Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n°24(2003), 31–62

Inclusiones diferenciales, Matemática Difusa y aplicaciones *

E. Fernández-Cara[1], M.A. Rojas-Medar[2] y A.J. Viera Brandão[3]

[1] Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla
[2] Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Campinas-SP, (Brasil)
[3] Departamento de Matemática ICEB-UFOP, Ouro Preto-MG (Brasil)

cara@numer.us.es, marko@ime.unicamp.br, adilson@iceb.ufop.br

Resumen

En este trabajo diremos cómo se pueden modelar ciertos sistemas tomados de la realidad que usan conceptos propios de la Matemática Difusa (conjuntos, multifunciones e inclusiones diferenciales "fuzzy"). Consideraremos problemas de valor inicial para inclusiones diferenciales "fuzzy" y analizaremos la existencia de solución local. También nos referiremos a la estabilidad de los puntos de equilibrio de las inclusiones diferenciales "fuzzy". Finalmente, mostraremos algunas aplicaciones de este desarrollo a problemas que aparecen en Biología.

Palabras clave: *Inclusiones diferenciales difusas, problemas de valor inicial, estabilidad de puntos críticos, aplicaciones a la dinámica de poblaciones.*
Clasificación por materias AMS: *46S40, 34K60, 34D20, 35Q80*

1 Introducción

Es bien conocida la amplia variedad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y de la teoría de control de sistemas gobernados por éstas. Sin embargo, los sistemas deterministas parecen ser demasiado restrictivos para

*El primer autor ha sido financiado por D.G.E.S.-España, Proyectos PB98-1134 y BFM2000-1317 y el segundo por CNPq-Brasil, Proyecto 300116/93-4 (RN) y FAPESP, Proyecto 01/07557-3.

Fecha de recepción: 2 de septiembre de 2002

describir la evolución de una gran clase de fenómenos que se dan en la realidad. Frecuentemente aparecen problemas con algunas de las siguientes características, conocidas con el término inglés "fuzzyness":

- Desconocimiento del medio ambiente futuro del sistema.
- Falta de determinismo (lo que hace en algunos casos imposible describir de forma completa la dinámica).
- Desconocimiento exacto de la manera en la que el estado del sistema depende de los posibles parámetros de control.
- Múltiples dinámicas "admisibles", etc.

En un primer análisis, es posible superar estas dificultades con lenguaje matemático apropiado haciendo uso de *inclusiones diferenciales*. En el caso más sencillo, éstas toman la forma

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{1}$$

donde $x : [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ es una función escalar que describe el estado del sistema y $F : [0,T) \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es una multifunción. Aquí y en lo que sigue, la variable t tiene asignado el significado "tiempo", $\dot{x}$ denota la derivada de x respecto de t y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Las inclusiones diferenciales (1) indican, *grosso modo*, la forma en la que en cada instante de tiempo $\dot{x}(t)$ depende del estado del sistema $x(t)$ y del valor de t. Generalmente, (1) es complementada con una condición inicial

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, que indica que conocemos el estado del sistema en un instante inicial.

Los problemas de valor inicial $(1)-(2)$ han sido intensamente estudiados en los últimos años y se conocen diversas técnicas para su resolución, entre las cuales sobresalen los métodos de punto fijo y de selección continua (parte de este desarrollo ha sido resumido en la Sección 2).

Por otra parte, en una gran cantidad de ocasiones, los sistemas analizados permiten cierta capacidad de maniobra, es decir, pueden ser controlados al menos parcialmente por nosotros. Cuando la situación no es excesivamente compleja, un modelo aceptable es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,v(t)), \quad v(t) \in U, \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \tag{3}$$

donde $f : [0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $v : [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ (v es el control, una función que podemos elegir). Bajo hipótesis razonables, puede probarse la equivalencia del problema de control (3) y el problema de valor inicial $(1)-(2)$ con

$$F(t,x) = f(t,x,U) = \{\, h \in \mathbb{R}\ ;\ \exists w \in U \ \text{ tal que } \ h = f(t,x,w)\,\}.$$

Aquí, $U \subset \mathbb{R}$ juega el papel de una restricción del sistema (de origen físico, económico, etc.), en el sentido de que ha de respetarse la relación $v(t) \in U$ para cada $t \in [0, T]$.

El sistema (3) es de carácter determinista: bajo condiciones aceptables de regularidad para f, fijados un dato inicial x_0 y un control v con valores en U por ejemplo continuo, queda determinado el estado $x = x(t)$, i.e. la dinámica del sistema. No obstante, hay muchas situaciones en las que tan sólo es posible elegir el control de manera *difusa*. Esto ocurrirá, por ejemplo, cuando haya constancia de que nuestra elección está afectada por un "ruido" y no es captada nítidamente por el sistema. Entonces conviene modelar la situación recurriendo a una inclusión diferencial "fuzzy". La descripción y análisis de estas inclusiones diferenciales es uno de los principales objetivos de este trabajo.

De momento, digamos tan sólo que una inclusión diferencial "fuzzy" es una relación

$$\dot{x} \in H(t, x), \tag{4}$$

donde $H : [0, T) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R})$ es una "multifunción fuzzy". Aquí,

$$\mathbb{E}(\mathbb{R}) = \{\, u : \mathbb{R} \mapsto [0, 1] \ ; \ L_a u \in \mathbb{K}(\mathbb{R}) \ \text{ para } \ 0 \leq a \leq 1 \,\},$$

$\mathbb{K}(\mathbb{R})$ es la familia de los compactos no vacíos de $\mathbb{R}$, para cada $a > 0$ $L_a u = \{\, x \in \mathbb{R} \ ; \ u(x) \geq a \,\}$ es el *conjunto de nivel* a *de* u y $L_0 u$ es la adherencia del conjunto $\{\, x \in \mathbb{R} \ ; \ u(x) > 0 \,\}$, i.e. el *soporte de* u.

Obviamente, $\mathbb{E}(\mathbb{R})$ es una extensión de $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ vía la *inyección canónica* $A \mapsto \chi_A$, donde χ_A es la función característica de A, véase (11).

Resolver (4) en el intervalo $[0, T)$ consiste en encontrar una función $x : [0, T) \mapsto \mathbb{R}$ absolutamente continua (al menos) tal que, para casi todo t, se tenga

$$\dot{x}(t) \in H(t, x(t)) \tag{5}$$

en un sentido difuso (véase más adelante).

También está claro que (4) es una extensión de (1) vía la inyección $A \mapsto \chi_A$. Conviene por tanto desarrollar una teoría "fuzzy" que permita abordar este problema y, para ello, hay que extender apropiadamente las ideas y conceptos habituales.

El resto de este trabajo está organizado como sigue. En las Secciones 2 y 3, recordaremos brevemente varios resultados relacionados con las inclusiones diferenciales "clásicas" (1). En la Sección 4, daremos un repaso a los conceptos básicos de la teoría "fuzzy". Posteriormente, en la Sección 5, mostraremos algunos resultados para problemas de valor inicial para inclusiones diferenciales "fuzzy". Finalmente, la Sección 6 está dedicada a mostrar en qué forma la resolución de inclusiones "fuzzy" análogas a (4) puede ser aplicada al análisis de la dinámica de poblaciones.

El primer autor desea agradecer las conversaciones sobre el tema tenidas con los Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi de la UNICAMP (Brasil), Prof. Geraldo Nunes Silva de la UNESP, São José do Rio Preto (Brasil), Prof. Dr. Heriberto Román-Flores de la Universidad de Tarapacá, Arica (Chile) y, obviamente, con

sus alumnos de Doctorado en esta área: Lucelina Batista dos Santos y Yurilev Chalco Cano.

2 Multifunciones e inclusiones diferenciales "clásicas"

En esta sección presentaremos varias situaciones que justifican la conveniencia de introducir el concepto de inclusión diferencial. De manera no rigurosa y bastante simplificada, recordaremos algunas definiciones y cuestiones trascendentes y, también, motivaremos las técnicas utilizadas para responder a algunas (realmente muy pocas) de estas cuestiones.

En lo que sigue, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ denotarán, para distintos valores de m, el producto escalar Euclídeo en $\mathbb{R}^m$ y la norma asociada, respectivamente.

Comenzaremos recordando que el objeto de estudio de la teoría de control de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales es, en términos simples, *gobernar* el comportamiento de tales sistemas. Así, admitamos que estamos en presencia de un proceso sometido a control, modelado por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x, v(t)), \tag{6}$$

donde $f : [0,T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ es, por simplicidad, una función regular. La función $v : [0,T) \mapsto \mathbb{R}^k$ es el *control* y debe satisfacer ciertas propiedades de regularidad (usualmente la exigencia más débil es la medibilidad) y una restricción geométrica:

> Para todo $t \in [0,T)$, ha de tenerse $v(t) \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^k$ es un conjunto dado.

Usualmente U está ligado a limitaciones físicas, económicas, etc. de los dispositivos de control. Un control v que verifica estas restricciones se denomina *control admisible*.

En (6), el control debe ser escogido de tal forma que la solución x satisfaga ciertas condiciones deseadas. Por ejemplo, que x minimice un cierto funcional (teoría de control óptimo), tome un valor dado para $t = T$ (controlabilidad), satisfaga adecuadas restricciones geométricas (teoría de la viabilidad), etc.

