

# **DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: DE LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN COMO FUTURO AL FUTURO EN LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN**

---

*Victoria Sánchez*

*Mercedes García*

*Isabel Escudero*

*José M.<sup>a</sup> Gavilán*

*Ramón Trigueros*

Dpto. de Didáctica de las Matemáticas

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Sevilla

*Gloria Sánchez-Matamoros*

I.E.S. "Andrés Benítez", Jerez de la Frontera, Cádiz

Recibido: 8 mayo 2008 / Aceptado: 18 junio 2008

## *RESUMEN*

El objetivo de este artículo es describir, desde nuestra perspectiva, lo que ha implicado llevar a cabo un proyecto de investigación en nuestro campo. Para ello, nos apoyamos en uno de esos proyectos desarrollado por nuestro equipo, cuyo objetivo ha sido obtener información sobre el aprendizaje matemático de los alumnos de bachillerato. En particular, abordamos el estudio conjunto de los metaconceptos *definir*, *probar* y *modelar*, que nosotros consideramos muy relevantes en la construcción del conocimiento matemático. La descripción del proceso se realiza en base a cuatro etapas clave: identificación del problema, su consideración dentro de un marco adecuado y compatible con él, un diseño metodológico que permita resolverlo en forma coherente, y el acceso a unos resultados válidos, verificables y contrastables, que supongan un avance en el cuerpo de conocimiento científico propio del campo considerado.

*Palabras clave:* definir, probar, modelar, aprendizaje matemático, Bachillerato, proyectos de investigación.

## *ABSTRACT*

The aim of this article is to describe, from our perspective, what has implied the development of a research project in our field. We use one of those projects developed by our team, where we try to obtain information about the mathematical learning in

16-18 year old students. In particular, we approach the analysis from the study of three metaconcepts, defining, proving and modelling, that we consider very relevant in the construction of the mathematical knowledge. The description of the process is made on the basis of four key stages: identification of the problem, its consideration in an adequate and compatible framework, a methodological design that allows solving it in a coherent way and the access to valid, verifiable and contrastable results that suppose an advance in the scientific knowledge of the considered field.

*Key words:* Defining, Proving, Modelling, Mathematical learning, High School Level, research projects.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el avance experimentado por las Didácticas Específicas en general, y por la Didáctica de las Matemáticas en particular, ha sido notable. De una situación inicial, vinculada a unas Escuelas de Magisterio en las que la demanda profesional era fundamentalmente docente, se ha pasado a la situación presente en la que investigación y docencia coexisten, configurando un nuevo marco profesional. Y es importante destacar que la transición de una situación a otra ha sido posible gracias al esfuerzo de unos profesionales que han sabido dar el salto de unas Didácticas Específicas consideradas como fuentes de recursos docentes, técnicas y medios más o menos útiles y elaborados, careciendo de una fundamentación científica, a considerar dichas Didácticas como la descripción y el estudio de la enseñanza/aprendizaje y de los fenómenos a que dan lugar en el marco de una disciplina científica de referencia. Esta posición ha pasado a considerarlas como el conocimiento del proceso de enseñar una materia, lo que las convierte en un campo de investigación (Brousseau, 1990).

Esta nueva situación ha conducido a identificar en las complejas relaciones que se establecen entre profesor, alumno y contenido, aspectos y situaciones susceptibles de ser investigados. Y es indudable que el paso de lo que lleva de identificar un problema a convertirlo en objeto de investigación marca una nueva etapa en el desarrollo de las didácticas específicas. El que los profesionales relacionados con esas Didácticas hayan empezado a desarrollar proyectos de investigación, que se enmarcan en actuaciones internacionales, nacionales, autonómicas o locales pero que están refrendados por unas características de rigor y competitividad, juega un papel decisivo. En el desarrollo de algunos de estos proyectos, se pueden identificar a grandes rasgos cuatro etapas clave: la identificación del problema, su consideración dentro de un marco adecuado y compatible con él, un diseño metodológico que permita tratar de resolverlo en forma coherente, y el acceso a unos resultados válidos, verificables y contrastables, que supongan un avance en el cuerpo de conocimiento científico propio del campo considerado.

