EL PAPEL DEL PROFESOR EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA. ANÁLISIS DESDE UNA PERSPECTIVA COGNITIVA

José María Gavilán Izquierdo

Este libro ha sido posible gracias a la ayuda concedida al Grupo de Investigación FQM-226 por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía

EL PAPEL DEL PROFESOR EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA. ANÁLISIS DESDE UNA PERSPECTIVA COGNITIVA

Autor: José María Gavilán Izquierdo

Imprime: Edición Digital @tres, S.L.L.
C/ Doctor Escobar Delmas nº, 7 Bjo-B
41018-SEVILLA

I.S.B.N.: 978-84-693-1354-1
Depósito Legal: SE-2237-2010

IMPRESO EN ESPAÑA – PRINTED IN SPAIN

Son muchas los motivos por los que se llega a escribir un libro de las características del que aquí se presenta. En nuestro caso, lo que nos ha guiado es el deseo de hacer partícipes a los posibles lectores de todo lo que ha supuesto en nuestro caso el proceso del desarrollo de una investigación en el campo de la Educación Matemática.

En este proceso, nunca nos hemos sentido solos. Hemos contado con personas que han sabido iniciarnos, orientarnos y guiarnos, en especial Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar.

En el trabajo compartido, se ha identificado un problema de investigación relevante, se ha seleccionado un referente teórico pertinente para abordar dicha problemática, y se ha elaborado un diseño metodológico coherente con los planteamientos teóricos y adecuados para responder a las preguntas de investigación formuladas. Partiendo de una noción concreta como es la noción de derivada, y contando como punto de partida con indudables avances que otros investigadores en el campo han obtenido, en nuestro estudio se han obtenido unos resultados sobre la explicación de la práctica que van más allá de dicha noción, y que nos han permitido abordar la descripción y explicación de la práctica del Profesor de Matemáticas de Enseñanza Secundaria y Bachillerato.

Junto a ello, hemos podido apreciar directamente la complejidad y esfuerzo que supone la práctica docente de los profesores que han participado en el estudio. Compartir con ellos los momentos de duda e incertidumbre que implica colaborar en un trabajo de estas características, y que ellos supieron superar mostrando en todo momento una gran disponibilidad, ha sido una parte importante de nuestro aprendizaje. Para ellos, nuestro agradecimiento, que hacemos extensivo a los organismos que, con su ayuda, han hecho posible la impresión de este libro.

A mis "niñas" Mª Teresa, Ana, y Miriam

ÍNDICE

LISTA DE CUADROS

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

CAPÍTULO I

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.- INTRODUCCIÓN

Schoenfeld (1999) en "Mirando al siglo 21: desafíos de teoría y práctica educativa" caracteriza las áreas de investigación en las que se puedan efectuar progresos teóricos y prácticos en educación, considerando que desde el punto de vista educativo, es un reto para la investigación en Educación Matemática intentar responder a:

¿cómo gestionan los profesores lo que ellos hacen "en línea[1]" en la clase? (p. 7)

Para Schoenfeld (1999) este tipo de trabajos proporciona herramientas para identificar prácticas y conocimientos que respaldan deseados tipos de enseñanza y para el análisis de formas de desarrollo profesional y su impacto. Nuestra investigación está enfocada en la línea propuesta por Schoenfeld relativa a investigar la práctica del profesor.

[1]"On line" en el original.

Para formular nuestro problema de investigación nos situamos en la perspectiva general planteada por Simon y Tzur (1999) respecto a las investigaciones sobre práctica de profesores:

> *"Nuestra investigación sobre la práctica del profesor se centra alrededor de la pregunta: ¿Cómo intenta este profesor enseñar a sus estudiantes matemáticas que van más allá de lo que el estudiante ya conoce? Elegimos este foco porque es de gran alcance, razonablemente bien definido, y crítico para comprender el desarrollo de los profesores de matemáticas."* (p. 257)

De acuerdo con estas dos propuestas, el problema de investigación que nos planteamos es el análisis de la práctica del profesor. Pretendemos analizar aspectos de la práctica del profesor de matemáticas que favorece la construcción de conocimiento en los estudiantes. Queremos describir la práctica del profesor desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático que parece potenciar en sus estudiantes.

Pensamos que la práctica del profesor de matemáticas está vinculada a la enseñanza y aprendizaje de temas matemáticos concretos. De ahí que concretemos el tema objeto de nuestra investigación en la noción de derivada.

Para llegar a esta formulación del problema, las investigaciones en Educación Matemática relativas al profesor han recorrido un largo camino. En este capítulo daremos una visión esquemática del mismo, desde las primeras investigaciones sobre el profesor, hasta desembocar en las líneas actuales de investigación sobre el profesor y su práctica. A continuación contextualizaremos el contenido matemático de la derivada desde distintos puntos de vista que nos parecen relevantes para el análisis de la práctica del profesor. Terminaremos con la formulación del problema de investigación y cómo emprendemos el camino para abordarlo.

2.- APROXIMACIÓN AL PROBLEMA. ANTECEDENTES

Desde hace años las investigaciones en las que el centro de interés es el profesor han ido recibiendo mayor atención. Se pretende de alguna forma obtener información sobre el aprendizaje del profesor y el conocimiento y su práctica con vistas a conceptualizar el desarrollo profesional. Las investigaciones sobre conocimiento y práctica del profesor también conforman una agenda de investigación en el ámbito de investigación español (Llinares, 1998).

En el marco de esta agenda de investigación sobre conocimiento y práctica del profesor en García (1997) se organizan las distintas formas de aproximarse al problema del conocimiento del profesor y se indica en relación al desarrollo profesional que:

> *"La consideración del trabajo del profesor como una profesión*[2]*, lo que lleva a una preocupación por el desarrollo profesional y todos los aspectos ligados a la profesionalidad. La relación conocimiento acción está en la base de esta perspectiva."* (p. 28)

Un rasgo que se manifiesta en las investigaciones sobre el conocimiento y práctica del profesor es una clara preocupación por la mejora de los procesos de formación de profesores, una de las conclusiones de la revisión de las investigaciones llevada a cabo por García (1997) es que:

> *"Una característica, casi general, de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas... es la preocupación por la formación de profesores, aportando ideas o realizando preguntas que de alguna forma contribuyan a la clarificación del campo."* (p. 97)

Respecto a la práctica del profesor, un aspecto de esta agenda es

[2] Resaltado en el original.

proporcionar datos sobre el conocimiento profesional y sus procesos de cambio (componentes, estructura, uso, etc) (Llinares, 1998) y por tanto obtener mejoras en los procesos de formación. Como señalan Simon y Tzur (1999), para diseñar y llevar a cabo programas de formación de profesores acordes con la reforma escolar, los formadores necesitan investigaciones para comprender cómo se produce el desarrollo desde una posición tradicional hacia profesores que lleven a cabo la reforma.

Para llegar a la situación actual ha sido necesario recorrer un camino en el que las investigaciones se dirigieron en un primer momento hacia la caracterización del término "conocimiento profesional del profesor". Los trabajos de Shulman (1986) identificaron distintas componentes del conocimiento del profesor y dieron relevancia a la materia específica objeto de enseñanza. Diversos trabajos han recogido las ideas aportadas desde diferentes investigaciones. Fennema y Loef (1992) proponen un modelo del conocimiento del profesor que sobre los diferentes componentes funciona del siguiente modo: en un contexto concreto, el conocimiento del contenido interacciona con el conocimiento pedagógico y las cogniciones de los estudiantes y en combinación con las creencias crea una forma de actuación en clase. El conocimiento del profesor se desarrolla a través de la práctica de la enseñanza. La enseñanza es un proceso dentro del cual se crea conocimiento. Todo ello en un contexto, interactuando con las creencias del profesor y de este modo se crea un conocimiento que guía la conducta del profesor en clase, para estos autores al abordar el conocimiento de los profesores es imposible separar las creencias del conocimiento.

La importancia de las creencias queda reflejada ya en el trabajo de Grossman et al. (1989) cuando incluyen entre las dimensiones del conocimiento de la materia, que son relevantes para la enseñanza, las creencias sobre la materia que tiene el profesor. Sobre la influencia del conocimiento y creencias en la práctica del profesor indica Thompson (1992):

> *"Gracias a los estudios sobre pensamientos de profesores y de toma de decisiones, los educadores reconocen ahora que cómo los profesores interpretan y aplican el currículum está significativamente influido por su conocimiento y creencias (Clark & Peterson, 1986; Romberg & Carpenter, 1986)"* (p. 128)

La naturaleza e integración de las distintas componentes del conocimiento profesional (García 1997) nos plantea retos en la investigación:

> *"Para terminar recordaremos algunos rasgos del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, entendiendo que se informa y se apoya en distintas y variadas áreas: conocimiento de matemáticas, de contenido pedagógico específico de las matemáticas, del currículum, etc, produciendose la integración de las informaciones procedentes de los mismos en las situaciones de enseñanza, en las que el profesor está obligado a adaptar su conocimiento general a la condiciones concretas de la práctica"* (p. 50)

Por tanto, es importante incluir análisis sobre la actividad que desarrollan los profesores en el aula. De esta forma se empieza a estudiar la práctica del profesor, llegando a conformar una subproblemática de investigación interesada en el problema de la gestión de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 1998).

Desde otro punto de vista Schoenfeld (1999) indica que:

> *"Hemos alcanzado ahora el punto donde nosotros podemos esperar comprenderla* [la práctica], *y construir detallados modelos de la misma."* (p. 19)

En sus trabajos sobre la práctica se plantea como objetivo describir cómo y por qué los profesores toman determinadas decisiones y realizan determinadas acciones cuando están en situaciones de clase. Es decir, comprender lo que los profesores hacen en clase permitirá delimitar una serie de componentes y un mecanismo de funcionamiento de la práctica (Schoenfeld, 1998 a, b).

Este interés por la práctica de los profesores también queda claro en el enfoque antropológico, aportado por la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999) que coloca la actividad matemática y su estudio en el campo de las actividades humanas y de las instituciones sociales. Para este enfoque toda actividad humana puede describirse con un modelo único denominado praxeología. Para la teoría antropológica de lo didáctico hay una modelización del saber matemático a través de las praxeologías matemáticas y una modelización del proceso de estudio de una obra matemática a través de los momentos didácticos, el mismo modelo de praxeología puede ser aplicado a la actividad del profesor, en la que la actividad del profesor se puede describir como director del proceso de estudio (Espinoza y Azcárate, 2000).

Para Simon y Tzur (1999), la práctica de profesores es entendida del siguiente modo:

> *"práctica de profesores indica no sólo todas las cosas que los profesores hacen que contribuye a su enseñanza (planificar, evaluar, interactuar con los estudiantes) sino también todo lo que los profesores piensan, conocen y creen sobre lo que ellos hacen. Además las intuiciones, estrategias, valores y sentimientos de los profesores sobre lo que ellos hacen son parte de su práctica. De este modo, vemos la práctica del profesor como un conglomerado que no puede ser entendido mirando las partes separadas del todo (es decir, mirando solamente creencias o métodos de preguntar o conocimiento matemático)."* (p. 253-254)

De esta forma la agenda de investigación, en relación a la práctica del profesor, tiene sus propios problemas de investigación vinculados. Como indica Llinares (1999), el foco de atención se traslada a la práctica en el aula y:

> *"nos permita dar cuenta de: (i) las regularidades en las interacciones en el aula, (ii) del uso que el profesor hacía de los problemas matemáticos, modos de representación, etc, en la constitución de los procesos interactivos de generación de los significados, (iii) el papel del profesor en la definición de unas determinadas prácticas matemáticas en el aula, y (iv) los procesos reflexivos del profesor que ponían de manifiesto la compleja relación entre las creencias y la práctica."* (p. 10)

De esta forma los trabajos de investigación comienzan a centrarse en la relación entre conocimiento profesional y práctica instruccional del profesor de matemáticas de Secundaria, poniendo el foco de interés en la organización de determinados tópicos como objeto de enseñanza aprendizaje y lo que justifica dicha organización (Escudero, 2003). Para esta autora el análisis integrado de la planificación del profesor y de la gestión que el profesor realiza del contenido matemático en el aula permite identificar claves para entender la relación entre conocimiento y la práctica. Los resultados de su investigación permiten entrever el doble sentido de las implicaciones entre el conocimiento del profesor y las características de la práctica desarrollada. Sin embargo, el papel relevante que parece desempeñar las concepciones del profesor y su forma de conocer los conceptos matemáticos en la caracterización de la práctica del profesor, visto a través de la arquitectura relacional[3] establecida en el aula y de la gestión específica del contenido matemático, ponen de manifiesto su importancia en definir la práctica. En este sentido indica que las diferencias en la arquitectura relacional que puede ser identificada en la práctica del profesor pueden explicarse

[3]"La arquitectura relacional del aula, entendida como acciones e interacciones que se dan entre profesor, alumnos y un contenido específico," (Escudero, 2003, p. 31).

por las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje mantenidas.

En esta dirección Artzt (1999) y Artzt y Armour-Thomas (1999) indican que existe una clara relación entre las cogniciones de los profesores (conocimiento, creencias y fines) y su práctica instruccional (tareas, entorno de aprendizaje y discurso). Desde esta perspectiva proponen un modelo sobre cogniciones y práctica en la misma línea que el modelo de Schoenfeld y el grupo de Berkeley, "Theory of Teaching-in-Contex".

Por otra parte cada vez queda más claro el papel primordial que juegan en estas investigaciones los temas matemáticos objeto de estudio. Llinares (2000 b) indica que:

> *"La investigación actual sobre las relaciones entre el conocimiento del profesor y la práctica de enseñanza ha puesto de relieve la necesidad de llevar a cabo estudios que impliquen temas específicos.*" (p. 41)

Así la agenda de investigación en la que situamos nuestro trabajo tiene como objetivo, entre otros, identificar elementos teóricos para modelar la práctica del profesor teniendo presente el papel primordial del contenido matemático (Llinares, 2000 a).