Es importante comprender bien cómo depende la trayectoria $x = x(t)$ del control v. Para ello, conviene razonar como sigue. Supongamos que el grafo de una solución x de (6) pasa por el punto $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$. En este punto, la pendiente de la tangente a la trayectoria es $f(t_0, x_0, w)$ para algún $w \in U$; es decir, la trayectoria debe *elegir su velocidad* en el conjunto de velocidades permitidas

$$F(t_0, x_0) = \{\, h \in \mathbb{R}^n \ ; \exists w \in U \ \text{ tal que } \ h = f(t, x, w)\,\}.$$

Por tanto, cualquier solución de (6) asociada a un control v satisface la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x).$$

Esto conduce de forma natural a la formulación del problema matemático siguiente:

Cuestión 1: Dada una multifunción $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, i.e. una relación que a cada punto $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ asocia un conjunto no vacío $F(t,x) \subset \mathbb{R}^n$, fijado el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hallar una solución en $[0,T)$ del problema de valor inicial para una *inclusión diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x), \\ x(0) = x_0 \,. \end{cases} \tag{7}$$

Aquí, por *solución en* $[0,T)$ se entiende una función absolutamente continua $x : [0,T) \mapsto \mathbb{R}^n$ que verifica (5) en casi todo $t \in [0,T)$ y verifica también la *condición inicial* $x(0) = x_0$.

Además de los sistemas controlables de la forma (6), existe otra amplia clase de fenómenos que pueden ser descritos por inclusiones diferenciales. Esta clase incluye sistemas donde el control está sometido a restricciones que cambian con el tiempo y/o el estado

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)), \qquad u(t) \in U(t,x(t)),$$

sistemas de desigualdades diferenciales,

$$f_i(t,x,\dot{x}) \leq 0, \quad i \in I,$$

ecuaciones diferenciales implícitas, sistemas controlables con restricciones sobre el espacio de fases, etc.

Otro ejemplo está dado por las inecuaciones variacionales de evolución. En este caso, el problema se reduce a la búsqueda de una función absolutamente continua $x : [0,T) \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x(t) \in K \;\; \text{y} \\ \text{ii)} & \displaystyle\sup_{y \in K} \langle \dot{x}(t) - f(t,x(t)), x(t) - y \rangle = 0 \end{array}$$

para casi todo $t \in [0,T)$, donde $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cono convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$. La multifunción que aparece ahora es F_K , con

$$F_K(t,x) = \{\, h \in \mathbb{R}^n \;;\; \sup_{y \in K} \langle h - f(t,x), x - y \rangle = 0 \,\}$$

para cada $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$.

Las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t,x)$ con segundo miembro f discontinuo en x también pueden ser tratadas sumergiendo f en una multifunción F con propiedades convenientes, de tal forma que la inclusión posea soluciones relacionadas con las soluciones de la ecuación original.

Pueden darse más ejemplos. La teoría de inclusiones diferenciales procura extraer lo que es común a todos ellos y proporciona resultados relativos a la existencia y otras propiedades de las soluciones.

Por supuesto, las inclusiones diferenciales (1) puede ser vistas como generalizaciones directas de ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(t, x),$$

en el sentido de que éstas últimas son inclusiones diferenciales particulares correspondientes a multiaplicaciones univaluadas. En consecuencia, todas las cuestiones pertinentes a las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo la existencia, prolongabilidad y limitación de las soluciones, la dependencia continua respecto de datos iniciales y parámetros, la bifurcación de soluciones, la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas especiales, la estabilidad global, el comportamiento asintótico, etc. también lo son para las inclusiones diferenciales.

Nota 1 No obstante, para una inclusión diferencial dada, existe en general toda una familia de trayectorias que comienzan en cada punto inicial x_0. En otras palabras, con F multívoca, es previsible que el problema (7) posea más de una solución. Esta propiedad de no unicidad conduce a cuestiones que son específicas para sistemas diferenciales multivaluados, relativos a la convexidad de la familia de soluciones, la existencia de soluciones extremales, la selección de soluciones con propiedades dadas, etc.

2.1 Existencia de solución local del problema de valor inicial para una inclusión diferencial

Para motivar el aparato matemático que debe ser desarrollado, reflexionaremos a continuación sobre la existencia de solución de (7).

Recordemos que, en el caso de una ecuación diferencial ordinaria, es necesaria una cierta regularidad (por ejemplo la continuidad del segundo miembro) para garantizar la existencia de soluciones. Por otra parte, una multiaplicación $F = F(t, x)$ puede ser pensada como una función usual $F : [0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las partes de $\mathbb{R}^n$. Así, para garantizar la existencia de solución de (7), parece adecuado extender las nociones de regularidad usuales (continuidad, medibilidad, la condición de Lipschitz, etc.) a las funciones con valores en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (véase por ejemplo [4],[21]).

Ahora bien, incluso disponiendo de estas herramientas, ¿cómo podríamos proseguir y probar la existencia de solución de (7)?

Una posible vía es la siguiente. Supongamos asegurada la existencia de una función $f : [0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ suficientemente regular (continua por ejemplo), con la propiedad de que

$$f(t, x) \in F(t, x) \qquad \forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n.$$

Entonces cualquier solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

cuya existencia está garantizada por el Teorema de Carathéodory, será necesariamente solución de (7).

El argumento anterior conduce a la siguiente cuestión de carácter general:

Cuestión 2: Dada una multiaplicación

$$G : E_1 \to E_2 \,,$$

donde E_1 y E_2 son espacios dotados de una estructura adecuada (espacios topológicos, espacios de medida, etc.), ¿cuándo puede afirmarse que existe una función univaluada $g : E_1 \mapsto E_2$ tal que para cada $e \in E_1$ se tiene que $g(e) \in G(e)$ y, además, g verifica propiedades de regularidad deseadas (continuidad, medibilidad, etc.)?

Si existe, a una función g como la que precede se le llama una *selección* (continua, medible, etc.) de la multiaplicación G. Si supiéramos responder satisfactoriamente a la Cuestión 2 en el contexto de (7), estaríamos muy cerca de conseguir resultados de existencia para este problema. Obsérvese por otra parte que, si no imponemos nada a g, la cuestión precedente es trivial y dar una respuesta positiva a la misma equivale a aceptar el *axioma de elección*.

Nota 2 Para responder a la Cuestión 2, estos últimos años se han seguido principalmente dos estrategias diferentes.

a) La primera de ellas consiste en buscar una *regla* que a cada $e \in E_1$ asocia un punto de $G(e)$ con una determinada propiedad y, a continuación, comprobar que, bajo ciertas condiciones, la función g así obtenida es regular. Este camino conduce a varios resultados importantes: el Teorema de la Selección Minimal, el Teorema de la Selección de Chevishev, el Teorema de la Selección Baricéntrica, etc., ver por ejemplo [3].

b) La segunda estrategia consiste en buscar selecciones de carácter local (es decir, definidas en una vecindad de cada punto) y construir una selección global (es decir, definida en todo E_1) utilizando una partición de la unidad. Un Teorema bien conocido al que se llega de esta forma es el debido a Michael [24].

Nota 3 Obsérvese que, cuando la inclusión diferencial (1) tiene su origen en el sistema de control (3), la existencia de selecciones y la existencia de controles admisibles son, hablando en términos generales, problemas equivalentes. Esto es esencialmente lo que afirma el llamado Lema de Filippov; para más detalles, véase [10],[20].

En lo que sigue, nos referiremos principalmente a multifunciones F que toman valores en $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$. Por definición, $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es la familia

$$\mathbb{K}(\mathbb{R}^n) = \{\, A \subset \mathbb{R}^n \; ; \, A \text{ es compacto y } A \neq \phi \,\}.$$

Hablando en términos generales, las multifunciones que admiten selecciones continuas son las denominadas *multifunciones semicontinuas inferiormente*. Se dice que la multifunción $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es semicontinua inferiormente si, para cada $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y $|t - t_0| + \|x - x_0\| \leq \delta$, entonces

$$F(t,x) \cap F(t_0, x_0)_\varepsilon \neq \phi. \tag{8}$$

Aquí, $F(t_0, x_0)_\varepsilon$ designa el entorno cerrado de radio ε de $F(t_0, x_0)$ (la unión de las bolas cerradas de radio ε centradas en puntos de $F(t_0, x_0)$).

Por otra parte, se dice que $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es semicontinua superiormente si para cada (t_0, x_0) y cada $\varepsilon > 0$ se tiene la propiedad precedente, cambiando (8) por

$$F(t,x) \subset F(t_0, x_0)_\varepsilon\,.$$

Para las *multifunciones semicontinuas superiormente*, existe un Teorema de Selección Aproximada, debido a Cellina [9], que en muchas situaciones es suficiente para nuestros propósitos.

Nota 4 Digamos también que, en el marco de la medibilidad, el resultado más conocido que garantiza la existencia de selecciones se debe a Kuratowski y Ryll-Nerdzewski, cf. [20].

Combinando la existencia de selecciones continuas y el teorema de Carathéodory, se deduce el resultado de existencia siguiente:

Teorema 1 *Supongamos que, en* (7)*, la multifunción* $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *es semicontinua superiormente y* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Entonces el problema* (7) *posee al menos una solución en* $[0, T^*)$ *para algún* T^* *maximal que verifica* $0 < T^* \leq T$.

