esos bloques y que aportan la idea de las matemáticas como proceso frente a otra más estática de las matemáticas como cuerpo de conocimiento establecido. ¿Qué nos ha aportado esta consideración en el caso particular del texto considerado como contexto? Una panorámica de lo que pueden percibir los alumnos que constituye el metaconcepto, que es en alguna medida uno de los referentes (evidentemente condicionado/mediatizado por la labor del profesor) sobre el que ellos van a edificar su comprensión del quehacer matemático. Ello nos lleva a pensar en una nueva forma de considerar los contenidos escolares que podría tener claras implicaciones curriculares.

Desde el punto de vista de los elementos que, a partir de nuestra perspectiva, intervienen en el aprendizaje matemático de los alumnos, el hecho de plantearnos los metaconceptos ha permitido «visualizar»/acceder a una serie de características (relaciones que se establecen, procesos que se potencian, lenguaje, etc.) que son propias de la construcción del razonamiento matemático y que, de alguna manera, se «desdibujan» cuando nos las planteamos desde los bloques temáticos. Evidentemente, sabemos que hay aspectos del quehacer matemático a los que no hemos podido acceder en este estudio exploratorio. Necesitamos profundizar tanto en las variables consideradas en cada metaconcepto como en la posible inclusión de nuevos metaconceptos.

Por último, nos gustaría finalizar realizando algunas reflexiones sobre lo que supone hablar de comunidades de indagación en este contexto (Jaworski, 2003b) y lo que lleva a establecer diferencias entre su consideración y lo que sería un equipo involucrado en una tarea común (más allá del uso de palabras nuevas). En este contexto, destacamos el potencial de estas comunidades y la importancia de las situaciones de co-aprendizaje que en ellas emergen (Sánchez et al., 2006; García et al., 2006a, b).

Cuando se aborda una investigación como la aquí presentada, es incuestionable que existe un objetivo de partida, pero en las comunidades de indagación éste no se tiene por dado e inmutable, sino que se reelabora dentro de la comunidad, que lo asume como propio y le da significado, reformulándolo en ocasiones. En nuestro caso, la coexistencia de elementos procedentes de diferentes ámbitos, con un conocimiento distribuido con distintos orígenes, asumido por cada uno de nosotros y aportado al colectivo, ha permitido que el conocimiento conjunto emerja desde distintos vértices. Los diferentes miembros han ido planteando los problemas y dudas que les iban surgiendo en el desarrollo del proceso de investigación, que pasaban a convertirse en problemas de la comunidad. La discusión se ha generado entre los miembros, independientemente de su procedencia que, como es lógico, ha condicionado la información aportada. Además, esos problemas y dudas, hayan venido de la práctica de los profesores o de los propios investigadores, han sido asumidos por la comunidad, que los ha retomado como propios y los aborda desde los diferentes referentes. La comunidad devuelve a su vez esos referentes a los miembros, produciéndose un proceso de «asimilación individual». Este proceso permite ya un uso particular. Así, por ejemplo, el marco elaborado en este estudio, para los miembros de la comunidad que desempeñan su trabajo en la universidad puede incidir en la forma de considerar el conocimiento necesario para ser un profesor de matemáticas de secundaria, y por tanto, en los contenidos de los cursos de formación. Para los miembros de nuestra comunidad que desempeñan su trabajo en secundaria obligatoria y bachillerato es un medio para ver «lo que dan» y «cómo lo dan». En este sentido, no sólo estamos desarrollando un proyecto de investigación, sino que estamos avanzando en un proyecto personal, edificado desde la perspectiva del conocimiento de la pluralidad de ideas sobre las que pueden verse las propias matemáticas.

NOTA

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo del Ministerio de Educación y Ciencia (proyecto SEJ2005-01283/EDUC).

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todos los participantes en el III Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas (Sevilla, noviembre de 2006), y muy especialmente a Carmina Penalva y Pedro Cobo, los comentarios y sugerencias realizados a este trabajo, que han contribuido en gran medida a la mejora del mismo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, pp.147-176.

BORASI, R. (1991). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Ins.

BROWN, J., COLLINS, A. y DUGUID, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, pp. 32-42.

COBB, P. (2002). Modelling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis, en Gravameijer et al. (eds.). *Symbolizing, Modelling and Tool Use in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática, en Castro (ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* Madrid: Síntesis.

GARCÍA, M., SÁNCHEZ, V., ESCUDERO, I. y LLINARES, S. (2003). *The dialectic relationship between theory and practice in Mathematics Teacher Education*, en CERME3 (Group 11) Bellaria, Italy: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.

GARCÍA, M., SÁNCHEZ, V., ESCUDERO, I. y LLINARES, S. (2006a). The dialectic relationship between theory and practice in Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9, pp. 109-128.

GARCÍA, M., SÁNCHEZ, V., ESCUDERO, I., GAVILÁN, J.M., TRIGUEROS, R. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2006b). Comentario a un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el bachillerato dentro de una comunidad de indagación, en Penalva, M.C. et al. (eds.). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. Granada: Proyecto Sur.

HANNA, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, pp. 5-23.

HEALY, L. y HOYLES, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

JAWORSKI, B. (2003a). *Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development*, en CERME3 (Group 11), Bellaria, Italy, <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.

JAWORSKI, B. (2003b). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 249-282.

JAWORSKI, B. (2005). Learning Communities in Mathematics. *Research and Development in Mathematics Teaching and Learning,* en <www.alt.hist.no/~froder/norma05/Jaworski.ppt>.

KNUTH, E.J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5, pp. 61-88.

LAVE, J. y WENGER, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*. Nueva York: Cambridge University Press.