3.- LA NOCIÓN DE DERIVADA

El tópico matemático involucrado en nuestra investigación es la noción de derivada. En este apartado vamos a contextualizar la noción de derivada desde tres puntos de vista:

- curricular, nuestra investigación se desarrolla en Primer Curso de Bachillerato,
- matemático, y
- desde las investigaciones en Educación Matemática.

3.1.- La noción de derivada en el currículum de Bachillerato

La noción de derivada aparece en el currículum de Bachillerato entre los contenidos recogidos en el Decreto 126/94 de 7 de junio, en el que se establecen las enseñanzas de Bachillerato en nuestra comunidad autónoma. En dicho decreto, el contenido de Análisis incluye:

"- Variación instantánea: concepto e interpretación geométrica y física de derivada de una función en un punto. Función derivada como expresión del cambio de la función inicial. Utilización de estos conceptos en la interpretación de fenómenos.
- Concepto de diferencial como aproximación del incremento de una función. Interpretación de la derivada como cociente de diferenciales.
- Iniciación al cálculo de primitivas como proceso inverso a la derivación." (p.109)

En la "Colección de Materiales Curriculares para el Bachillerato nº 22, Matemáticas[4]", Coriat y Martínez (1998) señalan:

"El acercamiento al concepto de derivada se hará a través de la "tasa de variación media en un intervalo", con ayuda de fenómenos descritos por dependencias funcionales y su representación gráfica. Dicha noción es "insensible" al sentido en que se recorre el intervalo, por eso resulta de gran ayuda en la construcción intuitiva del concepto. Sucesivos "acortamientos" del intervalo (desde sus extremos) conducen a preguntarse si tendría sentido la tasa de variación media "en un punto", considerar el límite de la expresión y nombrar "derivada" o "número derivada" de la función en el punto el nuevo objeto matemático (cuando existe).

[4]La Dirección General de Evaluación Educativa y Formación del Profesorado (Consejería de Educación y Ciencia, Junta de Andalucía) estableció el encargo, condiciones y ámbito del trabajo.

El concepto de derivada no es fácil, por eso conviene recorrer sus etapas al ritmo de la evolución de los conocimientos previos y apoyándose en varias representaciones:
-tasa de variación media en un intervalo -> derivada en un punto.
-pendiente de la secante entre los extremos del intervalo -> pendiente de la tangente en el punto.
La función derivada se presenta como concepto, pero se aplica exclusivamente a las funciones prototipos y operaciones sencillas con ellas.
La iniciación al cálculo de primitivas como proceso inverso de la derivación abarca las funciones elementales... No es necesario dar tablas de primitivas y en su lugar se aconseja el uso de tablas de derivadas". (pp. 30-31)

El Decreto 208/2002, de 23 de julio modifica el Decreto 126/1994, estableciéndose el contenido para Matemáticas I, en la introducción respecto al bloque de "funciones y gráficas", se señala:

"conceptos fundamentales como el límite, la continuidad, la derivabilidad, la integración, deben ser tratados y manejados de forma intuitiva antes de su formalización... Un ejemplo de esto es el caso de la derivada. Se puede empezar con las distintas aproximaciones a la pendiente de una curva, sin olvidar las de estimar y medir sobre el papel, tratar los aspectos numéricos (tablas, límites por aproximación, cálculo directo) y la visión gráfica (zoom) con medios informáticos. A continuación, se puede generar la derivada punto a punto y reconocer las funciones derivadas de las funciones elementales más usuales, que ya quedarían disponibles para su uso." (p. 109)

En cuanto a los contenidos de Matemáticas I se recogen en el núcleo temático "Álgebra y Análisis", entre otros contenidos y en relación a la derivada:

"*-Variación instantánea: concepto e interpretación geométrica y física de la derivada de una función en un punto.*
-Función derivada. Definición. Derivadas de las funciones elementales."(p. 111)

A partir de las indicaciones generales y los contenidos, la noción de derivada se plantea a partir de la derivada de una función en un punto, utilizando tanto el significado gráfico (tangentes, interpretación geométrica) como analítico (tablas, límites por aproximación, variación). Posteriormente se pasa a la función derivada y al cálculo de funciones derivadas.

3.2.- La noción matemática de derivada

El concepto de derivada en matemáticas es un concepto fundamental en el cálculo (Apostol, 1979), Kleiner (2001) señala que:

"La invención (descubrimiento) es uno de los mayores logros intelectuales de la civilización.... De hecho, las matemáticas cómo nosotros las comprendemos hoy día serían inconcebibles sin las ideas del cálculo" (p. 138)

Apostol (1979) define la derivada de una función en un punto c como un límite de la siguiente forma: para f definida en (a,b) y c de(a,b)$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ siempre que el límite exista. Fernández (1981) a partir de la función f(x) definida en I, considera el conjunto X definido como $\{x \in I \,|\, \exists\, f'(x)\}$, si X es no vacío, la función derivada viene definida por: a cada x deX le hace corresponder f´(x). Para Apostol (1979) obtener f´a partir de f se llama *diferenciación*. Fernández (1981) define un operador lineal a partir de las derivadas de cualquier orden P(D): D^j es una aplicación que a cada función f le asocia su derivada de orden j: $D^j : f \rightarrow f^{j)} con\, j \geq 0$, P(D) es un polinomio en D. Por tanto desde este punto de vista en la noción de derivada aparecen los conceptos: derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada (diferenciación).

Para llegar a esta definición de derivada ha sido necesario un largo camino, que comienza en la Grecia clásica (con los primeros problemas de tangentes y cálculo de áreas) y termina en el siglo XIX cuando se formula el concepto en forma de límite con la definición epsilón-delta. Hasta Newton y Leibniz no se considera realmente el comienzo del cálculo. A continuación veremos brevemente el desarrollo histórico de la derivada.

Desde el punto de vista histórico, Alesandrov et al. (1988) señalan que hay varios tipos de problemas que llevaron a los conceptos del cálculo infinitesimal (derivadas e integrales), el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas. Dentro de cada uno de estos tipos hay diferentes clases, así están los problemas de movimientos, y los propiamente referidos a trazar la tangente a una curva, entre los del primer tipo (derivadas) problemas de áreas y de volúmenes entre los segundos (integrales). Para González (1992) desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de la noción, estos problemas relativos a tangentes y cuadraturas se venían abordando desde la antigüedad (Grecia clásica) pero lo que existía era una colección de métodos particulares, no existían algoritmos generales (Katz, 1993). Disponer de métodos generales para resolver estos problemas es una de las características del cálculo infinitesimal, la otra característica de la fundación del cálculo es la de tomar conciencia de la reciprocidad entre el cálculo de cuadraturas y la determinación de tangentes y de su importancia (Durán, 1996; Katz, 1993).

Edwards (1979) señala que los trabajos de Arquímedes relativos a tangentes de la espiral, son de los pocos trabajos de naturaleza “diferencial” en la antigüedad; a pesar de que también obtiene áreas y volúmenes no se le considera descubridor del cálculo ya que sus métodos no son suficientemente generales y no relaciona los problemas de áreas y tangentes.

Entre los predecesores de Newton y Leibniz podemos citar a Cavalieri con sus indivisibles, a Descartes y Fermat. Fermat que introduce un método para el cálculo de máximos y mínimos basado en la tangente a una curva, denominado “adigualdades” consistente, esencialmente, en calcular la derivada e igualar a 0 (Sean, 1994; González, 1992). También hacen aportaciones por las que son más conocidos como es la geometría analítica, en la que la ecuación f(x,y)=0 es una curva, este descubrimiento jugará un papel importante en los trabajos de Newton y Leibniz.

Para Kleiner (2001), Newton y Leibniz inventan el concepto general de derivada e integral, reconocen la diferenciación e integración como operaciones inversas, desarrollan notaciones y algoritmos que hacen del cálculo un potente instrumento computacional. La notación de Lieibniz ha llegado hasta nuestros días, se siguen utilizando los diferenciales dx, dy, y el cociente dy/dx.

Newton parte de plantear el problema de calcular la velocidad (fluxión, $\dot{x}$) de un movimiento x (fluente), su notación pervive aún en los libros de física. Newton calcula “fluxiones” de curvas dadas por f(x, y)=0, utilizando la idea de momento infinitamente pequeño de tiempo (momento de un fluente) que se describe como “razón última de las cantidades evanescentes”, de forma intuitiva se corresponde con la idea de límite (Katz, 1993). Newton considera las fluxiones de x e y de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow la \;\; derivada \; \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dy}{dx}$$

Newton llega a establecer el Teorema Fundamental del Cálculo y hace una aplicación importante del mismo, calcula las áreas por antidiferenciación y no mediante límites de sumas (Edwards, 1979).

Otra figura clave en el desarrollo del cálculo tal y como lo conocemos hoy es Euler, que introduce el concepto de función y sobre el que se van a apoyar los posteriores avances, hasta Euler la base del cálculo son las curvas (f(x, y)=0). Euler introduce formalmente el concepto de función como:

> *"Cualquier expresión analítica formada, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y de constantes"* (Kline, 1972, vol II, p. 539)

Euler también introduce la derivada mediante los cocientes a partir de razones de incrementos evanescentes, para Euler las derivadas se obtienen con cantidades infinitamente pequeñas (diferenciales) que pueden considerarse 0 en el límite. Por ejemplo, si $y=x^n$, entonces $y'=(x+dx)^n=x^n+nx^{n-1}dx+(dx)^2$... y por tanto $dy=y'-y$, puede despreciarse $(dx)^2$ en comparación a dx (Katz, 1993).

En el siglo XVIII, se plantea la cuestión de los fundamentos del cálculo por las críticas a Newton y Euler. Para soslayar la "evanescencia de las razones últimas de Newton", D´Alambert da una definición de derivada mediante el límite de cocientes incrementales, y no basada en cantidades "infinitamente pequeñas" (Edwards, 1979), su definición viene dada por dy/dx= lim (Δx-->0) (Δy/Δx), aunque no define de manera precisa el límite (Edwards, 1979).

Lagrange en 1800 intenta dar fundamento al cálculo sin referencias a infinitésimos, introduce la notación de las derivadas y define la derivada mediante el coeficiente de h en el desarrollo en serie de f(x+h) que puede obtenerse para cualquier función[5]. En su intento por fundamentar el cálculo pretende huir del límite y recurre a las series (Kleiner, 2001).

En el siglo XIX, Cauchy intenta dar rigor al análisis definiendo el concepto de límite, define la derivada de una función en un punto x como el límite de la razón de diferencias $f(x+h)-f(x) \big/ h$ cuando h es infinitamente pequeña. De la derivada de una función en un punto pasa a definir una nueva función, para cada x se le asocia el límite de $f(x+h)-f(x) \big/ h$. La definición basada en ε-δ es propuesta por Weiertrass y se basa en las propiedades de los números reales, y en este momento el fundamento del análisis se aleja de la geometría y se acerca a la aritmética "aritmetización del cálculo" (Kleiner, 2001).

Actualmente la definición de derivada que utilizamos viene dada a través de un límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pero la noción de límite como hemos visto es posterior a la de derivada, y se introduce en el siglo XIX con objeto de dar una justificación rigurosa al concepto derivada (Durán, 1996).

Por último comentaremos que la idea de integral fue muy intuitiva hasta el siglo XIX, generalmente era la inversa de la derivada y permitía obtener áreas como límite de sumas, pero cuando se deben obtener integrales de funciones discontinuas se aborda la necesidad de demostrar la existencia de integrales o primitivas de funciones, el primero en plantearse el problema fue Cauchy, que

[5] Para Lagrange cualquier función es desarrollable en serie (Katz, 1993).

da la primera definición general y prueba la existencia para una clase de funciones (Edwards, 1979). El primer contacto escolar con la integral se denomina "Integral de Cauchy".

3.3.- La derivada en las investigaciones en Educación Matemática

Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo[6] a partir de los movimientos de reforma son recientes, hay algunas investigaciones sobre logros de los estudiantes, sobre el estado de la instrucción del cálculo, o la influencia de experimentos no tradicionales de enseñanza del cálculo sobre el aprendizaje de los estudiantes (Ganter y Jiroutek, 2000). El mayor impulso a estas investigaciones sobre el cálculo en la enseñanza post-secundaria (a partir de los 16 años) se ha dado en la última década ya que se considera que es un componente fundamental del currículum en dicho período educativo (Berry y Nymanb, 2003). De manera más concreta, aunque existe un "corpus" relativamente amplio de investigaciones sobre aprendizaje y dificultades de los estudiantes respecto a la noción de derivada (Orton, 1983; Azcárate, 1990, Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Tall, 1996; Cottrill, 1999; Font, 1999; Zandieh 2000; Baker et al., 2000; Contreras et al., 2000; Giraldo et al., 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., prepublicación), existen pocas investigaciones centradas en los profesores en relación a la noción de derivada. Entre estas investigaciones podemos distinguir aquellas relativas al conocimiento del profesor sobre este concepto, y aquellas que investigan sobre la práctica del profesor.

En relación al conocimiento de los profesores sobre la noción de derivada

[6]Para caracterizar el cálculo puede considerarse un listado de contenidos, pero podemos usar la caracterización dada por Kleiner (2001) respecto a que *"incluye tres elementos principales: un conjunto de reglas y algoritmos (un "cálculo"), una teoría que explica porque las reglas funcionan, y aplicaciones (de la teoría y las reglas) a problemas fundamentales en ciencias*" (p. 139).