Hay otras formas de encarar la existencia de solución del problema de valor inicial para una inclusión diferencial que intentan simular las técnicas utilizadas en el caso de una ecuación diferencial.

Por ejemplo, consideremos el siguiente argumento de punto fijo. Dada la inclusión diferencial (1), introducimos la *multiaplicación integral*

$$Y : C^0([0,T);\mathbb{R}^n) \to C^0([0,T);\mathbb{R}^n),$$

dada como sigue:

> Para cada $z \in C^0([0,T);\mathbb{R}^n)$, $Y(z)$ es la familia de las funciones $x : [0,T) \mapsto \mathbb{R}^n$ absolutamente continuas que verifican $\dot{x}(t) \in F(t, z(t))$ para casi todo $t \in [0,T)$ y $x(0) = x_0$.

Obviamente, una función $x \in C^0([0,T);\mathbb{R}^n)$ es solución de (1) en $[0,T)$ si y sólo si

$$x \in Y(x),$$

esto es, x es un punto fijo de la multiaplicación Y. Es posible entonces demostrar un resultado análogo al conocido Teorema de Schauder que, aplicado en este contexto, conduce a la existencia de puntos fijos de Y. Como consecuencia del mismo, se puede volver a deducir el Teorema 1. También es posible extender la Teoría del Grado Topológico de Brower y de Leray-Schauder al caso de una multiaplicación; para más detalles, véase [8],[19].

Otra técnica muy utilizada (y de hecho también de tipo punto fijo) se basa en el siguiente resultado, que es cierto para cualquier ecuación diferencial que satisfaga adecuadas restricciones de regularidad:

> La función $x : J \mapsto \mathbb{R}^n$ es solución en J del sistema $\dot{x} = f(t,x)$ y verifica la condición inicial $x(0) = x_0$ si y sólo si es continua en J y se tiene
> $$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\,ds \qquad \forall t \in J$$
> (J es un intervalo que contiene a 0).

En el caso multívoco, debe aclararse el sentido que tiene la integral de una multifunción. A este respecto, existe una noción debida a Aumann [5] y Debreu [17], con la cual se puede probar una equivalencia análoga a la precedente para las soluciones de (7) (véase la definición de integral de una multifunción en la Sección 3).

Existen otras técnicas (construcción de aproximaciones adecuadas y extracción de subsucesiones convergentes, métodos constructivos basados en poligonales generalizadas de Euler, etc.). Por razones de espacio, no es posible describirlas aquí con detalle. Los lectores interesados pueden consultar, por ejemplo, las referencias [2],[7],[8],[16] y las que en ellas se citan.

Nota 5 Otras muchas ecuaciones funcionales tienen su correspondiente generalización en el contexto de las multifunciones. Así, para inclusiones integrales, existe una teoría desarrollada que conduce a resultados de existencia satisfactorios, véase [1],[16]. Las inclusiones funcionales con retardo han sido tratadas en [14],[15],[33] y sus referencias. Finalmente, para inclusiones diferenciales de la forma
$$\dot{x} \in Ax + F(t,x),$$
donde $A : D(A) \subset H \mapsto H$ es (por ejemplo) un operador no acotado maximal monótono en el espacio de Hilbert H, véase [27].

2.2 Estabilidad según Lyapunov para Inclusiones Diferenciales

Otra cuestión que nos interesa analizar en relación con (7) es la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por comodidad, nos limitaremos al caso en que la inclusión diferencial es autónoma, esto es

$$\dot{x} \in F(x), \tag{9}$$

con $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$. El problema de valor inicial asociado toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(x), \\ x(0) = x_0\,, \end{cases} \tag{10}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Recordemos en primer lugar el resultado fundamental de Lyapunov para ecuaciones diferenciales ordinarias:

Teorema 2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en una vecindad del punto $x = 0$, con diferencial-Fréchet $f'(0)$ en 0 y tal que $f(0) = 0$. Supongamos que todos los autovalores de $f'(0)$ tienen parte real negativa, es decir, que el origen es asintóticamente estable para el sistema lineal*

$$\dot{y} = f'(0)y.$$

Entonces el origen es asintóticamente estable para el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x).$$

Para conseguir una extensión de este resultado en el contexto de (10), previamente necesitamos poder hablar de multiaplicaciones diferenciables.

Obsérvese que la definición de derivada de una multifunción no es trivial. En efecto, no es difícil probar que, si E_1 y E_2 son espacios vectoriales, $G : E_1 \to E_2$ es una multiaplicación y se tiene

$$G(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 G(e_1) + \alpha_2 G(e_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall e_1, e_2 \in E,$$

entonces G es univaluada. Dicho de otro modo, la noción de función diferenciable no puede extenderse al caso de una multiaplicación palabra por palabra. No obstante, véase [8].

El conjunto $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ se convierte en espacio métrico una vez dotado de la *distancia de Hausdorff* $h(\cdot\,,\cdot)$, donde

$$h(A, B) = \text{máx}\,\{\, \sup_{a \in A} d(a, B)\,,\, \sup_{b \in B} d(b, A)\,\}.$$

Aquí, $d(\cdot\,,\cdot)$ es la distancia euclídea habitual en $\mathbb{R}^n$.

El espacio métrico $(\mathbb{K}(\mathbb{R}^n), h)$ es completo y separable. De hecho, se trata de un espacio *cuasi-normado*, con *cuasi-norma* dada por la aplicación

$$A \mapsto h(A, \{0\}).$$

La introducción de $h(\cdot\,,\cdot)$ nos permitirá a continuación hablar de multifunciones *cuasi-lineales acotadas* y de multifunciones *Fréchet-diferenciables.*

Definición 1 *Se dice que una multifunción $Q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es cuasi-lineal si*

$$Q(x_1 + x_2) \subset Q(x_1) + Q(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

y

$$Q(\lambda x) = \lambda Q(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se dice que Q es acotada si existe $K > 0$ tal que

$$h(Q(x), \{0\}) \leq K\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definición 2 *Se dice que la multifunción* $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *es Fréchet-diferenciable en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *si existe una multifunción cuasi-lineal acotada* $F'(x_0) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$h(F(x), F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|).$$

La multifunción $F'(x_0)$ *se denomina derivada de Fréchet de* F *en* x_0 *.*

Obviamente, si $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es cuasi-lineal y acotada, entonces es Fréchet-diferenciable en 0 y además $F'(0) = F$.

Definición 3 *Consideremos la inclusión diferencial* (9). *Supongamos que* $F(0) = \{0\}$. *Se dice entonces que* $x = 0$ *es un punto de equilibrio de* (9). *Diremos que este punto de equilibrio es estable (en el sentido de Lyapunov) si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $\delta_0 > 0$ *tal que, si* $\|x_0\| \leq \delta_0$ *, entonces existe una solución* $x = x(t)$ *de* (10) *definida para todo* $t \geq 0$.

2. *Para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ *tal que, si* $\|x_0\| < \delta_1$, *entonces* $\|x(t)\| < \epsilon$ *para todo* $t \geq 0$.

Finalmente, diremos que el punto de equilibrio Lyapunov-estable $x = 0$ *es asintóticamente estable si existe* $\delta_2 \in (0, \delta_0]$ *tal que, si* $\|x_0\| \leq \delta_2$ *, entonces* $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

Tenemos entonces el siguiente resultado relativo a la estabilidad de los puntos de equilibrio de (9):

Teorema 3 *Supongamos que la multifunción* $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *es Fréchet-diferenciable en* 0 *y que existe* $\delta_0 > 0$ *tal que cualquier solución* $x = x(t)$ *existe en el intervalo* $[0, +\infty)$ *si* $\|x(0)\| \leq \delta_0$ *. En estas condiciones, si el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la inclusión diferencial cuasi-lineal*

$$\dot{y} \in F'(0)(y),$$

entonces también es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (9). *En tal caso, existen además* $\sigma > 0$, $k > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que, si* $\|x_0\| \leq \delta$, *cualquier solución de* (10) *verifica*

$$\|x(t)\| \leq k \|x(0)\| e^{-\sigma t} \qquad \forall t \geq 0.$$

3 Otros resultados relacionados con las multifunciones

En esta sección, mostraremos brevemente otros aspectos del Análisis Matemático relacionados con las multifunciones que han tenido un desarrollo reciente. Comenzaremos hablando de multifunciones Lipschitz-continuas y de la generalización del Teorema de Banach del Punto Fijo.

Definición 4 *Se dice que la multiaplicación* $F : A \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *es Lipschitz-continua en* A *si existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$h(F(x), F(y)) \leq \gamma |x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

En particular, si se tiene esta propiedad con $0 < \gamma < 1$*, se dice que* F *es una contracción multívoca o bien que* F *es contractiva.*

El análogo del Teorema de Punto Fijo de Banach para una multifunción fue probado en [25] por Nadler en los años 60. En el caso de una multifunción definida en $\mathbb{R}^n$, dice lo siguiente:

Teorema 4 *Sea* $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *una contracción multívoca. Entonces* F *posee un punto fijo, es decir, existe* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$x \in F(x).$$

Para algunas mejoras y variantes del Teorema anterior, puede consultarse la referencia [19] (donde también se encontrarán los análogos multívocos del Teorema de Schauder).

