Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *17 (2001), 83–99.*

Análisis Teórico de Varias Cuestiones con Origen en Mecánica de Fluidos

Blanca Climent
Depto. de Ecuaciones Diferenciales
y Análisis Numérico
Universidad de Sevila
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA
e-mail: `blanca@numer.us.es`

En este artículo, presentamos varios resultados recientes relacionados con las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes y también con las ecuaciones que describen el comportamiento de una clase de fluidos no Newtonianos. Asimismo, indicamos algunas cuestiones abiertas de interés.

1 Soluciones débiles-renormalizadas

El primer tema que abordamos se refiere al uso del concepto de *solución renormalizada* para la resolución de algunos problemas en derivadas parciales no lineales no escalares.

Las soluciones renormalizadas aparecen, por ejemplo, en el análisis de ecuaciones elípticas no lineales del tipo

$$-\Delta u + \nabla \cdot \Phi(u) = f \tag{1}$$

(completadas con condiciones de contorno adecuadas), consideradas en un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^N$, cuando Φ es una función para la cual tan sólo se sabe que es continua y/o $f = f(x)$ es un segundo miembro para el cual tan sólo sabemos que está en $L^1(\Omega)$.

En el planteamiento de este problema, aparecen enseguida dos dificultades. En efecto, a menos que u esté acotada, $\Phi(u)$ no tiene por qué ser localmente integrable. Puesto que no podemos en principio interpretar $\Phi(u)$ como una distribución, tenemos que preguntarnos qué sentido tiene $\nabla \cdot \Phi(u)$. En segundo lugar, como f sólo está en $L^1(\Omega)$, no es lícito usar u como función "test", de modo que no somos capaces de obtener las estimaciones débiles habituales para u.

Cualquiera de estas dos razones induce a introducir un nuevo concepto de solución, que es el siguiente:

Diremos que u *es una solución renormalizada de* (1) *si*

$$u \in L^1(\Omega), \qquad T_M(u) \in H_0^1(\Omega) \quad \forall M > 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{n\le|u|\le 2n} |\nabla u|^2\, dx = 0$$

y, para toda función $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *de soporte compacto, se verifica la igualdad*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla\cdot(h(u)\nabla u) + h'(u)|\nabla u|^2 \\ \quad + \nabla\cdot(h(u)\Phi(u)) - h'(u)\Phi(u)\nabla u = f\, h(u) \end{array} \right. \tag{2}$$

en el sentido de las distribuciones.

Aquí T_M es la función truncante definida por $T_M(s) = s$ si $s \in [-K, K]$ y $T_M(s) = K\mathrm{sign}(s)$ fuera de $[-K, K]$.

Puede comprobarse que ahora, puesto que h es de soporte compacto, podemos sustituir en (2) u por $T_M(u)$ para M suficientemente grande. Esto hace que cada sumando de (2) tenga sentido. Por ejemplo, el segundo sumando puede ser escrito en la forma

$$h'(T_M(u))|\nabla T_M(u)|^2$$

y pertenece a $L^1(\Omega)$.

Obsérvese que lo que se ha hecho para conseguir (2) equivale a multiplicar la ecuación de partida por la función "test" $\varphi h(u)$, donde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ es de soporte compacto.

Las soluciones renormalizadas parecen haber sido introducidas por R. DiPerna y P.L. Lions en [19], en el contexto de las ecuaciones de Boltzmann. En relación con la resolución de problemas elípticos para ecuaciones como (1), han sido utilizadas por P.L. Lions y F. Murat, cf. [25]. También se puede consultar la referencia [6] (aquí aparecen bajo el nombre de soluciones de entropía y una apariencia diferente) y los artículos [9] y [10], donde previamente se habían introducido y analizado conceptos similares.

Para problemas de evolución, véanse las referencias [7] y [8] y las que se citan allí. Nuestro interés por las soluciones renormalizadas nació a raíz de unas conferencias impartidas por F. Murat en 1992 en la Universidad de Sevilla que dieron lugar a la redacción del trabajo [25].

Una cuestión de gran interés (y aparentemente también de gran dificultad), que carece en la actualidad de respuesta satisfactoria, consiste en generalizar el concepto de solución renormalizada al caso de un sistema. Más generalmente, se desconoce realmente el marco adecuado en el que debe ser resuelto (por ejemplo) el sistema elíptico

$$-\Delta u_i + \nabla \cdot \Phi^i(u) = f^i, \qquad 1 \leq i \leq m, \tag{3}$$

donde las $\Phi^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son (sólo) continuas y las $f^i \in L^1(\Omega)$.

No obstante, seremos capaces de indicar a continuación de qué modo puede ser usado el concepto de solución renormalizada en el marco de ciertos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales particulares.

