CAPÍTULO 7

# Resolución de problemas de Geometría

**José María Gavilán Izquierdo**
**Ricardo Barroso Campos**
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
*Universidad de Sevilla*

## *Introducción*

El Diccionario de la Real Academia define el término problema, entre otras acepciones, como: "Cuestión que se trata de aclarar". Desde el punto de vista matemático, señala que es: "Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos".

En esta definición caben tanto las tareas para las cuales el resolutor dispone de un algoritmo para conseguir el resultado, como aquellas para las cuales debe descubrirlo; las primeras se denominan *ejercicios*, mientras que las segundas son los *problemas* (Schoenfeld, 1985); a estos últimos nos referiremos. Hemos introducido al resolutor, con lo que queremos señalar la naturaleza subjetiva de las tareas. Schoenfeld (1985) indica que la misma tarea puede ser un rutinario ejercicio para algunos estudiantes y un verdadero problema para otros.

En la resolución de un problema es importante el proceso seguido en la búsqueda y validación de la solución, puesto que dicha resolución conlleva un aprendizaje de los procesos matemáticos tales como conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer, probar, establecer relaciones, tan importantes como el conocer conceptos, algoritmos, relaciones y hechos matemáticos.

Polya (1965) distingue, entre otros, los siguientes tipos de problemas:

Problemas de rutina: en este tipo se incluye todo problema que se resuelve por la simple sustitución de nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, o bien, siguiendo paso a paso la traza de otro problema, es decir, mediante la aplicación de una receta. Por ejemplo, calcular la suma de 235 + 483, conocido el algoritmo correspondiente.

Problemas por resolver: son aquellos cuya finalidad es descubrir un objeto. Este objeto puede ser de distinta naturaleza, como una incógnita numérica, o un elemento o propiedad geométrica, entre otras. Un ejemplo de este tipo de problema es encontrar la suma de los n primeros números impares.

Problemas por demostrar: se refiere a los problemas cuya meta es mostrar de modo concluyente la verdad o falsedad de una proposición enunciada. Se abre así la puerta a la refutación como un elemento demostrativo. Demostrar que la suma de dos números impares es par, es ejemplo de este tipo de problemas.

El primer tipo se incluye en lo que antes hemos denominado ejercicio, mientras que los dos últimos tipos serían problemas. El objetivo de este capítulo son los problemas, entendidos de esta forma.

## *Los problemas*

En este apartado vamos a analizar un conjunto de problemas según distintas variables. Una de las variables vendrá dada por la clasificación anterior. Otras variables a considerar serán las siguientes:

Nivel educativo, con el siguiente rango: primaria (P), secundaria (S), bachillerato (B), universidad (U).

Perspectiva geométrica: sintética, analítica, de transformaciones.

Dimensiones geométricas: plana (2-D) y tridimensional (3-D).

Temas matemáticos relacionados: Teoría de Números, Análisis, Probabilidad, etc.

### Problema 1

La noción de triángulo isósceles aparece en algunos libros de texto de 4° curso de la anterior EGB (actual Primaria) (Ramos y otros, 1988). El problema que planteamos según la clasificación de Polya es de resolver. Proponemos una "guía de gestión de la enseñanza". Nos parece importante hacerlo de esta forma ya que los alumnos de Primaria están dando sus primeros pasos en la resolución de problemas y el papel del profesor es hacer sugerencias que ayuden a los alumnos. Hacer buenas sugerencias es un aspecto clave de la gestión y monitorización de la resolución de problemas.

Es un problema de geometría plana. Y pertenece al campo de la geometría propiamente dicha, en concreto al tópico de los triángulos. En relación a la perspectiva geométrica podemos señalar que como el carácter ejercicio/problema es subjetivo, dependerá de la estrategia de resolución que se utilice y ésta última de los conocimientos de los resolutores. En este caso, al nivel de Primaria, lo clasificamos dentro de la perspectiva sintética, pero mostraremos que a niveles superiores puede abordarse dentro de la perspectiva analítica.