El objetivo de este artículo es describir desde nuestra perspectiva lo que implica cada una de estas etapas, apoyándonos para esa descripción en el desarrollo de un proyecto de investigación que nuestro equipo está llevando a cabo.

## 2. IDENTIFICANDO EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Quizás una de las características del tipo de problemas investigados dentro de las Didácticas específicas es la estrecha relación que guardan con el trabajo en las aulas. El conocer de primera mano las dificultades y problemas relacionados con la enseñanza/ aprendizaje de las diferentes disciplinas y las propias demandas de la enseñanza/ aprendizaje de los contenidos didáctico/matemáticos (dada su vinculación mayoritaria a Facultades de Educación y Escuelas de Magisterio) incide, en muchos casos, en la identificación del problema a ser investigado.

Así, en nuestro caso, el problema ha sido la necesidad de mejorar nuestro conocimiento sobre el aprendizaje de determinadas nociones matemáticas de los alumnos de bachillerato, de tal manera que nos proporcionase una información básica de utilidad en diferentes dominios didáctico-matemáticos. Hay que tener en cuenta que los nuevos títulos de master en Formación de Profesores de Secundaria y Bachillerato plantean nuevas demandas a los formadores de profesores, que presumiblemente encuentran en los futuros alumnos de estos títulos una fuerte formación matemática, pero con escasa incidencia en aspectos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de la materia.

Pero la identificación de este objetivo no fue un hecho aislado. En ella ha sido decisivo las discusiones e intercambio de ideas llevadas a cabo dentro de un equipo, consolidado como grupo de trabajo y que aspira a crear una comunidad de indagación. Entendemos la comunidad de indagación en el sentido de Jaworski (2005), cuando señala que:

- es una comunidad (de práctica) en la que una de las normas es una actitud de investigación (p.e., incluir cuestionamiento crítico),
- la indagación *no* es la práctica, pero es una forma de '*approaching practice*' [en versión original],
- la indagación se puede usar como una *herramienta* para desarrollar la indagación como una *forma de ser*.

Esta comunidad está constituida, en nuestro caso, por profesores universitarios de Didáctica de las Matemáticas/ investigadores y profesores de Matemáticas de Secundaria/ investigadores, y es el contexto adecuado para llevar a cabo un proyecto de estas características. En este sentido, investigadores como Jaworski (2003b) han destacado el potencial de estas comunidades y la importancia de las situaciones de co-aprendizaje que en ellas emergen.

De este modo, la finalidad de obtener una mayor información sobre el aprendizaje matemático de los alumnos de bachillerato pasó a ser un objetivo general en nuestra investigación surgido dentro de una comunidad de indagación y asumido y hecho propio por todos y cada uno de sus miembros.

### 3. SITUANDO EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN EN UN MARCO DE REFERENCIA

El segundo paso en el desarrollo de un proyecto es situar el problema en un marco en el que dicho problema pueda encontrar sus referentes. En nuestro caso, entendemos el aprendizaje como la construcción del conocimiento, en este caso matemático, y asumimos que este aprendizaje es situado, por lo que la adquisición de habilidades intelectuales y el contexto sociocultural no pueden separarse (Brown *et al.*, 1989; Lave y Wenger, 1991).