La idea principal consistirá en permitir que algunas componentes de la solución resuelvan algunas de las ecuaciones en un sentido renormalizado y que, por el contrario, otras resuelvan la ecuaciones restantes en el sentido débil habitual. Esta idea parece haber sido utilizada por primera vez por R. Lewandowski en [23]. También se puede consultar el trabajo [5], de J. Baranger y A. Mikelić.

En [14], se analiza un sistema para un modelo "académico" de tipo *reacción-difusión*. Este sistema podría ser utilizado para describir la difusión de un contaminante en un medio que ocupa los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ó $N = 3$), con $u = u(x)$ la concentración del contaminante y $v = v(x)$ la temperatura del medio:

$$\begin{cases} -\Delta u - \nabla \cdot (\beta(v) X'(u)) = f & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v - \nabla \cdot (\beta'(v) X(u)) = g & \text{en } \Omega, \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

En (4), $X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función acotada y de clase C^1, i.e.

$$X \in (C^1(\mathbb{R}))^N \cap (C_b^0(\mathbb{R}))^N, \tag{5}$$

β es una función cuyas derivadas segundas están esencialmente acotadas, i.e.

$$\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}) \tag{6}$$

y

$$f, g \in H^{-1}(\Omega). \tag{7}$$

Obsérvese que no hemos impuesto restricciones al crecimiento de X'. De acuerdo con ello, encontramos para u una de las dos dificultades que hemos explicado antes: parece lógico buscar u y v en el espacio $H_0^1(\Omega)$, ya que f y g pertenecen a $H^{-1}(\Omega)$. Pero entonces $\nabla \cdot (\beta(v)X'(u))$ puede no tener sentido. Por este motivo, buscaremos un par $\{u, v\}$ tal que u es solución de la primera ecuación en sentido renormalizado y v es solución de la segunda en el sentido débil habitual.

A continuación, enunciaremos el resultado de existencia obtenido, que aprovecharemos para indicar qué es una *solución debil-renormalizada*:

> *Existen u y v, con $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tales que la segunda ecuación de* (4) *se verifica en sentido distribucional o débil y la primera se verifica en el sentido siguiente:*
>
> $$\begin{cases} -\nabla \cdot (h(u)\nabla u) + \nabla u \cdot \nabla h(u) - \nabla \cdot (\beta(v)h(u)X'(u)) \\ \qquad +\beta(v)X'(u) \cdot \nabla h(u) = fh(u) \quad \textit{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \forall h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \quad \textit{de soporte compacto.} \end{cases} \tag{8}$$

La demostración está detallada en [14]. La idea principal consiste en plantear problemas aproximados adecuados, truncando X con $T_{1/\varepsilon}$ para después pasar al límite cuando $\varepsilon \to 0$. Hemos de tener en cuenta que la presencia de la no linealidad obliga a demostrar convergencia fuerte de las soluciones de los problemas aproximados. No basta con la convergencia débil. Esto complica la demostración.

Los resultados de los que hablaremos a continuación se refieren a sistemas con origen en Mecánica de Fluidos, relacionados con las ecuaciones de Navier-Stokes, que fueron el objeto de estudio de la Tesis Doctoral [13]. Presentaremos versiones simplificadas del problema tanto en el caso estacionario como en el caso de evolución:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \\ -\nabla \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \\ \partial_t k - \nabla\cdot(\mu(k)\nabla k + B(k)) + u\cdot\nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u\,. \end{cases} \tag{10}$$

En estos sistemas, los datos del problema son las funciones $D \mapsto \Phi(D)$, $k \mapsto \mu(k)$ y $k \mapsto B(k)$, el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la constante $\nu > 0$ y la función f. La incógnita es la terna $\{u, p, k\}$. En el caso de (9), se busca una *solución débil-renormalizada* definida para $x \in \Omega$ que cumpla condiciones de contorno apropiadas. Por el contrario, en el caso de (10), fijado un tiempo final $T > 0$, buscaremos una solución definida para $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ que habrá de verificar adecuadas condiciones de contorno y condiciones iniciales para $t = 0$.

En pocas palabras, esto significará que pediremos a las dos primeras ecuaciones de (9) ó (10) que se cumplan en el sentido habitual y que pediremos además que la tercera ecuación sea satisfecha en un sentido similar a (8).

Las dificultades que presentan estos sistemas son de índole diversa. En primer lugar, las dificultades habituales en un sistema de Navier-Stokes, es decir, la presencia del término de transporte $(u\cdot\nabla)u$ (que es no lineal) y la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot u = 0$. En segundo lugar, las funciones μ y B carecen de hipótesis de crecimiento y, para el término de *producción*

$$\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u,$$

sólo cabe esperar la pertenencia a $L^1(\Omega \times (0,T))$. Son las dos razones que nos hacen recurrir al concepto de renormalización. Pero hay otra dificultad adicional y es el paso al límite en el tensor $-\nabla\cdot(k\Phi'(\nabla u))$ en los problemas aproximados. Por ello, se hace también necesario imponer hipótesis que permitan utilizar argumentos de monotonía.