Una herramienta esencial para el estudio de multifunciones con valores convexos compactos es el *funcional soporte* del Análisis Convexo, cuya definición es la siguiente:

Definición 5 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^m$ *un conjunto no vacío. El funcional soporte de* A *es la función* $\sigma_A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, dada por*

$$\sigma_A(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Algunas propiedades importantes de este funcional están recogidas en la Proposición siguiente:

Proposición 5 *Sean* $A \subset \mathbb{R}^m$ *un conjunto no vacío,* σ_A *el correspondiente funcional soporte y* $D(\sigma_A) = \{\, y \in \mathbb{R}^m \; ; \; \sigma_A(y) < +\infty \,\}$ *su dominio efectivo. Entonces se tiene:*

1. $D(\sigma_A)$ *es un cono convexo con vértice en* 0.
2. $\sigma_A(\lambda y) = \lambda \sigma_A(y)$ *para cada* $\lambda \geq 0$ *y cada* $y \in \mathbb{R}^m$*, i.e.* σ_A *es homogéneamente positiva.*
3. σ_A *es una función convexa, semicontinua inferiormente y propia. En particular,* $\sigma_A \not\equiv +\infty$.
4. σ_A *coincide con el funcional soporte de* $\overline{\mathrm{co}}\, A$*, la envolvente convexa cerrada de* A.

La denominación "funcional soporte" está motivada por lo siguiente. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es convexo, compacto y no vacío, para cada $u \in \mathbb{R}^m$ con $u \neq 0$, existe $x_u \in A$ tal que

$$\sigma_A(u) = \langle x_u, u \rangle$$

y el hiperplano $\mathcal{H} = \{\, x \in \mathbb{R}^m \ ; \ \langle x, u \rangle = \sigma_A(u) \,\}$ *soporta* a A en x_u . Esto último quiere decir que A está contenido en $\mathcal{H}^- = \{\, x \in \mathbb{R}^m \ ; \ \langle x, u \rangle \leq \sigma_A(u) \,\}$ y toca al hiperplano en x_u .

Otras propiedades interesantes del funcional soporte están recogidas en la siguiente

Proposición 6 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos no vacíos. Entonces se tiene:*

1. $\sigma_A(y) \geq 0$ *para todo* $y \in \mathbb{R}^m$ *si y sólo si* $\overline{\mathrm{co}}\, A \ni 0$.

2. $\sigma_{\lambda A + \mu B}(y) = \lambda \sigma_A(y) + \mu \sigma_B(y)$ *para* $\lambda, \mu \geq 0$.

3. *Si* $A \subset B$, *entonces* $\sigma_A(y) \leq \sigma_B(y)$ *para cada* $y \in \mathbb{R}^m$. *Recíprocamente, si para todo* $y \in \mathbb{R}^m$ *se tiene que* $\sigma_A(y) \leq \sigma_B(y)$, *entonces* $\overline{\mathrm{co}}\, A \subset \overline{\mathrm{co}}\, B$. *En particular si* A *y* B *son convexos y cerrados, tenemos:*

$$A \subset B \iff \sigma_A(y) \leq \sigma_B(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

4. *Si* $\{\, A_i \ ; \ i \in I \,\}$ *es una familia de conjuntos no vacíos de* $\mathbb{R}^m$ *y* $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, *entonces*

$$\sigma_A(y) = \sup_{i \in I} \sigma_{A_i}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

5. A *es simétrico (es decir,* $A = -A$*) si y sólo si su funcional soporte* σ_A *es par.*

6. *Si* A *es de la forma* $A = A_1 \times \ldots \times A_q$, *entonces*

$$\sigma_A(y) = \sum_{i=1}^{q} \sigma_{A_i}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

A continuación, vamos a indicar explícitamente qué es la *integral de una multifunción* en el sentido de Aumann.

Sea $\{\Omega, \Sigma, \mu\}$ un espacio de medida completo. Dada una multifunción $G : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denotaremos $S^1(G)$ el conjunto

$$S^1(G) = \{\, f \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \ ; \ f(w) \in G(w) \quad \mu - c.t.p. \,\}.$$

Definición 6 *La integral de* G *en* Ω, *denotada*

$$\int_\Omega G(w)\, d\mu,$$

es, por definición, el siguiente conjunto de $\mathbb{R}^n$*:*

$$\int_\Omega G(w)\,d\mu = \{\, \int_\Omega f(w)\,d\mu \ ;\ f \in S^1(G)\,\}.$$

Se dice que la multifunción G *es medible si, para cada conjunto medible* B *de* $\mathbb{R}^n$*, se tiene* $G^{-1}(B) \in \Sigma$*. Aquí,* $G^{-1}(B) = \{\, w \in \Omega \ ;\ G(w) \cap B \neq \phi\,\}$*.*

Se dice que G *está acotada integralmente si es medible y además la función* $\|G\|$*, dada por*

$$\|G\|(w) = \sup\{\, \|f(w)\| \ ;\ f \in S^1(G)\,\} \quad \mu - c.t.p.,$$

es μ*-integrable.*

Las principales propiedades de la integral multívoca aparecen en el resultado siguiente:

Teorema 7 *Con la notación precedente,* $\int_\Omega G(w)\,d\mu$ *es un convexo. Por otra parte, si* G *está acotada integralmente, entonces* $S^1(G)$ *es no vacío y, en consecuencia, también lo es* $\int_\Omega G(w)\,d\mu$*. Si los valores de* G *son cerrados, entonces* $\int_\Omega G(w)\,d\mu$ *es un compacto y se da la igualdad*

$$\int_\Omega G(w)\,d\mu = \int_\Omega (\overline{\mathrm{co}}\ G)(w)\,d\mu.$$

Finalmente, si G *está acotada integralmente y toma valores compactos y ponemos* $A = \int_\Omega G(w)\,d\mu$*, entonces*

$$\sigma_A(y) = \int_\Omega \sigma_{G(w)}(y)\,d\mu \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Con ayuda de este resultado, es posible calcular explícitamente algunas integrales. Para ello es suficiente construir la función soporte $\sigma_{G(w)}$, integrar la función $\sigma_{G(w)}(y)$ respecto de w para cada $y \in \mathbb{R}^n$ y, después, reconstruir el convexo compacto no vacío $\int_\Omega G(w)\,d\mu$ a partir de la función soporte resultante. Veamos algunos ejemplos que permiten aclarar este procedimiento.

En primer lugar, sea A un convexo compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cualesquiera que sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, con $t_1 \leq t_2$, se tiene que

$$\int_{(t_1,t_2)} A\,dt = \int_{t_1}^{t_2} A\,dt = (t_2 - t_1)A.$$

En efecto, por el Teorema 7, tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_{\int_{t_1}^{t_2} A\,dt}(y) &= \int_{t_1}^{t_2} \sigma_A(y)\,dt \\
&= \sigma_A(y) \int_{t_1}^{t_2} dt \\
&= (t_2 - t_1)\sigma_A(y).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} A\,dt &= \{\, x \in \mathbb{R}^n \; ; \; (x,y) \leq (t_2 - t_1)\sigma_A(y) \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n \,\} \\ &= (t_2 - t_1)A.\end{aligned}$$

Si A no fuese convexo, entonces tendríamos

$$\int_{t_1}^{t_2} A\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{\text{co}}\, A)\,dt = (t_2 - t_1)\,\overline{\text{co}}\, A.$$

Veamos un segundo ejemplo. Así, sea $G : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la multifunción definida por

$$G(t) = U(t)\{-v, v\} \qquad \forall t \in [-\pi, \pi],$$

donde

$$U(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \operatorname{tg} t \\ \cos t & \operatorname{cotg} t \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,dt = \overline{B}(0;4),$$

i.e. la bola cerrada de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio 4. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_{\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,dt}(y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{G(t)}(y)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |y_1 \operatorname{sen} t + y_2 \cos t|\,dt \\ &= 4\|y\|.\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,dt &= \overline{\text{co}}\,\{\, x \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x,y) \leq \sigma_{\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,dt}(y) \;\; \forall y \in \mathbb{R}^2 \,\} \\ &= \overline{\text{co}}\,\{\, x \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x,y) \leq 4\|y\| \;\; \forall y \in \mathbb{R}^2 \,\} \\ &= \overline{B}(0;4).\end{aligned}$$

Obsérvese que, en este ejemplo, no hubiera sido posible calcular la integral de G directamente usando la definición de integral multívoca.

4 Conceptos de la Teoría "Fuzzy"

Los conjuntos difusos (también denominados "fuzzy sets") fueron introducidos por Zadeh [35] en 1965. Desde entonces, un gran número de publicaciones ha tenido como objetivo extender los conceptos clásicos al nuevo campo y resolver los problemas planteados.

En este trabajo, la motivación principal del concepto *conjunto difuso* es nuestro interés por matematizar aspectos *subjetivos* en fenómenos tomados de la realidad. Veremos que esto se consigue generalizando la idea de pertenencia clásica (de un elemento a un conjunto) e introduciendo la idea de *grado de pertenencia.*

Recordemos el argumento básico desarrollado por Zadeh. Sea X un conjunto. Los subconjuntos usuales $A \subset X$ pueden ser identificados a partir de sus correspondientes funciones características χ_A , con

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{11}$$

Un punto $x \in X$ pertenece a A (resp. al complementario de A) si y sólo si $\chi_A(x) = 1$ (resp. $\chi_A(x) = 0$). Zadeh llamó *conjunto difuso* o *conjunto "fuzzy"* en X a toda función $u : X \mapsto [0, 1]$. De esta forma, dado un conjunto difuso u, el *grado de pertenencia* de un punto $x \in X$ a este conjunto es $u(x)$, un número entre 0 y 1.