Además, en el desarrollo de la investigación es preciso, en ocasiones, adoptar algunas decisiones básicas. En nuestro caso, estas decisiones estuvieron relacionadas con la necesidad de concretar las nociones matemáticas generales anteriormente mencionadas. Así, asumimos que *definir*, *probar* y *modelar* son metaconceptos clave en la construcción del conocimiento matemático y decidimos abordar su estudio conjunto, ya que los tres metaconceptos aportan diferentes referentes que se interrelacionan en dicha construcción, y por lo tanto en el proceso de aprendizaje. Adoptado este presupuesto básico, como paso previo para abordar el aprendizaje de los estudiantes, en una fase inicial de nuestra investigación nos centramos en la forma en que estos metaconceptos eran considerados en la literatura especializada (Borasi (1991), Cobb (2002), García & Llinares (2001), Knuth, (2002), Zaslavsky & Shir (2005). A partir de ahí, identificamos unos elementos teóricos, que se concretaron en unas **variables de identificación** (*características*) y **variables de discriminación** (*papel* y *tipo*). Estas variables permitieron realizar un primer análisis del tratamiento de los metaconceptos en los textos escolares de Bachillerato. En ese primer análisis fueron surgiendo otros elementos, más ligados al texto específico, que dieron lugar a la identificación de unas **variables empíricas** como *forma de acceder* y *consideración del autor en el texto*. La consideración conjunta de esas variables nos permitió elaborar un marco conceptual, presentado y aplicado en ocasiones anteriores (García *et al.*, 2006; Sánchez *et al.*, 2006, 2008), que se recoge en la siguiente figura:

<b>Variables teóricas consideradas</b>	<b>Lo que posibilitan</b>
<b>Características</b>	Permiten identificar claramente el metaconcepto
<b>Papel</b>	Presenta diferentes facetas del metaconcepto
<b>Tipo</b>	Establece diferencias dentro del metaconcepto

La identificación de estas variables nos permitió realizar una búsqueda de la consideración de los metaconceptos en los textos. Este trabajo empírico dio paso a la identificación de dos nuevas variables:

<b>Variables empíricas identificadas en el análisis de textos escolares</b>	<b>Lo que posibilitan</b>
<b>Forma de acceder/ Acercarse</b>	Informa sobre como se introduce en el texto
<b>Consideración del autor en el texto</b>	Recoge los mensajes implícitos sobre la importancia del metaconcepto que se incluye en el texto

Con este contexto previo, el paso siguiente fue pensar en cómo podíamos acceder a las consideraciones/perspectivas de los estudiantes sobre los metaconceptos, para inferir de ellas características de la comprensión que tenían de los mismos. Intentábamos además obtener una panorámica global de lo que abarca la percepción que los estudiantes tienen de cada metaconcepto. En nuestra investigación, nos aproximamos a estas consideraciones/ perspectivas de los estudiantes basándonos en las variables incluidas en nuestro marco, planteándonos como problema el acceso a ellas. Se trata, por lo tanto, de un problema metodológico, aspecto éste que nos parece muy importante para el avance de las investigaciones en el campo. En nuestro caso, ese acceso se pensó realizar a través de las decisiones tomadas, y las razones y argumentos en que estas decisiones se apoyan. En el apartado siguiente vamos a presentar la forma en la que hemos abordado dicho problema y una aplicación práctica de uno de los instrumentos diseñados.

#### 4. EL DISEÑO METODOLÓGICO

Coherentemente con todo lo anterior, nos planteamos un diseño de investigación en base a cuestionarios y entrevistas que pensamos posibilitarían recoger información sobre las componentes mencionadas. En una primera parte de la investigación (en la que aquí nos vamos a centrar) los participantes en el estudio fueron estudiantes de Bachillerato de tres institutos andaluces (96 en total), sin ninguna característica especial. Con el cuestionario pretendíamos aproximarnos a la comprensión en base a las diferentes variables. Se concretó en una presentación inicial seguida de tres partes (una para cada metaconcepto). Estas partes comparten en líneas generales la misma estructura, incluyendo diferentes tipos de ítems para recoger distintos aspectos de la forma en la que los estudiantes han construido cada metaconcepto, de manera que permitan recoger una variedad de puntos de vista (Healy & Hoyles, 2000).