Stump (2001) se centra en el desarrollo en futuros profesores del conocimiento de contenido pedagógico de la noción de pendiente, a partir de la propuesta de Shulman (1986) sobre conocimiento del profesor. El progreso de los profesores se aborda en las dos componentes del conocimiento de contenido pedagógico sobre la pendiente: conocimiento de las dificultades de los estudiantes y conocimiento sobre las representaciones para la enseñanza. Esta investigación aporta como relevante la necesidad de los profesores de conocer diferentes representaciones y las conexiones entre las mismas, además de la necesidad de conocer y usar materiales curriculares no tradicionales para el desarrollo del conocimiento de contenido pedagógico.

El estudio de Badillo (2003)[7] describe la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Para Badillo (2003) el contenido matemático es una restricción institucional, observandose profesores en un nivel *intra* en el campo algebraico y gráfico, en relación al contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje y señala la presencia de confusión entre los objetos f´(a) (derivada de una función en un punto) y f´(x) (función derivada), incluso en el orden en el que se introducen en la enseñanza. Esta investigación pretende entender la práctica profesional del profesor, en este punto:

> *"Las dificultades que tienen los profesores en la comprensión de los macro objetos f´(a) y f´(x) se convierten en un obstáculo para poder hacer una transposición de esos macro objetos y, posteriormente para la enseñanza de los mismos, y les lleva en muchos casos, a reproducir las confusiones y los errores de cara a sus alumnos."* (p. 437)

En las investigaciones sobre la práctica del profesor abordando temas de

[7] Los sujetos de la investigación son profesores de matemáticas de Colombia.

cálculo con la derivada como foco podemos identificar dos grupos de investigaciones. Un grupo de investigaciones son relativas al uso de las nuevas tecnologías que generalmente se refieren al uso de programas de cálculo simbólico[8], bien en ordenador o bien con calculadoras gráficas; y otras investigaciones señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciendolo a través de problemas, por ejemplo, de física.

Entre la investigaciones relativas a la práctica del profesor y nuevas tecnologías, Kendal y Stacey (2001 a, b) hacen un estudio sobre uso de software en la enseñanza del cálculo en relación al concepto de derivada basado en distintas representaciones (numéricas, gráfica y simbólicas) y en las diferentes "conexiones" entre ellas. Realizan un intento de clasificar las prácticas de enseñanza y relacionarla con el conocimiento y creencias de los profesores. Para estas autoras:

> *"El conocimiento de los profesores del contenido tiene efectos sobre la enseñanza y a su vez afecta al aprendizaje del estudiante"* (p. 360)

En su investigación sobre la práctica en la enseñanza del cálculo se centran en las elecciones del profesor sobre, aproximación a la enseñanza, énfasis en las representaciones (simbólicas, gráficas y numéricas y sus conexiones), y el uso de nuevas tecnologías. Estas investigadoras clasifican distintas aproximaciones a la enseñanza (estilos de enseñanza). Los estilos de enseñanza se centran en los contenidos con énfasis en la realización de procedimientos o en la comprensión conceptual[9]. Para las autoras del estudio el uso de nuevas tecnologías (en este caso Programas de Cálculo Simbólico, utilizando la calculadora TI-92) ofrece más aproximaciones a la enseñanza y por

---

[8]En inglés Computer Algebra System (CAS).

[9]Para una descripción más detallada de tipos de prácticas puede consultarse Thompson (1992).

tanto mayores variaciones entre la enseñanza y los resultados de aprendizaje que pueden llegar a ser evidentes.

Otras investigaciones sobre la enseñanza del cálculo y nuevas tecnologías se han centrado en el uso de calculadoras gráficas (Penglase y Arnold, 1996). Realizan un revisión de los aspectos pedagógicos y consideran que como cualquier herramienta debe tenerse en cuenta el uso que se hace de la misma. Identifican las diferentes prácticas de enseñanza que se presentan utilizando calculadoras. Estos autores citan el trabajo de Jost (1992) que examinó las prácticas de profesores en relación al uso de calculadoras gráficas en temas de cálculo identificandose una correlación entre cómo los profesores perciben el uso de las calculadoras y la aproximación a la enseñanza:

> *"Los profesores que percibían las calculadoras gráficas como una herramienta computacional tendían a resaltar fines orientados al contenido y veían el aprendizaje como escuchar. Los profesores que las veían como una herramienta instruccional se centraban en fines de los estudiantes... , con estilos de enseñanza guiados por la indagación y con el foco del aprendizaje en los estudiantes."* (p. 80)

Berry y Nymanb (2003) al revisar las investigaciones sobre la práctica y el uso de las tecnologías consideran las propuestas de Koirala (1997) de situar la enseñanza del cálculo para la comprensión conceptual en la línea teórica de Skemp (1976) relativa a la comprensión instrumental y relacional. Compara una enseñanza tradicional y sus resultados y limitaciones:

> *"La manera tradicional de enseñanza conduce a un aprendizaje instrumental donde el profesor da reglas de derivación e integración.... Una forma instrumental de enseñanza no produce pensadores creativos con sólidos fundamentos sobre los que construir los conceptos... La enseñanza que desarrolla una*

> *comprensión relacional no sólo produce estudiantes con conocimiento sobre qué hacer y cómo hacerlo sino que pueden también explicar lo que están haciendo y por qué"* (Berry y Nymanb, 2003, p. 484)

De esta manera Koirala (1997) de alguna forma "etiqueta" dos tipos de enseñanza del cálculo en función de la comprensión que puede resultar en los estudiantes a partir de la forma de actuar el profesor.

Aspinwall y Miller (2001) en una investigación sobre el cálculo[10], en el que analizan un profesor de Cálculo I en la universidad y el uso de los escritos de los estudiantes, consideran que la enseñanza del profesor afecta a la formación de la imagen del concepto en el estudiante. Para ellos:

> *"Si un profesor da la definición (es decir, el concepto) formal para una función y trabaja con ella durante un periodo de tiempo breve mientras a continuación pasa a dedicar largos periodos de tiempo con ejemplos dados por fórmulas, cada aprendiz puede desarrollar una imagen del concepto restringida para dicha noción, incluyendo solamente fórmulas y la definición del concepto llega a estar inactiva en la estructura cognitiva."* (p. 90)

Según estos investigadores, un aspecto importante de la enseñanza del cálculo es el uso de distintas representaciones, simbólicas, numéricas y algebraicas[11], e indican que los profesores experimentados señalan que a veces las tres representaciones son aprendidas de forma independiente entre sí. Con

[10]Pendiente de las rectas tangentes a una función y área bajo la curva de una función.

[11]Hughes- Hallets et al. (1994) denominan esta situación "regla de tres" , significa que siempre que sea posible los temas deberían ser enseñados gráficamente y numéricamente como algebraicamente (citado en Berry y Nyman, 2003).

respecto a esto Aspinwall et al. (1997) consideran que la comprensión matemática incluye aspectos visuales pero que la comprensión en los estudiantes es generalmente algebraica y no visual, ya que se mantiene la creencia, tanto en profesores como en estudiantes, de que hacer cálculo es manipular símbolos y números. Una de las conclusiones de su estudio (Aspinwall y Miller, 2001) es que el paradigma instruccional debería cambiar de profesor centrado en la instrucción a estudiante centrado en la construcción de conocimiento.

Este grupo de investigaciones realizadas pone de manifiesto que un aspecto a considerar en el análisis de distintas formas de práctica del profesor puede venir dado por el uso de diferentes sistemas de representación y las posibles conexiones entre ellos. Los diferentes usos de los sistemas de representación, apoyados a veces en la tecnología, pueden ayudar a caracterizar diferentes prácticas del profesor y afectar a los resultados de aprendizaje de los estudiantes.

Respecto al otro grupo de investigaciones sobre la práctica, aquellas que tienen en cuenta la relación entre el cálculo (relativos a la derivada) y sus aplicaciones en ciencias, Foster y Taylor (2003) hacen un análisis exploratorio sobre el papel de las habilidades de comunicación en el aula entre el profesor y los estudiantes (year 12[12]) y entre los propios estudiantes cuando se tratan temas de cálculo (en concreto relativos a la noción de derivada, el cálculo vectorial y las nociones físicas de velocidad y aceleración). En el aula se disponía de calculadoras gráficas con algunas capacidades simbólicas. Consideran que las acciones del profesor, sus preguntas, petición de argumentos y creación de oportunidades para intervenir son condiciones que permiten obtener resultados positivos, su papel es el de facilitador. Para estos investigadores:

"El desafío en la enseñanza es gestionar las acciones de clase de

[12]Bachillerato en el sistema educativo español.

forma que la competencia [en habilidades comunicativas] *puedan emerger en todos los estudiantes... El ritmo de "pregunta del profesor, replica de los estudiantes, respuesta del profesor" era conocido/entendido al principio y anunciaba la indagación compartida "* (p. 66 y 73)

Estos autores indican que la naturaleza de la tarea, las preguntas del profesor y el uso de calculadoras gráficas son aspectos claves para que los estudiantes formulen y articulen sus propias ideas.

Schwalbach y Dosemagen (2000) centran su investigación en la práctica de un profesor de Bachillerato que utilizaba ejemplos concretos de la clase de ciencias (física) para crear entornos que permitieran a los estudiantes abstraer nociones del cálculo; utilizaba ejemplos de mecánica clásica, posición, velocidad y aceleración para los conceptos de función, derivadas e integración indefinida[13]. Para estos investigadores, la realización de conexiones entre el cálculo y la física puede producir una profunda comprensión tanto del conocimiento semántico como del conocimiento procedimental. Este mismo argumento es apoyado por Azcárate (1990) que señala que el esquema conceptual de velocidad media puede dar lugar a un esquema conceptual de tasa de variación media y a partir de éste llegar al esquema de variación puntual de una función.

Estas investigaciones relativas a la práctica del profesor cuando enseñan cálculo, ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica, a través de caracterizaciones del uso herramientas tecnológicas (Kendal y Stacey, 2001 a, b; Penglase y Arnold, 1996), presencia de diferentes representaciones (Aspinwall et al, 1997; Kendal y Stacey, 2001 b), o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo (Schwalbach y Dosemagen, 2000;

[13]En el original se denominan antiderivadas.

Foster y Taylor, 2003).

Desde esta breve revisión podemos subrayar que la noción de derivada se conforma mediante tres conceptos: derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada. Un papel destacado en el aprendizaje y enseñanza de los conceptos que constituyen la noción es el jugado por los distintos modos de representación y las conexiones entre ellos.

4.- EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como hemos señalado en la introducción, hay un desafío importante en Educación Matemática para intentar caracterizar la práctica del profesor. Esta caracterización puede venir enfocada desde distintos puntos de vista. Dörfler (2003) indica que la Educación Matemática como disciplina científica incluye:

> *"el estudio de cómo la gente aprende y hace matemáticas de cualquier tipo y de cómo este aprendizaje y acción puede ser influenciado y fomentado entre otros por la enseñanza,..."* (p. 147)

En nuestro problema de investigación subyace la cuestión general de Simon y colaboradores (Simon, 1995; Simon y Tzur, 1999):

> "*¿Cómo puede el profesor promover en los estudiantes la construcción de potentes ideas matemáticas que llevó a la comunidad matemáticas miles de años desarrollar?"* (Simon, 1995, p. 118)

Estos investigadores plantean la necesidad general de desarrollar nuevos marcos conceptuales que permitan investigar la práctica del profesor, guiados por la premisa de promover el aprendizaje de ideas matemáticas (Simon y Tzur, 1999) proponiendo además la necesidad de considerar en las investigaciones sobre la práctica del profesor el tema matemático concreto, y que se tenga en cuenta en los análisis de los casos concretos.

Nuestro problema de investigación aborda la indagación de la práctica del profesor a partir del supuesto de que pretende potenciar en los estudiantes la construcción de conocimiento matemático. Pretendemos describir y explicar la práctica del profesor desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático que pretende potenciar en sus estudiantes. Utilizamos el término *"potenciar"* porque no indagamos en la construcción que de manera efectiva llegan a realizar los estudiantes. Esta problemática general la concretaremos en el caso de la enseñanza-aprendizaje de la noción de derivada en 1º de Bachillerato.

Para intentar dar respuesta a nuestro problema de investigación, realizaremos una revisión de investigaciones sobre práctica del profesor. También revisaremos investigaciones sobre construcción de conocimiento matemático, teniendo presente que la construcción de conocimiento matemático es relativo a la noción de derivada. De esta forma, a partir de las revisiones iremos seleccionando las ideas teóricas que nos parecen que pueden ayudarnos a dar respuesta al problema. A partir de la selección y adaptación de las ideas teóricas, concretaremos nuestro problema de investigación en "preguntas de investigación" (Capítulo II). La búsqueda de respuestas a esas preguntas nos llevará al diseño metodológico (Capítulo III) que debe ser coherente con el marco en el que nos desenvolvemos para recoger e interpretar los datos. Los informes de los resultados a la luz del marco teórico pretenden dar una explicación teórica de los datos (Capítulo IV) informando de la práctica del profesor. Por último concluiremos con aportaciones sobre la práctica del profesor que nos ayuden a caracterizarla (Capítulo V).

CAPÍTULO II

CAPÍTULO II: MARCO CONCEPTUAL

1.- INTRODUCCIÓN

Nuestro problema de investigación se centra en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Cuando un profesor desempeña su labor en el aula con sus estudiantes tiene un objetivo "**que construyan conocimiento matemático**". Nuestro estudio pretende analizar aspectos de la práctica del profesor que favorezca la construcción de conocimiento que potencialmente pueden llegar a realizar los estudiantes. Pretendemos describir y explicar **la práctica del profesor desde la perspectiva de la construcción del conocimiento matemático que parece estar potenciando en sus estudiantes**. El conocimiento matemático concreto que nos preocupa es la noción de derivada. Por estos motivos necesitamos un marco conceptual que se apoye en referentes teóricos relativos a:

- la noción de práctica del profesor,
- la construcción de conocimiento,
- y tenga en consideración la noción matemática de derivada.

En este capítulo construimos el marco conceptual de nuestra investigación.