**Enunciado:** *Construir tres triángulos isósceles diferentes teniendo por lado un segmento [AB] y uno de cuyos ángulos está comprendido entre la semirrecta Ax y el segmento [AB] (Ilustración 1)*

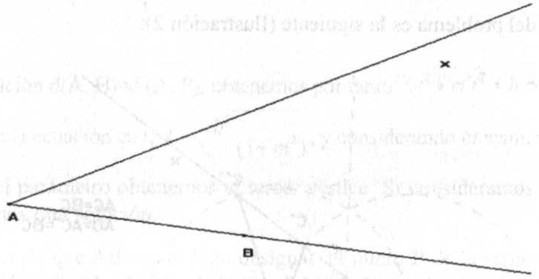



**Ilustración 1**

En el caso de que los tres lados coincidiesen, el triángulo sería equilátero, lo cual exigirá que el ángulo que forman ambas semirrectas sea de 60º. Estamos utilizando un criterio de clasificación de triángulos "inclusivo", es decir, considera al triángulo equilátero como un caso particular del isósceles.

Además, si sólo conocemos que el ángulo es de 60º, entonces obligatoriamente el triángulo isósceles pedido debe ser equilátero, sin más que utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Con regla y compás, la solución del problema consiste en trasladar la medida AB sobre la semirrecta Ax. Bastará con demostrar que el otro segmento (otro lado) coincide con AB. En este caso los tres triángulos pedidos en el enunciado se confunden en uno.

Por tanto vamos a considerar el caso del triángulo isósceles no equilátero. Utilizando el procedimiento antes descrito para el caso "límite" del triángulo equilátero, podemos obtener una solución al problema en general. Nos planteamos un análisis detallado. Para ello tenemos en cuenta lo siguiente:

— El lado AB puede ser el lado coincidente con otro, en cuyo caso ya lo hemos resuelto; ahora bien, trasladar AB sobre la semirrecta podemos hacerlo de dos formas distintas, según el centro de giro para trasladar AB. Si el centro de giro es A, obtenemos un triángulo y si el centro de giro es B obtenemos el otro.

— El lado AB es el lado desigual, como requisito previo para resolverlo es necesario conocer la propiedad relativa a la mediatriz del lado desigual, que dice: "la mediatriz sobre el lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos simétricos". Para resolverlo en esta situación basta con obtener el punto de corte entre la semirrecta Ax y la mediatriz de AB. Evidentemente por la propiedad anterior el triángulo construido tiene dos lados iguales y por tanto es isósceles.

La solución del problema es la siguiente (Ilustración 2):

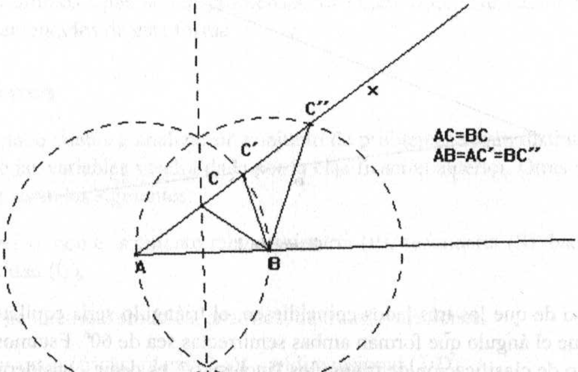


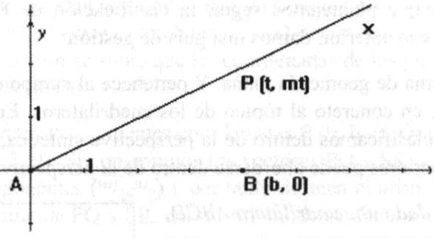

**Ilustración 2**

Adoptando una perspectiva analítica podemos resolver el problema teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

Fijar A como origen de coordenadas, la recta AB como eje de abscisas.

Asignar al punto B coordenadas (b, 0) y a la semirrecta Ax contenida en la recta de pendiente m, por lo tanto sus ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = t \\ y = mt \end{cases}$ siendo el parámetro $t \geq 0$.

En este caso el hecho de que AB sea un lado coincidente con otro, nos permite traducir la igualdad geométrica de lados a una ecuación en la que intervienen distancias euclídeas.




De la condición d(A, B)=d (A, P), obtenemos por tanto $\sqrt{t^2+m^2t^2}=b \Rightarrow t^2+m^2t^2=b^2$,

resolviendo la ecuación en t, $t=\sqrt{b^2/(1+m^2)}$, y considerando únicamente la solución

positiva del parámetro obtenemos el tercer vértice. Si consideramos d(B, A)=d(B, P) obtenemos otra solución.

Para el caso de que AB sea el lado desigual, el punto P de la semirrecta Ax es el vértice donde coinciden los dos lados iguales, por lo que la ecuación a resolver es

d(A, P)=d(B, P).