Con objeto de comprender mejor estos problemas, veamos de qué manera surgen y cómo conducen a estas ecuaciones.

Una de las posibles motivaciones tiene su origen en el modelado de la *Turbulencia*. Sean $U = U(x,t)$ y $P = P(x,t)$ respectivamente el campo de velocidades y la presión de un fluido viscoso incompresible en régimen turbulento. Entonces el par $\{U, P\}$ debe satisfacer las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t U - \nu\Delta U + (U\cdot\nabla)U + \nabla P = F\,, \qquad \nabla\cdot U = 0. \tag{11}$$

Debido a las grandes fluctuaciones que puede sufrir el campo de velocidades, se debe renunciar a su cálculo directo. Se necesita "promediar" en algún sentido.

Denotaremos u y p las correspondientes variables promediadas y pondremos $u = \overline{U}$, $p = \overline{P}$. Entonces

$$U = u + u', \qquad P = p + p', \tag{12}$$

donde u' y p' son las correspondientes perturbaciones debidas al carácter turbulento del flujo.

Es usual reemplazar la búsqueda de una solución $\{U, P\}$ de (11) por la búsqueda de u y p. Por tanto, interesa averiguar cuáles son las ecuaciones satisfechas por estas variables. Cuando se "promedia" en tiempo, i.e. cuando u y p están dadas por las igualdades

$$u(x) = \frac{1}{T}\int_0^T U(x,t)\,dt, \quad p(x) = \frac{1}{T}\int_0^T P(x,t)\,dt,$$

tras algunos cálculos, se llega a que

$$-\nabla\cdot(\nu Du + R) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \qquad \nabla\cdot u = 0. \tag{13}$$

Cuando se "promedia" en algún otro sentido, usando alguna otra técnica que permita escribir igualdades como (12), las ecuaciones encontradas son

$$\partial_t u - \nabla\cdot(\nu Du + R) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f\,, \qquad \nabla\cdot u = 0. \tag{14}$$

Aquí, f es el promedio de los esfuerzos exteriores que actúan sobre las partículas del fluido, i.e. $f = \overline{F}$ y R es el llamado *tensor de Reynolds*, que se obtiene a partir del término no lineal $(u\cdot\nabla)u$ como sigue:

$$R = \{R_{ij}\}\,, \quad \text{con } R_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}\,.$$

Como en (13) y (14) aparecen las incógnitas u_i', es necesario hacer hipótesis de modelado adicionales que relacionen R con u y permitan *cerrar* el sistema.

En el caso de los modelos con una ecuación, es habitual imponer la siguiente hipótesis *de tipo Boussinesq*, cf. [22]:

$$R = \nu_T\, Du\,, \qquad \text{donde } \nu_T = G(k) \qquad \text{(una relación algebraica).} \tag{15}$$

En (15), k es la *energía cinética turbulenta*, i.e.

$$k = \overline{\frac{1}{2}|u'|^2}.$$

El problema podrá quedar cerrado considerando (13) ó (14) junto con (15) y una ecuación adicional para k.

Sin embargo, cuando se intenta deducir una ecuación para k, nuevamente encontramos términos en los que aparecen las perturbaciones turbulentas u_i' (y k'). Más precisamente, en el caso del sistema (13), se llega a la ecuación

$$-\nabla \cdot \left(\nu\nabla k + (\overline{-(p'+k')u'})\right) + u\cdot\nabla k = R : Du - \overline{\tfrac{\nu}{2}|Du'|^2}, \qquad (16)$$

donde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$. Cuando el sistema satisfecho por u y p es (14), obtenemos

$$\partial_t k - \nabla \cdot \left(\nu\nabla k + (\overline{-(p'+k')u'})\right) + u\cdot\nabla k = R : Du - \overline{\tfrac{\nu}{2}|Du'|^2}\,. \qquad (17)$$

Por tanto, es necesario aproximar algunos de los términos de (16) y de (17). Esto se consigue introduciendo nuevas hipótesis:

- Naturalmente, se usa de nuevo (15) para aproximar $R : Du$.
- Para el término de disipación $\overline{\frac{\nu}{2}|Du'|^2}$, hoy día se acepta casi siempre la misma aproximación: Una constante positiva por $k^{3/2}$.
- En cambio, la aproximación del término $\overline{-(p'+k')u'}$ ha sido realizada por varios autores de diferentes maneras. En la mayoría de los trabajos, este término es aproximado por un campo de la forma $c\,\nu_T\nabla k$, donde c es una constante positiva que suele determinarse en base a valores experimentales, véanse por ejemplo [26], [29] y sus referencias. En otros casos, se aproxima por un vector $B(k)$ o, más generalmente, por un vector de la forma $c\,\nu_T\nabla k + B(k)$, cf. [11].

