Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 19 (2001), 13–44.

Controlabilidad de E.D.P. Parabólicas

Manuel González Burgos
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

e-mail: burgos@numer.us.es

1 Introducción

En este trabajo presentaremos algunos resultados recientes de controlabilidad de problemas parabólicos. En concreto, presentaremos resultados de controlabilidad aproximada y exacta a cero para versiones lineales y no lineales de la ecuación del calor, así como para las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes.

De manera general, un problema de controlabilidad puede ser formulado de la siguiente forma: Supongamos fijado un intervalo temporal de observación $(0, T)$ y consideremos dado un sistema evolutivo gobernado por cierta ecuación o sistema de ecuaciones (diferenciales o en derivadas parciales) junto con determinadas condiciones iniciales y/o de contorno (sistema o problema de estado). Supongamos que podemos actuar sobre este sistema (a través de alguna condición de contorno, del segundo miembro de la ecuación, ...) mediante una función v (el control) que se toma en un cierto conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ (conjunto de controles admisibles). Fijado $v \in \mathcal{U}_{ad}$, llamaremos estado asociado al control v a la correspondiente solución $y_v = y_v(t)$ del sistema de estado. Dados dos valores y_0 e y_d en un determinado espacio de Banach H (de norma $|\cdot|_H$) donde la ecuación de estado tenga solución, diremos que el sistema de estado es exactamente controlable en H en el instante T si podemos encontrar un control $v \in \mathcal{U}_{ad}$ de tal forma que la correspondiente solución y_v con dato inicial y_0 verifique

$$y_v(T) = y_d\,.$$

Esta condición puede ser relajada de varias formas, obteniendo otras nociones de controlabilidad. En este sentido, diremos que el sistema de estado es aproximadamente controlable en H en el instante T si, en las condiciones anteriores, para cada $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que el correspondiente estado y_v verifica la condición

$$||y_v(T) - y_d||_H \leq \varepsilon.$$

Especialmente significativo resultará la controlabilidad exacta cuando $y_d \equiv 0$ (controlabilidad nula o exacta a cero), puesto que, en general, el estado 0 será un equilibrio del sistema y, desde el punto de vista físico, si somos capaces de conducir el sistema a cero en $t = T$, la solución sigue siendo nula para $t \geq T$ con tal de que tomemos como control $v \equiv 0$ para $t \geq T$.

Como pondremos de manifiesto más adelante, la irreversibilidad en tiempo de los problemas considerados hace que no se verifique la propiedad de controlabilidad exacta en ninguno de los casos. Veremos también que, al menos en las versiones lineales de estos problemas, sí se van a tener las propiedades de controlabilidad aproximada y exacta a cero (o nula) para cualquier instante de tiempo $T > 0$. Hay que destacar la gran diferencia que existe entre este tipo de sistemas y sistemas reversibles como la ecuación de ondas (prototipo de sistema reversible), ecuación para la que se dan las tres propiedades de controlabilidad mencionadas cuando el tiempo T es mayor que ciertos tiempos críticos que dependen del abierto Ω donde se plantea la ecuación y de la zona donde se ejerce el control (un subconjunto abierto de Ω o un trozo de la frontera de Ω) (cf. [18]).

En el trabajo nos centraremos básicamente en la descripción de los resultados de controlabilidad nula en cada uno de los casos pues, como hemos mencionado, no se va a verificar la propiedad de controlabilidad exacta y por otro lado, los correspondientes resultados de controlabilidad aproximada, como veremos, pueden ser obtenidos como consecuencia de los de controlabilidad nula.

Es bien conocido que la controlabilidad exacta a cero de un problema de evolución lineal equivale a la llamada desigualdad de observabilidad para el problema adjunto. La técnica que trataremos de describir pasa por demostrar esta desigualdad de observabilidad como consecuencia de una desigualdad global de tipo Carleman para el problema adjunto. Este tipo de desigualdades fueron probadas y utilizadas en [12] y [15] para obtener la controlabilidad nula de la ecuación del calor, aunque en el análisis que llevaremos a cabo, es de vital importancia la dependencia respecto de los datos de las constantes que aparecen en la desigualdad global de Carleman, dependencia que fue explicitada en [10].

Por comodidad y claridad del trabajo, estudiaremos el problema de la controlabilidad cuando el control se ejerce a través del segundo miembro de la ecuación considerada: control distribuido. Técnicamente, el estudio de la controlabilidad cuando el control se ejerce a través de la condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera es algo más complejo y será omitido en este trabajo.

Organizaremos el resto del trabajo del siguiente modo: dedicamos las Secciones 2 y 3 al estudio de los resultados de controlabilidad relativos a la ecuación del calor lineal y, en especial, probaremos la equivalencia que existe entre los conceptos de controlabilidad y ciertas propiedades del llamado sistema adjunto. En la cuarta Sección probaremos la denominada desigualdad de observabilidad para el problema adjunto y, como consecuencia, la controlabilidad nula de la ecuación del calor. De los resultados precedentes, en la Sección 5 obtendremos dos importantes consecuencias: por un lado, obtendremos de nuevo la propiedad de controlabilidad aproximada de la ecuación del calor utilizando un argumento cuantitativo y, por otro, una estimación del coste de la controlabilidad (nula y aproximada) de dicha ecuación. Acabaremos este trabajo introductorio presentando de forma somera algunos resultados de controlabilidad para versiones no lineales de la ecuación del calor y para el sistema incompresible de Stokes y Navier-Stokes.

2 La ecuación del calor. Controlabilidad Aproximada

En esta Sección y en lo que sigue, supondremos que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. Sean $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto no vacío de Ω y $T > 0$; denotemos $Q = \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. En el cilindro Q consideramos el problema:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $1_{\mathcal{O}}$ es la función característica del conjunto $\mathcal{O}$, $v \in L^2(Q)$ es el control (siguiendo la terminología expuesta en la Sección anterior, $\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q)$ es el conjunto de controles admisibles) e y_0, a y B están dados

$$y_0 \in L^2(\Omega), \quad a \in L^\infty(Q) \quad \text{y} \quad B \in L^\infty(Q)^N.$$

Hay que hacer notar que, debido a la presencia de la función característica $1_{\mathcal{O}}$, la acción del control sobre el sistema sólo se ejerce en el "pequeño" abierto $\mathcal{O}$ a través del segundo miembro de la EDP (control distribuido).

Es bien conocido que, bajo las condiciones anteriores, el problema (2.1) admite una única solución débil

$$y_v \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

solución que depende de forma continua de v e y_0. De esta forma podemos denotar $R(T;y_0)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ dado por:

$$R(T;y_0) = \{y_v(T) \,:\, y_v \text{ solución de (2.1) con } v \in L^2(Q)\},$$

llamado conjunto de controles finales o alcanzables. Con esta notación podemos definir los distintos conceptos de controlabilidad:

Definición 1 1. *Se dice que el sistema* (2.1) *es exactamente controlable en* $L^2(\Omega)$ *en el instante de tiempo* T *si para cada* $y_0 \in L^2(\Omega)$

$$R(T;y_0) \equiv L^2(\Omega),$$

es decir, si para cada y_0, y_d *en* $L^2(\Omega)$, *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica* $y_v(T) = y_d$.