Hay que señalar que el caso "límite" del triángulo equilátero aparece cuando $m=\sqrt{3}$. Dejamos al lector una discusión completa.

De igual forma dejamos el estudio de la situación en la que las semirrectas son perpendiculares o forman un ángulo obtuso, tanto en el caso en que se utilicen estrategias basadas en la perspectiva sintética como analítica.

Para terminar el análisis de la tarea, a modo de resumen:

| CLASIFICACIÓN DE LA TAREA | | |
|---|---|---|
| **Criterio** | **Valores** | |
| Polya | Resolver | |
| Perspectiva | Sintética | Analítica |
| Nivel | Primaria | Post-secundaria |
| Dimensión | 2D | |
| Tópico | Triángulos | |

## Problema 2

En el problema 1 hemos considerado el tema de los triángulos, ahora vamos a considerar la familia de los cuadriláteros, haciendo hincapié en los paralelogramos. El problema que planteamos según la clasificación de Polya es de demostrar. Como en el caso anterior, damos una guía de gestión.

Es un problema de geometría plana. Y pertenece al campo de la geometría propiamente dicha, en concreto al tópico de los cuadriláteros. En este caso, al nivel de Primaria, lo clasificamos dentro de la perspectiva sintética, pero mostraremos que a niveles superiores puede abordarse dentro de la perspectiva analítica.

**Enunciado:** *dado un cuadrilátero ABCD, tomemos consecutivamente los puntos medios de los lados PQRS. Demostrar que PQRS es un paralelogramo (Ilustración 3).*

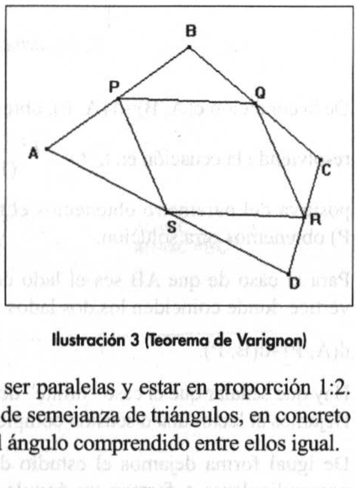


**Ilustración 3 (Teorema de Varignon)**

Construimos dos líneas auxiliares, AC y BD que triangulan la figura inicial en los siguientes triángulos: ABC, ACD, y BCD, BDA. Con estos triángulos observamos que PQ y SR son "paralelas medias" en los dos primeros y PS y QR en los segundos.

Las "paralelas medias" tienen la propiedad de ser paralelas y estar en proporción 1:2. Para comprobarlo basta con utilizar un criterio de semejanza de triángulos, en concreto el que se refiere a dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

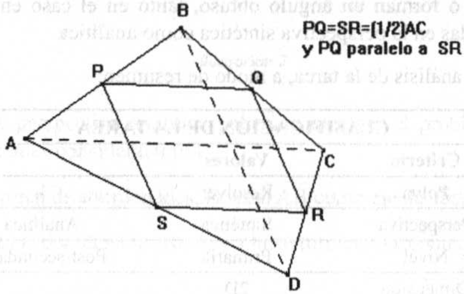


**Ilustración 4**

Es posible resolver el problema desde la perspectiva analítica, a nivel universitario. Para ello es necesario distinguir entre el Espacio Afín (plano afín) y el Espacio Euclídeo.

Fijaremos un sistema de referencia no ortogonal adecuado a las características del problema: el punto A será el origen de referencia, AD determinará uno de los ejes y AB el otro. De esta elección se sigue que las coordenadas de los puntos son A (0, 0), B (0, b), C (m, n) y D (d, 0).

Los puntos medios tendrán las siguientes coordenadas P (0, b/2), Q(m/2, (b+n)/2), R ((m+d)/2, n/2) y S(d/2, 0). Si construimos los vectores PQ y SR obtenemos que tienen las mismas componentes $({}^{m}/_{2}, {}^{n}/_{2})$ y por tanto definen el mismo vector libre y demuestra el paralelismo de PQ y SR; del mismo modo se obtiene el paralelismo del otro par de segmentos.

Este problema admite particularizaciones respecto al cuadrilátero inicial ABCD. Por ejemplo, si consideramos que es un cuadrado ¿qué podemos decir del paralelogramo PQRS? Dejamos al lector, además de este caso, los casos en que ABCD son un rectángulo, un rombo, o una cometa. Una cometa es un cuadrilátero en el que dos lados consecutivos son iguales y los otros lados también.