Por simplicidad, hemos eliminado en (9) y (10) los últimos sumandos de (13) y (14), porque no conducen a dificultades de envergadura en su tratamiento. También, hemos sustituido $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ por ∇u por la misma razón.

Así pues, queda claro que sistemas como (9) ó (10) pueden ser usados para describir el comportamiento de ciertos fluidos turbulentos. Otra motivación para este tipo de problemas puede encontrarse en la *Mecánica de Fluidos no Newtoniana* (cf. por ejemplo [28]). En este caso, el par $\{u, p\}$ proporciona el campo de velocidades y la presión reales del fluido y k es la temperatura. Aquí, se está admitiendo que el tensor de esfuerzos tangenciales τ depende de ∇u y k en la forma siguiente:

$$\tau = \nu\nabla u + k\Phi'(\nabla u)\,.$$

En los artículos [15], [16] y [17], aparecen los principales resultados que hemos obtenido sobre este tema. Más precisamente, en [15] presentamos la existencia de solución débil-renormalizada de (9) cuando $N = 2$ y cuando $N = 3$. Vemos que, si por ejemplo $B = 0$, la solución encontrada es de hecho una solución débil (en el sentido habitual). En estas condiciones, podemos probar unicidad cuando ν es suficientemente grande.

En [16], se muestran variantes y generalizaciones de la situación anterior. Así, es posible demostrar existencia de solución débil-renormalizada para sistemas que contienen términos más complicados que $k\Phi'(\nabla u)$ y $\mu(k)\nabla k$. También probamos en [16] existencia y unicidad de solución débil para B no necesariamente nula, pero sometida a ciertas condiciones de crecimiento, con $\|f\|_{H^{-1}}$ suficientemente pequeña.

El caso de evolución, en contra de lo que pueda parecer a primera vista, no es una mera generalización del caso anterior. En primer lugar, indicaremos que sólo podemos conseguir existencia de solución cuando $N = 2$ ya que, cuando $N = 3$, no se sabe acotar uniformemente las aproximaciones $\partial_t u^\varepsilon$ en el espacio adecuado. Esto se debe a la presencia del término de transporte $(u\cdot\nabla)u$ (sí sería posible probar la existencia de solución en ausencia de este término, i.e. para sistemas similares a (10) de tipo Stokes).

En segundo lugar, mencionemos que, para pasar al límite, es necesario probar la convergencia fuerte de las funciones truncadas $T_M(k^\varepsilon)$ para cada $M > 0$. En el caso estacionario, se puede usar un argumento debido a P. L. Lions y F. Murat y recogido en [25] que ahora no funciona. Se utiliza pues un argumento diferente, esencialmente debido a D. Blanchard y H. Redwane que es notablemente más complicado, cf. [8].

Por último, la condición inicial no se puede comprobar a través de los mecanismos habituales. Hace falta recurrir a un resultado de compacidad específico, que se debe a J. Simon. Véanse [13], [16] y [17] para algunos resultados adicionales (entre otros, un resultado de existencia de solución débil-renormalizada para turbulencia tridimensional con flujo medio bidimensional).

Permanecen abiertas, entre otras, las siguientes cuestiones:

- La unicidad de solución débil-renormalizada.
- Las demostraciones que hacemos se basan en todos los casos por acotaciones que necesitan la hipótesis

$$\mu \geq \mu_0 > 0.$$

Sería interesante encontrar resultados similares para funciones μ positivas arbitrarias (por ejemplo, $\mu(k) = (k_+)^\alpha$, con $\alpha > 0$).

- Aplicar estas técnicas a modelos de turbulencia con más de una ecuación como, por ejemplo, el conocido modelo $k - \varepsilon$.
- La existencia de solución débil-renormalizada de (10) cuando $N = 3$, por ejemplo, con condiciones de Diricihlet homogéneas para u y condiciones iniciales para u y k. Posiblemente, en este caso, lo adecuado es re-escribir el sistema, o más precisamente la tercera ecuación, introduciendo la nueva variable $e = \frac{1}{2}|u|^2 + k$ (la energía cinética total promediada). Pero esta vía debe ser explorada con detalle.

2 El efecto de la rugosidad en un fluido laminar con condiciones de tipo Fourier

Consideramos a continuación un fluido cuya velocidad u^ε y presión p^ε verifican una ecuación de Stokes en el dominio $\mathcal{O}_\varepsilon$, periódico en $x' = (x_1, x_2)$, limitado superiormente por una pared $\mathcal{R}_\varepsilon$ que soporta *asperezas* de pequeño tamaño ε e inferiormente por una pared plana $\mathcal{P}$. Suponemos que el sistema de referencia es fijo respecto de $\mathcal{R}_\varepsilon$, de manera que esta pared está en reposo y $\mathcal{P}$ se mueve con velocidad constante $g = (g_1, g_2, 0)$.