LERON, U. (1988). On the mathematical nature of turtle programming, en Pimm, D. (ed.). *Mathematics Teachers and Children*, pp. 185-189. Londres: Hodder and Stoughton.

LESH, R. y DOERR, H.M. (2003). Foundations of a Models and Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving, en Lesh, R. y Doerr, H.M. (eds). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Nueva York: LEA.

LESH, R. y HAREL, G. (2003). Problem Solving, Modelling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning,* 5(2-3), pp. 157-189.

LESH, R. y LERHER, R. (2003). Models and Modelling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning,* 5(2-3), pp. 109-129.

MARIOTTI, M.A. y FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, pp. 219-248.

MOORE, R.C. (1994). Making the transition to the formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27, pp. 249-266.

PIMM, D. (1993). Just a matter of definition [Review of the book *Learning mathematics through inquiry*]. *Educational Studies in Mathematics*, 25, pp. 261-277.

SÁNCHEZ, V., GARCÍA, M., ESCUDERO, I., GAVILÁN, J.M., TRIGUEROS, R. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2006). Un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el Bachillerato dentro de una comunidad de indagación, en Penalva, M.C. et al. (eds.). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. Granada: Proyecto Sur.

SHIR, K. y ZASLAVSKY, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition, en Cockburn, A.D. y Nardi, E. (eds.). *Proceedings of the 26th Annual Conference of the PME* (4), Norwich, UK: University of East Anglia, pp. 201-208.

VAN DORMOLEN, J. y ZASLAVSKY, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, pp. 91-106.

WINICKI-LANDMAN, G. y LEIKIN, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions. *For the Learning of Mathematics,* 20(1), pp. 17-21.

WEBER, K. (2002). Beyond Proving and Explaining: Proofs that Justify the Use of Definitions and Axiomatic Structures and Proofs that Illustrate Technique. *For the Learning of Mathematics,* 22(3), pp. 14-17.

WEBER, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, pp. 115-133.

ZASLAVSKY, O. y SHIR, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), pp. 317-347.

[Artículo recibido en marzo de 2007 y aceptado en enero de 2008]

An Approach to Mathematics for 16-18 Year-Old Students. What Are They Expected to Learn?

Sánchez, María Victoria[1], García, Mercedes[1], Escudero, Isabel[1], Gavilán, José María[1] y Sánchez-Matamoros, Gloria[2]

[1] Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Sevilla

[2] I.E.S. Andrés Benítez, Jerez de la Frontera, Cádiz

Abstract

Two general characteristics frame this work. Firstly, a research objective where we intend to obtain information about mathematical learning in 16-18 year old students. This is not considered to be a compulsory level, yet it is very important for access to University. Secondly, a community of inquiry, whose members assume that objective and try to reach it. We think this community, which in our case is made up of university Mathematics Didactics teachers/researchers and Secondary Mathematics teachers/researchers, is an adequate context in which to carry out a study on these characteristics.

In order to investigate students' learning, we need to make explicit how we consider it in this work. We understand learning as the construction of knowledge, mathematical knowledge in this case, and we assume that this learning is situated and, consequently, the acquisition of intellectual skills and the sociocultural context can not be separated. Taking these ideas into account, first, we make explicit some elements that we consider important in the above mentioned construction. Defining, proving, and modelling have been considered by many authors as basic elements for 'doing mathematics' and though they use different approaches, its importance has been emphasized by many researchers. We think that those metaconcepts are interrelated and they contribute in different ways to the construction of mathematical knowledge, and therefore to the learning process.

From a research point of view, the joint consideration of the three metaconcepts has led us to look for a common frame that includes some variables make it possible to characterize them. In this article we focus on two aims: building that common frame, and relying on it, thus we would like to find out how defining, proving and modelling are considered in the school texts, as a prior step to approaching students' learning.

A review of research literature allowed us to distinguish the characteristics that identified the metaconcepts (known as variables of identification) and what we were going to consider as discriminatory elements in each metaconcept, in our case, role and type (variables of discrimination). Together with these theoretical variables, we took into account other variables that had an empirical origin and were linked to the specific text: the way the metaconcepts are accessed and considered in the textbook (empirical variables). This frame was adapted for each metaconcept.

In this article, we focus on one set of Mathematics textbooks corresponding to different specialities and courses (first year and second year of the levels corresponding to 16-18 year old students), and we consider these textbooks from two types of variables (identification and discrimination). Across our analysis, we could see some common aspects among the different specialities with regards to what is expected that students learn. In general, learning basic vocabulary is promoted, giving great importance to mathematical proof, linked almost always to mathematical facts of certain relevance: theorems and 'classical' propositions with a potential that is culturally assumed. In this way, a 'very formal' idea of the metaconcept is given a double meaning: the importance of proving, focusing on what it is necessary to prove and not on the process of proving. In addition, proof is linked to a very structured sequence (premise - development-conclusion, revealed in the predominance of Direct Proof) that somehow influences the posterior development of mathematical activity. The importance of modelling is minimized, as it is linked to solving specific, applied problems. In relation to the modes of representation, the symbolic-mathematical mode is the language through which the mathematical ideas are communicated. In general, graphical and textual modes are used for support.

Four ideas articulate the final reflections. The first one refers to the frame created in our study. The second one approaches a new way of considering the mathematical content at these levels and the corresponding curricular implications. In the third one, we deal with what our study has contributed in relation to the construction of mathematical knowledge. Finally, we focus on the very development of the community of inquiry that has been immersed in the study. Through these four ideas, we reflect both the proposed aims and the general characteristics that situate our work.