Primer tipo de ítems: Se pide a los estudiantes que proporcionen descripciones sobre cada metaconcepto, expresando con sus palabras el significado e incluyendo un ejemplo del mismo que considerasen más adecuado

Segundo tipo de ítems: Se presentan diferentes posibilidades en base a las variables de discriminación, y se pide decidir si las declaraciones presentadas correspondían al metaconcepto, si son todas correctas (o no) y cuál sería la preferida por ellos y la preferida por su profesor, razonando todas las respuestas. Las declaraciones incluían expresiones correctas/no correctas y estaban extraídas prácticamente en su totalidad de los textos revisados.

Posteriormente, se fijaron los contenidos en los que los metaconceptos iban a ser presentados en las distintas posibilidades. Para el propósito del estudio fueron seleccionados tres bloques (Álgebra, Análisis y Geometría) y dentro de ellos unos contenidos que, basándose en el análisis de textos previamente realizado y las aportaciones de los profesores en ejercicio, eran adecuados apoyándose en que eran comunes, asequibles en estos niveles y variados en cuanto a tratamiento. Seleccionados los contenidos concretos, se extrajeron de los textos revisados las distintas variaciones de presentación de cada uno

de dichos contenidos, en función de las variables teóricas incluidas en nuestro marco. Así, por ejemplo, para el metaconcepto *definir*, se seleccionaron como contenidos tres posibles definiciones de mediatriz, tres de producto de matrices y tres de máximo relativo de una función en un punto.

Una vez diseñado el cuestionario se procedió a su validación mediante una prueba piloto, realizada con alumnos de 2º de Bachillerato de un instituto de Secundaria sin ninguna característica especial. Recogidos los cuestionarios, se realizó un pre-análisis de los resultados de dicha prueba. Esto llevó a cambios en el diseño para adaptarlo mejor a Primer Curso de Bachillerato. Así, por ejemplo, en el caso de *definir*, se optó por quitar el máximo relativo y producto de matrices, y sustituirlo por el cociente de polinomios. En el caso de *probar*, se ha quitado la correspondiente a que “en todo triángulo se puede inscribir un cuadrado”, y se mantienen las otras dos. En el caso de *modelar*, se ha dejado tal y como estaba. Además, se realizaron variaciones en la estructura del cuestionario, tendentes a reducirlo para facilitar su utilización. Finalmente, se procedió a la elaboración del cuestionario definitivo, que posteriormente fue pasado a todos los alumnos participantes.

En relación con las entrevistas, son un instrumento ampliamente utilizado en la investigación cualitativa tanto en general (Taylor y Bogdan, 1986; Cohen y Manion, 1990) como en el campo de la Educación Matemática (Aubrey, 1996; Haimes, 1996; Hunting, 1997; Lloyd y Wilson, 1998; Zazkis y Hazzan, 1998). Nosotros optamos por la entrevista semiestructurada, entendida como un diálogo basado en una lista de cuestiones o temas que se quieren explorar en el curso de la misma (Goetz y LeCompte, 1988). Es decir, la entrevista nos proporcionaba un marco dentro del cual debíamos plantear cuestiones, secuenciar dichas cuestiones y tomar decisiones sobre en qué informaciones se necesitaba profundizar. En la práctica, la entrevista adoptó el carácter de una conversación amigable, en la que el entrevistador iba planteando los temas de manera que el profesor participante se sintiera libre de expresar sus opiniones.

Las entrevistas se realizaron a profesores y alumnos. En el caso de los profesores, eran los correspondientes a los cursos en los que se habían pasado los cuestionarios. Los alumnos fueron seleccionados en base a su pertenencia a las diferentes categorías identificadas en el análisis realizado a los cuestionarios recogidos. Ambas fueron entrevistas semiestructuradas realizadas posteriormente a la recogida y análisis de los cuestionarios. Incluían una primera parte centrada en el contexto general, visión de la materia en general y de los metaconceptos en particular, cuyo objetivo era obtener una información global sobre las ideas y opiniones de los entrevistados. La segunda parte se centraba específicamente en los temas que habían emergido en el análisis realizado en relación a las formas de considerar los metaconceptos, perspectivas identificadas y otros aspectos específicos surgidos en dicho análisis.