2. *Se dice que el sistema* (2.1) *es aproximadamente controlable en* $L^2(\Omega)$ *en el instante de tiempo* T *si* $R(T;y_0)$ *es denso en* $L^2(\Omega)$ *para cada* $y_0 \in L^2(\Omega)$. *Dicho de otro modo, si para cualesquiera* y_0, $y_d \in L^2(\Omega)$ *y cada* $\varepsilon > 0$, *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica*

$$||y_v(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

3. *Por último, se dice que* (2.1) *es controlable a cero en el instante de tiempo* T *si para cualquier* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *se tiene*

$$0 \in R(T;y_0),$$

es decir, si para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica* $y_v(T) = 0$. ■

Observación 2 1. Debido al efecto regularizante del operador del calor, no es difícil concluir que la controlabilidad exacta en $L^2(\Omega)$ de (2.1) no es cierta, salvo posiblemente en el caso $\mathcal{O} = \Omega$. En efecto, es conocido (cf. [16]) que el operador del calor $\partial_t - \Delta$ tiene la siguiente propiedad de regularidad: Si $y \in \mathcal{D}'(\mathcal{V} \times (0,T))$ (con $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ un abierto) verifica

$$\partial_t y - \Delta y = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{V} \times (0,T),$$

entonces, fijado $t \in (0,T]$, la aplicación

$$y(t) : x \in \mathcal{V} \mapsto y(x,t) \in \mathbb{R}$$

es analítica en $\mathcal{V}$. Sin más que aplicar el resultado al abierto $\mathcal{V} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ deducimos que sea cual sea la regularidad del dato inicial y_0 y para cualquier control $v \in L^2(Q)$, la solución y_v de (2.1) (con a y B nulas) verifica $y_v(T)$ es analítica en $\mathcal{V} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. Esta propiedad, junto con la linealidad del sistema (2.1), imposibilita la controlabilidad exacta de éste en $L^2(\Omega)$. operador del

2. La controlabilidad exacta a cero de (2.1) implica la controlabilidad exacta a trayectorias de (2.1). De modo más preciso, sea $y^\star \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ solución de

$$\begin{cases} \partial_t y^\star - \Delta y^\star + B \cdot \nabla y^\star + a y^\star = 0 & \text{en} \quad Q, \\ y^\star = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y^\star(x,0) = y_0^\star(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

con $y_0^\star \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución de (2.1) verifica

$$y_v(x,T) = y^\star(x,T), \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Para comprobar este hecho, basta elegir $v \in L^2(Q)$ tal que la solución Y de (2.1) para los datos v e $y_0 - y_0^\star$ verifique $Y(\cdot,T) = 0$ en Ω. Tomando v como control y utilizando la linealidad del problema, es fácil deducir que la solución y_v de (2.1) (correspondiente a v e y_0) verifica $y_v = y^\star + Y$, de donde obtenemos (2.3). ∎

Antes de centrarnos en el problema de la controlabilidad nula de (2.1), recordemos algunos resultados sobre la controlabilidad aproximada de este sistema. Como consecuencia del Teorema de la Proyección se tiene que la controlabilidad aproximada de (2.1) en $L^2(\Omega)$ en el instante T equivale a probar la propiedad:

"Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y sea φ la solución de (problema adjunto)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot (B\varphi) + a\varphi = 0 & \textit{en} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \textit{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \textit{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $\varphi \equiv 0$ en $\mathcal{O} \times (0,T)$, entonces $\varphi_0 \equiv 0$ (y, así, $\varphi \equiv 0$ en Q)."

Se trata, por tanto, de probar una propiedad denominada de continuación única para el problema adjunto (2.4). Para la ecuación que nos ocupa, esta propiedad se deduce de resultados de continuación única para problemas de quasi-Stokes probados en [6]. Es interesante hacer notar que la propiedad de continuación única para el sistema (2.4) (y en consecuencia la controlabilidad aproximada de (2.1)) es válida para cualquier abierto $\mathcal{O}$ y para cualquier instante de tiempo T.

Es posible dar un procedimiento constructivo para calcular un control que conduzca el sistema (2.1) desde $y_0 \in L^2(\Omega)$, en el instante inicial, hasta un estado deseado $y_d \in L^2(\Omega)$, en el instante final T, con un error menor que ε. Se trata del método variacional desarrollado en [19]: Consideramos el funcional J_ε definido en $L^2(\Omega)$ dado por

$$J_\varepsilon(\varphi_0) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2 \, dx\, dt + \varepsilon||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} - (\varphi_0, y_d - \widetilde{y}(T))_{L^2(\Omega)} \quad (2.5)$$

donde φ es la solución de (2.4) asociada a φ_0, $\widetilde{y}$ es la solución de (2.1) asociada al control $v \equiv 0$ y donde mediante $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ estamos denotando el producto en $L^2(\Omega)$. El funcional J_ε es un funcional convexo, continuo y, como consecuencia de la propiedad de continuación única para (2.4), coercitivo en $L^2(\Omega)$. De hecho verifica (cf. [8])

$$\liminf_{||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi_0)}{||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

Estas propiedades garantizan que el funcional J_ε alcance el mínimo en un único $\widehat{\varphi}_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. Tomando en (2.1) el control $v_\varepsilon = \widehat{\varphi}^\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$, con $\widehat{\varphi}^\varepsilon$ la solución de (2.4) asociada a $\widehat{\varphi}_0^\varepsilon$, el estado $\widehat{y}_\varepsilon$—solución de (2.1) asociada a v_ε—verifica ([19, 8])

$$||\widehat{y}_\varepsilon(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Tenemos así descrito un procedimiento que construye, a partir de los datos y_0, y_d y ε, un control que resuelve el problema de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T. De hecho, el control construido v_ε es el de norma $L^2(\Omega)$ mínima entre los controles que verifican (2.2) (cf. [19]). Este procedimiento, combinado con un método de punto fijo, proporciona la demostración de la controlabilidad aproximada en $L^2(\Omega)$ de versiones no lineales de la ecuación del calor bajo condiciones de crecimiento sublineal de los términos no lineales de la ecuación (cf. [8, 22])

exacta

3 La ecuación del calor. Controlabilidad Nula o Exacta a cero

Pasemos a continuación al estudio de la controlabilidad nula de la ecuación (2.1) y para ello, supongamos dado $y_0 \in L^2(\Omega)$. Para llegar a nuestro objetivo razonaremos del siguiente modo: Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, para cada $\varepsilon > 0$, tomaremos $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$ con φ_ε la solución de (2.4) asociada a $\varphi_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ y φ_0^ε el mínimo en $L^2(\Omega)$ del funcional J_ε dado por (2.5) con $y_d \equiv 0$ ($\widetilde{y}$ es la solución de (2.1) asociada a y_0 y $v = 0$). Sabemos que la correspondiente solución de (2.1) asociada al control v_ε—y_ε—verifica

$$||y_\varepsilon(T)||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (3.6)$$

De las ecuaciones verificadas por $\widetilde{y}$ y φ deducimos

$$(\varphi_0, \widetilde{y}(T))_{L^2(\Omega)} = (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}$$

y, así, el funcional J_ε es:

$$J_\varepsilon(\varphi_0) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2 \, dx \, dt + \varepsilon ||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \varphi(x,0) y_0(x) \, dx.$$

En el mínimo φ_0^ε, se verifica la igualdad

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2 \, dx \, dt + \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x,0) y_0(x) \, dx + \varepsilon ||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{3.7}$$

Supongamos que existe una constante $C > 0$, independiente de φ_0, tal que se tenga

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2 \, dx \, dt, \tag{3.8}$$

con φ solución de (2.4) asociada a φ_0. Entonces, de (3.7) obtenemos (para cada $\eta > 0$)

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2 \, dx \, dt + \varepsilon ||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} = - \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x,0) y_0(x) \, dx \leq$$

$$\frac{1}{2}\eta^2 ||\varphi_\varepsilon(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\eta^2} ||y_0||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C\eta^2}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2\eta^2} ||y_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Elegimos $\eta^2 = 1/C$ y, teniendo en cuenta que $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$, deducimos

$$\frac{1}{2} ||v_\varepsilon||^2_{L^2(Q)} + \varepsilon ||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{2} ||y_0||^2_{L^2(\Omega)},$$

y, de aquí, una estimación (independiente de ε) de la norma en $L^2(Q)$ del control:

$$||v_\varepsilon||^2_{L^2(Q)} \leq C \, ||y_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Esta acotación uniforme respecto de ε permite extraer una subsucesión $\{v_{\varepsilon_n}\}$ (con $\varepsilon_n \downarrow 0$) débilmente convergente hacia $\hat{v} \in L^2(Q)$. Para esta subsucesión se tiene:

$$y_{v_{\varepsilon_n}} \to y_{\hat{v}} \text{ en } L^2(Q) \quad \text{e} \quad y_{v_{\varepsilon_n}}(T) \to y_{\hat{v}}(T) \text{ en } L^2(\Omega),$$

con $y_{v_{\varepsilon_n}}$ e $y_{\hat{v}}$ las correspondientes soluciones de (2.1) asociadas a v_{ε_n} y $\hat{v}$, respectivamente. Sin más que recordar (3.6), al tomar límites, obtenemos que $y_{\hat{v}}(T) = 0$ en Ω. Tenemos así:

Teorema 3 *Sea* $y_0 \in L^2(\Omega)$*. Supongamos que existe* $C > 0$ *(independiente de* φ_0*) tal que se verifica* (3.8)*. Entonces, existe un control* $\hat{v}$ *de* $L^2(Q)$ *tal que la correspondiente solución de* (2.1) *verifica* $y_{\hat{v}}(T) = 0$ *en* $L^2(\Omega)$*. Además, el control* $\hat{v}$ *puede ser elegido tal que*

$$||\hat{v}||^2_{L^2(Q)} \leq C\, ||y_0||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