Obviamente, este concepto constituye una extensión de la idea habitual. Para hacerlo operativo, es preciso extender las definiciones y reglas usuales entre conjuntos, tales como determinar el complementario, la unión, la intersección, etc., véase [26].

En lo que sigue, consideraremos conjuntos difusos $u : X \mapsto [0, 1]$, donde X es un espacio topológico (usualmente tendremos $X = \mathbb{R}^n$). Veamos en primer lugar que todo conjunto difuso puede identificarse con una familia (no numerable) de conjuntos "estándar" que cumplen ciertas propiedades.

Así, sea $u : X \mapsto [0, 1]$ un conjunto difuso y denotemos $L_a u$ el conjunto de nivel a de u para cada $a \in (0, 1]$, esto es,

$$L_a u = \{\, x \in X \ ; \ u(x) \geq a \,\}.$$

Por otra parte, pongamos

$$L_0 u = \text{ sop } (u) = \overline{\{\, x \in X \ ; \ u(x) \neq 0 \,\}}$$

(el soporte de u). Entonces

$$L_0 u \supset L_a u \supset L_b u \qquad \text{para } b \geq a \geq 0.$$

De este modo, al conjunto "fuzzy" $u : X \mapsto [0, 1]$ le podemos asociar la familia $\{\, L_a u \ ; \ a \in [0, 1] \,\}$. Recíprocamente, tenemos el siguiente resultado debido a Nagoita y Ralescu, cf. [26]:

Teorema 8 *Sea X un espacio topológico y sea $\{\, M_a \ ; \ a \in [0, 1] \,\}$ una familia de subconjuntos de X con las propiedades siguientes:*

1. *$M_0 \subset X$,*

2. *Si $a \leq b$, entonces $M_b \subset M_a$,*

3. *Si* $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le 1$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *entonces*

$$M_a = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{a_n} .$$

Entonces existe un único conjunto difuso $u : X \mapsto [0,1]$ *tal que* $M_a = L_a u$ *para cada* $a \in [0,1]$.

Obsérvese que, en particular, si $u : X \mapsto [0,1]$ es un conjunto "estándar", i.e. si $u = \chi_A$ para algún $A \subset X$, entonces la familia $\{ L_a u \; ; \; a \in [0,1] \}$ es la siguiente:

$$L_a u = \begin{cases} \overline{A} & \text{si } a = 0, \\ A & \text{si } 0 < a \le 1. \end{cases}$$

Recordemos que $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ denota la familia de los compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. La extensión adecuada al contexto "fuzzy" de $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es la familia $\mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 7 $\mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *es la familia de los conjuntos "fuzzy"* $u : \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ *que cumplen las propiedades siguientes:*

1. *u es semicontinua superiormente,*

2. $L_0 u$ *es compacto,*

3. *El conjunto* $L_1 u = \{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; u(x) = 1 \}$ *es no vacío.*

Dada $u : \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$, no es difícil comprobar que

$$u \in \mathbb{E}(\mathbb{R}^n) \iff L_a u \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in [0,1].$$

Esta caracterización es esencial para abordar las cuestiones mencionadas en la Sección 1.

Podemos definir una estructura métrica sobre $\mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ poniendo

$$D(u_1, u_2) = \sup_{a>0} h(L_a u_1, L_a u_2)$$

(recuérdese que $h(\cdot\,,\cdot)$ es la distancia de Hausdorff habitual en $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$). Claramente,

$$(\mathbb{R}^n, d) \hookrightarrow (\mathbb{K}(\mathbb{R}^n), h) \hookrightarrow (\mathbb{E}(\mathbb{R}^n), D),$$

con inyecciones continuas (recuérdese que $d(\cdot\,,\cdot)$ es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$).

En lo que resta de esta sección, mostraremos la extensión al contexto "fuzzy" de la mayor parte de conceptos y resultados presentados en la sección precedente.

Sea $\mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n)$ el subconjunto de $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ formado por los compactos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Indicaremos en primer lugar cuál es la generalización al contexto "fuzzy" de $\mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n)$. Para ello, nos hace falta una definición:

Definición 8 *Se dice que el conjunto difuso* $u : \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ *es fuzzy-convexo si, para cada* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *y cada* $\lambda \in [0,1]$*, se verifica la desigualdad*

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\,[u(x), u(y)].$$

Esta definición es bastante natural si pensamos en $u(x)$ como el *grado de pertenencia* de x al conjunto "fuzzy" u. De hecho,

$$u \text{ es fuzzy-convexo} \iff L_a u \text{ es convexo para cada } a \in [0,1].$$

Pondremos ahora

$$\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n) = \{\, u \in \mathbb{E}(\mathbb{R}^n) \ ; \ u \text{ es fuzzy-convexo} \,\}.$$

Claramente, $\mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$ vía la inclusión canónica $A \mapsto \chi_A$. Por otra parte,

$$u \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n) \iff L_a u \in \mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in [0,1].$$

El conjunto $\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$ puede dotarse de una estructura de espacio vectorial, poniendo

- $(u_1 \oplus u_2)(x) = \sup_{y+z=x} \min[u_1(y), u_2(z)]$ para $u_1, u_2 \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$,
- $(\lambda \odot u)(x) = u(x/\lambda)$ si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $(\lambda \odot u)(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ si $\lambda = 0$, para cada $u \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$.

Aunque a primera vista estas operaciones parecen extrañas, son completamente naturales si pensamos en términos de conjuntos de nivel. En efecto, la definición precedente de suma permite escribir que

$$L_a(u_1 \oplus u_2) = L_a u_1 + L_a u_2 \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$$

para cada $a \in [0,1]$. Por otra parte, con la definición del producto por un escalar, tenemos

$$L_a(\lambda \odot u) = \lambda L_a u \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n).$$

Obsérvese por otra parte que una manera equivalente de definir la suma en $\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$ es a partir de la *inf-convolución* del Análisis Convexo.

Se tiene el resultado siguiente (cf. [28] y [30] para la demostración):

Teorema 9 $(\mathbb{E}(\mathbb{R}^n), D)$ *es un espacio métrico completo y no separable. Por otra parte,* $\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$ *es cerrado en* $(\mathbb{E}(\mathbb{R}^n), D)$*.*

Una propiedad importante de $(\mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n), h)$ es el Teorema de Inmersión de Minkowski. Una forma de enunciar este resultado es la siguiente:

Teorema 10 *La aplicación* $j_0 : \mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n) \mapsto C^0(S^{n-1})$ *definida por*

$$j_0(A) = \sigma_A \qquad \forall A \in \mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n),$$

es aditiva, positivamente homogénea e isométrica, i.e.

$$\|j_0(A) - j_0(B)\|_{C^0(S^{n-1})} = h(A,B) \qquad \forall A, B \in \mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n).$$

Para poder generalizar este Teorema al contexto "fuzzy", conviene que nos restrinjamos a un subconjunto adecuado de $\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$. Así, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n)$, formado por las $u \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$ tales que la función $a \mapsto L_a u$ es continua de $[0,1]$ en el espacio métrico $(\mathbb{K}_c(\mathbb{R}^n), h)$.

No es difícil probar que $(\mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n), D)$ es un subespacio métrico completo de $(\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n), D)$. Y la generalización del Teorema de Inmersión de Minkowski es como sigue:

Teorema 11 *Existe una inyección* $j : \mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n) \mapsto C^0([0,1] \times S^{n-1})$ *que es aditiva, positivamente homogénea e isométrica, i.e. tal que*

$$\|j(u_1) - j(u_2)\|_{C^0([0,1]\times S^{n-1})} = D(u_1, u_2) \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n).$$

Este resultado está probado en [29] (véase también [32]). Para la demostración, se usa el funcional soporte "fuzzy" $S_u : [0,1] \times S^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$, definido por

$$S_u(a,x) = \sigma_{L_a u}(x) \qquad \forall (a,x) \in [0,1] \times S^{n-1}.$$

Como consecuencia del resultado anterior, deducimos que $(\mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n), D)$ es un subespacio métrico completo y separable de $(\mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n), D)$ y, además, que se trata del mayor subespacio que puede ser inmerso a través de j en $C^0([0,1] \times S^{n-1})$.

Definición 9 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^m$ *un conjunto no vacío. Se llama multifunción "fuzzy" a toda aplicación* $H : A \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 10 *Diremos que* $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *es una multifunción "fuzzy" Lipschitz-continua si existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$D(H(x), H(y)) \leq \gamma \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Diremos que H *es contractiva si se tiene la propiedad anterior para algún* $\gamma \in (0,1)$. *Finalmente, diremos que* x *es un punto fijo de* H *si*

$$H(x) \ni \chi_{\{x\}}\,.$$

El análogo del Teorema de Nadler para multifunciones "fuzzy" es el que sigue (véase [31] para la demostración del mismo):

Teorema 12 *Sea* $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *una multifunción "fuzzy" contractiva. Entonces* H *posee al menos un punto fijo.*

El problema de la estabilidad del punto fijo es resuelto por el Teorema 15, presentado más abajo. Este resultado es de gran importancia en el contexto de las inclusiones diferenciales "fuzzy" y también cuando hablamos de control óptimo "fuzzy". Antes de enunciarlo, debemos definir el concepto de *conjunto difuso de puntos fijos* de una multifunción "fuzzy". Para ello, usaremos las siguientes Proposiciones:

Proposición 13 *Sea $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción "fuzzy" contractiva. Entonces, para cada $a \in [0,1]$, la multifunción $H_a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$, dada por*

$$H_a(x) = L_a[H(x)] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

es contractiva en el sentido de la Definición 4.