### **Análisis de datos**

Una vez pasados los cuestionarios se procedió al análisis de las respuestas obtenidas. Aquí nos vamos a centrar en los datos provenientes de uno de los centros considera-

dos. Situados en un enfoque cualitativo, se siguió en el análisis de los datos procedentes de los cuestionarios un proceso inductivo/iterativo en el que cada respuesta fue dividida en unidades de decisión y ‘justificación/caracterización personal’.

En un segundo paso, estas unidades fueron categorizadas en función de:

1. Características, papel y tipo de las variables teóricas del estudio que nos permitían recoger información sobre ellas.
2. Tipo de razonamiento (matemático o comunicativo) que subyacía en la justificación. El razonamiento matemático incluía principalmente argumentos en los que estaban involucradas consideraciones lógicas (corrección, condiciones a cumplir, etc.). El comunicativo se basaba principalmente en ideas como claridad, comprensibilidad, etc. (Zaslavsky & Shir, 2005).

A partir de ahí, se realizaron dos análisis:

- Uno transversal, que permitió categorizar las repuestas de los alumnos considerados conjuntamente.
- Uno longitudinal, en el que a partir de los datos de cada alumno individual se generó un ‘perfil’. Posteriormente, se procedió a categorizar estos perfiles. La identificación de perfiles nos permitió seleccionar diferentes alumnos a los que posteriormente se realizaron las entrevistas.

Las entrevistas realizadas a profesores y alumnos fueron transcritas en su totalidad. Para el análisis de las transcripciones nos apoyamos en un proceso que constaba de varios pasos: lectura global de las transcripciones, elaboración de unos primeros comentarios preanalíticos intercalados en ellas, identificación de unidades de análisis (frases o grupos de frases que pudiesen comunicar una idea) y categorización de las mismas. A partir de ello, se obtuvo información sobre las ideas y reflexiones generales de los participantes, y sobre las explicaciones que ellos proporcionaban a lo identificado por nosotros en el análisis realizado a las respuestas de los cuestionarios.

A continuación, pasamos a ver lo que este diseño ha permitido y lo que no ha permitido centrándonos exclusivamente, como ya hemos indicado, en los resultados del análisis transversal de los cuestionarios de uno de los centros implicados en nuestro estudio. Dado que el objetivo de este artículo no es contar exhaustivamente el desarrollo de la investigación, sino incidir en las particularidades de las distintas etapas, presentaremos los resultados de una forma global, que permitan apreciar lo que una investigación de estas características puede aportar.

## **5. ALGUNOS RESULTADOS**

A través del análisis realizado obtuvimos tres tipos de resultados, que describiremos brevemente a continuación.

**1. Los que provienen del análisis transversal, considerando conjuntamente los tres metaconceptos.**

En primer lugar, la consideración de los metaconceptos nos ha permitido identificar diferentes perspectivas:

- Basadas en la explicación: Los metaconceptos son vistos como algo que permite explicar términos o conceptos matemáticos (en el caso de la definición), explicar el porqué de las definiciones (caso de la prueba) o explicar la vida real (caso de la modelación). Así, uno de los alumnos de esta categoría (A14) considera *definir* como ‘la explicación de un concepto...’, *probar* como ‘la explicación de una definición...’ y *modelar* como ‘a partir de ellos nos dan explicaciones de la vida real, de cosas básicas’.
- Basadas en el uso y lo que de él se obtiene: consiguen un resultado (en el caso de la definición), una verificación de un enunciado o una teoría (en el caso de la prueba) o ayudan a calcular cosas o situaciones reales (caso de la modelación). En este sentido, el alumno A19 considera *definir* como ‘aquello que se utiliza para obtener un resultado’, expresándose en términos parecidos en los otros casos.
- Basadas en una descripción que permite acceder a un concepto de forma más o menos clara (en el caso de la definición), forma de hacer la explicación más fácil (en el caso de la prueba) o la expresión de una situación. Por ejemplo, uno de los alumnos de esta categoría (identificado como A15) en *definir* indicaba que ‘es explicar un concepto de manera que describe sus características principales y de forma más o menos clara’.
- Basándose en una mezcla de los anteriores.