■

Observación 4 Es interesante hacer notar que el argumento utilizado para demostrar la controlabilidad nula de (2.1) es un argumento cuantitativo. En particular, proporciona una estimación de la norma $L^2(Q)$ del control que da la controlabilidad nula, respecto de la norma $L^2(\Omega)$ del dato inicial y_0. Basta, por tanto, con estimar la constante C que aparece en la desigualdad (3.8) para estimar el coste de la controlabilidad nula del sistema (2.1). ■

La desigualdad (3.8) del sistema adjunto (2.4) recibe el nombre de desigualdad de observabilidad. Además de ser una condición suficiente para que se tenga la controlabilidad nula del sistema (2.1), también es una condición necesaria. De hecho, se tiene:

Teorema 5 *Supongamos que para cada* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *existe un control* $\hat{v} \in L^2(Q)$ *verificando* (3.9) *(*C *independiente de* y_0*) y tal que la correspondiente solución* $y_{\hat{v}}$ *de* (2.1) *satisface*

$$y_{\hat{v}}(\cdot, T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Entonces, se tiene la desigualdad de observabilidad (3.8) *para el problema adjunto* (2.4) *con la misma constante* C*.*

Demostración: Sea $y_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ que verifique (3.9) y tal que $y_{\hat{v}}$, la solución de (2.1) asociada a $\hat{v}$ e y_0, cumpla $y_{\hat{v}}(T) = 0$ en Ω. Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y φ la solución de (2.4) asociada a φ_0. Es fácil comprobar:

$$\int_\Omega \varphi(x,0) y_0(x)\, dx = -\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{v}(x,t)\varphi(x,t)\, dx\, dt \leq$$

$$||\varphi 1_{\mathcal{O}}||_{L^2(Q)} ||\hat{v}||_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C}\, ||\varphi 1_{\mathcal{O}}||_{L^2(Q)} ||y_0||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y_0 \in L^2(\Omega).$$

Así,

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2\, dx\, dt.$$

■

Aunque la norma que aparece a la izquierda de la desigualdad de observabilidad (3.8) es muy débil, a causa de la irreversibilidad del sistema (2.4), esta desigualdad no es fácil de probar. Varias han sido las técnicas utilizadas en la demostración de esta desigualdad, aunque la mayoría de las veces ésta ha sido demostrada como consecuencia del correspondiente resultado de controlabilidad nula. Mencionemos los trabajos de [32] y [17], donde se estudia la controlabilidad nula de la ecuación del calor ($a \equiv 0$, $B \equiv 0$). En el primero de ellos se prueba que la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas implica la controlabilidad nula de la ecuación del calor. Mediante este razonamiento se tendrá la desigualdad (3.8) si imponemos al abierto $\mathcal{O}$ y al tiempo T condiciones geométricas análogas a las que se imponen para la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas (cf. [18, 2]). El segundo de los trabajos utiliza desarrollos en series de Fourier de las soluciones de la ecuación del calor y propiedades óptimas de las autofunciones del Laplaciano. El resultado obtenido por estos autores prueba la controlabilidad nula (y, en consecuencia, la desigualdad de observabilidad para la ecuación del calor retrógrada) para cualesquiera abierto $\mathcal{O}$ y tiempo T. Sin embargo, esta técnica no puede generalizarse al caso de ecuaciones donde aparezcan coeficientes dependientes del tiempo. En el presente trabajo trataremos de describir una tercera técnica que demuestra la desigualdad de observabilidad para cualesquiera $\mathcal{O}$ y T cuando en la ecuación del sistema adjunto aparecen coeficientes en $L^\infty(Q)$ que dependen de la variable temporal. Demostraremos la desigualdad (3.8), veremos cómo depende la constante C respecto de los datos T, $||a||_\infty$ y $||B||_\infty$ y, en consecuencia, daremos una estimación de la norma $L^2(Q)$ del control de norma mínima que da la controlabilidad nula. Volveremos sobre este punto más adelante.

Como se puso de manifiesto, demostraremos la desigualdad (3.8) combinando desigualdades globales de tipo Carleman y estimaciones de energía para el problema adjunto.

4 Desigualdad global de Carleman. Desigualdad de Observabilidad

Dedicamos este apartado a demostrar la desigualdad de observabilidad (3.8) para el problema adjunto (2.4). Comenzaremos presentando una desigualdad de Carleman global para las soluciones de la ecuación del calor retrógrada cuando el segundo miembro de la ecuación está en $H^{-1}(\Omega)$.

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi = F_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $F_0, F_i \in L^2(Q)$ $(1 \le i \le N)$ y $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. Se tiene:

Lema 6 *Existen una función regular y estrictamente positiva en $\overline{\Omega}$, α_0, y dos constantes positivas C_0 y σ_0 (sólo dependientes de Ω y $\mathcal{O}$) tales que*

$$\begin{cases} s \displaystyle\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1} |\nabla\varphi|^2 \, dx\, dt + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dx\, dt \\ \le C_0 \left(s^3 \displaystyle\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dx\, dt + \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \, dx\, dt \right. \\ \qquad \left. + s^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2} |F_i|^2 \, dx\, dt \right), \end{cases} \tag{4.11}$$

para todo $s \ge s_0 = \sigma_0(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$, siendo φ la solución de (4.10) *asociada a $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. En* (4.11)*, la función $\alpha = \alpha(x,t)$ viene dada por*

$$\alpha(x,t) = \frac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}.$$

■

Este resultado está demostrado en [15] y está basado en una desigualdad similar para la ecuación del calor retrógrada con segundo miembro en $L^2(Q)$ (cf. [12]). El estudio de la dependencia de la constante s_0 respecto de T está hecho en [10] y es fundamental en el análisis de problemas de controlabilidad nula de versiones no lineales de (2.1) (cf. [11], [5]).

Observación 7

1. La construcción de la función $\alpha_0 = \alpha_0(x)$ está hecha en [12]. Se trata de una función que, entre otras propiedades, verifica:

$$\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \alpha_0 > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad \nabla\alpha_0 \neq 0 \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \mathcal{O}.$$

2. Cuando el segundo miembro de la ecuación retrógrada (4.10) es más regular (está en $L^2(Q)$) se obtiene una mejor desigualdad de Carleman (cf. [12]). En concreto, es posible añadir a la izquierda de (4.11) el nuevo sumando:

$$\frac{1}{s} \iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t) \left(|\partial_t \varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2 \right) dx\, dt.$$

3. También es posible obtener desigualdades del tipo (4.11) para las soluciones de problemas parabólicos más generales que el presentado. En concreto, podemos sustituir el operador $-\Delta$ por un operador lineal de segundo orden de la forma

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$

donde los coeficientes a_{ij} verifican ($\eta > 0$ es una constante fija)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ij} \in W^{1,\infty}(Q), \qquad \forall i,j : 1 \le i,j \le N, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \eta|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.c.t. } (x,t) \in Q. \end{array}\right.$$

Para la prueba de este resultado y otros relacionados, véase [15]. ■

En el caso particular de la ecuación adjunta (2.4) podemos escribir una desigualdad análoga:

Lema 8 *Existen dos constantes positivas C_1 y σ_1 (que sólo dependen de Ω y $\mathcal{O}$) tales que*

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \\ \qquad\qquad \displaystyle\le C_1 s^3 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt, \end{array}\right. \tag{4.12}$$

para $s \ge s_1 = \sigma_1(\Omega,\mathcal{O})\left(T + T^2 + T^2||a||_\infty^{2/3} + T^2||B||_\infty^2\right)$, siendo φ la solución de (2.4) asociada a $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$.