Proposición 14 *En las condiciones de la Proposición precedente, sea S_a el conjunto de los puntos fijos de H_a para cada $a \in [0,1]$. Entonces existe un único $u \in \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ con la propiedad siguiente:*

$$L_a u = S_a \qquad \forall a \in [0,1].$$

Las demostraciones pueden encontrarse en [31]. En particular, para la prueba de la Proposición 14, se usa el Teorema de Representación de Nagoita y Ralescu (Teorema 8).

Podemos ahora dar la Definición anunciada:

Definición 11 *Sea $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción "fuzzy" contractiva. El conjunto difuso $u \in \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ que proporciona la Proposición* 14 *es, por definición, el conjunto difuso de los puntos fijos de H.*

Obsérvese que el conjunto difuso u que precede verifica lo siguiente:

$$u(x) = (H(x))(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Con estos ingredientes podemos ya enunciar el resultado de estabilidad mencionado más arriba:

Teorema 15 *Sean H_0 y las H_i multifunciones "fuzzy" contractivas con la misma constante $\gamma \in (0,1)$, tales que $H_i \to H_0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, i.e.*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} D(H_i(x), H_0(x)) \to 0$$

cuando $i \to +\infty$. Sean u_0 y los u_i los correspondientes conjuntos difusos de puntos fijos. Entonces $D(u_i, u_0) \to 0$ cuando $i \to +\infty$.

Para finalizar esta sección, presentaremos una extensión de la integral de Aumann al caso multívoco "fuzzy" debida a Ralescu, cf. [28]. Previamente, definiremos la noción de medibilidad:

Definición 12 *Sea $\{\Omega, \Sigma, \mu\}$ un espacio de medida completo y sea $H : \Omega \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción "fuzzy". Diremos que H es medible si la multifunción $H_a : \Omega \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$, definida por*

$$H_a(w) = L_a[H(w)] \qquad \forall w \in \Omega,$$

es medible para cada $a \in [0,1]$. Diremos que H está acotada integralmente si cada H_a lo está.

Teorema 16 *Sean* $\{\Omega, \Sigma, \mu\}$ *un espacio de medida completo y* $H : \Omega \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *una multifunción "fuzzy" medible y acotada integralmente. Entonces existe un único conjunto difuso* $u \in \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *con la propiedad siguiente:*

$$L_a u = \int_\Omega H_a \, d\mu \qquad \forall a \in [0,1].$$

Este u *es, por definición, la integral de la multifunción "fuzzy"* H *y se denota* $\int_\Omega H \, d\mu$.

Con esta definición de integral de una multifunción "fuzzy", bajo condiciones razonables (por ejemplo, cuando μ no es una medida *atómica*), se tiene que $\int_\Omega H \, d\mu \in \mathbb{E}_c(\mathbb{R}^n)$. En efecto, como consecuencia inmediata de las propiedades de la integral de Aumann, los conjuntos de nivel $L_a[\int_\Omega H \, d\mu]$ son todos compactos y convexos.

Por otra parte, no es difícil comprobar que la integral "fuzzy" multívoca es *lineal* en el sentido siguiente:

$$L_a[\int_\Omega (H_1 \oplus H_2) \, d\mu] = L_a \int_\Omega H_1 \, d\mu + L_a \int_\Omega H_2 \, d\mu,$$
$$L_a[\int_\Omega \lambda \odot H \, d\mu] = \lambda L_a \int_\Omega H \, d\mu.$$

Para más detalles sobre las propiedades de esta integral, se pueden consultar las referencias [12],[23],[28],[30].

5 Dinámica de poblaciones e inclusiones diferenciales "fuzzy"

Como hemos indicado ya en la Sección 1, las ecuaciones diferenciales "clásicas" no son capaces de describir todos los fenómenos observados en la realidad. Así, cuando nos interesamos por modelos de poblaciones, debemos afrontar con frecuencia hechos que no están completamente de acuerdo con la teoría clásica. En efecto,

- Los individuos pueden exhibir algunas estrategias o preferencias, tales como la elección de alimentos, la huida de depredadores, etc.

- Pueden existir restricciones adicionales que el sistema debe satisfacer (limitaciones de espacio, nutrientes o toxinas inducidas, etc.). Muchas veces éstas no pueden ser tenidas en cuenta por un sistema diferencial "estándar".

- Puede haber indefiniciones en la dinámica debidas a ruidos producidos en el medio o en el crecimiento demográfico.

Consideremos por simplicidad un modelo determinista simple que, en ausencia de indefinición, está descrito por una ecuación diferencial ordinaria escalar

$$\dot{x} = f_0(t, x), \tag{12}$$

donde $f_0 : [0, T) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función regular dada. Podemos modelar la indefinición o ruido en la evolución de la población, introduciendo un "parámetro" v, por ejemplo una función o distribución que toma valores en $U \subset \mathbb{R}$. El sistema resultante es de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, v(t)), \tag{13}$$

donde $f : [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es tal que $f(t, x, 0) \equiv f_0(t, x)$.

Al menos existen dos formas distintas de llegar a sistemas de este tipo:

a) Si aceptamos que la naturaleza de la indefinición es *aleatoria*, entonces lo más adecuado es utilizar una ecuación diferencial estocástica. En este caso, debido a dificuldades técnicas, se suele suponer que la perturbación afecta linealmente a la dinámica. Más precisamente, se suele escribir

$$\dot{x} = f_0(t, x) + f_1(t, x)v,$$

donde v es un *ruido blanco*, esto es, la "derivada estocástica" de un movimiento Browniano. Para un primer análisis de estos modelos, véase por ejemplo [18].

b) Si, por el contrario, no parece adecuado suponer que el ruido posea estructura probabilística (debido a que las elecciones o preferencias de los individuos son subjetivas), parece más conveniente recurrir a la teoría "fuzzy". Para más detalles, cf. [22].

Como hemos indicado en las Secciones anteriores, una manera adecuada de reescribir (13) es poner

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{14}$$

donde F es una multifunción determinada por f y el conjunto U donde debe tomar valores v. A la vista de las metodologías propuestas en trabajos previos, una generalización razonable de (12) para modelar sistemas dinámicos con indefiniciones se consigue admitiendo que, en (14), F es una multifunción "fuzzy" (es decir, que $F(t, x)$ es un conjunto difuso para cada (t, x)). Con este objetivo, Zhu y Rhao introdujeron en [34] las *inclusiones diferenciales difusas*.

El concepto es como sigue. Sean $H : [0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción "fuzzy", $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ una función y $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo y consideremos el problema siguiente: Hallar $x : J \mapsto \mathbb{R}^n$ absolutamente continua y tal que

$$\dot{x}(t) \in L_{\alpha(x(t))} \left[H(t, x(t)) \right], \qquad t \in J \text{ c.t.p.} \tag{15}$$

Diremos que (15) es una *inclusión diferencial "fuzzy"*. Abreviadamente, escribiremos (15) en la forma

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)} \left[H(t, x) \right], \qquad t \in J. \tag{16}$$

Vemos pues que una inclusión diferencial "fuzzy" está determinada por la multifunción "fuzzy" H y por la *función de nivel* α. Si $x = x(t)$ es una solución de (16) en el intervalo J, entonces

$$H(t, x(t))(\dot{x}(t)) \geq \alpha(x(t)) \tag{17}$$

para $t \in J$ c.t.p.

Supongamos que

$$\alpha(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si H toma valores en $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$, i.e. si

$$H(t, x) = \chi_{F(t,x)} \qquad \forall (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n,$$

donde $F : [0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción "clásica", entonces la inclusión diferencial "fuzzy" (16) es equivalente a la inclusión diferencial clásica

$$\dot{x} \in F(t, x) \qquad t \in J \text{ c.t.p.}$$

Más adelante veremos que, para otras elecciones apropiadas de H y α, (17) también equivale a una inclusión diferencial "clásica".

A continuación, hablaremos de la existencia de solución del problema de valor inicial para (16) y, posteriormente, de la estabilidad de los puntos de equilibrio.

El problema de valor inicial para (16) consiste en hallar una solución $x = x(t)$ en un intervalo de la forma $[0, T^*)$ que, además, verifique $x(0) = x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto dado. Abreviadamente, pondremos

$$\begin{cases} \dot{x} \in L_{\alpha(x)}\left[H(t, x)\right], \\ x(0) = x_0 . \end{cases} \tag{18}$$

Combinando el Teorema 1 con las definiciones y propiedades que preceden, es posible deducir el resultado de existencia siguiente:

Teorema 17 *Supongamos que, en* (18), *la multifunción "fuzzy"* $H : [0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ *y la función continua* $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ *son tales que la multifunción*

$$(t, x) \mapsto L_{\alpha(x)}\left[H(t, x)\right]$$

es semicontinua superiormente. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *el problema* (18) *posee al menos una solución en* $[0, T^*)$ *para algún* T^* *maximal que verifica* $0 < T^* \leq T$.