En resumen, queremos destacar que el cuestionario nos ha permitido identificar distintas ‘formas de ver el quehacer matemático’ (explicar, usar, describir) que afectan a la consideración de los tres metaconceptos, algo que nos parece de gran interés para una posterior aplicación (es decir, ver si se reafirma esta tendencia o se diversifica con otras alternativas).

**2. Los que provienen de la identificación de las características propias de cada metaconcepto.**

En segundo lugar, el análisis realizado nos ha permitido acceder a la identificación que se realizaban de las características propias de cada metaconcepto.

Podemos decir que:

- no se produce una identificación de las características de los metaconceptos,
- hay algunos tipos y modos de representación, como puede ser una prueba pragmática directa con un fuerte apoyo en el texto, que hacen que los alumnos no la consideren como válida a pesar de serlo,
- en todos los casos que dicen que las formulaciones de los metaconceptos ‘no son correctas’ aunque efectivamente lo sean, los argumentos utilizados no tienen nada que ver con las características de los metaconceptos.



Nos parece de gran interés extender este resultado previo, ya que el que no se identifiquen claramente los metaconceptos matemáticos puede indicar una falta de comprensión de su significado real. Por otro lado, quizás se deba extender en el cuestionario el apartado dedicado a las justificaciones de la respuesta 'no correcta', ya que no se ha podido extraer en el formato actual demasiada información.

### **3. Los que provienen de la discriminación en función de las variables papel y tipo de cada metaconcepto.**

En tercer lugar, respecto al acceso a la discriminación en función de las variables tipo del metaconcepto y papel dentro de cada uno de ellos, la vinculación a distintos sujetos (profesor o alumno) nos ha permitido, en el caso del tipo y papel, hacer inferencias sobre si los alumnos los consideraban asociados al propio concepto (caso en el que no había variaciones al asignarlo al profesor o al propio alumno), o lo que se consideraba asociado al sujeto (caso en el que se consideraban distintas elecciones para profesor /alumno).

En relación con el tipo de metaconcepto, globalmente podemos decir que:

- el tipo es más compartido por profesor y alumno en *definir* que en *probar*, lo que podría indicar una mayor asociación de esta variable al propio concepto y no al personaje,
- el modo de representación en los tres metaconceptos podemos decir que ha jugado un papel muy diferente. Así en el caso de la definición, asociaban mayoritariamente la gráfica a la definición que les gustaba frente al modo algebraico que asociaban al profesor. Sin embargo, para la prueba, valoraban negativamente el que no aparecieran símbolos algebraicos, y las diferencias entre profesor y ellos mismos se establecían más en base a 'su cercanía' (en el sentido de 'haberlo dado hace poco tiempo') a los contenidos en los que se basa la prueba.

Respecto al papel del metaconcepto, en general se obtuvo una menor información en todos los casos. Para la definición, el hecho de que aparezcan siempre en los ítems del cuestionario el papel 2 (Establecer los componentes fundamentales para la formación de un concepto) y 4 (Crear uniformidad en el significado de los conceptos, que permita comunicar las ideas matemáticas más fácilmente) ha hecho que no hayamos podido obtener demasiada información. El caso de la prueba fue parecido. El papel 1 (Verificar que una declaración es cierta) y el 2 (Explicar por qué una declaración es cierta), se consideraron no excluyentes (por entender que el 2 incluía además una explicación basada en propiedades). En líneas generales, podemos decir que los alumnos optaron en sus preferencias por el papel 1 cuando aparecía sólo y el 4 (Descubrir o crear nuevas matemáticas), reservando las combinaciones 1,2 y 1,3, en las que se incluían propiedades y la comunicación del conocimiento matemático, para el caso del profesor.