Para ello realizamos una revisión sobre distintas formas de abordar: 1) la práctica del profesor, y 2) la construcción de conocimiento. Luego configuramos el marco conceptual seleccionando la perspectiva concreta que adoptamos, para la práctica del profesor y la manera de considerar la construcción de conocimiento en los estudiantes, eligiendo los elementos teóricos pertinentes. Por último, abordamos la noción de derivada como contenido matemático, concretando para dicha noción los aspectos teóricos concretos que conforman el marco conceptual.

En relación a la práctica del profesor, las perspectivas teóricas desde las que se ha estudiado se pueden agrupar en perspectivas cognitivas y perspectivas antropológicas entendidas de una manera amplia. Entre las que adoptan una perspectiva cognitiva tenemos a Leinhardt y colegas (1985, 1986) relativa al conocimiento del profesor en la enseñanza; Schoenfeld (1998 a, b) propone una "Theory of Teaching-in-Context" sobre modelación de la conducta del profesor en el aula; Artzt y Amour-Thomas (1999) con trabajos sobre análisis de la enseñanza y la reflexión del profesor con vistas a su desarrollo profesional; los trabajos de Simon, Tzur y colegas (Tzur et al., 2001) para los que la práctica del profesor comprende lo que el profesor hace y las perspectivas que subyacen en lo que hace. En relación a las que adoptan una perspectiva antropológica, Chevallad (1999) propone "théorie anthropologique du didactique" que sitúa la actividad matemática, y por tanto la actividad del estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales; el enfoque sociocultural (Llinares, 2000 a) para el cual la práctica del profesor es una actividad (realización de unas *tareas*) mediada por el uso de unos *instrumentos* y la teoría de las funciones semióticas de Godino (2004) sobre los significados y los símbolos.

Con respecto al segundo aspecto que conforma nuestro marco conceptual, la construcción de conocimiento, nos han servido de referentes los marcos teóricos sobre la comprensión de los conceptos en matemáticas basados en la dualidad proceso/objeto. Revisamos el desarrollado por Tall (Gray y Tall,1994) con la noción de proceptos, el propuesto por Sfard (Sfard, 1991) sobre la "Teoría de la Reificación" en la cual las nociones matemáticas tienen dos concepciones o aproximaciones, concepción *operacional* y concepción *estructural*, y el marco conocido con el acrónimo APOS (Dubinsky,1991), matizadas con las ideas aportadas por Dörfler (2002) relativas a la construcción de "objetos" matemáticos.

En los siguientes apartados resumiremos las diferentes teorías y sus componentes con el objetivo de configurar un marco conceptual para nuestro problema de investigación.

2.- LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DESDE DISTINTAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Las investigaciones sobre la práctica del profesor se han configurado como una agenda de investigación con la finalidad de conceptualizar la noción de práctica del profesor (Llinares, 1998). Las diversas investigaciones que analizan la organización y gestión del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas podemos agruparlas en las que adoptan una perspectiva antropológica y aquellas que adoptan un perspectiva cognitiva. Estas dos perspectivas son calificadas por Schoenfeld (1998 b) como *situadas y cognitivas*, y son dos referentes teóricos que en cierto momento fueron alternativos en la investigación en Educación Matemática.

En Llinares (1998) se caracterizan los elementos teóricos de ambas perspectivas desde la revisión de investigaciones desarrolladas en España. En estas dos perspectivas, cognitiva y antropológica, describiremos los elementos teóricos principales.

En el siguiente cuadro (cuadro 2.1) resumimos los elementos teóricos que subyacen en cada una de las perspectivas de análisis de la práctica y algunas investigaciones desarrolladas a partir de los mismos.

MARCOS TEÓRICOS: PRÁCTICA DEL PROFESOR			
Perspectiva	**Marco Teórico**	**Ideas teóricas**	**Tópicos investigados**
Antropológica	La teoría antropológica de lo didáctico	Praxeología (matemática/didáctica). Tarea. Técnica. Tecnología. Teoría. Momentos didácticos.	- Límite de función (Espinosa, 1998) - Diferenciación (Fonseca y Gascón, 2000) - Proporcionalidad (Bolea et al., 2001)
	Perspectiva sociocultural	Fases de la práctica. Instrumentos. Transparencia.	- Resolución de problemas (Meira, 1998) -Trigonometría (Adler, 1999) - Función (Llinares, 2000 a)
	Funciones Semióticas	Función semiótica. Entidades extensionales, notacionales e intencionales.	- Derivada (Font, 1999) - Estadística: normal (Tauber, 2001) - Demostración (Recio, 2002)

MARCOS TEÓRICOS: PRÁCTICA DEL PROFESOR			
Cognitiva	Teoría de la enseñanza como estrategia cognitiva	Estructura de la lección, conocimiento de la materia. Esquemas de actividad y de información. Segmentos, rutinas y agenda.	- Fracciones (Leinhardt y Smith, 1985) - Función (Llinares, 2000 b) - Semejanza (Escudero, 2003)
	Teoría de la enseñanza en Contexto	Modelo de enseñanza. Creencias, conocimiento, metas/fines. Imagen de la lección. Planes de acción. Toma de decisiones.	- Álgebra: exponentes aritméticos (Schoenfeld, 1998 a). - Física: Medida (Schoenfeld et al., 1999). - Aritmética elemental (Schoenfeld 1998 a, 2002)
	Teoría cognitiva para la reflexión y desarrollo	Fases de la lección y las dimensiones de la lección. Estados de la enseñanza.	- Geometría (Artzt y Armour-Thomas, 1999). - Funciones lineales (Artzt y Armour-Thomas, 1999) - Ecuaciones e inecuaciones (Artzt, 1999).
	Teoría sobre perspectivas y desarrollo profesional	Informe de práctica. Trayectoria hipotética de aprendizaje. Ciclo de enseñanza de las matemáticas. Perspectivas.	- Números y cardinalidad (Simon et al., 2000). - Algoritmo de la división (Tzur et al., 2001). -Valor de posición y aritmética básica (McClain, 2003).

Cuadro 2.1 Marcos teóricos sobre práctica del profesor

2.1.- Perspectiva antropológica

2.1.1.- La teoría antropológica de lo didáctico

La teoría antropológica de lo didáctico es una propuesta para el análisis de la práctica del profesor realizada por Chevallard (1999) y se centra en los procesos de estudio de las matemáticas como una actividad social. Los referentes teóricos vienen caracterizados por la noción de praxeología, tanto matemática como didáctica, y por los momentos de estudio.

En este enfoque "lo didáctico" se refiere a todo aquello relacionado con el estudio de las matemáticas. Para Bolea et al. (2001) esta teoría pretende una modelización de las actividades matemáticas institucionalizadas, para ello se introduce la noción de praxeología. Una praxeología (Chevallard,1999; Espinoza y Azcárate, 2000; Bolea et al., 2001) es un modelo para cualquier actividad humana realizada de forma regular. Se consideran dos praxeologías, por un lado está la praxeología matemática y por otro la praxeología didáctica; además se completa esta teoría con un modelo de la actividad didáctica, la teoría de los momentos didácticos. La praxeología matemática u organización matemática se refiere a la construcción o reconstrucción de un objeto matemático, que es objeto de estudio. La praxeología didáctica considera la manera de estudiar una praxeología matemática. Las praxeologías matemáticas pueden ser de diferente tipo en función del objeto matemático de estudio, por ejemplo pueden ser las que se organizan alrededor de un tipo de tareas que forman una praxeología puntual y a un nivel más general, agrupaciones de praxeologías locales y regionales. Para Artaud y Chevallard (2001) la "dinámica praxeológica" es el mecanismo por el que se constituye una praxeología didáctica y una primera forma esencial de dicha dinámica es la "rutinización" de las técnicas didácticas.

Una praxeología está formada por cuatro elementos, representados de este modo [$T/\tau/\theta/\Theta$], agrupados en dos bloques, el bloque práctico-técnico, formado por las tareas y las técnicas, [T/τ], y el bloque tecnológico-teórico, [θ/Θ], formado por la tecnología y la teoría (Chevallard, 1999). La tarea o tipo de tarea T, es el elemento generador de la praxeología. Una praxeología relativa a T requiere una manera de realizar las tareas t de T. Una determinada manera de hacer en relación a la tarea, τ, se le da el nombre de técnica. Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene, en principio, una técnica τ relativa a T. De esta forma se constituye el primer bloque, [T/τ], que se denomina bloque práctico-técnico y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina un saber-hacer un determinado tipo de tareas, *T* y una determinada manera, τ, de realizar las tareas de este tipo.

El tercer elemento de una praxeología, tecnología, que se indica por θ, se refiere a un discurso racional -el logos- sobre la técnica τ, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo *T*. La justificación dependerá del tipo de institución y de la naturaleza de la praxeología. Una segunda función de la tecnología es la de explicar, de hacer inteligible, de aclarar la técnica. Si la primera función -justificar la técnica- consiste en asegurar que la técnica da lo pretendido, esta segunda función consiste en exponer por qué es correcta. La teoría tiene como función explicar-justificar el discurso tecnológico. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica. Se forma aquí un bloque tecnológico-teórico, $[\theta/\Theta]$.

Chevallard (1999) se plantea como cuestión de investigación el análisis de las prácticas docentes, se plantea cuatro tipos de tareas[1] relativas a un objeto *O* relativo a las practicas docentes: observar, describir y analizar, evaluar y desarrollar el objeto *O*. Los objetos (*O*) a considerar son de dos clases dado un tema matemático: i) la realidad matemática, una praxeología matemática (organización matemática), y ii) la manera en que puede ser construida dicha realidad matemática, una praxeología didáctica (organización didáctica). Las dos tareas fundamentales que se consideran son las de *describir y analizar* ambas praxeologías.

[1]Cuatro tareas desde un punto de vista general, pero que en casos concretos pueden considerarse que las lleva a cabo el profesor. Las praxeologías permiten describir y analizar la práctica del profesor y evaluar lo que se ha observado y analizado. El profesor puede evaluar una praxeología matemática y el investigador puede evaluar la praxeología matemática y la praxeología didáctica; y como última tarea puede desarrollar la propuesta propia con el objetivo de "mejorar" lo que se ha evaluado.

Centrándonos en las praxeologías didácticas, queremos responder a la pregunta ¿como estudiar la obra matemática *O*?, Gascón (2003) considera que hay una fuerte dependencia de las organizaciones didácticas respecto de la organizaciones matemáticas a enseñar ya que la estructura de las obras matemáticas condiciona la organización de su estudio por el profesor. La teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999; Bolea et al., 2001) propone un modelo de la dinámica del estudio de las organizaciones (praxeologías) matemáticas, a través de los momentos didácticos. Los momentos didácticos permiten describir la organización didáctica ya que se les puede identificar en cualquier proceso de estudio de una organización matemática, aunque no todos tienen que tener la misma presencia, algunos momentos pueden aparecer de manera meramente testimonial.

A partir de Chevallard (1999) y Espinoza y Azcárate (2000) describiremos los distintos momentos. El primer momento del estudio es el del *primer encuentro* con la organización *O* (matemática) que se pretende estudiar, generalmente, consiste en encontrar *O* a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de *O*. El segundo momento es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la elaboración de una técnica τ_i relativa a este tipo de tareas.

El tercer momento del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$ relativo a τ_i. Este momento está en interrelación con cada uno de los otros momentos y en él se justifica la técnica y permite la emergencia de nuevas técnicas para la misma tarea. El cuarto momento es el del *trabajo de la técnica*, en el que se perfecciona la técnica que se vislumbra en el momento exploratorio, se mejora la técnica volviéndola más eficaz y más fiable, en este momento se acrecienta la maestría que se tiene de ella. En esta etapa se estudia el alcance que tiene la técnica.

El quinto momento es el de la *institucionalización*, que tiene como objetivo precisar lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada. Se distingue, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no son integrados y, por otra parte, los elementos que configuran definitivamente la organización matemática considerada. El momento de la institucionalización en cierta forma precisa el alcance de la organización matemática y traza sus fronteras.

El sexto momento es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización, permite hacer un balance sobre la reconstrucción de la organización matemática realizada por el sujeto a lo largo del proceso de estudio. Respecto a estos últimos dos momentos, Espinoza y Azcárate (2000) consideran que tienen una relación dialéctica: se evalúa lo que se hace ostensible a través de la institucionalización y por otro se institucionaliza para evaluar.

Del uso de este marco teórico en la investigación sobre la práctica del profesor se ha podido llegar a algunas conclusiones. En Espinoza y Azcárate[2] (2000) se considera que el profesor asume el papel de director del estudio, y además que las praxeologías didácticas son "espontáneas", en el sentido de que son praxeologías no reflexionadas ni elaboradas dentro de un ámbito específico, son praxeologías en acto, realizadas pero raramente explicitadas. Fonseca y Gascón (2000, 2002) respecto al tema de la derivación de funciones en Enseñanza Secundaria llegan a concluir, en relación a la praxeología matemática[3],

[2]La organización matemática de esta investigación es "límite de una función" en niveles de 14-18 años (Educación Secundaria, estudiantes de 2º BUP). Para un análisis más detallado ver Espinoza (1998).

[3]El análisis de la praxeología matemática es previo a la descripción de la praxeología didáctica, estos autores terminan haciendo algunas notas sobre el proceso de estudio. Bolea et al. (2001) "Resulta, en definitiva, que para elaborar una praxeología matemática debemos utilizar una praxeología didáctica... parece razonable que el estudio de la actividad matemática empiece precisamente por el análisis de las organizaciones matemáticas que emergen de dicha actividad. Tendremos así un primer nivel de análisis que se centrará en las organizaciones matemáticas... Es preciso completar el análisis matemático con el análisis de las praxeologías didácticas relativas al estudio de las organizaciones matemáticas" (pp. 252-253).

que no es propiamente una praxeología matemática local, puede considerarse más bien una amalgama de praxeologías matemáticas puntuales no integradas y poco desarrolladas, respecto al proceso de estudio en las instituciones escolares (Bachillerato) proponen abordarlo desde el cuestionamiento tecnológico de las técnicas, alcance, coste y relaciones entre técnicas.