Para analizar las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio de (16), como en la Sección 2, nos restringiremos al caso autónomo. Consideraremos por tanto la inclusión diferencial "fuzzy"

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}\left[H(x)\right], \qquad t \in J, \tag{19}$$

y el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} \in L_{\alpha(x)}\,[H(x)]\,, \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

donde $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Convendrá hablar previamente de multifunciones "fuzzy" *cuasi-lineales* y de la diferencial de una multifunción "fuzzy". Recordaremos en consecuencia estos conceptos, que han sido introducidos en [11] y [12] y generalizan los que fueron presentados en la Sección 2.

Definición 13 *Se dice que una multifunción "fuzzy" $Q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ es cuasi-lineal si*

$$Q(x_1 + x_2) \subset Q(x_1) \oplus Q(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

y

$$Q(\lambda x) = \lambda \odot Q(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se dice que Q es acotada si existe $K > 0$ tal que

$$D(Q(x), \chi_{\{0\}}) \leq K\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diremos que la inclusión (19) es cuasi-lineal si la correspondiente multifunción H lo es.

Definición 14 *Se dice que la multifunción $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ es Fréchet-diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe una multifunción "fuzzy" cuasi-lineal acotada $H'(x_0) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$D(H(x), H(x_0) + H'(x_0)(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|).$$

La multifunción "fuzzy" $H'(x_0)$ se llama derivada de Fréchet de H en x_0 .

No es difícil probar que, si $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ es cuasi-lineal y acotada, entonces es Fréchet-diferenciable en 0 y además $H'(0) = H$.

Definición 15 *Consideremos la inclusión diferencial fuzzy* (19)*. Supongamos que $H(0) \ni \chi_{\{0\}}$. Se dice entonces que* 0 *es un punto de equilibrio de* (19)*. Diremos que este punto de equilibrio es estable (en el sentido de Lyapunov) si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe $\delta_0 > 0$ tal que, si $\|x_0\| \leq \delta_0$, entonces existe una solución $x = x(t)$ de* (19) *con la condición inicial $x(0) = x_0$ definida para todo $t \geq 0$.*

2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tal que, si $\|x(0)\| < \delta_1$, entonces $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.*

Finalmente, diremos que el punto de equilibrio Lyapunov-estable $x = 0$ es asintóticamente estable si existe $\delta_2 \in (0, \delta_0]$ tal que, si $\|x(0)\| \leq \delta_2$, entonces $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

El resultado principal relativo a la estabilidad de los puntos de equilibrio de (19) es el siguiente:

Teorema 18 *Supongamos que la multifunción "fuzzy" $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{R}^n)$ es Fréchet-diferenciable en* 0 *y que existe $\delta_0 > 0$ tal que cualquier solución $x = x(t)$ existe en el intervalo $[0, +\infty)$ si $\|x(0)\| \leq \delta_0$. En estas condiciones, si el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la inclusión diferencial cuasi-lineal*

$$\dot{y} \in L_a[H'(0)(y)]$$

para algún $a \in [0, 1]$, entonces también es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (19). *En tal caso, existen además $\sigma > 0$, $k > 0$ y $\delta > 0$ tales que cualquier solución de* (19) *para la que se tenga $\|x(0)\| \leq \delta$ verifica*

$$\|x(t)\| \leq k \, \|x(0)\| \, e^{-\sigma t} \qquad \forall t \geq 0.$$

6 Algunos casos particulares (dinámica de poblaciones con ruido)

En esta Sección, consideraremos varias situaciones particulares que aparecen en Dinámica de poblaciones y pueden ser modeladas de forma satisfactoria con las herramientas precedentes. Consideramos por simplicidad sólo sistemas unidimensionales, correspondientes al comportamiento de una población aislada.

Así, sea $x(t)$ la densidad de población en el tiempo t y consideremos los modelos de crecimiento exponencial y logístico, dados por la ecuación $\dot{x} = f(x)$, con

$$f(x) = rx \qquad \text{y} \qquad f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \tag{20}$$

respectivamente.

En Biología existen dos interpretaciones posibles para las perturbaciones que pueden aparecer en modelos como éstos: el ruido *demográfico* (que se debe a aptitudes individuales distintas) y el ruido *ambiental* (que tiene su origen en variaciones imprevistas). Nisbet y Gurney propusieron la siguiente aproximación para el ruido demográfico:

$$g(x) = \sqrt{(b(x) + d(x))\, x}, \tag{21}$$

donde $b(x)$ y $d(x)$ son las razones de natalidad y mortalidad instantáneas, respectivamente. En particular, para el modelo exponencial, tenemos $b(x) \equiv r$, $d(x) \equiv 0$ y $g(x) \equiv \sqrt{rx}$.

Supongamos que, de algún modo, hemos tenido conocimiento de que el ruido está acotado por una constante positiva C. Entonces tiene perfecto sentido considerar la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in f(x) + Cg(x)[-1, 1], \tag{22}$$

donde f es alguna de las funciones de (20) y g está dada por (21). Un estudio detallado de (22) se lleva a cabo en [22].

Sin embargo, en poblaciones con gran densidad, el ruido demográfico es insignificante frente al ruido ambiental. Parece por tanto mucho más natural aceptar que el ruido afecta sólo a los parámetros. Suponiendo además que solamente el parámetro r se ve afectado, tenemos los modelos perturbados

$$\dot{x} = (r + v)x$$

y

$$\dot{x} = (r + v)x\left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Basándonos en estos modelos, en los conceptos anteriores y en la indefinición del parámetro r, se ha introducido en [13] un nuevo modelo, donde hemos interpretado r como un conjunto "fuzzy". La presencia de este conjunto "fuzzy" está justificada por la nebulosidad de los factores que influyen sobre el aumento de población y/o la expectativa de vida.

Más precisamente, consideraremos inclusiones diferenciales del tipo

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}[(\lambda_1 + \lambda_2 u) \cdot x], \qquad t \in [0, +\infty), \tag{23}$$

donde $\alpha : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ es una función continua dada, λ_1 y λ_2 son funciones de la variable t y u es un conjunto "fuzzy".

Cuando λ_1 y λ_2 son independientes de t, vemos que (23) es una inclusión diferencial autónoma. La multifunción "fuzzy" asociada es cuasi-lineal y acotada y, por tanto, Fréchet-diferenciable en 0. También tenemos que $x = 0$ es un punto de equilibrio de (23).

6.1 Ejemplo 1: Un modelo "fuzzy" con crecimiento exponencial

Supongamos que, en ausencia de ruido, la población considerada está descrita por el modelo de crecimiento exponencial

$$\dot{x} = rx, \tag{24}$$

donde r es la tasa de natalidad cuando la población posee todas las condiciones necesarias para subsistir, i.e. cuando hay espacio suficiente, nutrientes, etc. (r es una constante positiva).

Ahora supongamos que el parámetro r es perturbado por la saturación del espacio y que esto determina el grado de competición entre los componentes de la especie. Introduzcamos el conjunto "fuzzy" u, con

$$u(s) = \frac{k}{k + s} \qquad \forall s \geq 0.$$

La variable s mide la *cantidad de espacio libre* y u modela la *competición entre especies* de acuerdo con la capacidad límite k, basándonos en el principio de que, cuanto mayor es el espacio, menor es el nivel de competición dentro de la población.

La perturbación de r basada en el conjunto "fuzzy" u conduce a la ley

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}[rx - x \odot u], \qquad t \in [0, +\infty),$$

que por analogía con las leyes "estándar" escribiremos

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}[(r - u)x], \qquad t \in [0, +\infty). \tag{25}$$

Naturalmente, la función $\alpha = \alpha(x)$ debe ser dada.

Obsérvese que, si $s \to +\infty$, tenemos $u(s) \to 0$. Luego, en el límite $s \to +\infty$, (25) se reduce formalmente al modelo determinista (24).

Elijamos α como sigue:

$$\alpha(x) = \frac{k^2}{k^2 + x^+} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_{\alpha(x)}[u] &= \{\, s \in [0, +\infty)\ ;\ \frac{k}{k+s} \geq \frac{k^2}{k^2 + x}\,\} \\ &= [0, \frac{x^+}{k}]. \end{aligned}$$

Por tanto, con esta elección de α, (25) es equivalente a la inclusión diferencial ordinaria

$$\dot{x} \in \left(r - \frac{x}{k}[0, 1]\right) x. \tag{26}$$

En (25) tenemos que $x = 0$ es un punto de equilibrio. Pero no se trata de un punto Lyapunov-estable, pues existen soluciones de (26) de la forma

$$x(t) = \frac{x_0 rk e^{rt}}{\theta x_0 e^{rt} + (rk - x_0\theta)} \qquad \text{con } \theta \in [0, 1].$$

Así, si $0 \leq \theta < rk \min(1, 1/x_0)$, las soluciones verifican $x(t) \to \infty$ cuando $t \to +\infty$.

6.2 Ejemplo 2: Un modelo para la expectativa de vida de una población.

Supongamos dada una población con $x(t)$ individuos en cada instante de tiempo $t \geq 0$. Presentaremos a continuación un modelo para determinar la expectativa de vida en el que admitiremos que la pobreza es un factor que contribuye a la mortalidad de los individuos.