El caso en el que las partículas del fluido se adhieren a las paredes (condiciones de *no deslizamiento*) ha sido estudiado en [1] y [2] para fluidos gobernados por las ecuaciones de Stokes y en [3] para fluidos de Navier-Stokes. Para la ecuación de Laplace con condiciones de Fourier y/o condiciones de Neumann, se dan resultados análogos en [12], [27] y [30].

En [4], hemos considerado un fluido de Stokes con condiciones *de tipo Fourier* sobre las paredes:

$$\sigma_\varepsilon \cdot n + k u^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathcal{R}_\varepsilon. \tag{18}$$

Aquí, σ_ε es el *tensor de esfuerzos*, i.e.

$$\sigma_\varepsilon = -p^\varepsilon \mathrm{Id.} + \nu D u^\varepsilon, \quad \text{con} \quad D u^\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^t). \tag{19}$$

Por otra parte, k es el *coeficiente de fricción* (una constante positiva) y $n = n(x)$ es vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$, dirigido hacia el exterior.

Estas condiciones son válidas cuando permitimos que el fluido, de algún modo, pueda penetrar las paredes del dominio. Sería más realista imponer *condiciones de deslizamiento*, que son incompatibles con los efectos de porosidad y toman la forma

$$u^\varepsilon \cdot n = 0, \qquad (\sigma_\varepsilon \cdot n)_{\text{tang}} + ku^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathcal{R}_\varepsilon, \tag{20}$$

donde $(\sigma_\varepsilon \cdot n)_{\text{tang}}$ denota la componente tangencial de $\sigma_\varepsilon \cdot n$. Sin embargo, esta situación conduce a dificultades que, por el momento, no sabemos resolver.

Debido a la periodicidad de $\mathcal{O}_\varepsilon$, realizaremos el análisis de las ecuaciones en un dominio acotado Ω_ε que, por traslaciones, genera todo $\mathcal{O}_\varepsilon$.

Más precisamente, pongamos

$$\Omega_\varepsilon = \{ (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_i < \ell_i, \quad i = 1, 2;\ 0 < x_3 < r_\varepsilon(x') \},$$

donde $r_\varepsilon(x') = r(x')(1 + \varepsilon\eta(x', x'/\varepsilon))$ para algunas funciones periódicas y Lipschitz-continuas $r = r(x')$ y $\eta = \eta(x', y')$. Pongamos también

$$R_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \cap \{ x_3 = r_\varepsilon(x') \}, \quad P = \partial\Omega \cap \{ x_3 = 0 \}.$$

Entonces la velocidad u^ε y la presión p^ε del fluido verifican

$$\begin{cases} -\nu\Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0, \qquad \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon \cdot n + ku^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } R_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon \cdot n + k(u^\varepsilon - g) = 0 \quad \text{sobre } P, \\ \{u^\varepsilon, p^\varepsilon\} \quad \text{periódica en } x', \text{ de período } (\ell_1, \ell_2), \end{cases} \tag{21}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido.

La influencia de la rugosidad viene medida por el arrastre (resistencia al avance del fluido) asociado a $\mathcal{R}_\varepsilon$, que se define como

$$T_\varepsilon = -g \cdot \int_{R_\varepsilon} \sigma_\varepsilon \cdot n \, d\Gamma = g \cdot \int_{R_\varepsilon} ku^\varepsilon \, d\Gamma. \tag{22}$$

Es decir, T_ε es la proyección de la componente normal de los esfuerzos ejercidos por el fluido sobre $\mathcal{R}_\varepsilon$ en la dirección $-g$.

Después de demostrar la existencia y unicidad de solución de (21), la cuestión interesante consiste en averiguar qué ocurre con u^ε, p^ε y T_ε cuando $\varepsilon \to 0$.

Cuando se consideran condiciones de Dirichlet sobre R_ε y P, el efecto de la rugosidad es despreciable. En otras palabras, la velocidad, la presión y el arrastre asociados a $\mathcal{R}_\varepsilon$ convergen a los que corresponden a un fluido que se mueve en un dominio análogo sin asperezas.

En nuestro caso, en presencia de condiciones de Fourier, el campo de velocidades y la presión correspondientes a un dominio sin asperezas están determinados por el sistema

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = 0, \qquad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma \cdot n + ku = 0 \quad \text{sobre } R, \\ \sigma \cdot n + k(u - g) = 0 \quad \text{sobre } P, \\ \{u, p\} \quad \text{periódica en } x', \text{ de período } (\ell_1, \ell_2). \end{cases} \tag{23}$$

Aquí, hemos introducido la notación

$$\Omega = \{\, (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_i < \ell_i, \quad i = 1, 2; \quad 0 < x_3 < r(x') \,\}$$

y

$$R = \partial\Omega \cap \{\, x_3 = r(x') \,\}.$$

Sin embargo, en nuestra situación, u^ε, p^ε y T_ε convergen, en un sentido apropiado, respectivamente a u^0, p^0 y T_0. El par $\{u^0, p^0\}$ está determinado por ser solución del problema límite o *problema homogeneizado*