Demostración: Supongamos dados a, B y φ_0 y sea φ la correspondiente solución de (2.4). En particular, φ es solución de (4.10) con

$$F_0 = -a\varphi \quad \text{y} \quad F_i = B_i\varphi.$$

Del lema anterior deducimos,

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \\ \displaystyle\le C_0\left(s^3\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt + \iint_Q e^{-2s\alpha}|a\varphi|^2\,dx\,dt\right. \\ \qquad\qquad \displaystyle\left. + s^2\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-2}(T-t)^{-2}|B\varphi|^2\,dx\,dt\right) \end{array}\right.$$

para $s \geq s_0$. Acotamos los términos de la derecha de la siguiente forma:

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|a\varphi|^2\,dx\,dt \leq 2^{-6}T^6\|a\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt,$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-2}(T-t)^{-2}|B\varphi|^2\,dx\,dt \leq 2^{-2}T^2\|B\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt.$$

Elegimos $s \geq s_0$ tal que

$$2^{-6}T^6||a||_\infty^2 C_0 \leq \frac{1}{4}s^3, \qquad 2^{-2}T^2||B||_\infty^2 C_0 s^2 \leq \frac{1}{4}s^3,$$

es decir,

$$s \geq \widetilde{s}_1 = \max\left(s_0, 2^{-4/3}C_0^{1/3}T^2||a||_\infty^{2/3}, C_0T^2||B||_\infty^2\right).$$

De esta manera deducimos (4.12) para $C_1 = 2C_0$. Observando la nueva constante $\widetilde{s}_1$, no es difícil convencerse de que podemos elegir una nueva constante $s_1 \geq \widetilde{s}_1$ de la forma

$$s_1 = \sigma_1(\Omega, \mathcal{O})\left(T + T^2 + T^2||a||_\infty^{2/3} + T^2||B||_\infty^2\right).$$

■

Observación 9 De la desigualdad (4.12) obtenemos de nuevo, como una inmediata consecuencia, la propiedad de continuación única para el problema adjunto (2.4) que habíamos mencionado anteriormente. ■

Estamos en condiciones de probar la desigualdad de observabilidad (3.8) para el problema adjunto. Por comodidad en la notación, usaremos siempre C para designar una constante positiva genérica que sólo depende de Ω y de $\mathcal{O}$ y cuyo valor puede ir variando de una línea a la siguiente. De esta forma, tenemos:

Teorema 10 *Para cada $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ se tiene*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\left[C\,M(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)\right] \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2, \tag{4.13}$$

donde φ es la solución de (2.4) *asociada a φ_0 y $M(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty)$ viene dada por:*

$$M(T, \|a\|_\infty, \|B\|_\infty) = \left(1 + \frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1+T)\|B\|_\infty^2\right). \tag{4.14}$$

Demostración: De la desigualdad global de Carleman (4.12) para (2.4) obtenemos

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt, \tag{4.15}$$

para $s \geq s_1$. Por otro lado, es fácil comprobar

$$e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \leq 2^6 T^{-6} \exp\left(-CsT^{-2}\right) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q} \tag{4.16}$$

y

$$e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \left(\frac{16}{3}\right)^3 T^{-6} \exp\left(-CsT^{-2}\right) \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T/4, 3T/4], \tag{4.17}$$

siempre que

$$s \geq s_2 = \max\left(s_1, 3T^2 (8 \min_{x \in \overline{\Omega}} \alpha_0(x))^{-1}\right),$$

con α_0 la función introducida en el Lema 6.

Analizando la estructura de la constante s_2, observamos que podemos elegir $s_3 \geq s_2$ con s_3 de la forma

$$s_3 = \sigma_3 \left(T + T^2 + T^2 \|a\|_\infty^{2/3} + T^2 \|B\|_\infty^2\right)$$

y σ_3 sólo dependiente de Ω y $\mathcal{O}$. Trabajamos a partir de ahora con $s = s_3$. Teniendo en cuenta (4.16) y (4.17) y volviendo a (4.15) (escrita para $s = s_3$), deducimos

$$\iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |\varphi|^2 \, dx \, dt \leq \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2\right)\right] \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt. \tag{4.18}$$

Probaremos a continuación

$$\|\varphi(T/4)\|_{L^2}^2 \leq \exp\left[C\left(\frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + T\|B\|_\infty^2\right)\right] \iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |\varphi|^2 \, dx \, dt. \tag{4.19}$$

Es sencillo comprobar que la solución φ de (2.4) verifica la desigualdad de energía

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left((2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)t\right) \int_\Omega |\varphi|^2 \, dx\right) \geq 0$$

para $t \geq 0$. Si integramos esta desigualdad respecto del tiempo en el intervalo $[T/4, t]$ con $t \in [T/4, 3T/4]$ fija, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 \, dx & \geq & \exp\left[\left(2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right)(T/4 - t)\right] \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x, T/4)|^2 \, dx \\ & \geq & \exp\left[-\left(\|a\|_\infty + \dfrac{1}{2}\|B\|_\infty^2\right) T\right] \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x, T/4)|^2 \, dx \end{array}\right.$$

para todo $t \in [T/4, 3T/4]$. Integrando de nuevo esta última desigualdad respecto de t, llegamos a

$$\frac{T}{2} \int_\Omega |\varphi(x, T/4)|^2 \, dx \leq \exp\left[\left(\|a\|_\infty + \frac{1}{2}\|B\|_\infty^2\right) T\right] \iint_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |\varphi(x,t)|^2, \, dx \, dt$$

y, de aquí, (4.19).

De manera análoga, utilizando la desigualdad de energía, obtenemos

$$\int_\Omega |\varphi(x,0)|^2\,dx \le \exp\left[CT\left(\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right)\right]\int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2\,dx,$$

que junto a (4.19) y (4.18) conducen a la desigualdad de observabilidad deseada (4.13). ■

Una vez demostrada la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto y en vista de los Teoremas 3 y 5, estamos en condiciones de enunciar el resultado de controlabilidad exacta a cero para el sistema (2.1):

Teorema 11 *Supongamos dados* $T > 0$*,* $a \in L^\infty(Q)$*,* $B \in L^\infty(Q)^N$ *e* $y_0 \in L^2(\Omega)$*. Entonces, existe un control* $\widehat{v} \in L^2(Q)$ *tal que la correspondiente solución* $\widehat{y}$ *de* (2.1) *satisface*

$$\widehat{y}(x,T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Además, $\widehat{v}$ *puede ser elegido de manera que se tenga la acotación*

$$||\widehat{v}||_{L^2(Q)} \le \exp\left[C\,M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)\right]||y_0||_{L^2(\Omega)},$$

con $M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)$ *dada por* (4.14) *(Como siempre,* C *es una constante que sólo depende de* Ω *y* $\mathcal{O}$*).* ■

Con la técnica que acabamos de exponer hemos sido capaces de probar el resultado de controlabilidad nula del sistema (2.1). Además, hemos dado una cota de la norma $L^2(Q)$ del control construido en función de los datos del problema. Aprovechando el efecto regularizante del problema adjunto (2.4), es posible mejorar este resultado de controlabilidad nula. Este resultado mejorado se basa en una versión refinada de la desigualdad de observabilidad para (2.1). En concreto, se puede probar:

$$||\varphi(0)||_{L^2(\Omega)} \le \exp\left[C\,K(T,||a||_\infty,||B||_\infty)\right]\left(\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|\,dx\,dt\right)^2, \qquad (4.20)$$

donde

$$K(T,||a||_\infty,||B||_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T + \left(T + T^{1/2}\right)||a||_\infty + ||a||_\infty^{2/3} + (1+T)||B||_\infty^2. \qquad (4.21)$$

Trabajando con esta nueva desigualdad y cambiando ligeramente la expresión del funcional J_ε dado por (2.5), llegamos al siguiente resultado mejorado de controlabilidad nula de (2.1) (cf. [5, 10]):

Teorema 12 *Supongamos dados $T > 0$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe un control $\widehat{v} \in L^\infty(Q)$ tal que la correspondiente solución $\widehat{y}$ de* (2.1) *satisface*

$$\widehat{y}(x,T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Además, $\widehat{v}$ puede ser elegido de tal forma que se tenga la acotación

$$||\widehat{v}||_{L^\infty(Q)} \leq \exp\left[C\, K(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

donde $K(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)$ está dado por (4.21). ■

Observación 13 El resultado anterior y, en concreto, la acotación en $L^\infty(Q)$ del control que proporciona la controlabilidad nula de (2.1), es fundamental cuando se quiere tratar la controlabilidad exacta a cero de versiones no lineales de la ecuación del calor. Especificando algo más, esta acotación juega un papel primordial cuando se permite que la no linealidad tenga un crecimiento superlineal en el infinito (véase [11] y [5]). ■

5 Consecuencias: Controlabilidad Aproximada, Coste de la Controlabilidad

Dedicaremos esta Sección a ver dos consecuencias del procedimiento utilizado en la prueba de la controlabilidad nula del sistema (2.1). Por un lado, probaremos de nuevo la controlabilidad aproximada de (2.1) que, como hemos visto, ha sido demostrada anteriormente utilizando una propiedad cualitativa del sistema adjunto (la propiedad de continuación única). Este primer procedimiento presentado tenía la desventaja de no proporcionar la dependencia explícita del control construido respecto de los datos y_0 (dato inicial), y_d (estado deseado), ε (distancia permitida) y a y B (coeficientes de la ecuación). La nueva prueba que proponemos está basada en la propiedad de controlabilidad nula de (2.1) y, por tanto, en una propiedad cuantitativa del sistema adjunto: la desigualdad de observabilidad. Como consecuencia, obtendremos más información de la dependencia del control que da la controlabilidad aproximada respecto de los datos. Esto nos lleva a la segunda consecuencia de la que hablábamos: el coste de la controlabilidad nula y aproximada del sistema (2.1). Nos centraremos sobre todo en el caso de la controlabilidad aproximada, pues el resultado para la controlabilidad nula ha sido obtenido en el Teorema 11 (ver también el Teorema 12).