**CLASIFICACIÓN DE LA TAREA**

| Criterio | Valores | |
|---|---|---|
| Polya | Demostrar | |
| Perspectiva | Sintética | Analítica |
| Nivel | Primaria | Universitaria |
| Dimensión | 2D | |
| Tópico | Cuadriláteros | |

## Problema 3

En este problema consideramos la geometría espacial. Como cuerpo geométrico base del problema se utiliza el cubo. El problema que planteamos según la clasificación de Polya es de encontrar. En este caso, al nivel de Primaria, lo clasificamos dentro de la perspectiva sintética, pero al generalizar el problema se establece una conexión con la aritmética, mediante la búsqueda de un patrón.

**Enunciado:** *Dada la figura, calcular cuántos cubos hay.*

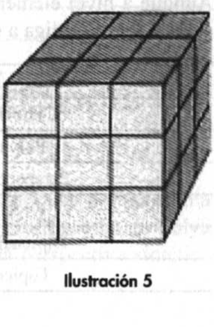
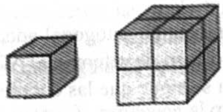


**Ilustración 5**

Para la resolución del problema, debemos tener presente que pueden considerarse cubos de distintos tamaños, como se aprecia en las siguientes ilustraciones:



Los cubos "unitarios" son $3^3$.

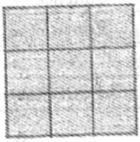
Para contar los cubos con dos divisiones, hemos de buscar una "estrategia de conteo", por ejemplo, contar los cubos que ocupan cada uno de los vértices, y a partir de cada uno, contar los cubos que son necesarios para alcanzar el otro vértice en el mismo plano.

La solución al problema, en este caso, es 27+8+1=36.

Este problema puede generalizarse, para un cubo con n divisiones y formando $(n+1)^3$ cubos unitarios. En este caso, hay también que generalizar las estrategias de conteo.

A determinados niveles, puede ser necesario hacer un problema similar, pero en dos dimensiones. Consistiría en contar el número de cuadrados de una determinada rejilla (Mason y otros, 1989)

Para resolverlo, es necesario también establecer alguna estrategia de conteo.



Aunque a nivel elemental, cabe generalizar a rejillas cuadriculadas con más divisiones, lo que obliga a una búsqueda de estrategias de conteo.

**CLASIFICACIÓN DE LA TAREA**

| Criterio | Valores | |
|---|---|---|
| Polya | Encontrar | |
| Perspectiva | Sintética | |
| Nivel | Primaria | Universitaria |
| Dimensión | 3D | |
| Tópico | Cubos | Teoría de números |

## Problema 4

En este problema consideramos la geometría espacial. Como cuerpo geométrico base del problema se utiliza el tetraedro. A partir de este problema estableceremos una conexión con la geometría plana.

El problema que planteamos según la clasificación de Polya es de encontrar. En este caso, al nivel de Secundaria, lo clasificamos dentro de la perspectiva sintética.

**Enunciado:** *Dado un tetraedro regular (Ilustración 6), encontrar una sección plana que sea un paralelogramo.*

Utilizaremos el hecho de que las paralelas medias de un triángulo determinan segmentos en proporción 1:2. Dado que el tetraedro regular tiene las caras triangulares basta con considerar un plano que se determine por los segmentos menores de dos paralelas medias a dos caras contiguas.

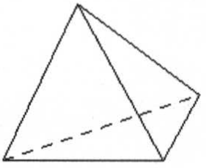


**Ilustración 5**

No hay un único plano, pero fijado uno de los segmentos menores, los tres planos que se construyen con los segmentos menores de las caras contiguas son el mismo, por tanto dejamos como cuestión a considerar: ¿cuántos planos distintos es posible construir?

Por la selección de los planos los cuatro lados se obtienen de igual longitud, la mitad del lado del tetraedro y paralelos, es decir, forman un rombo. Nos podemos plantear si en algún caso se obtendrá un cuadrado.

| CLASIFICACIÓN DE LA TAREA | |
|---|---|
| **Criterio** | **Valores** |
| Polya | Encontrar |
| Perspectiva | Sintética |
| Nivel | Secundaria |
| Dimensión | 3D |
| Tópico | Tetraedros, conexión 2D-3D |

## Problema 5

Vamos a plantear un problema de medida de áreas a través del uso de una trama cuadrada (geoplano). El problema que planteamos según la clasificación de Polya es de encontrar. Adecuado para estudiantes universitarios, la perspectiva sintética nos permite abordar su solución.