Para modelar la pobreza, podríamos utilizar varios indicadores distintos, como el consumo de vitaminas, el saneamiento básico, etc. Aquí, elegiremos como factor determinante la renta económica del grupo estudiado.

Razonando como en [6], vemos que el conjunto "fuzzy" de los pobres de una determinada localidad queda bien descrito poniendo

$$u(s) = \begin{cases} [1 - \left(\dfrac{s}{r_0}\right)^2]^k & \text{si } 0 \leq s < r_0\,, \\ 0 & \text{si } s \geq r_0\,, \end{cases}$$

donde k es un parámetro positivo característico del grupo, s es una variable proporcional a la renta del individuo considerado y r_0 es la renta mínima, a partir de la cual los individuos no tienen ya categoría de pobres y, en consecuencia, no influyen en la tasa de mortalidad.

El modelo viene dado por la inclusión diferencial "fuzzy"

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}[-\lambda_1 x + \lambda_2 x \odot u], \qquad t \in [0, +\infty),$$

que, de nuevo por analogía con las inclusiones diferenciales clásicas, escribiremos en la forma

$$\dot{x} \in L_{\alpha(x)}\left[-(\lambda_1 + \lambda_2 u)x\right], \qquad t \in [0, +\infty). \tag{27}$$

Aquí, λ_1 y λ_2 son constantes positivas. Más precisamente,

- λ_1 es la tasa de mortalidad natural, obtenida a partir del análisis de un grupo que dispone de condiciones satisfactorias de supervivencia.
- λ_2 es un factor de proporcionalidad de la influencia de la pobreza en el aumento de la tasa de mortalidad del grupo.

Observamos que, si $s \geq r_0$, entonces $u(s) = 0$ y (27) se reduce, al menos formalmente, al modelo determinista

$$\dot{x} = -\lambda_1 x.$$

Pongamos

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x^k & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, si $x > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} L_{\alpha(x)}\left[u\right] &= \{\, s \geq 0 \;;\; u(s) \geq \alpha(x) \,\} \\ &= r_0 \left[0, \sqrt{1 - \min{(1, x)}}\right]. \end{aligned}$$

La inclusión diferencial "fuzzy" (27) para $0 < x \leq 1$ es, por tanto, equivalente a la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1 - x}\,[0, 1] \tag{28}$$

(justamente este hecho hace pensar que la idea de enfocar los problemas de Dinámica de poblaciones usando inclusiones diferenciales "fuzzy" es realmente útil).

Así, buscando selecciones apropiadas de la multifunción que aparece en (28), podemos determinar soluciones. Por ejemplo, las funciones f_1, f_2 y f_3, con

$$f_1(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1 - \min{(1, x^+)}},$$

$$f_2(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x (1 - \min{(1, x^+)})$$

y

$$f_3(x) = -\lambda_1 x,$$

son selecciones continuas. Para cada i, podemos fácilmente resolver la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f_i(x),$$

completada con la condición inicial $x(0) = x_0$. Esto conduce a las soluciones deseadas.

En particular, tenemos las siguientes:

$$x_2(t) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 r_0)x_0}{[(\lambda_1 + \lambda_2 r_0) - \lambda_2 r_0 x_0]e^{(\lambda_1+\lambda_2 r_0)t} + \lambda_2 r_0 x_0} \ ;$$

$$x_3(t) = x_0 e^{-\lambda_1 t}.$$

Veamos a continuación que $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para (27).

En esta inclusión diferencial “fuzzy” tenemos la multifunción $H(x) \equiv -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$, que es cuasi-lineal acotada y, por tanto, Fréchet-diferenciable en 0, con

$$H'(0)x = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Probaremos a continuación que, para algún $a \in [0,1]$, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la inclusión diferencial cuasi-lineal

$$\dot{y} \in L_a[H'(0)(y)]. \tag{29}$$

En efecto, tomemos $a = (\frac{1}{2})^k$. Entonces (29) se reduce a

$$\dot{x} \in -\left(\lambda_1 + \lambda_2 r_0[0, 1/\sqrt{2}]\right) x \tag{30}$$

Las soluciones de (30) son de la forma $x(t) = x(0)\exp(-(\lambda_1 + \theta\lambda_2 r_0)t)$, con $\theta \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ y existen para todo $t \geq 0$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 = \epsilon$ tal que $\|x(t)\| = \|x(0)\exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)\| \leq \|x(0)\|$ para todo $t \geq 0$. Además, $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Luego el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para la inclusión (29) con $a = (\frac{1}{2})^k$. Usando el Teorema 16, deducimos que $x = 0$ es también un punto de equilibrio asintóticamente estable para la inclusión diferencial “fuzzy” (27). Además, existen $\sigma > 0$, $k > 0$ y $\delta > 0$ tales que cualquier solución $x = x(t)$ que cumpla que $\|x(0)\| < \delta$ verifica

$$\|x(t)\| \leq k\,\|x(0)\|\exp(-\sigma t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Referencias

[1] T.S. Angell, *Existence of solutions of multivalued Uryshon integral equations*, J. Optim. Theory Appl. 46 (1985), no. 2, 129–151.

[2] J.P. Aubin, *A survey of viability theory*, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 28 (1990), p. 749–788.

[3] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[4] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston 1990.

[5] R. Aumann, *Integral of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), p. 1–12.

[6] R.C. Bassanezi and L.C. Barros, *A simple model of life expectancy with subjetive parameters*, Kibernetics: Int. J. of Systems and Cybernetics 24, Vol. 9, p. 91–98 (1995).

[7] V.I. Blagodat-Skii y A.F. Filippov, *Differential inclusions and optimal control*, Proc. of the Steklov Inst. Math. 4 (1986), p. 199–259.

[8] Y.G. Borisovich, B.D. Gelman, A.D. Myshkis, V.V. Obukhovskii, *Multi-valued mappings*, J. Soviet Math. 49 (1990), no. 1, p. 800–855.

[9] A. Cellina, *Approximation of set valued functions and fixed point theorems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 82 (1969), p. 247–262.

[10] L. Cesari, *Optimization - Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[11] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V.Brandão, *On the differentiability of fuzzy-valued mappings and the stability of a fuzzy differential inclusion*, submitted (2001).

[12] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V. Brandão, *Fuzzy quasilinear spaces*, preprint (2001).

[13] Y. Chalco-Cano, R.C. Bassanezi, M.A. Rojas-Medar and T. Mizukoshi, *Fuzzy differential inclusions and applications*, in preparation.

[14] F.H. Clarke, G. Watkins, *Necessary conditions, controlability and the value function for differential-difference inclusions*, Nonlinear Anal., Vol. 10, no. 11, p. 1155–1179, 1986.

[15] B. Cornet, G. Haddad, *Théorèmes de viabilité pour les inclusions différentielles du second ordre*, Israel J. Math., Vol. 57, no. 2, 1987.

[16] Fan Van Cyong, *A smooth choice theorem and its application to multivalued integral equations*, Mat. USSR Sb. 105 (147) (1978), no. 4, p. 622–637, 640.

[17] G. Debreu, *Integration of correspondences*, in "Proc. of the Fifth Berkeley Symp. Math Statistic. Probability", p. 531–372, University of California Press, Berkeley 1966.

[18] W.H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Applications of Mathematics, No. 1. Springer-Verlag, Berlin-New York 1975.

[19] V.I. Istrăţescu, *Fixed point theory. An introduction*, Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston 1981.

[20] M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer, Warsaw 1991.

[21] E. Klein, A. Thompson, *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York 1984.

[22] V. Krivan, G. Colombo, *A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dinamics*, Bull. Math. Biology 60, p. 721–751, 1998.

[23] L. Lushu, *Random fuzzy sets and fuzzy martingales*, Fuzzy Sets and Systems, 69 (1995), p. 181–192.

[24] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math., (2) 63 (1956), p. 361–382.

[25] S.B. Nadler, *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), p. 475–478.

[26] M.L. Nagoita, D. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York (1975).

[27] N.S. Papageorgiou, *On multivalued evolution equations and differential equations in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. St. Paul. 36 (1987), no. 1, p. 21–39.

[28] M. Puri and D.A. Ralescu, *Fuzzy random variables*, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986), p. 409–422.

[29] M.A. Rojas-Medar, R.C. Bassanezi, H. Román-Flores, *A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications*, Fuzzy Sets and Systems, 102 (1999), no. 2, p. 263–269.

[30] H. Román-Flores, R.C. Bassanezi, M.A. Rojas-Medar, A. Flores-Franulic, *Tópicos en Análisis Fuzzy-Multívoco (minicurso)*, Actas XI Jornada de Matemáticas, Universidad de Tarapacá, Arica, Chile (1993).

[31] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, M.A. Rojas-Medar, R.C. Bassanezi, *Stability of the fixed points set of fuzzy contractions*, Applied Math. Letters, Vol. 11, no. 4, p. 33–37, 1998.

[32] H. Román-Flores, M.A. Rojas-Medar, *Embedding of level-continuous fuzzy sets on Banach spaces*, Inf. Sciences 144 (2002), p. 227–247.

[33] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York 1972.

[34] Yuanguo Zhu and Ling Rao, *Differential inclusions for fuzzy maps*, Fuzzy Sets and Systems, 112 (2000), p. 257–261.

[35] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8 (1965), p. 338–353.