5.1 Controlabilidad Aproximada

Supongamos dados $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es construir un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución de (2.1) asociada a v, y, verifique (2.2).

Según pusimos de manifiesto en la Observación 2, la controlabilidad exacta a cero de (2.1) implica la controlabilidad exacta a cualquier trayectoria de este sistema. Teniendo en cuenta esta idea, vamos a dar un procedimiento que construye un control que da la controlabilidad aproximada de nuestro sistema a partir de los datos y_0, y_d y ε. Nuestra argumentación es como sigue:

- Dado ε, existe $\delta \in (0, T)$, que sólo depende de Ω, y_d, ε, a y B, tal que la solución w de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + B \cdot \nabla w + aw = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (T-\delta, T), \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (T-\delta, T), \\ w(x, T-\delta) = y_d(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.22}$$

  verifica

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

  Fijamos de este modo w y δ.

- En el intervalo $[0, T-\delta]$ dejamos que el sistema (2.1) evolucione libremente ($v \equiv 0$). Sea $y_1 \in C([0, T-\delta]; L^2(\Omega))$ la correspondiente solución, es decir, la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 + B \cdot \nabla y_1 + a y_1 = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, T-\delta), \\ y_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, T-\delta), \\ y_1(x, 0) = y_0(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

  (En particular, $y_1(T-\delta) \in L^2(\Omega)$).

- Finalmente, en el intervalo $[T-\delta, T]$, basta conducir el sistema de forma exacta desde $y_1(T-\delta)$ hasta la trayectoria $w(T)$. En efecto, en vista de la Observación 2, sabemos que existe $v_2 \in L^2(\Omega \times (T-\delta, T))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y_2 - \Delta y_2 + B \cdot \nabla y_2 + a y_2 = v_2 1_{\mathcal{O}} & \text{en} \quad \Omega \times (T-\delta, T), \\ y_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (T-\delta, T), \\ y_2(x, T-\delta) = y_1(x, T-\delta) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.23}$$

  posee una única solución $y_2 \in C([T-\delta, T]; L^2(\Omega))$ que verifica

$$y_2(x, T) = w(x, T) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Razonando así y tomando como control

$$v = \begin{cases} 0 & \text{en } [0, T-\delta], \\ v_2 & \text{en } [T-\delta, T], \end{cases}$$

el correpondiente estado asociado solución de (2.1) es

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{en } [0, T-\delta], \\ y_2 & \text{en } [T-\delta, T], \end{cases}$$

que, evidentemente, verifica (2.2). Obtenemos de esta forma un nuevo procedimiento constructivo de demostración de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T.

5.2 Coste de la Controlabilidad

Expondremos brevemente cómo los procedimientos que prueban la controlabilidad nula y aproximada de (2.1) proporcionan una acotación superior del coste de la controlabilidad. El caso en el que el coeficiente B de la EDP de (2.1) es idénticamente nulo está estudiado en profundidad en [10]. Veamos someramente qué ocurre en el caso en el que aparecen ambos coeficientes a y B.

Dados $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, denotemos $\mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon)$ al conjunto (no vacío)

$$\mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon) = \{v \in L^2(Q) : y_v \text{ solución de (2.1) satisface (2.2)}\}.$$

Siguiendo [10], la cantidad

$$\mathcal{C}(y_0, y_d; \varepsilon) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon)} ||v||_{L^2(Q)}$$

mide el coste de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T. Acotaremos superiormente este coste en el caso particular $y_0 \equiv 0$. Esto no supone ninguna restricción pues, de la linealidad de (2.1), se tiene

$$\mathcal{C}(y_0, y_d; \varepsilon) \equiv \mathcal{C}(0, z_d; \varepsilon)$$

con $z_d = y_d - y_1(T)$ e y_1 solución de (2.1) para $v = 0$.

Por otro lado, sea

$$\mathcal{U}_{ad}(y_0, 0) = \{v \in L^2(Q) : y_v \text{ solución de (2.1) satisface } y_v(T) = 0\}$$

que como sabemos, es un conjunto no vacío. El coste de la controlabilidad nula de (2.1) viene dado mediante la cantidad

$$\mathcal{C}(y_0, 0) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}(y_0, 0)} ||v||_{L^2(Q)}.$$

Observación 14 Hay que resaltar que la estimación de $\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon)$ sólo es interesante cuando $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$. En efecto, si $||y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, es fácil comprobar que $v \equiv 0$ está en $\mathcal{U}_{ad}(0, y_d; \varepsilon)$ y que, por tanto,

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \equiv 0.$$

■

Con esta notación, se tiene:

Teorema 15 *Supongamos dados $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $T > 0$. Entonces:*

1. Dado $y_0 \in L^2(\Omega)$, se tiene:

$$\mathcal{C}(y_0, 0) \leq \exp\left[C\, M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_0||_{L^2(\Omega)}$$

donde $M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)$ viene dada por (4.14).

2. Dado $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \exp\left[C\left(M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty) + N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)\right)\right] ||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.24}$$

para cualquier $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, donde $N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d) &= \frac{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + ||B||_\infty \left(1 + ||B||_\infty\right) ||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon} \\ &+ \frac{\left(||a||_\infty + ||B||_\infty^2\right) ||y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Demostración: Nos centraremos en la segunda parte del resultado pues el primer apartado ha sido demostrado anteriormente. Demostraremos esta segunda parte bajo la hipótesis $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$.

Observando la Sección 5.1, está claro que, dados y_d y ε, podemos acotar el coste

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq ||v_2||_{L^2(\Omega \times (T-\delta, T))}$$

donde v_2 es el control que conduce de forma exacta el sistema (2.1) desde 0 ($y_0 \equiv 0$), en el instante $T - \delta$, hasta $w(T)$ en el instante T. No hay que olvidar que $\delta > 0$ era tal que

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

siendo, a su vez, w la solución de (5.22). Utilizamos de nuevo la linealidad de los sistemas considerados para afirmar que el control v_2 es el control que conduce de forma exacta el sistema desde $-y_d$, en $T - \delta$, hasta 0 en T. Así,

$$||v_2||_{L^2(Q)} \leq \exp\left[C\, M(\delta, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.25}$$

donde M está dada por (4.14) y C es, como siempre, una constante que sólo depende de Ω y $\mathcal{O}$. Basta, para finalizar, acotar δ en función de los datos a, B, y_d y ε. La solución $w \in C([T-\delta, T]; L^2(\Omega))$ de (5.22) viene dada por la igualdad:

$$w(T-\delta+t) = S(t)y_d - \int_0^t S(t-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s)+B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds \tag{5.26}$$

donde $S(\cdot)$ es el semigrupo generado por la ecuación del calor en Ω con condiciones de Dirichlet sobre la frontera, es decir, si $u(t) = S(t)u_0$, u es la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces

$$||\partial_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)} = ||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\Delta u_0||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

y

$$||S(t)u_0 - u_0||_{L^2(\Omega)} \leq t||\Delta u_0||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{5.27}$$

Volviendo a (5.26),

$$w(T) = S(\delta)y_d - \int_0^\delta S(\delta-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s)+B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds$$

y así,

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq ||S(\delta)y_d - y_d||_{L^2(\Omega)}$$
$$+|| \int_0^\delta S(\delta-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s) + B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds||_{L^2(\Omega)}.$$