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + \nabla p^0 = 0, \qquad \nabla \cdot u^0 = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma^0 \cdot n + K(x')u^0 = 0 \quad \text{sobre } R, \\ \sigma^0 \cdot n + k(u^0 - g) = 0 \quad \text{sobre } P, \\ \{u^0, p^0\} \quad \text{periódica en } x', \text{ de período } (\ell_1, \ell_2), \end{cases} \tag{24}$$

donde $\sigma^0 = -p^0\text{Id.} + \nu D u^0$ y T_0 es el arrastre asociado:

$$T_0 = -g \cdot \int_R \sigma^0 \cdot n \, ds = g \cdot \int_R K(x')u^0(x', r(x'))\, d\Gamma(x').$$

En (24), el coeficiente de fricción homogeneizado K es diferente de k. En realidad, se trata de k multiplicado por un coeficiente amplificador que varía con x' y está relacionado con la geometría de la rugosidad. Se puede probar rigurosamente que, en el caso particular en que $\mathcal{R}_\varepsilon$ viene dado por un plano con asperezas, i.e. $r(x') \equiv \ell_3$ y η es independiente de x', T_0 es estrictamente mayor que el arrastre T asociado a la solución de (23). Este fenómeno (semicontinuidad inferior de T_ε respecto de ε) está de acuerdo con la experiencia.

Las cuestiones que quedan pendientes en este tema son las siguientes:

- Como ya hemos mencionado, se ha de estudiar el caso en que las condiciones de contorno son como en (20). En esta situación, somos capaces de hallar la solución al problema análogo a (21) e incluso obtener estimaciones uniformes para las funciones u^ε y p^ε en los espacios de energía habituales. Pero, por el momento, no está claro del todo hacia qué funciones convergen.

- En el caso particular de una placa, parece factible obtener expresiones asintóticas de u^ε, p^ε y T_ε de tipo Saint-Venant, con errores exponencialmente pequeños. Pero esto queda aún por hacer con detalle.

3 Flujos de Poiseuille en un dominio cilíndrico para fluidos viscoelásticos de tipo Oldroyd

Existe una multitud de fluidos de gran interés práctico que pueden ser modelados por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos son llamados fluidos *Newtonianos* (el agua, el aire). Sin embargo, algunas experiencias demuestran que existen fluidos de otro tipo que no pueden ser modelados mediante dichas ecuaciones. Son los llamados fluidos *no Newtonianos* (las tintas, los detergentes líquidos, los champús, la sangre, etc.).

La descripción matemática del comportamiento dinámico de un fluido se hace utilizando las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, que se obtienen a partir de las leyes de conservación de la masa y la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 && \text{(ecuación de continuidad)}, \\ &\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \nabla \cdot \sigma + \rho f && \text{(ecuación de movimiento)}. \end{aligned}$$

Aquí, ρ es la densidad del fluido, u es el campo de velocidades, σ es el tensor de esfuerzos y f es un dato que determina los esfuerzos exteriores que actúan sobre el fluido. Supondremos en esta sección que estamos en presencia de un fluido incompresible y homogéneo. Más precisamente, supondremos que $\rho \equiv 1$ y que se verifica la condición de incompresibilidad:

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Obviamente, el sistema formado por las ecuaciones anteriores no es suficiente para describir el comportamiento del movimiento del fluido, puesto que tenemos más incógnitas que ecuaciones. Para completar la descripción (además de añadir condiciones iniciales y de contorno apropiadas), necesitamos relacionar el tensor σ con las otras variables, es decir, imponer una *ley constitutiva* para σ. Según sea la naturaleza del fluido, así será la ley constitutiva que determine σ.

El tensor de esfuerzos σ suele descomponerse en la forma

$$\sigma = -p\,Id + \sigma^*,$$

donde p es la presión y σ^* es el *tensor de esfuerzos tangenciales*. En el caso de un fluido *Newtoniano*, se supone que σ^* depende linealmente de las derivadas parciales espaciales de las u_i. Esto es de hecho lo que hemos impuesto en (19). Más generalmente, si es posible modelar el fluido con una ley en virtud de la cual σ^* puede escribirse "explícitamente" en términos de ∇u, se dice que el fluido es *quasi-Newtoniano*. Ya hemos visto ejemplos de modelos para fluidos quasi-Newtonianos, (9) ó (10) pueden ser considerados como tales. No obstante, en otras ocasiones la única ley aceptable es una nueva ecuación para σ^* acoplada con las leyes de conservación. Esto ocurre, por ejemplo, con los fluidos *de tipo Oldroyd*.