2.1.2.- Perspectiva sociocultural: noción de instrumento de la práctica

El enfoque sociocultural (Llinares, 1999, 2000 a, 2002) considera necesario determinar qué se encierra bajo la frase “actividad del profesor”. “La actividad del profesor” es la de enseñar matemáticas, en esta revisión nos centraremos sólo en el contexto de aula. La clase de matemáticas es vista como una comunidad de práctica, grupo que comparte formas de hacer y comunicarse, que permite definir para los estudiantes oportunidades de aprendizaje de contenido matemático específico. En este mismo sentido se manifiesta Lerman (2001) cuando indica que el aprendizaje (incluyendo el de las matemáticas escolares) es una iniciación en una práctica social, donde el profesor juega el importante papel de iniciador y por lo tanto hay que tener en cuenta la forma en que la actividad matemática es formulada por el profesor. Esto no significa que no se sea consciente de otros papeles que juega el profesor de matemáticas, tales como el de agente socializador del estudiante, que pone en juego valores de la sociedad. Además se considera que es importante tener en cuenta el contenido matemático concreto a la hora de realizar investigaciones sobre práctica profesional del profesor (Llinares, 2000 b). Se identifican (Llinares,1999; Llinares, 2000 a) dos fases cuando se pretende describir la práctica del profesor en el aula:

1.- fase de planificación y organización de las matemáticas: el contenido de las tareas que propone el profesor caracterizan su “agenda de enseñanza” y están vinculadas a sus procesos interpretativos (García y Llinares, 1999) del contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje, 2.- fase de gestión del proceso de enseñanza/aprendizaje, en la que se realizan las interacciones entre profesor, estudiantes y el conocimiento matemático y se gestionan los distintos segmentos de enseñanza que forman la lección.

Para Llinares (2000 a) la práctica del profesor puede ser descrita a través de la realización de unas tareas mediante el uso de unos *instrumentos*. La "práctica profesional del profesor" incluye no sólo lo que el profesor hace sino también su comprensión de los instrumentos y del propósito de su uso. Los instrumentos entendidos como los medios a través de los cuales obtener un fin.

La noción de instrumento no se refiere sólo a materiales físicos, sino que engloba a todos los medios a disposición del profesor. Podemos considerar instrumentos técnicos (por ejemplo, los materiales didácticos, software, etc) e instrumentos conceptuales (conceptos y construcciones teóricas que se generan a partir de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y del conocimiento derivado desde la práctica). Lerman (2001) considera instrumentos materiales y conceptuales, y se refiere a ideas conceptuales tales como gráficos, diagramas. Hillel (1993) propone la existencia de tecnologías cognitivas (instrumentos conceptuales) tales como los sistemas notacionales (sistemas de representación).

También podemos considerar entre los instrumentos, el lenguaje hablado (el discurso empleado), los modos de representación simbólica, las tareas-problemas instruccionales, y los materiales didácticos. El lenguaje y las tareas/problemas son los "medios" para el desarrollo de la actividad. Se asume que los instrumentos utilizados y la forma en que se utilizan influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de los estudiantes, esto conlleva que las investigaciones en este enfoque empiecen a identificar aspectos del uso por el profesor de los instrumentos como medio para caracterizar las prácticas matemáticas en el aula.

Desde esta perspectiva podemos plantearnos cuestiones como ¿cómo usa el profesor el lenguaje, los problemas-tareas matemáticas, los diferentes modos de representación? (Llinares, 2000 a). Indicar por tanto la importancia que tiene no sólo fijarnos en los instrumentos que usa el profesor sino también en cómo los usa y el propósito de su uso. De aquí podemos comprender la práctica del profesor centrándonos en dos aspectos:

- identificar los instrumentos que el profesor emplea en la realización de sus tareas; tanto en la fase de planificación, como en la fase de gestión, es decir, el tipo de problemas presentados a los estudiantes y cómo están organizados y los modos de representación (sistemas de símbolos) entendidos como instrumentos de la práctica, y

- caracterizar cómo los usa el profesor, indicando cuál es el propósito y cómo usa los problemas y modos de representación, es decir su comprensión del significado de los instrumentos.

Además de la noción de instrumento, hay otro elemento teórico importante "*noción de transparencia*" ligada a los instrumentos (Lave y Wenger, 1991). La transparencia de los instrumentos no es una cualidad objetiva, inherente a los mismos, sino que depende del uso que se les dé (Meira, 1998). Así se plantea el dilema de la transparencia que se resume en la dualidad visible-invisible, es decir, deben ser los instrumentos invisibles para que permitan ver los conceptos matemáticos pero a la vez deben ser considerados como el elemento a través del cual se están viendo (Adler, 1999, 2000; Llinares, 2000 a).

Uno de los aspectos a mirar para describir la práctica profesional del profesor es la organización del contenido matemático que adopta el profesor y el conjunto de tareas que el profesor plantea a los estudiantes junto con las justificaciones que el profesor realiza. El profesor al organizar el contenido matemático y elegir los problemas que va a proponer realiza una reconstrucción de las nociones y procedimientos matemáticos consideradas como objeto de enseñanza-aprendizaje. Esta reconstrucción como objetos de enseñanza-aprendizaje[4] y su organización para la enseñanza determinan el contenido de la *"agenda de enseñanza"*. De este modo la agenda de enseñanza da cuenta de la organización del contenido matemático. La agenda de enseñanza del profesor como conjunto de objetivos, tareas y decisiones de acción ligados a una noción matemática y las justificaciones de la misma dadas por el profesor son una primera referencia para caracterizar la práctica profesional en el contexto de aula (Leinhardt et al., 1991).

Uno de los resultados obtenido en la investigación realizada desde esta perspectiva es que los profesores pueden enfatizar aspectos diferentes del contenido matemático (es decir tienen una reconstrucción distinta del objeto de enseñanza/aprendizaje para la misma noción) y esto puede llegar a caracterizar su práctica (García y Llinares, 1999). Para Llinares (2000 a) el intento de explicar lo que sucede en el aula conduce a adoptar perspectivas socioculturales[5] para estudiar las regularidades y naturaleza de las interacciones que se producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y como las interacciones posibilitan la organización del contenido matemático como una forma de dar cuenta de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y el papel del profesor en la constitución de determinadas prácticas matemáticas en el aula. Para Llinares (2002) la noción de transparencia posibilita el análisis del uso de los instrumentos por el profesor en la construcción de conocimiento de los estudiantes y constitución de prácticas matemáticas.

[4]Se entiende por *objeto de enseñanza-aprendizaje* la construcción personal realizada por el profesor del contenido matemático en el contexto de enseñanza (da cuenta de la reconstrucción de las nociones y procedimientos matemáticos desde la perspectiva de enseñanza que hace el profesor) (Llinares, 1999).

[5]La adopción de perspectivas socioculturales no significa abandonar el punto de vista cognitivo, "buscar una complementariedad entre puntos de vistas cognitivos sobre el conocimiento del profesor y puntos de vista socioculturales relativos a la práctica del profesor como una manera de dar cuenta de ciertos aspectos de lo que sucede en las aulas de matemáticas" (Llinares, 2000 a, p. 109).

2.1.3- Teoría de funciones semióticas

La teoría de las funciones semióticas desarrollada a partir de los trabajos de Godino y Batanero (1994) sobre el significado de los objetos matemáticos, en la que se considera que el enfoque antropológico de Chevallard (1999) se centra enfáticamente en lo público (institucional), y que un enfoque sistémico de la Didáctica no puede prescindir de la esfera de lo cognitivo (personal), proponen distinguir entre el objeto institucional y el objeto personal (Font, 1999). Para Godino (2004[6]), la Teoría de las Funciones Semióticas pretende proporcionar un marco unificado para el estudio de las distintas formas de conocimiento matemático y sus correspondientes interacciones en los sistemas didácticos, es decir, considerar conjuntamente la cognición y la instrucción matemática, de alguna manera lo personal y lo público. Se parte de un presupuesto "prágmático" en el sentido de que los signos representan algo para alguien y por tanto en la comunicación no sólo se consideran los conceptos sino también las situaciones problemáticas y los medios expresivos (significante-expresión y significado-contenido) (Font, 1999; Godino, 2004).

Para Godino y Recio (1998)[7] cada objeto matemático es un conjunto de entidades de los siguientes tipos: notaciones, fenomenologías y generalizaciones. Estas entidades elementales o primarias se describen del siguiente modo:

- Fenomenológicas, son las situaciones-problemas, aplicaciones, son las entidades extensionales que inducen actividades matemáticas.

- Notacionales, representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática.

- Generalizaciones, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, etc), son entidades intensionales.

[6]En este trabajo se traza una reseña de la evolución de la Teoría de las Funciones Semióticas.

[7]Traducciones en Font (1999, 2000 a) y en Recio (2002).

Una función semiótica está formada por dos argumentos, denominados expresión y contenido, en la que se establece una relación entre ambos. Las entidades básicas pueden desempeñar ambos papeles en un función semiótica, resultando 9 funciones (Font, 1999). Un ejemplo propuesto por Font (1999,2000 a) es el siguiente, consideremos la palabra triángulo y la relacionamos con el dibujo de un triángulo en el plano, estamos ante una función semiótica con una expresión notacional (la palabra triángulo) y un contenido extensional (el triángulo). Para Font (2000 a) un aspecto importante de la funciones semióticas es que se pueden aplicar tanto a las representaciones ostensivas (público) como a las mentales (privado), y que posibilitan el análisis conjunto de los usos de ostensivos en contexto social y del pensamiento que lo acompaña.

Font (1999) hace una aplicación de la funciones semióticas para el análisis de las manipulaciones públicas de los ostensivos y el pensamiento que le acompaña, algunos ejemplos de funciones semióticas para la noción de derivada son las que siguen:

- función semiótica que relaciona una entidad extensional con otra intensional, que por un lado permite relacionar un objeto con la clase a la que pertenece y por otro relacionar un objeto con una clase a la que no pertenece. En el segundo de los casos, si el <u>objeto</u> $\lim_{h\to o} f(x+h)-f(x)/h$ y lo interpretamos como el valor al que se aproximan las tasas de variación media cuando h tiende a 0, estamos asociando a la expresión del límite $\lim_{h\to o} f(x+h)-f(x)/h$ el contenido formado por <u>la clase</u> de las tasas de variación media cuando h tiende a 0.

- función semiótica que relaciona una entidad intensional con un signo, por ejemplo, relacionar las de las tasas de variación media $f(x+h)-f(x)/h$ cuando h tiene a 0 con la notación f ´(x).

Utilizando estas funciones semióticas como herramienta pueden realizarse descripciones de los procesos que realizan los estudiantes, posibilitan un lenguaje unificado para las descripciones. Estas funciones no permiten explicar los porqués y cómos de los procesos de abstracción, encapsulación, etc. que llevan a cabo los estudiantes (Font, 1999). Font (1999) aplica las funciones semióticas al análisis de las distintas alternativas que pueden utilizarse para introducir en el aula el contenido “función derivada”. A través del análisis semiótico se puede tener medida indirecta del grado de dificultad de cada una de ellas. Para la función seno, Font (2000 b) hace un análisis de diversas alternativas para obtener la función derivada, llega a la conclusión que las diversas alternativas pueden suponer una pérdida de rigor pero que puede ser más importante el número de representaciones y por tanto el mayor número de funciones semióticas. Por tanto, las funciones semióticas posibilitan, tanto el análisis de actividades que se llevan a cabo en el aula como el análisis de posibles alternativas para llevar al aula. Un análisis didáctico previo utilizando las funciones semióticas puede hacerse para recursos disponibles (software) por el profesor para abordar diversos contenidos matemáticos, este análisis pretende explorar las formas de usarlos para el estudio de las matemáticas (Godino et al., 2003).

Godino (2004) en los últimos desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas la propone como un elemento que complementa la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard (1999), ya que el lenguaje es un tercer componente de una praxeología (además de la praxis y el logos). Las funciones semióticas permiten de esta forma tener en consideración la cognición individual, y superar el obstáculo relativo a centrarse únicamente en las prácticas públicas institucionalizadas, conectando de esta forma con la noción de significado del objeto personal y significado institucional. La relación entre las nociones introducidas por Chevallard (1999) y las de Godino y Batanero (1994) vienen dadas por la asimilación entre praxeología en la TAD y los sistemas de prácticas como parte del significado institucional de los objetos. Las funciones semióticas permiten describir el conocimiento (significado) de un sujeto concreto dentro de una institución y también el sistema de prácticas institucionales; la noción de conflicto semiótico[8] posibilita explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos (Godino, 2004).

2.2.- Perspectiva cognitiva

2.2.1.- Teoría de la enseñanza como estrategia cognitiva

Este marco considera la enseñanza como una tarea cognitiva compleja y que puede ser analizada a partir de ideas teóricas de la psicología cognitiva. Llinares y Sánchez (1990) consideran que se pretende identificar los procesos cognitivos y el conocimiento que fundamenta una enseñanza efectiva. Estas investigaciones se basan en principio en la dicotomía experto-novel. Para Leinhardt y sus colaboradores (Leinhardt y Smith, 1985; Leinhardt y Greeno, 1986) las estrategias de enseñanza se apoyan en dos sistemas de conocimiento fundamentales: la estructura de la lección y la materia (matemáticas). Primeramente se aborda la cuestión de conocimiento (Leinhardt y Smith, 1985) y después los segmentos de la lección y rutinas (Leinhardt y Greeno, 1986).