Aunque es cierto que estos papeles son los que mayoritariamente aparecen en los textos escolares, pensamos que es necesaria una clarificación futura de los que

se consideran, ya que el que muchos de ellos no se hayan utilizado y el que se hayan considerado compatibles entre ellos en ocasiones (por ejemplo, el caso de la prueba, todos ellos se han considerado compatibles con el 1 (Verificar que una declaración es cierta)) ha podido minimizar la importancia de la variable *papel*.

Queremos destacar que, aunque no incluimos aquí la parte del estudio correspondiente al análisis longitudinal por ser excesivamente extensa, la consideración de los metaconceptos, lo que se identifica como características de los mismos y la discriminación que establecen dentro de ellos en función del tipo y papel nos ha proporcionado un perfil individualizado de los estudiantes, permitiéndonos en alguna medida acceder a la comprensión individual.

## 6. ALGUNAS CONCLUSIONES

Desde nuestro punto de vista, hemos llegado a una etapa en la evolución de la Didáctica de las Matemáticas como campo científico en nuestro país que obliga a las investigaciones en él desarrolladas a unas exigencias estructurales mínimas. Las cuatro etapas que hemos descrito se han mostrado imprescindibles para llevar a cabo un proyecto de investigación. Cada una de ellas aporta al proyecto global características particulares que no deben ser obviadas. Pero las cuatro etapas deben considerarse conjuntamente. La coherencia entre ellas es lo que garantiza el desarrollo del proyecto.

Pero, además, siempre que se realiza un proyecto de investigación y, más concretamente, en aquellos proyectos financiados con fondos públicos, surge la duda de si realmente todo el proceso seguido ha servido para algo. En nuestro caso, somos optimistas. Por un lado, desde el punto de vista de los elementos que, a partir de nuestra perspectiva, intervienen en el aprendizaje matemático de los alumnos, el hecho de plantearnos los metaconceptos conjuntamente ha permitido «visualizar»/acceder a una serie de características (relaciones que se establecen, procesos que se potencian, lenguaje, etc.) que son propias de la construcción del razonamiento matemático y que, de alguna manera, se «desdibujan» cuando nos las planteamos desde los bloques temáticos o conceptos aislados. Evidentemente, sabemos que hay aspectos del quehacer matemático a los que no hemos podido acceder en este estudio exploratorio. Necesitamos profundizar tanto en las variables consideradas en cada metaconcepto como en la posible inclusión de nuevos metaconceptos. Todo esto nos ha permitido, en alguna medida, profundizar en los procesos de aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos en el Bachillerato, como medio de abordar, de una forma fundamentada, la consideración de características individuales de los alumnos, incidiendo en el diseño e implementación de los programas de formación de este nivel.

Por otro lado, el estudio realiza una aportación a la creación de un cuerpo de conocimiento científico relacionado con dicho aprendizaje, que puede contribuir a la creación de un conocimiento base útil en los programas de formación de profesores de Secundaria, formación que creemos se debe abordar con el rigor y especificidad propias de la compleja tarea que estos profesionales deben desempeñar.

Podemos decir entonces que la investigación se sitúa en la investigación básica en Didáctica de las Matemática (puesto que trata de profundizar en las características del aprendizaje de los alumnos en el contexto de una etapa concreta de nuestro sistema educativo), pero puede considerarse el fundamento de una posterior investigación aplicada, al permitir usar los resultados en la mejora de la formación matemática de los alumnos de dicha etapa.