El modelo diferencial de tipo Oldroyd sirve para describir el comportamiento de ciertos fluidos que poseen propiedades en parte características de los materiales elásticos y, en parte, de los fluidos viscosos; por ello, estos fluidos son llamados *viscoelásticos*. Estos fluidos poseen *memoria*, lo cual significa "grosso modo" que los esfuerzos que unas partículas ejercen sobre otras en un determinado instante t dependen no sólo del estado mecánico en t, sino también de lo ocurrido anteriormente.

En el modelo de Oldroyd, la ley constitutiva es

$$\sigma^* = 2\nu Du + \tau,$$

donde (de nuevo) ν es el coeficiente de viscosidad y τ es el *tensor de esfuerzos elásticos*, que está determinado por Du a través de la ecuación no escalar

$$\partial_t \tau + (u \cdot \nabla)\tau + g(\nabla u, \tau) + a\tau = 2bDu,$$

donde

$$g(\nabla u, \tau) = \tau \cdot W(u) - W(u) \cdot \tau - \alpha(Du \cdot \tau + \tau \cdot Du).$$

Aquí, a y b son constantes positivas, $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u)$ es el*tensor de vorticidad* y $\alpha \in [-1, 1]$.

La mayor dificultad que presenta el análisis de las ecuaciones resultantes es que, salvo en el caso particular en que $\alpha = 0$, no se conoce hoy día una "energía" que permita obtener estimaciones "a priori" de las soluciones en sus espacios naturales. Así, en general tan sólo se saben probar resultados de existencia locales en tiempo, cf. [20] y [21]. Recientemente, P.L. Lions y N. Masmoudi han conseguido probar la existencia de solución global en tiempo cuando $\alpha = 0$, cf. [24].

Nos ceñiremos aquí a una clase particular de movimiento paralelo donde no aprece esta dificultad. Concretamente, abordamos el estudio del flujo de Poiseuille para un fluido viscoelástico de tipo Oldroyd en el cilindro

$$\Omega(0, R) = \{(r, \varphi, z) : 0 < r < R,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Imponiendo simetría axial, se puede llegar mediante una serie de simplificaciones [20], a que la velocidad del fluido v en la dirección z y ciertas combinaciones lineales σ_1 y σ_2 de las componentes del tensor de esfuerzos verifican el siguiente sistema en el abierto $(0, R) \times (0, T)$:

$$\partial_t v - \mu \frac{1}{r}(r v_r)_r = \frac{1}{r}(r\sigma_2)_r + f, \tag{25}$$

$$\partial_t \sigma_1 + a\sigma_1 = b\sigma_2 v_r, \tag{26}$$

$$\partial_t \sigma_2 + a\sigma_2 = c v_r - \sigma_1 v_r. \tag{27}$$

Ahora, v, σ_1 y σ_2 son funciones del tiempo t y del radio r de la sección del cilindro. La derivada respecto de r se ha denotado con el subíndice correspondiente; μ, a, b y c son constantes positivas dadas.

En [20], se han resuelto estas ecuaciones en el abierto

$$\{\, (r, t) : 0 < R_1 < r < R_2, \quad 0 < t < T \,\},$$

completadas con condiciones condiciones de contorno de tipo Dirichlet para v sobre $r = R_1$ y $r = R_2$ y condiciones iniciales para v, σ_1 y σ_2. Esto corresponde al flujo de Poiseuille de un fluido entre dos cilindros concéntricos.

En un reciente trabajo, se ha llevado a cabo una extensión de algunos resultados de [20] al caso en que hay un único cilindro. Aquí encontramos dos dificultades. Por un lado, puesto que r puede hacerse cero, no podemos acotar superiormente r^{-1} (los coeficientes degeneran cuando $r \to 0$). Por otro lado, no está claro qué condición de contorno debemos imponer para $r = 0$.

Llevando a cabo la formulación variacional en espacios de Sobolev con peso adecuado, somos capaces de demostrar existencia y unicidad de solución débil global en tiempo de (25)–(27). La ecuación (25) se verifica en sentido variacional, mientras que (26) y (27) lo hacen puntualmente c.p.d. Probamos también que, cuando los datos son más regulares, la solución es fuerte, es decir, (25) se verifica también puntualmente c.p.d. Todos estos resultados aparecen en [18].

En cuanto a las cuestiones que quedan pendientes en relación con este tema, indicaremos las siguientes:

- En primer lugar, se ha de plantear el caso más general posible de un flujo de Oldroyd con simetría axial, i.e. con una velocidad que depende, además, de la altura del cilindro: $v = v(t; r, z)$.
- En segundo lugar, cabe preguntarse si los argumentos que hemos utilizado son aplicables a otros fluidos visco-elásticos (generalizaciones de los modelos de Oldroyd, Giesekus, Phan Thien-Tanner, etc.).

Referencias

[1] Y. Amirat, J. Simon – *Influence de la rugosité en hydrodynamique linéaire,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 313–318, 1996.

[2] Y. Amirat, J. Simon – *Riblets and drag minimization,* Optimizations Methods in PDE's, S. Cox and I. Lasiecka eds., AMS, p. 9–17, 1997.