Estas investigaciones se llevan a cabo en los años 80, cuando se utilizan investigaciones basadas en la dicotomía experto-novel[9], en ellas se intenta identificar lo que profesores "expertos" hacen para que sus estudiantes tengan éxito en su aprendizaje. Se considera que la enseñanza es compleja, que se realiza

[8]Un conflicto semiótico se presenta cuando distintos sujetos (personas o instituciones) atribuyen significados diferentes a los mismos símbolos (Godino, 2004).

[9]Experto es un profesor cuyos estudiantes obtienen puntuaciones por encima de la media durante varios años, novel generalmente es un profesor en formación (Leinhardt y Greeno, 1986).

en un contexto dinámico, no totalmente estructurado. Son el punto de partida de muchas investigaciones en la perspectiva cognitiva[10], y sus elementos teóricos, se continúan utilizando en investigaciones sobre prácticas del profesor que se siguen desarrollando en nuestros días (Schoenfeld, 1998 a, b; Escudero y Sánchez, 1999 a, b, 2002; Artzt, 1999; Escudero, 2003).

Leinhardt y colegas (Leinhardt y Smith, 1985;Leinhardt y Greeno, 1986) consideran que los dos sistemas de conocimiento en los que se basa la enseñanza son, la estructura de la lección y de la materia. La estructura de la lección es el conocimiento necesario para construir y desarrollar la lección, permite pasar de un segmento a otro, se apoya en el conocimiento de las matemáticas; el conocimiento de las matemáticas, incluye conceptos, algoritmos, conexiones entre distintos algoritmos, es el apoyo de la estructura de la lección ya que permite seleccionar los ejemplos, explicaciones, etc. que se utilizan (Leinhardt y Smith, 1985; Leinhardt et al., 1991). El conocimiento de los profesores se compone de conjuntos de acciones interrelacionados, estas acciones se organizan en "esquemas de actividad[11]". Estos esquemas se aplican de manera flexible, y tienen distintos niveles de generalidad. La noción de rutina (un ejemplo de esquema de actividad), introducida por estos investigadores, hace referencia a actividades que los profesores realizan frecuentemente, y que requieren pocos recursos cognitivos para realizarlas y que distraerían de actividades y metas más generales e importantes de la enseñanza. Los "esquemas de información" permiten al profesor obtener información que se utilizará posteriormente e integrará en los esquemas de actividad. Las estructuras de actividad son partes de la lección con un fin claro, son segmentos de la lección, algunos ejemplos son, corrección de trabajos de casa, presentación de la lección (tópico), práctica

[10]Junto a los trabajos de Shulman (1986).

[11]"Schemata" en el original (Leinhardt y Greeno, 1986), traducido como esquemas de actividad por Llinares y Sánchez (1990). Los elementos teóricos han sido trasladados e interpretados en castellano por LLinares y Sánchez (1990).

guiada, tutorización, chequear (Leinhardt y Greeno, 1986).

Otro constructo teórico propuesto por estos investigadores es el de "agenda", que es un plan operativo que ayuda en el desarrollo de la lección. La agenda del profesor incluye la planificación tradicional, estructuras de actividad y rutinas operativas, se incluyen también elementos para tomas de decisiones que permiten la adaptación y revisión de la agenda.

Para el análisis detallado de la enseñanza a partir de sus ideas teóricas, proponen un conjunto de "redes de planificación/intenciones[12]" para una muestra de segmentos de actividad. Esta redes representan estructuras de acciones y fines generados por el conocimiento base que se ha hipotetizado en este marco teórico. Las redes muestran las diferentes acciones que se pueden realizar. Por ejemplo, la red de intenciones para el segmento de presentación de la lección, consistente en establecer una definición, las dos primeras acciones disponibles son "establece la definición un estudiante" o "establece la definición el profesor", cada uno de ellos tiene unas acciones siguientes diferentes, posteriormente se siguen tomando decisiones sobre la acción que le sigue. Las redes de forma esquemática son similares a los diagramas de flujo, con las acciones que se pueden realizar conectadas por líneas con flechas que indican por donde siguen o pueden seguir las decisiones posteriores.

Algunas investigaciones (Leinhardt y Smith, 1985) pretendían analizar el conocimiento de las matemáticas que tenían los profesores, tanto los expertos como los noveles, pasando después a las investigaciones (Leinhardt y Greeno, 1986) que pretendían esclarecer las estructuras de actividad y rutinas de los profesores hábiles para describir su enseñanza y contrastarla con la de los profesores noveles. A partir de un conjunto de profesores estos investigadores

[12] "Planning nets" en el original (Leinhardt y Greeno, 1986)

seleccionan dos expertos y un novel para realizar una interpretación más detallada de los fines, estructuras de actividad y rutinas. Los objetivos, metas y submetas que guían la actividad del profesor son conjeturadas por los investigadores. Como resultado caracterizan las prácticas de profesores expertos y profesores noveles contrastandolas e identificando algunos aspectos que pueden ayudar a los profesores noveles (automatización de rutinas, uso de patrones de comportamiento en los segmentos).

Algunas investigaciones (Escudero y Sánchez, 1999 a, b, 2002; Escudero 2003) sobre la práctica del profesor hacen uso de las nociones de agenda y de segmento de la lección, ya que estos segmentos permiten identificar distintas partes de la clase, reconocibles como tales por los profesores y estudiantes, los segmentos permiten caracterizar la práctica. En estos estudios se identifican distintos tipos de segmentos entre los que están los segmentos de presentación[13], que denominan "uso de ejemplo para llegar a definir", "explicación a través de un ejemplo", etc. A partir de cada segmento se puede describir y analizar el contenido de las componentes del conocimiento profesional del profesor. Incluso la existencia o no de determinados segmentos viene influenciado por las concepciones de los profesores sobre la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Escudero (2003) señala que la organización y gestión del contenido matemático en el aula se relaciona con cómo se conciben las matemáticas escolares. Para esta investigadora las diferencias en la arquitectura relacional de la práctica se relacionan con las concepciones del profesor sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

[13]Leinhardt y Greeno (1986) identificaron 10 categorías para describir las acciones de los profesores, entre ellas las de presentación, que se refieren a explicaciones del profesor de nuevo material o material recientemente aprendido mientra los estudiantes escuchan.

Para esta investigadora, puede que profesores con la misma amplia experiencia y amplios conocimientos sobre las orientaciones curriculares consideren los contenidos de las matemáticas relativos a un tema específico de forma diferente. Este último aspecto, señala, se relaciona con sus concepciones sobre las matemáticas escolares. Señala la importancia de incluir las consideraciones sobre las concepciones y conocimiento/forma de conocer de los profesores para analizar las decisiones del profesor, tanto en la fase de planificación como de gestión en el aula

Los trabajos de Schoenfeld y colegas (Schoenfeld, 1998 a, b) hacen uso de nociones similares a las usadas por Leinhardt. Por ejemplo, la noción de "imagen de la lección" es muy similar a la noción de agenda. Respecto a las metas o fines, estos pueden ser atribuidos al profesor por los investigadores, tal y como ocurre en Leinhartd y Greeno (1986). Tanto los trabajos de Leinhardt y colegas como los del grupo de Schoenfeld consideran relevante distintos tipos de conocimiento del profesor, pero Schoenfeld utiliza la propuesta de Shulman (1986). Para Escudero (2003) hay una doble relación entre el conocimiento y la práctica, de manera que el conocimiento conduce a determinada planificación y gestión y la práctica influye en determinadas características del conocimiento. Para el análisis Schoenfeld y sus colegas utilizan los segmentos de instrucción (secuencias de acciones) similares a los ya descritos por Leinhardt y Greeno (1986). Los últimos desarrollos del grupo de Schoenfeld (Schoenfeld, 2002) en las que se introducen las rutinas de enseñanza, se acercan a lo que Leinhartd y colegas (Leinhartd y Smith, 1985; Leinhardt y Greeno, 1986) denominan redes de planificación, con una representación muy similar de diagramas de flujo. En el apartado dedicado a la teoría de la enseñanza en contexto explicamos detalladamente los elementos teóricos aquí mencionados.

2.2.2.- Teoría de Enseñanza-En-Contexto

Schoenfeld y sus colegas del Teacher Model Group at Berkeley (TMG en adelante) pretenden desarrollar una teoría de la enseñanza en contexto (Schoenfeld, 1998 a, b, 2002) en el sentido de intentar dar cuenta de cómo y por qué los profesores hacen lo que hacen cuando están en el aula con sus estudiantes (pretende explicar las elecciones que realizan los profesores). De acuerdo con esta propuesta, los fines creencias y conocimiento del profesor interactúan en su toma de decisiones en el aula con sus estudiantes al abordar un contenido concreto de matemáticas. Para el TMG la figura del profesor permite explicar bastante de lo que sucede en el aula y por tanto lo elige como figura sobre la que centrarse.

La situación que se plantea desde esta perspectiva es la siguiente: el profesor está en el aula, puede que las situaciones sean acordes con su planificación, pero puede suceder algo no planificado, "*Algo ocurre. ¿qué haría el profesor a continuación, y (más importante) por qué?*" Este grupo, TMG propone modelar la práctica del profesor, es decir, explicar detalladamente lo que el profesor hace y por qué. Se propone un modelo que incluye descripciones de las creencias, conocimiento y metas del profesor, y de acuerdo con el modelo, las decisiones que toma el profesor en el aula son función de las creencias, metas y conocimiento (Schoenfeld, 1998 a, b, 2002). De acuerdo con Schoenfeld (1998 a) el modelo propuesto tiene dos partes:

- las *componentes* principales del modelo: creencias, metas y conocimiento del profesor, y
- el *mecanismo* de acople de los componentes.

En un momento determinado, creencias, metas y conocimiento, cada una de estas componentes tiene un nivel particular de activación, una indicación de cuán importante es en ese momento. Hay dos presupuestos previos:

(1) los niveles de activación de creencias, metas y conocimiento en un momento serán asignados, y

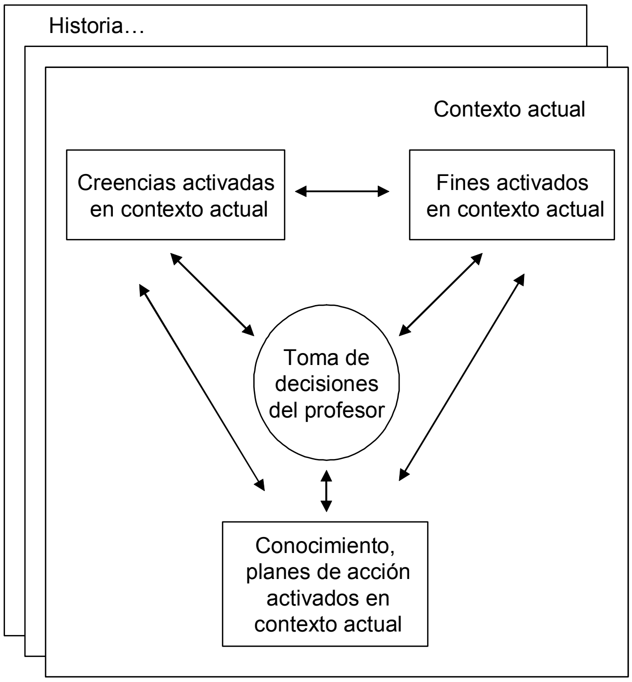
(2) las acciones realizadas por el profesor serán seleccionadas de manera

consistente con las creencias, metas y conocimientos del profesor activados en ese momento.

La meta prioritaria del profesor será consistente con la creencia prioritaria activada; las acciones que el profesor emprende o decide emprender serán consistentes con esas metas y creencias y las acciones del profesor serán diseñadas sobre el conocimiento que tiene un mayor nivel de activación. En el cuadro 2.2 se representa el funcionamiento del modelo.

Schoenfeld (1998 a) describe el funcionamiento del modelo de la siguiente manera: en un momento dado, hay un conjunto[14] de creencias, metas y conocimiento altamente activadas, si las cosas van bien, están todas sincronizadas. Las creencias sirven como base para que lo que el profesor intenta lograr (metas). El profesor tiene acceso a varias clases de conocimientos al servicio de esas metas, y tiene un conjunto de expectativas (la imagen de la lección) acerca de las maneras en las que probablemente pueden ser llevadas a cabo. De acuerdo con estas expectativas, el profesor se implica en un conjunto de actividades con sus estudiantes (llevando un plan de acción consistente con sus metas y creencias). Si las cosas funcionan acordes con la planificación, la imagen de la lección y los planes de acción del profesor determinan lo que sucede. Lo interesante sucede cuando la situación no se desarrolla de acuerdo con el plan, dependiendo de su naturaleza, y del contexto, este suceso puede desencadenar la activación alta de algunas creencias que están en ese momento en baja activación. En el contexto de estas creencias, las restricciones y los recursos, pueden ser formuladas nuevas metas altamente prioritarias y un nuevo plan de acción consistente con una nueva constelación de creencias y metas puede ser colocado en su lugar.

[14] *"Constelation"* es la palabra utilizada por este grupo.