**Enunciado:** *Dada la trama cuadrada de la ilustración, Obtener el área del cuadrilátero GHIJ (Ilustración 7)*

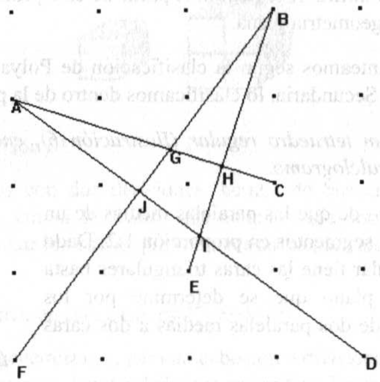



**Ilustración 6**

Identificamos en la figura que existen segmentos perpendiculares, para ello basta con tener en cuenta las pendientes de las rectas y que dos rectas de pendientes finitas *m* y *m'* son perpendiculares si y sólo si $m \times m' = -1$.

Utilizamos el teorema de Pick que nos da el área para una figura del geoplano en función del número de puntos interiores y frontera de la misma. El teorema de Pick determina que el área de un polígono con los vértices sobre el geoplano viene dada por: $i + \frac{f}{2} - 1$, donde *i* es el número de puntos interiores y *f* es el número de puntos frontera del polígono.

La solución pedida es $\frac{79}{150}$ *unidades cuadradas.*

**CLASIFICACIÓN DE LA TAREA**

| Criterio | Valores |
|---|---|
| Polya | Encontrar |
| Perspectiva | Sintética |
| Nivel | Universidad |
| Dimensión | 2D |
| Tópico | Medida de áreas |

## Problema 6

Planteamos un problema de semejanza de triángulos que está adaptado al nivel de estudiantes de E. Primaria. Es un problema de encontrar y utilizaremos propiedades sintéticas de la geometría plana.

**Enunciado:** *Se sabe que O es punto medio de PI, L es punto medio de OI, y S es punto medio de EI. Hallar los valores de SL y de SO (Ilustración 8) (Serra, 1993).*

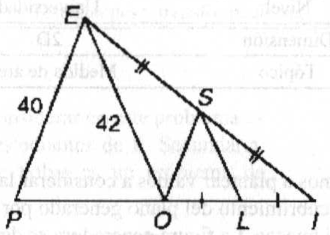



**Ilustración 7**

Para la resolución del problema se puede utilizar el siguiente criterio de semejanza de triángulos (Ilustración 9):

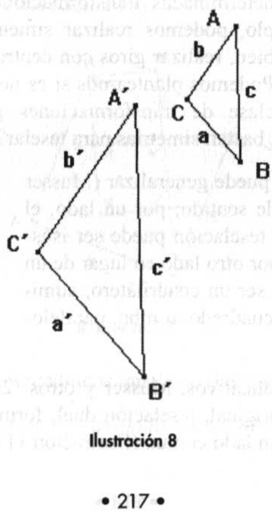



**Ilustración 8**

Dos triángulos ABC (lados a, b, c y ángulos A, B, C) y A'B'C'( lados a', b', c' y ángulos A', B', C') son semejantes si tienen dos lados proporcionales, a:a'::b:b' y el ángulo comprendido entre ellos igual, C=C'.

| CLASIFICACIÓN DE LA TAREA | |
|---|---|
| **Criterio** | **Valores** |
| Polya | Encontrar |
| Perspectiva | Sintética |
| Nivel | Universidad |
| Dimensión | 2D |
| Tópico | Medida de áreas |

## Problema 7

En el problema que vamos a plantear vamos a considerar las teselaciones del plano. Una teselación es un recubrimiento del plano generado por una figura de modo que no hay superposición ni huecos. La figura generadora se denomina tesela.

El problema se sitúa en el Nivel de E. Primaria y considera como tesela un triángulo equilátero. Desde el punto de vista de Polya es un problema de demostrar.

**Enunciado:** *Demostrar que es posible teselar el plano con un triángulo equilátero (Ilustración 10)(Musser y otros, 2000).*

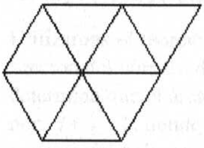


**Ilustración 9**

A partir de un triángulo equilátero, es posible realizar determinadas transformaciones geométricas, por ejemplo, podemos realizar simetrías centrales o axiales, o bien, realizar giros con centro en alguno de los vértices. Podemos plantearnos si es necesario utilizar más de una clase de transformaciones geométricas, por ejemplo, ¿bastan simetrías para teselar?