Si utilizamos que $S(\cdot)$ es un semigrupo de contracciones en $L^2(\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned} ||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)}||_{L^2(\Omega)} &\leq ||S(\delta)y_d - y_d||_{L^2(\Omega)} + ||a||_\infty \int_0^\delta ||w(T-\delta+s)||_{L^2(\Omega)}\,ds \\ &+ ||B||_\infty \int_0^\delta ||\nabla w(T-\delta+s)||_{L^2(\Omega)}\,ds. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Acotaremos las integrales que aparecen en esta última desigualdad utilizando propiedades de w. De la desigualdad de la energía verificada por w

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

deducimos

$$||w(T-\delta+s)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{\left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)s}, \quad \forall s \in (0,\delta). \tag{5.29}$$

Gracias a la regularidad del dato inicial ($y_d \in H^1_0(\Omega)$), también podemos obtener

$$\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||B||^2_\infty ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||a||^2_\infty ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

y de aquí,

$$\frac{d}{dt}\left\{||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty (T-\delta-t)}\right\} \leq ||a||^2_\infty ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty (T-\delta-t)},$$

para $t \in (T-\delta, T)$. Integrando respecto de t en $[T-\delta, T-\delta+s]$ y utilizando (5.29), llegamos a

$$\left\{\begin{aligned} &||\nabla w(T-\delta+s)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty s} + \frac{1}{2}||a||_\infty ||y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{\left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)s} \\ &\qquad \leq \left[||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} e^{\frac{1}{2}||B||^2_\infty s} + \frac{1}{\sqrt{2}}||a||^{1/2}_\infty ||y_d||_{L^2(\Omega)} e^{\left(||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty\right)s}\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{5.30}$$

Llevando (5.27), (5.29) y (5.30) a (5.28), obtenemos

$$\begin{aligned} ||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \delta ||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2}||y_d||_{L^2(\Omega)} \left[e^{\left(||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty\right)\delta} - 1\right] \\ + \frac{2}{||B||_\infty}||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} \left[e^{\frac{1}{2}||B||^2_\infty \delta} - 1\right]. \end{aligned}$$

Acotamos cada sumando por $\varepsilon/3$ y así, elegimos δ

$$\begin{aligned} \delta = \min \Bigg(T, \frac{\varepsilon}{3||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)}}, \frac{1}{||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty} \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}||y_d||_{L^2(\Omega)}}\right), \\ \frac{2}{||B||^2_\infty} \log\left(1 + \frac{||B||^2_\infty}{6||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}\varepsilon}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Bajo la hipótesis $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$, también se verifica

$$0 < \frac{\varepsilon}{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{\lambda_1}\frac{\varepsilon}{||y_d||_{L^2(\Omega)}} < \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{\varepsilon}{||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{\lambda_1}\frac{\varepsilon}{||y_d||_{L^2(\Omega)}} < \frac{1}{\lambda_1}$$

siendo λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H^1_0(\Omega)$. Así, si δ viene dado por (5.31), un simple cálculo proporciona

$$\frac{1}{\delta} \leq C\left(\frac{1}{T} + \frac{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + \left(||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)||y_d||_{L^2(\Omega)} + ||B||_\infty(1 + ||B||^2_\infty)||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}\right)$$

donde C es una nueva constante positiva que sólo depende de Ω. Volviendo a (5.25), ahora es fácil obtener (5.24) y la prueba del Teorema. ■

Observación 16 1. En el caso del coste de la controlabilidad aproximada, la hipótesis $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ no supone ninguna restricción. Dado $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, podemos considerar $y_d^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$||y_d^\varepsilon - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

De esta manera, el coste se puede acotar por:

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \mathcal{C}(0, y_d^\varepsilon; \varepsilon/2).$$

Basta, por último, estimar las normas $||\Delta y_d^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}$ y $||\nabla y_d^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}$ en función de ε y $||y_d||_{L^2(\Omega)}$.

2. Razonando de manera ligeramente distinta a como hemos hecho, es posible suponer que $y_d \in \mathcal{D}((-\Delta)^{\alpha/2})$ con $\alpha \in [1,2]$ para obtener una acotación distinta a (5.24):

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \exp\left[C\left(M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty) + N_\alpha(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)\right)\right] ||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.32}$$

con

$$N_\alpha(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d) = \left(\frac{||(-\Delta)^{\alpha/2} y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}\right)^{2/\alpha}$$
$$+ \frac{||B||_\infty (1 + ||B||_\infty) ||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} + \left(||a||_\infty + ||B||_\infty^2\right) ||y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}.$$

Para la demostración en el caso en que el coeficiente B es nulo, véase [10].

3. Observando (5.32), es claro que la mejor potencia, respecto de ε, se obtiene cuando $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y, así, la estimación del coste de la controlabilidad aproximada es del orden de $\exp(K/\varepsilon)$, con K una constante positiva que depende de Ω, $\mathcal{O}$, T e y_d. En [10] se demuestra que, en el caso de la ecuación del calor con coeficientes constantes, la estimación del coste de la controlabilidad aproximada es del orden de $\exp(K/\sqrt{\varepsilon})$. En este último caso, además se prueba que, en algún sentido, la estimación obtenida es óptima.

4. La cota superior (5.24) dada para el coste de la controlabilidad aproximada no puede ser óptima respecto de y_d. Sabemos que si y_d es una trayectoria del sistema (2.1), es decir, si $y_d = y^\star(T)$ siendo $y^\star$ la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y^\star - \Delta y^\star + B \cdot \nabla y^\star + a y^\star = 0 & \text{en} \quad Q, \\ y^\star = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y^\star(x,0) = y_0^\star(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

con $y_0^\star \in L^2(\Omega)$, el sistema (2.1) es exactamente controlable a y_d en el instante T. En consecuencia, el coste asociado $\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon)$ debe permanecer acotado respecto de ε, cuando $\varepsilon \to 0$.

5. Cuando $B \equiv 0$, en [10] se obtiene también una estimación del coste de la controlabilidad finito-aproximada de (2.1). Dado un subespacio de dimensión finita E de $L^2(\Omega)$, se dice que (2.1) es finito-aproximadamente controlable en el instante T si, para cada $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución y_v de (2.1) verifica

$$||y_v(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \qquad \Pi_E(y_v(T)) = \Pi_E(y_d),$$

siendo Π_E el operador de proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ en E. Este resultado de controlabilidad se demuestra cambiando ligeramente el funcional J_ε dado por (2.5) (cf. [21]). La estimación del coste de la controlabilidad finito-aproximada dada en [10] se basa, de nuevo, en la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto (2.4) ($B \equiv 0$). ■

6 Controlabilidad de otros problemas parabólicos

Acabaremos el trabajo presentado algunos resultados recientes de controlabilidad para otros problemas parabólicos. En concreto, nos centraremos en versiones no lineales de la ecuación del calor y en las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes. En [4] (y en las referencias que allí aparecen) pueden encontrarse otros interesantes resultados de controlabilidad para otros problemas no lineales (ecuación del calor con términos no lineales discontinuos, con condiciones de contorno no lineales, ...).

6.1 Ecuación del calor casilineal

Con la misma notación de la Sección 2, consideramos el problema parabólico no lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = v 1_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ y = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{6.33}$$

donde y_0 y v están dados y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función localmente lipschitziana. Bajo estas hipótesis, podemos escribir

$$f(s,p) = f(0,0) + g(s,p)s + G(s,p) \cdot p \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

para ciertas funciones g y G de L^∞_{loc}.

La controlabilidad de (6.33) ha sido analizada en varios artículos recientes. Destacamos los trabajos [12], [9], [15], [11], [1] y [5] en lo referente a la controlabilidad nula y [8], [22], [11] y [5] en lo que se refiere a la controlabilidad aproximada.

Para no extendernos excesivamente, nos centraremos en la descripción de los resultados de controlabilidad y no controlabilidad más generales demostrados. Éstos son los resultados probados en [11] y [5], donde se permite que la no linealidad f tenga un crecimiento superlineal en el infinito y donde no se imponen condiciones de buen signo a f. En concreto, en [11] se trata el caso de la ecuación del calor semilineal, es decir, el caso $f = f(s)$, mientras que en [5] se analiza el caso más general $f = f(s,p)$.