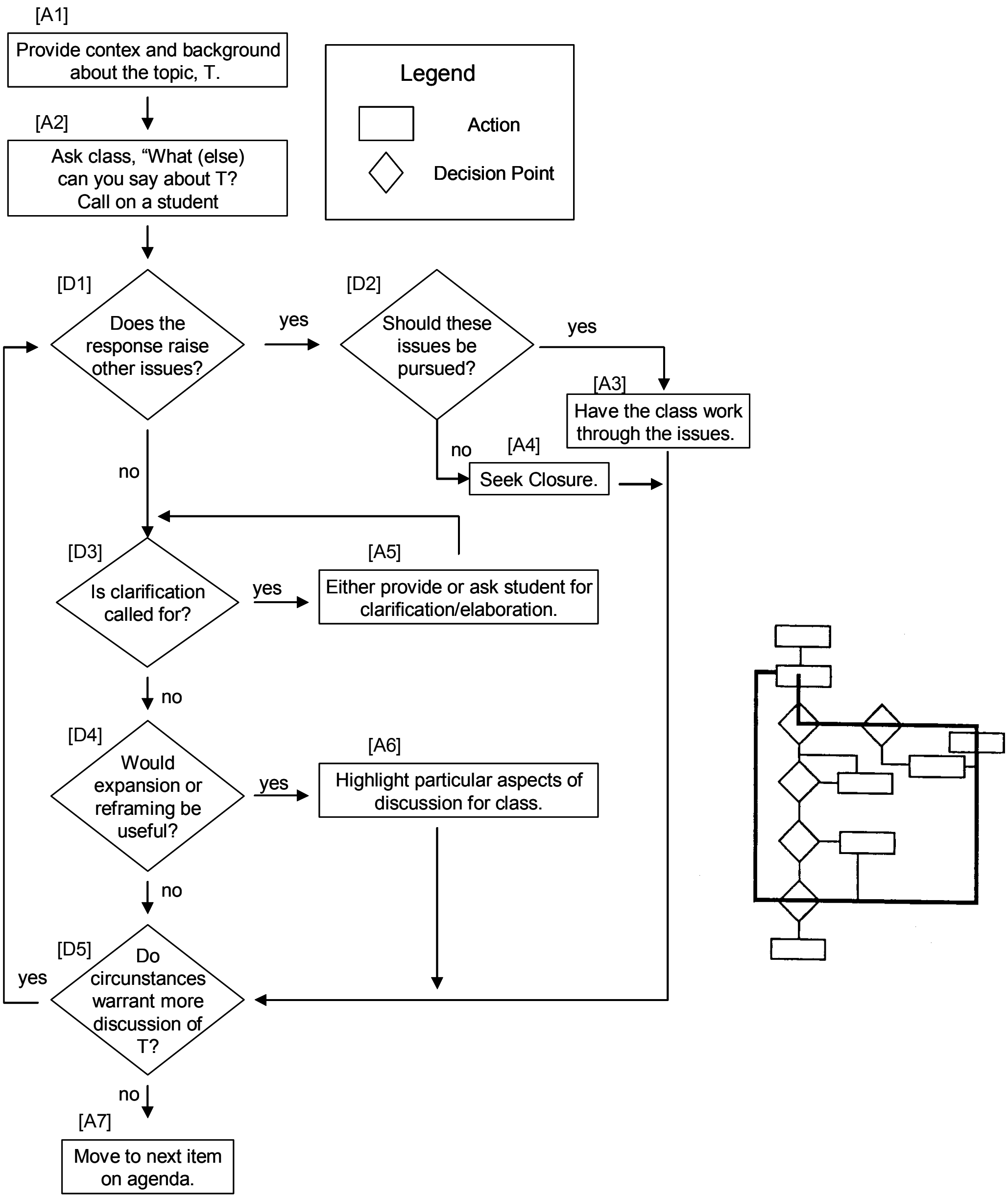
Cuadro 2.2 Funcionamiento del modelo
(Schoenfeld, 1998 a, p. 14)

Entre los elementos teóricos descritos por Schoenfeld (1998 a, b) que aparecen en el modelo "Teoría de la Enseñanza-en-Contexto" están las componentes: creencias, metas y conocimiento. Se distingue entre conocimiento y creencias; entre creencias profesadas y creencias atribuidas, y también se consideran las metas atribuidas y las profesadas. Respecto a las metas, no hay una correspondencia sencilla entre metas y acciones. Otros elementos son: la imagen de la lección y los planes de acción. La noción de "imagen de la lección", es la visión del profesor de las posibilidades y contingencias relacionadas con una lección, incluye conocimiento de sus estudiantes, y cómo pueden reaccionar a las partes de la lección planificada.

Los "planes de acción", son medios para lograr determinadas metas. Un plan de acción es un conjunto de acciones que se pretende llevar a cabo para el logro de un conjunto de metas de alta prioridad, ocurren a distintos niveles y a veces están anidados (un plan contiene otros planes), a veces están "programados" dentro de la imagen de la lección o emerger "ad hoc" para responder a una situación planteada. Hay diversos tipos de planes: rutinas, guiones, micro-lecturas/conferencias, charlas simples.

Este marco teórico ha sido usado en diferentes investigaciones sobre la práctica del profesor. Schoenfeld (1998 a) modela la práctica a partir de este modelo. Se dan detalles precisos sobre la forma de identificar diferentes segmentos, que se denominan “secuencias de acción” y la asignación de niveles de activación a cada componente. En Schoenfeld (2002) se da un paso más en el desarrollo de este referente relativo a la modelación de la enseñanza de profesores en acción, en concreto, las rutinas de clase, utilizando diagramas de flujo (organigramas) para representar la toma de decisiones de los profesores. Esta representación les permite a los investigadores usar el “marco teórico” con profesores de distintos niveles y diferentes formas de considerar “la imagen de la lección”. Estos diagramas de flujo consideran dos posibilidades, una acción a realizar por el profesor y una toma de decisión, la primera representada por un rectángulo y la segunda por un rombo. En el cuadro 2.3 (a la izquierda) se recoge el esquema teórico para la rutina “IRE (interacción del profesor-respuestas de los estudiantes-evaluación de respuestas)”.

Prefijado un modelo en un diagrama (en el cuadro 2.3 a la izquierda) pueden caracterizarse los segmentos de los distintos profesores sobre dicho modelo prefijado (superpuesto el particular al general), tal y como se muestra en el cuadro 2.3 a la derecha, en el que aparece un caso concreto.



Cuadro 2.3 Modelo teórico y caso concreto superpuesto (Schoenfeld, 2002, pp. 138 y 146)

2.2.3.- Teoría cognitiva para la reflexión y desarrollo

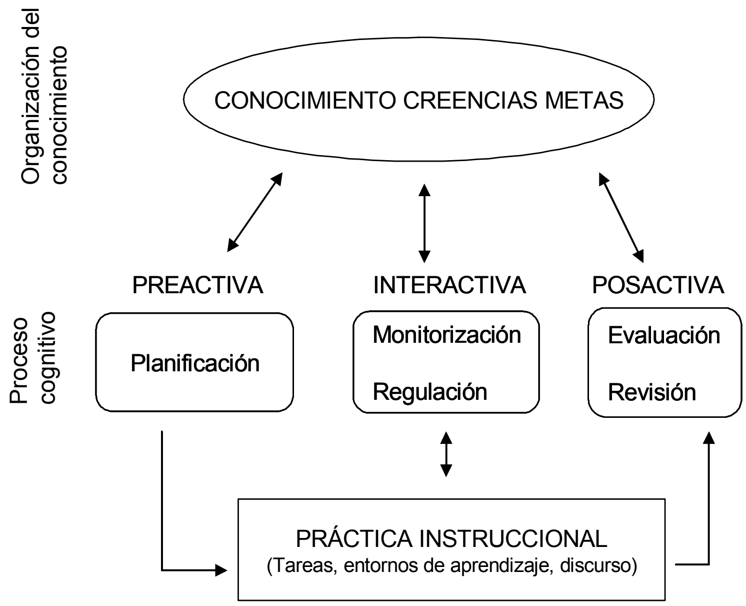
Esta teoría cognitiva permite el análisis de la práctica del profesor de matemáticas en relación a sus cogniciones utilizando las dimensiones de la lección: tareas, entornos de aprendizaje y discurso. La enseñanza, en este marco teórico, se considera como un "todo integrado" en el que un papel fundamental es el jugado por las cogniciones. Estas dimensiones son estudiadas a través de tres fases de instrucción (iniciación, desarrollo y cierre). Se pretende dotar al profesor de herramientas que le permitan mejorar su propia práctica a través de reflexión sobre la misma, y los resultados pueden ser también útiles en la formación de profesores (Artzt, 1999; Artzt y Armour-Thomas, 1999).

Este marco teórico sigue la misma línea cognitiva de Schoenfeld y su grupo (Schoenfeld, 1998 a, b), en lo referente a "mirar" la práctica del profesor desde las cogniciones de los mismos, ambos referentes tienen en consideración similar contenido para lo que denominan cogniciones, conocimientos, creencias y metas. Para estas autoras sus investigaciones permiten el desarrollo del profesor a partir de la reflexión sobre su propia práctica. Para Artzt (1999) la reflexión sobre la propia práctica puede ser una herramienta que facilite su posterior desarrollo profesional.

Diversos investigadores (Artzt y Armour-Thomas, 1999; Escudero, 2003) indican que se deben tener en cuenta las distintas fases de enseñanza. Artzt y Armour-Thomas (1999) consideran que hay que analizar las cogniciones de los profesores a lo largo de las tres fases de la enseñanza: pre-activo (planificación), interactivo (monotorización y regulación) y pos-activo (evaluación y revisión), las cogniciones constituyen una red que dirige y controla el comportamiento instruccional de los profesores en las distintas fases. Por otro lado, Escudero (2003) considera las fases de planificación y gestión para el análisis de la práctica. El siguiente cuadro (cuadro 2.4) recoge los elementos y funcionamiento del marco teórico.

En este marco teórico, se asume que "la enseñanza para la comprensión" es la meta de la práctica del profesor, para ayudar a los estudiantes a aprender, estas autoras piensan que los profesores deben colocar a los estudiantes en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, creando oportunidades que estimulen, guíen, y animen a los estudiantes a tomar responsabilidades en su propio aprendizaje (Artzt y Armour-Thomas, 1999). Los elementos teóricos de este modelo de análisis de la práctica del profesor aparecen descritos en Artzt y

Armour-Thomas (1999), se distinguen las fases de la lección y las dimensiones de la lección.



Cuadro 2.4 Funcionamiento del modelo (Artzt, 1999, p. 143)

Las fases de la lección son tres, *Iniciación, Desarrollo y Cierre*[15], ya que la práctica varía en los diferentes segmentos de la lección, y permite dividir las lecciones en fases temporales. Las dimensiones de la lección se refieren a aspectos de la práctica instruccional que definen áreas críticas del trabajo de los profesores durante el desarrollo de la lección. En este marco teórico se consideran tres: tareas, entornos de aprendizaje y discurso (Artzt y Armour-Thomas, 1999).

A continuación describimos las tres dimensiones y se indican los atributos relevantes de cada una de ellas.

1) Las tareas permiten la construcción de conocimiento a los estudiantes, los atributos que se consideran más relevantes son estrategias motivacionales, secuenciación/nivel de dificultad, y modos de representación.

[15]En cursiva en el original.

2) Los entornos de aprendizaje crean el contexto en el que los estudiantes exploran e intercambian ideas, describe bajo qué condiciones se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, determina las normas de establecimiento y desarrollo de relaciones interpersonales, incluye las circunstancias que afectan al desarrollo en la clase. Los atributos destacados son clima social/intelectual, modos de instrucción/desarrollo y rutinas.

3) El discurso hace referencia a las oportunidades de los estudiantes para compartir experiencias que les permitan señalar relaciones de interés, justificar las relaciones que observan y permitirles asumir responsabilidades para la resolución de problemas. El discurso abarca los intercambios verbales entre los miembros, profesores y estudiantes. Sus atributos son: interacción profesor-estudiantes, interacción estudiante-estudiante, y planteamiento de cuestiones.

Uno de los resultados que han obtenido estas investigadoras es la identificación de diferentes “estado de enseñanza”, y esta identificación y su caracterización pueden ser útiles en los programas de formación de profesores de matemáticas. Describiremos brevemente los distintos estados de desarrollo de la enseñanza (Atrzt,1999; Artzt y Armour-Thomas,1999):

- “Estado inicial” de enseñar, se caracteriza por la instrucción tradicional, el profesor considera que los estudiantes aprenden mejor recibiendo una información clara, el profesor transmite el conocimiento, y hay pocas interacciones entre estudiantes y con el profesor.

- Los siguientes “estados de enseñanza” se caracterizan por una instrucción que se centra más en ayudar a los estudiantes a construir la comprensión que en ayudarlos únicamente en la adquisición de hechos. La instrucción está basada en la creencia del profesor de que los estudiantes deben tomar más responsabilidad en su propio aprendizaje. Aparecen numerosos intercambios verbales entre los miembros de la clase.

- El "estado final" puede ser caracterizado por la instrucción en la que el profesor organiza actividades que implican tanto los *cómo*s y los *porqués* de los conceptos y procesos matemáticos. El profesor tiene la creencia de que con situaciones apropiadas los estudiantes son capaces de construir una profunda y completa comprensión matemática.

2.2.4.- Teoría sobre perspectivas y desarrollo profesional

Este enfoque, propuesto por Simon y colegas (Simon 1995; Simon y Tzur, 1999) propone un modelo de análisis de la práctica del profesor que permite, con posterioridad, incorporar los resultados a los programas de formación de profesores. Uno de los objetivos de estos investigadores es promover la transición de los profesores desde una práctica basada en una concepción tradicional (que abarca una concepción de las matemáticas, del aprendizaje y de la enseñanza) hacia una práctica basada en una concepción más coherente con los principios subyacentes en la actual reforma de las matemáticas. Para ello construyen un marco teórico que permite a los profesores desarrollarse profesionalmente a través de programas de formación de profesores, estos programas permiten poner en práctica oportunidades de aprendizaje para ellos[16] (Simon y Tzur, 1999; Simon et al., 2000).