Finalmente, no podemos terminar este trabajo sin destacar el propio aprendizaje que se realiza en el equipo que se compromete al desarrollo de un proyecto, tanto en su consideración como contexto adecuado para el desarrollo profesional investigador como en las repercusiones en nuestro trabajo profesional. La formación de los investigadores es un aspecto clave y uno de los contextos posibles de esta formación pueden ser los propios proyectos de investigación. Por ello, es de máxima importancia tener claro unos referentes que garanticen tanto su desarrollo como el aprendizaje de los investigadores expertos y noveles que en ellos intervienen. Por último, no queremos terminar sin incidir en la repercusión que todo ello tiene en nuestro propio trabajo (en nuestro caso, como profesores de Matemáticas y formadores de profesores en relación con las Matemáticas), aportándonos nuevas 'lentes' con las que mirar y actuar con nuestros alumnos y en nuestras aulas presentes y futuras.

Nota: Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo del Ministerio de Educación y Ciencia (proyecto SEJ2005-01283/EDUC).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aubrey, C. (1995). Teacher and pupil interactions and the processes of the mathematical instruction in four reception classrooms over children's first year in school. *British Educational Research Journal*, 21(1), 31-48.
- Aubrey, C. (1996). An investigation of teachers' mathematical subject knowledge and the processes of instruction in reception classes. *British Educational Research Journal*, 22(2), 181-197.
- Borasi, R. (1991). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Heinemann Educational Books: Portsmouth, NH.
- Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), 259-267.
- Brown, J., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, Jan/Feb, 32-42.
- Cobb, P. (2002). Modelling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. En Gravameijer et al. (Eds.) *Symbolizing, Modelling and Tool Use in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
- Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla S.A.: Madrid.

- García, M. & Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.
- García, M., Sánchez, V., Escudero, I. & Llinares, S. (2003). The dialectic relationship between theory and practice in Mathematics Teacher Education. En *CERME3 (Group 11) Bellaria, Italy*: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.
- García, M., Sánchez, V., Escudero, I. & Llinares, S. (2006). The Dialectic Relationship between Research and Practice in Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 109-128.
- García, M., Sánchez, V., Escudero, I., Gavilán, J.M., Trigueros, R. & Sánchez-Matamoros, G. (2006). Comentario a un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el Bachillerato dentro de una comunidad de indagación. En M.C. Penalva y otros (Eds.) *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. Proyecto Sur: Granada.
- Goetz, J.P. & Le Compte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata: Madrid.
- Haimes, D.H. (1996). The implementation of a “function” approach to introductory algebra: A case study of teacher cognitions, teacher actions, and the intended curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 582-602.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Hunting, R.P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.
- Jaworski, B. (2003a). Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development. <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>, *CERME3 (Group 11)*. Bellaria, Italy.
- Jaworski, B. (2003b). Research practice into /influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.
- Jaworski, B. (2005). Learning Communities in Mathematics: Research and Development in Mathematics Teaching and Learning. En *Proceedings of NORMA 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 71-96). Trondheim, Norway: Tapir Press.
- Knuth, E.J. (2002). Teachers’ conceptions of proof in the context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5, 61-88
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*. NY: Cambridge University Press.
- Lloyd, G.M. & Wilson, M. (1998). Supporting Innovation: The impact of a Teacher’s Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.
- Sánchez, V., García, M., Escudero, I., Gavilán, J.M., Trigueros, R. & Sánchez-Matamoros, G. (2006). Un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el Bachillerato dentro de una comunidad de indagación. En M.C. Penalva y otros (Eds.) *Conocimiento,*

*entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*. Proyecto Sur: Granada.

Sánchez, V., García, M., Escudero, I., Gavilán, J.M., Trigueros, R. & Sánchez-Matamoros, G. (2008). Una aproximación a las matemáticas en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos? *Enseñanza de las Ciencias*, 26(2), 267-276.

Taylor, S.L. & Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos en investigación*. Paidós Studio: Barcelona.

Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-347.

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.