El problema planteado se puede generalizar (Musser y otros, 2000) en un doble sentido; por un lado, el triángulo generador de la teselación puede ser isósceles e incluso escaleno, por otro lado en lugar de un triángulo, la tesela podría ser un cuadrilátero, admitiéndose aquí cualquiera (cuadrado, rombo, paralelogramo e irregular).

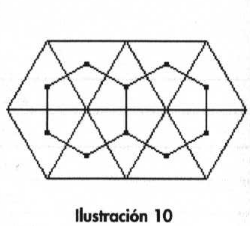


**Ilustración 10**

Para niveles superiores educativos, Musser y otros (2000) consideran una nueva teselación a partir de la original, teselación dual, formada uniendo los centros de los polígonos que tienen un lado común (Ilustración 11).

En el caso del hexágono regular ¿cuál es la tesela? ¿puedes generalizar el resultado?

| CLASIFICACIÓN DE LA TAREA | | |
|---|---|---|
| **Criterio** | **Valores** | |
| Polya | Demostrar | |
| Perspectiva | Sintética | |
| Nivel | Primaria | Secundaria |
| Dimensión | 2D | |
| Tópico | Teselaciones y transformaciones | |

## Problema 8

El objeto geométrico a considerar en este problema es el cuadrado, dirigido a estudiantes de E. Secundaria. Desde la perspectiva de Polya es un problema de encontrar.

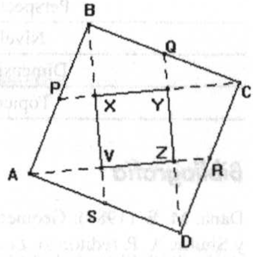



Ilustración 11

**Enunciado:** *Dado un cuadrado ABCD, se consideran los puntos medios de los lados PQRS. Se construyen los segmentos AR, PC, BS y QD. Encontrar el área del cuadrado VXYZ (Ilustración 12) (Dana, 1987).*

Este problema requiere descomponer el cuadrado y girar alguna de las partes correspondiente de tal forma que se construyan cuadrados, todos iguales al VXYZ (Ilustración 13).

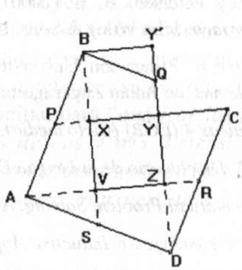



Ilustración 12

De esta forma se construyen 5 cuadrados iguales y si el lado del cuadrado original es a, el área del cuadrado VXYZ es $\frac{a^2}{5}$ *unidades cuadradas.*

En el problema podemos cuestionarnos por qué la figura interior es un cuadrado. Para responder a esta pregunta necesitamos que los pares de lados XY, VZ y XV, YZ sean paralelos, y que al menos un ángulo sea de 90º, con esto sería un rectángulo; para que sea cuadrado dos lados consecutivos deben ser iguales.

Podemos generalizar el problema del siguiente modo, en lugar de dividir los lados en dos partes iguales, dividirlo en n partes iguales. Por supuesto en estas condiciones el problema es para estudiantes de Universidad.

| CLASIFICACIÓN DE LA TAREA | |
|---|---|
| **Criterio** | **Valores** |
| Polya | Encontrar |
| Perspectiva | Sintética |
| Nivel | Secundaria |
| Dimensión | 2D |
| Tópico | Cuadrado y transformaciones |

## Bibliografía

Dana, M. E. (1987): Geometry-a Square Deal for Elementary School, en LIndquist M. M. y Shulte, A. P. (editores). *Learning and Teaching Geometry, K-12* (1987 Yearbook). National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Mason, J., Burton L. y Stacey K. (1989): *Pensar matemáticamente*. Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor, Madrid.

Musser, G. L., Burger, W. F. y Peterson, B. E. (2000): *Mathematics for Elementary Teachers, a Contemporary Approach*. John Wiley & Sons, Inc, New York.

Polya, G. (1965): *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción española: *Cómo plantear y resolver problemas*, de Julián Zugazagoitia Ed. Trillas. México)

Ramos y otros (1988): *Matemáticas 4 (EGB) (Ciclo medio)*. Santillana S.A. Madrid.

Real Academia Española (1992): *Diccionario de la Lengua Española*. Espasa Calpe. Madrid.

Schoenfeld, A. H.(1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.

Serra, M. (1993): *Discovering Geometry, An Inductive Approach*. Key Curriculum Press, Berkeley.