En [5] se prueba:

Teorema 17 *Supongamos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que f es una función localmente lipschitziana verificando $f(0,0) = 0$ y*

$$\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} = 0, \qquad \lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} = 0. \quad (6.34)$$

Entonces, existe un control $v \in L^\infty(Q)$ tal que el problema (6.33) admite una solución $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ que verifica

$$y(x,T) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

■

Observación 18 1. En particular, el Teorema 17 afirma que, bajo la hipótesis (6.34), para cada $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existe un control v tal que (6.33) admite una solución global definida en $[0,T]$. Hay que destacar que esto no es cierto para cualquier segundo miembro y cualquier dato inicial pues estamos en el rango de no linealidades para las que se dan fenómenos de explosión en tiempo finito para (6.33).

2. En la prueba del Teorema 17 se construye un control regular que hace que (6.33) admita solución en el espacio $C([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, espacio donde se puede asegurar la unicidad de solución. ■

La versión mejorada de la desigualdad de observabilidad para (2.4), (4.20), juega un papel crucial en la demostración del Teorema 17. Usando (4.20) se prueba un resultado de controlabilidad nula para una versión linealizada de (6.33) con controles en L^∞ y en un adecuado intervalo temporal (intervalo que depende inversamente del tamaño de los potenciales g y G puestos en la función alrededor de la cual se linealiza). Aplicamos posteriormente un argumento de punto fijo para obtener el resultado deseado.

El mismo método de demostración del Teorema 17 permite probar para (6.33) un resultado de controlabilidad nula local para cualquier no linealidad considerada:

Teorema 19 *Sea f una función localmente lipschitziana en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, \mathcal{O}, T, f)$) tal que si $y_0 \in W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, con $p > N$, verifica*

$$||y_0||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \varepsilon_0,$$

existe un control $v \in L^\infty(Q)$ tal que el problema (6.33) *admite una solución global $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ que verifica*

$$y(x,T) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

■

Una consecuencia del Teorema 17 es la controlabilidad aproximada de (6.33). Para ello supondremos una hipótesis ligeramente distinta a (6.34). También supondremos que, para ciertos $y_0^\star \in W^{1,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ y $v^\star \in L^\infty(Q)$, el sistema (6.33) admite una solución global $y^\star \in C([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. Se tiene ([5]):

Teorema 20 *Supongamos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que f es una función localmente lipschitziana que verifica*

$$\begin{aligned} &\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\, d\lambda \right| = 0, \\ &\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\, d\lambda \right| = 0, \end{aligned} \tag{6.35}$$

uniformemente en $(s_0, p_0) \in K$, para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (con $f(0,0)$ no necesariamente nulo). Supongamos también que (6.33) *admite al menos una soución global $y^* \in C^0([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, correspondiente a los datos $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ y $v^* \in L^\infty(\mathcal{O}\times(0,T))$. Entonces, para cada $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe $v \in L^\infty(Q)$ tal que* (6.33) *admite una solución que verifica* (2.2).
■

Observación 21

1. La hipótesis de existencia de al menos una solución global impuesta al sistema (6.33) es, evidentemente, una condición necesaria para que haya controlabilidad aproximada. Esta condición se tiene inmediatamente cuando $f(0,0) = 0$, si tomamos $y^\star \equiv 0$, solución de (6.33) asociada a los datos $y_0^\star = 0$ y $v^\star = 0$.

2. La condición (6.35) se puede escribir de forma más simple cuando f sólo depende de s (caso semilineal). En este caso, en la expresión (6.35) no aparece la variable p y se puede demostrar (cf. [11]) que equivale a

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s| \log^{3/2}(1+|s|)} = 0$$

y que ésta, a su vez, equivale a

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0.$$

■

En el caso más simple $f = f(s)$ se pueden establecer resultados de no controlabilidad de (6.33). En [11] se demuestra:

Teorema 22 *Existen funciones localmente Lipschitz $f = f(s)$ tales que $f(0) = 0$, satisfaciendo*

$$|f(s)| \sim |s| \log^p (1+|s|) \quad \text{con} \quad |s| \to \infty \tag{6.36}$$

con $p > 2$, para las cuales, para cualquier T, el sistema (6.33) *no es exactamente controlable a cero en el instante T.* ■

Se llega a un resultado análogo para la controlabilidad aproximada de (6.33):

Teorema 23 *Existe una función localmente Lipschitz que verifica* (6.36)*, con $p > 2$, para la que el sistema* (6.33) *no es aproximadamente controlable en ningún tiempo $T > 0$.* ■

Observación 24 1. La demostración de los Teoremas 22 y 23 está basada en la elección de no linealidades f para las que se dan, por un lado, fenómenos de explosión en tiempos arbitrariamente pequeños (lo que impide la controlabilidad nula de (6.33)) y, por otro, no linealidades para las que se dan fenómenos de obstrucción (lo que imposibilita la controlabilidad aproximada). En concreto, en el Teorema 22 se utiliza la función

$$f(s) = \int_0^{|s|} \log^p (1+|\sigma|)\, d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

(con $p > 2$) y se prueba que el control no puede compensar el fenómeno de explosión que se produce en $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. En el caso del Teorema 23 se elige, para $p > 2$,

$$f(s) = \int_0^{s} \log^p (1+|\sigma|)\, d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para la que se demuestra que el conjunto de estados alcanzables $R(T; y_0)$ está uniformemente acotado (en norma L^1) en $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ independientemente del control v.

2. En vista de los resultados de controlabilidad y no controlabilidad para (6.33) expuestos en el caso más simple $f = f(s)$ está claro que, respecto de las funciones f que verifican la condición de crecimiento en el infinito (6.36), hay un intervalo de valores de p para los que se desconoce si se dan o no las propiedades de controlabilidad aproximada o nula: No sabemos qué ocurre cuando f satisface (6.36) con $p \in [3/2, 2]$.

3. En relación con el comentario anterior, la hipótesis de crecimiento en el infinito impuesta a $f(s,p)$ para que el sistema (6.33) sea exactamente controlable a cero (hipótesis (6.34)) es una consecuencia de la expresión del coste de la controlabilidad nula para la ecuación del calor lineal (2.1) que se vio en el Teorema 12. En concreto, es consecuencia de la presencia del factor
$$\exp\left[C\left(||a||_\infty^{2/3} + ||B||_\infty^2\right)\right]$$
en dicha expresión. Hay que resaltar que esta expresión también contiene factores de orden
$$\exp\left[C\left(\left(T + T^{1/2}\right)||a||_\infty + T||B||_\infty^2\right)\right],$$
factores que no imponen restricciones de crecimiento en el infinito adicionales a f, puesto que pueden ser "controlados" eligiendo tiempos de control suficientemente pequeños (cf. [11], [5]). ■

6.2 Ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes

Seguimos manteniendo la misma notación anterior e introducimos el espacio de funciones
$$\mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^N : \nabla \cdot \phi = 0 \text{ en } \Omega\}.$$
Denotamos por H y V, respectivamente, las clausuras de $\mathcal{V}$ en $L^2(\Omega)^N$ y en $H_0^1(\Omega)^N$. Se tiene:
$$H = \{u \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$
y
$$V = \{u \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0 \text{ en } \Omega\}.$$
Mediante n estamos representando el vector normal unitario y exterior a la frontera de Ω.

Para cada $v \in L^2(\Omega)^N$ y cada $y_0 \in H$, consideramos el sistema incompresible de Navier-Stokes con condiciones de no deslizamiento sobre la frontera

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.37}$$

donde $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ es el campo de velocidades del fluido y p es la presión. Por comodidad suponemos que la constante de velocidad cinemática es igual a 1.

Dos son las principales dificultades que complican el estudio de las propiedades de controlabilidad del sistema (6.37). Por un lado, está la presencia del término no lineal $(y \cdot \nabla)y$ y, por otro, la presencia del término de gradiente de presión ∇p. Estas dos dificultades hacen que la controlabilidad nula y aproximada de (6.37) sean cuestiones abiertas y que sólo hayan sido obtenidas respuestas parciales por parte de algunos autores.

Una interesante simplificación de (6.37) es el sistema de tipo Stokes

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)a + (b \cdot \nabla)y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.38}$$

donde $a, b \in L^\infty(Q)^N$. Se trata de un sistema más simple que (6.37) (es un sistema lineal) pero que aún conserva algunas dificultades importantes: por un lado, sigue apareciendo el término de gradiente de presión ∇p y por otro, el término $(b \cdot \nabla)y$ que crea problemas cuando b no es regular. Trataremos de describir algunas de las más importantes aportaciones sobre la controlabilidad de (6.37) y (6.38).