[3] Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, J. Simon – *Effect of rugosity on a flow governed by Navier-Stokes equations,* preprint, Univ. Blaise Pascal (Clermont-Ferrand), 1999.

[4] Y. Amirat, B. Climent, E. Fernández-Cara, J. Simon – *The Stokes equations with Fourier boundary conditions on a wall with asperities,* Math. Models and Methods Appl. Sciences (aparecerá); cf. también *Effect de la rugosité sur un fluide laminaire avec conditions de Fourier,* C.R. Acad. Sci. Paris (aparecerá).

[5] J. Baranger, A. Mikelić – *Stationary solutions to a quasi-Newtonian flow with viscous heating,* Math. Models and Methods Appl. Sciences, Vol. 5, No. 6 (1995), 725–738.

[6] P. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vázquez – *An L^1-theory of existence and uniqueness of solution of nonlinear elliptic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 No. 2, p. 240–273, 1995.

[7] D. Blanchard, F. Murat – *Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems whith L^1 data: Existence and uniqueness,* preprint 1998.

[8] D. Blanchard, H. Redwane – *Renormalized solutions for a class of nonlinear evolution problems,* J. Math. Pures Appl. (aparecerá); cf. también C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 831–835, 1994.

[9] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT – *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data,* J. Funct. Anal. 87, 1989, p. 149–169.

[10] L. BOCCARDO, J.I. DÍAZ, D. GIACHETTI, F. MURAT – *Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation,* "Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems", P. Benilan et al. eds., Pitman Research Notes in Math., 208, Longman, Harlow 1989.

[11] P. BRADSHAW – *The understanding and prediction of turbulent flow,* Aeronautical J., july 1972, p. 403–418.

[12] G.A. CHECHKIN, A. FRIEDMAN, A.L. PIANITSKI – *Boundary value problems in domains with rapidly oscillating boundary with large height of "cogs",* preprint 1996.

[13] B. CLIMENT – Tesis, Universidad de Sevilla, 1996.

[14] B. CLIMENT,– *Existence of weak–renormalized solution for nonlinear system,* preprint 1999.

[15] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Existence and uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes system,* J. Math. Pures Appl., t. 76 - No. 4, pp. 307–319, 1997.

[16] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Resultados de existencia y unicidad de solución para algunos sistemas acoplados con origen en Mecánica de Fluidos,* Actas de la Jornada Científica en Homenaje al Prof. Antonio Valle, Sevilla 1997.

[17] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind,* Math. Models and Methods Appl. Sciences, Vol. 8, No. 4, pp. 603–622, 1998.

[18] B. CLIMENT, F. GUILLÉN – *Global solutions for the Poiseuille flow of Oldroyd type in 3D domains,* preprint.

[19] R. DIPERNA, P.L. LIONS – *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability,* Annals of Math. (2) 130 (1989), No. 2, p. 321–366.

[20] E. FERNÁNDEZ-CARA, F. GUILLEN, R.R. ORTEGA – *Some theoretical results concerning Non-Newtonian fluids of the Oldroyd kind,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), Vol. XXVI, p. 1–29, 1998; cf. también

Mathematical Modeling and Analysis of Viscoelastic Fluids of the Oldroyd Kind, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, Amsterdam (aparecerá).

[21] C. GUILLOPÉ AND J.-C. SAUT,– *Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law,* Nonlinear Analysis, T M & A, Vol. 15, No. 9, p. 849–869, 1990.

[22] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING – *Mathematical models of turbulence,* Academic Press , London 1972.

[23] R. LEWANDOWSKI – *Les équations de Stokes et de Navier-Stokes couplées avec l'équation de l'énergie cinétique turbulente,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 381, Série I, p. 1097–1102, 1994.

[24] P.L. LIONS, N. MASMOUDI – *Global solutions for some Oldroyd models of non-newtonian flows,* Chin. Ann. of Math. 21 B 2, p. 131–146, 2000.

[25] F. MURAT – *Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales,* Research Report R93023, LAN, University Paris VI, 1993.

[26] M. NALLASAMY – *Turbulence models and their applications to the prediction of turbulent flows,* Computers & Fluids, Vol. 15, No. 2, p. 151–194, 1987.

[27] O.A. OLEINIK, A.S. SHAMAEV, G.A. YOSIFIAN – *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization,* North-Holland, Amsterdam 1992.

[28] M. RENARDY, W.J. HRUSA, J.A. NOHEL– *Mathematical problems in viscoelasticity* , Longman Scientific & Technical, New York 1987.

[29] W.C. REYNOLDS – *Computation of turbulent flows,* Annual Reviews (1976), p. 183–207.

[30] E. SANCHEZ-PALENCIA – *Non-homogeneous media and vibration theory,* Lectures Notes in Physics no. 127, Spriger-Verlag, Berlin 1980.