6.2.1 Controlabilidad Aproximada

Con respecto a la controlabilidad aproximada en H de los problemas (6.37) y (6.38), el estudio más completo ha sido llevado a cabo en [6] y [13]. En estos trabajos se estudian problemas de continuación única en $\mathcal{O} \times (0, T)$ del sistema adjunto de (6.38)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - a^T \nabla \varphi - \nabla \cdot (\varphi b^T) + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad \varphi(T) = \varphi_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.39}$$

con $\varphi_0 \in H$. Como consecuencia de estas propiedades de continuación única se obtienen los resultados de controlabilidad siguientes:

1. Cuando el coeficiente a está en $L^\infty(Q)^N$ y b es suficientemente regular (por ejemplo, $b \in L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$ si $N = 3$) se tiene un resultado de controlabilidad aproximada de (6.38) en H en el instante T para cualquier abierto $\mathcal{O}$.

2. Cuando el coeficiente b es menos regular, en concreto, cuando $a, b \in L^\infty(Q)^N$ se tiene que el sistema (6.38) es aproximadamente controlable en H en el instante T cuando el pequeño abierto $\mathcal{O}$ es un entorno de la frontera de Ω.

3. Bajo condiciones especiales sobre los coeficientes a y b se demuestra un resultado de controlabilidad aproximada de (6.38) utilizando controles v que tienen una componente nula.

4. Combinando la propiedad de continuación única de (6.39) (y los resultados de controlabilidad aproximada del sistema lineal (6.38)) con un argumento de punto fijo (como en [8]), se llega a la controlabilidad aproximada de un sistema no lineal como (6.38), pero donde se ha sustituido el término no lineal $(y \cdot \nabla)y$ por $(\mathbf{T}_M(y) \cdot \nabla)y$ o por
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{T}_M(y)_k y)$$
siendo $M > 0$ y $\mathbf{T}_M(s_1, ..., s_N) = (T_M(s_1), ..., T_M(s_N))$ y
$$T_M(s) = \begin{cases} M & \text{si} \quad s > M, \\ s & \text{si} \quad |s| \leq M, \\ -M & \text{si} \quad s < -M. \end{cases}$$
En el caso particular del término $(\mathbf{T}_M(y) \cdot \nabla)y$, hay que volver a suponer que $\mathcal{O}$ es un entorno de la frontera de Ω. ■

Hay que resaltar que para que se tengan las propiedades de controlabilidad mencionadas, sobre el coeficiente b y sobre el abierto $\mathcal{O}$ se han impuesto hipótesis especiales (o bien b regular, o bien, $\mathcal{O}$ un entorno de $\partial\Omega$). El problema está en que, para poder aplicar los resultados de continuación única a (6.39), es necesario probar previamente que la solución (φ, π) es suficientemente regular. La dificultad radica en que hay que probar que el término de presión π está en $L^2_{loc}(Q)$. Las hipótesis impuestas a b y $\mathcal{O}$ son hipótesis suficientes que aseguran esta regularidad a π.

Mediante un procedimiento completamente distinto, en [3] se ha probado la controlabilidad aproximada en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ del problema incompresible bidimensional de Navier-Stokes con condiciones de deslizamiento sobre la frontera de tipo Navier:
$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y \cdot n = 0, \quad \sigma y \cdot \tau + \nabla \times y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.40}$$

donde σ es una función suficientemente regular definida sobre $\partial\Omega$, mediante τ estamos denotando el vector unitario tangente a la frontera ($N = 2$) e $y_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$ verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla \cdot y_0 = 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}, \\ y_0 \cdot n = 0, \quad \sigma y_0 \cdot \tau + \nabla \times y_0 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.41}$$

En [3] se prueba:

Teorema 25 *Sea $T > 0$ y sean $y_0, y_d \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$ verificando* (6.41)*. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])^2$ tal que el problema* (6.40) *admite una (única) solución*

$$(y, p) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])^2 \times C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$$

que verifica

$$||y(T) - y_d||_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

■

El método utilizado en la prueba del Teorema 25 (método de retorno) fue introducido por Coron para el estudio de un problema de estabilización y fue utilizado para la prueba de la controlabilidad exacta del sistema de Euler bidimensional. Este método tiene importantes limitaciones: Por un lado, sólo es aplicable en el caso bidimensional y cuando consideramos condiciones de deslizamiento de tipo Navier sobre la frontera del dominio. Por otro, sólo da la controlabilidad aproximada de (6.40) en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ aunque, para $K \subset \Omega$ un compacto fijo, el mismo procedimiento proporciona la controlabilidad aproximada de (6.40) en $W^{1,\infty}(K)$.

6.2.2 Controlabilidad exacta a cero

Finalizamos este trabajo comentando los resultados de controlabilidad obtenidos en [13] y [14]. En concreto, en estos trabajos se demuestra un resultado de controlabilidad exacta local para el sistema de Navier-Stokes. De manera más precisa (y con la notación previa), sea $(\widehat{y}, \widehat{p})$ una trayectoria regular del sistema de Navier-Stokes, es decir, $(\widehat{y}, \widehat{p})$ solución (regular) de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widehat{y} - \Delta \widehat{y} + (\widehat{y} \cdot \nabla)\widehat{y} + \nabla \widehat{p} = 0, \qquad \nabla \cdot \widehat{y} = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ \widehat{y} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.42}$$

Se tiene:

Teorema 26 *Supongamos que $y_0 \in V$ y que*

$$(\widehat{y}, \widehat{p}) \in W^{1,\infty}(0,T; V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^N) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$$

es solución de (6.42)*. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que si*

$$||y_0 - \widehat{y}(0)||_V \leq \varepsilon,$$

existe un control $v \in L^2(Q)^N$ tal que (6.37) *admite una solución fuerte (y, p) que verifica*

$$y(x,T) = \widehat{y}(x,T) \quad p.c.t.\ x \in \Omega.$$

■

Usando una versión apropiada del Teorema de la función implícita, el Teorema 26 se reduce a la prueba de un resultado de controlabilidad exacta a cero para la linealización del sistema de Navier-Stokes alrededor de la trayectoria $\widehat{y}$. Como ya hemos visto en la ecuación del calor, este problema de controlabilidad nula equivale a una desigualdad de observabilidad para el problema adjunto, problema que adquiere la forma del problema (6.39), pero donde los coeficientes son muy regulares. Esta desigualdad de observabilidad se obtiene combinando, por un lado, una desigualdad global de Carleman para la ecuación del calor (que tiene en el segundo miembro, entre otros sumandos, un término de gradiente de presión) y por otro, estimaciones de la presión π en términos del campo de velocidades φ. Desde el punto de vista técnico, es en este segundo paso donde se concentra gran parte de la dificultad de la prueba del Teorema 26.

Referencias

[1] S. Anita, V. Barbu, *Null controllability of nonlinear convective heat equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **5** (2000), 157–173.

[2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 5, 1024–1065.

[3] J.M. Coron, *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/1996), 35–75.

[4] A. Doubova, *Análisis y Control de Algunas EDP No Lineales con Origen en Mecánica*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2000.

[5] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, enviado a SIAM J. Control Optim.

[6] C. Fabre, *Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/1996), 267–302.

[7] C. Fabre, G. Lebeau, *Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes*, Comm. Partial Differential Equations **21**, no. 3-4, (1996), 573–596.

[8] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **125A** (1995), 31–61.

[9] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 87–103.

[10] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4–6, 465–514.

[11] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal.Ñon Linéaire **17** (2000), no. 5, 583–616.

[12] Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Lecture Notes Series 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Seoul, 1996.

[13] O. Yu. Imanuvilov, *On exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 97–131.

[14] O. Yu. Imanuvilov, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **6** (2001), 39–72.

[15] O. Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, *On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, to appear.

[16] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[17] G. Lebeau, L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 335–356.

[18] J.L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30**, (1988), 1–68.

[19] J.L. Lions, *Remarks on approximate controllability*, J. Analyse Math. **59**, (1992), 103–116.

[20] D. L. Russel, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math. **52**, (1973), no. 3, 189–211.

[21] E. Zuazua, *Finite dimensional null-controllability of the semilinear heat equation*, J. Math. Pures et Appl. **76**, (1997), 237–264.

[22] E. Zuazua, *Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities. Recent advances in control of PDEs*, Control Cybernet., **28** no. 3, (1999), 665–683.