Para Simon (1995) el constructivismo es una teoría que ocupa un lugar destacado en las investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas, y puede ser la base de modelos de enseñanza. Para este investigador la tarea de reconstruir la pedagogía matemática sobre la base del constructivismo como visión del aprendizaje es un desafío importante. Entiende este autor por pedagogía lo necesario para que en una clase se comience el aprendizaje de las matemáticas. Este investigador partiendo de la premisa constructivista del aprendizaje,

[16]Estos investigadores llevan a cabo un proyecto MTD (Mathematics Teacher Development) basado en la metodología TDE (teacher development experiment) para la formación inicial y permanente de profesores con el objetivo de mejorar la práctica del profesor en consonancia con la reforma educativa (Tzur et al., 2001; Simon, 2000)

considera que se tiene relativamente poca información sobre la conexión entre la investigación sobre aprendizaje (centrada en el constructivismo) y la investigación sobre la enseñanza (muchas veces en forma tradicional). Además, el constructivismo puede ser la base sobre la que se desarrollen modelos de enseñanza consistente con él. Aporta la idea novedosa en la elaboración de su propuesta de conjeturar un hipotético proceso de aprendizaje de los estudiantes. Simon et al. (2000) consideran importante tener en cuenta cómo se conceptualiza el conocimiento y cómo se llega a conocer como referentes para el desarrollo de una determinada práctica o para el análisis de dicha práctica.

La práctica del profesor se refiere a lo que el profesor hace y la "perspectiva" que subyace a lo que hace. Hay que indicar que parte importante de la práctica del profesor es cómo fomenta el aprendizaje de los estudiantes de conceptos matemáticos particulares (Simon, 1995; Simon et al., 2000; Tzur et al., 2001). Los elementos teóricos en esta perspectiva son los siguientes: trayectorias hipotéticas de aprendizaje y ciclo de enseñanza. Los "informes de práctica" son un "artilugio" considerado por los investigadores para: obtener información, organizar una serie de datos, subrayar aspectos y comenzar una "construcción teórica" que permite elaborar conjeturas sobre lo que fundamenta la práctica del profesor (lo que se llama perspectiva: conjunto de ideas, "principios", creencias, conocimientos, son cogniciones, es decir, "cosas" que están en la mente del profesor).

Este grupo de investigadores utilizan como instrumento metodológico los informes de práctica (accounts of practice) que es una variante del estudio de casos. La información se recoge a través de entrevistas y observaciones de clase grabadas en video. Este instrumento permite recoger aspectos de la práctica para ser explicada desde la perspectiva de los investigadores. Los *informes de práctica* pretenden responder a la siguiente pregunta genérica de investigación ¿cómo intenta este profesor enseñar a sus estudiante matemáticas que están mas allá de lo que sus alumnos ya saben? Los informes de práctica recogen datos sobre cómo el profesor pretende fomentar cambios en el conocimiento matemático de los estudiantes, es decir, evidencias sobre cómo trabaja el profesor para promover aprendizaje matemático, pero un aprendizaje matemático sobre un contenido concreto y también recoge explicaciones del investigador (Simon y Tzur, 1999; Simon et al., 2000). Como indican Tzur et al. (2001), un "informe de práctica" es una explicación de los investigadores de la práctica del profesor cuando pretende fomentar el aprendizaje de sus estudiantes.

Un elemento teórico es la noción de "trayectoria hipotética de aprendizaje"[17] (THA) de los estudiantes. Para Simon (1995) un profesor puede proponer una tarea y lo que los estudiantes hacen con ella determina el aprendizaje potencial. Una THA no es más que una predicción sobre el camino por el que puede discurrir el aprendizaje. Las investigaciones sobre cómo desarrollan los estudiantes conocimiento matemático sobre temas concretos puede ser la base de tales hipótesis de aprendizaje. Para Simon (1995) las trayectorias hipotéticas de aprendizaje están compuestas de tres partes interrelacionadas: 1) las metas del profesor para un posible avance en las "concepciones" (formas de conocer el concepto) de ese momento de los estudiantes, 2) situaciones problema que pueden crear oportunidades que promuevan dichos avances, y 3) hipótesis sobre los procesos por los que el aprendizaje puede ocurrir (citado en Tzur et al., 2001). Según este autor, una trayectoria hipotética de aprendizaje proporciona al profesor una base racional para elegir un diseño de instrucción concreto, y de esta manera las decisiones pueden estar basadas en la mejor suposición sobre cómo el aprendizaje puede suceder. Las THA se generan en la fase previa a la instrucción, al planificar las actividades de clase, sin embargo la interacción de clase y el desarrollo de la misma puede conllevar una nueva o una modificación de la THA al evaluar el

[17] En el original "hypothetical learning trajectory" (Simon, 1995).

pensamiento de los estudiantes. Este marco teórico propone un modelo, Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas, que describe una "visión" de la toma de decisiones del profesor respecto al contenido y las tareas que han sido desarrolladas en la clase de matemáticas (Simon, 1995).

Las investigaciones desarrolladas han permitido identificar diferentes "perspectiva del profesor" en la práctica de los profesores (Simon et al., 2000; Tzur et al., 2001). Perspectiva de la práctica, o perspectiva del profesor es una "construcción" realizada por los investigadores desde los datos reunidos de la práctica del profesor sobre las ideas del profesor que parecen explicar su práctica. Esta "construcción" tiene como objetivo explicar por qué pasa lo que pasa y se realiza con el "armazón teórico" de la THA y los ciclos de enseñanza.

Estos investigadores han caracterizado tres perspectivas[18]: perspectiva tradicional, perspectiva basada en la percepción y perspectiva basada en la concepción. Las perspectivas sobre la práctica de los profesores vienen dadas desde el punto de vista de los investigadores y no desde la descripción que podrían dar los profesores de su práctica (Tzur et al., 2001):

> Perspectiva basada en la percepción: en esta perspectiva el profesor tiene una visión platónica del conocimiento en la que las ideas matemáticas están conectadas. El profesor considera que el aprendizaje matemático es un proceso de experimentación directa de matemáticas ya existentes, y que las ideas y relaciones matemáticas llegan a ser percibidas por la propia experiencia del estudiante. La visión de la enseñanza de las matemáticas del profesor es la de crear situaciones que pongan de manifiesto las ideas matemáticas y oriente a los estudiantes hacia los aspectos claves de las situaciones. El papel del profesor es crear oportunidades para que los estudiantes perciban y manejen los aspectos de las matemáticas

[18]Denominadas en el original: "Traditional approaches", "A perception-based perspective" y "A conception-based perspective" (Tzur et al., 2001).

propuestos.

Perspectiva tradicional: esta perspectiva puede caracterizarse porque el profesor intenta transmitir ideas matemáticas concretas a los estudiantes. Esta perspectiva como la anterior mantiene una visión platónica del conocimiento.

Perspectiva basada en las concepciones: en esta perspectiva juega un papel importante la idea de "asimilación", es decir, el acceso de una persona a la realidad no es independiente de las formas de experimentación en ella. Las concepciones previas del individuo juegan un papel importante en lo que se aprende y en cómo se aprende. En esta perspectiva el profesor ve el aprendizaje como el aumento y transformación de las propias concepciones. Para el profesor la enseñanza fomenta avances planificados, lo que supone por un lado crear tareas que permitan obtener determinadas metas y usar actividades asequibles que permitan realizar las tareas. Por otro lado, el profesor debe orientar la reflexión de los estudiantes para identificar modelos en su actividad y los efectos de esa actividad.

En la perspectiva basada en la percepción se presupone la existencia de una realidad objetiva (visión platónica), mientras que en la última perspectiva el aprendizaje se realiza sobre las concepciones existentes, es decir, sobre lo que ya se conoce y la actividad en la que se está implicado (asimilación).

Desde el punto de vista de este grupo de investigadores el desarrollo profesional del profesor debe ir hacia el desarrollo de perspectivas basadas en las concepciones (Heinz et al., 2000; Tzur et al., 2001). Desde la formación de profesores deben realizarse esfuerzos para lograr este cambio de perspectiva, este cambio puede llevar a que los profesores se planteen ciertas cuestiones pedagógicas ¿cómo comprenden los estudiantes las matemáticas? ¿cómo construyen determinada comprensión?, etc. (Simon et al., 2000).

3.- LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DESDE DISTINTAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Los marcos teóricos relativos a la construcción de conocimiento que consideramos son aquellos basados en la dualidad proceso/objeto de los conceptos matemáticos (Dörfler, 2003). Estos referentes han sido usados en numerosas investigaciones en Educación Matemática al tratar de analizar la comprensión de diferentes nociones matemáticas.

En Tall y colaboradores (Tall et al., 2000) se hace una revisión de las teorías relativas a la encapsulación/reificación[19] señalándose diversos enfoques en la forma de ver la transición entre procesos y objetos; entre los desarrollados a partir de los años 80 se encuentran los propuestos por grupos de investigadores liderados por Dubinsky, Sfard, Gray y Tall. Drijvers (2001) en su revisión teórica indica:

> *"Una segunda parte del marco teórico es relativa al carácter dual de los conceptos matemáticos que tienen un aspecto tanto procedural como estructural. Sfard (1991) usa la palabra reificación,... Dubinsky establece la encapsulación de procesos... Como tercer medio de establecer la naturaleza bilateral de las entidades matemáticas mencionamos los proceptos desarrollados por Gray y Tall (1994)*" (p. 223)

Estas referencias teóricas se basan esencialmente en la construcción de

[19]Dörfler (2002) utiliza el término "objetificación" (objectification en el original) para referirse al mecanismo de construir objetos matemáticos (vistos como unidad o entidad). Confrey y Costa (1996) hacen una crítica a las "teorías de reificación", ya que no tienen en cuenta aspectos socio-culturales en el desarrollo intelectual de una persona, son teorías que apoyan una vuelta al Platonismo en las matemáticas. Para estos autores el cuasi-empirismo de Lakatos "Provee una base psicológica/social para la construcción de las matemáticas que es menos individualista que la que es promovida por los reificacionistas" (p. 151).

"objetos mentales" de los conceptos matemáticos a partir de procesos a través de encapsulación/reificación. Dörfler (2002) indica:

> *"podemos plantearnos la cuestión de cómo el aprendiz "construye"cognitivamente objetos matemáticos... hay varias respuestas teóricas a esta cuestión propuestas en la literatura.... Una es la aproximación de Sfard ... unidades cognitivas y proceptos propuestas por Tall y colegas... otra perspectiva acción-proceso-objeto-esquema propuesta por Dubinsky y colegas...*"
> (p. 340)

Dörfler (2002) indica que hay un aspecto no cognitivo cuando se aborda la construcción de objetos matemáticos, señala que cuando en algún momento el aprendiz decide tratar algo como un objeto, debe tener intención de ello. Señala que:

> *"En algún momento o estado, el aprendiz tiene que hacer que su mente considere "éste" como un objeto en sí mismo. Esta decisión está combinada con un cambio de punto de vista, de considerar varios elementos en sí mismos con sus propiedades y relaciones, se pasa a considerarlos como constituyendo un todo con distintas propiedades y relaciones... esta perspectiva presenta algunas ventajas sobre la meramente construcción cognitiva de objetos. Al ser una decisión consciente de ver y tratar algo como un objeto, esta decisión puede ser revisada e incluso invertida"* (pp.342-343)

Para este autor (Dörfler, 2002), además de la decisión deliberada del aprendiz, se puede indicar respecto al profesor y a la enseñanza de las matemáticas que:

> *"El papel del profesor, por tanto, debería ser hacer que esta decisión parezca tan sensible y plausible como sea posible... lo que es necesario es que la enseñanza para la reificación tome el*

adecuado punto de vista. Tal enseñanza podría hacer explícito a los estudiantes el carácter metafórico del discurso sobre objetos matemáticos, que son los resultados de la reificación" (pp. 346-347).

Pasaremos a caracterizar los distintos enfoques de construcción del conocimiento matemático que consideramos, describiendo los elementos teóricos fundamentales de cada uno de ellos. Los diferentes enfoques descritos (con más detalle Sfard y Dubinsky[20]), se ajustan a la propuesta de Schoenfeld (1999) sobre las teorías de aprendizaje:

"Una teoría de aprendizaje debe explicar cómo las personas desarrollan una comprensión creciente... ninguna teoría sobre aprendizaje es completa sin una teoría sobre los mecanismos - una elaboración detallada de los procesos por los que el aprendizaje tiene lugar." (pp. 7-8)

En el cuadro 2.5 se resumen los diferente marcos teóricos con los elementos fundamentales y algunos tópicos investigados en cada uno de ellos.

[20] Tanto la propuesta APOS de Dubinsky (1991), como la teoría de la reificación de Sfard (1991) son derivadas de las ideas sobre epistemología de Piaget relativa a la abstracción reflexiva. Las referencias a que Apos deriva de las ideas de Piaget son varias en distintos trabajos del grupo de investigadores (Dubinsky y Lewin, 1986; Ayers et al., 1988; DeVries, 2001), respecto a las referencias piagetianas de la reificación podemos encontrarlas en Sfard (1992). La teoría de los proceptos es compatible con las ideas piagetianas sobre diferentes tipos de abstracciones (Gray et al., 1999; Tall et al., 2000).

MARCOS TEÓRICOS: MODELOS DE CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO		
Marco Teórico	**Elementos teóricos**	**Tópicos investigados**
La teoría de la Reificación	Concepción operacional y concepción estructural. Interiorización, condensación y reificación.	- Función (Sfard, 1992). - Algebra (Sfard y Linchevski, 1994). - Derivada (Zandieh, 2000).
Proceptos y unidades cognitivas.	Procedimiento, procesos, conceptos, proceptos. Unidades cognitivas. Compresion.	- Aritmética (Gray y Tall, 1994). - Demostración (Tall y Barnard, 2002) -Función (Sajka, 2003)
Teoría de la abstracción reflexiva: APOS	Acción, proceso, objeto esquema. Interiorización, encapsulación, desencapsulación, tematización. Niveles intra, inter, trans.	-Inducción y Compacidad (Dubinky y Lewin, 1986) - Función (Dubinsky y Harel, 1992; Breindebach et al., 1992) - Derivada (Sánchez-Matamoros, 2004).

Cuadro 2.5 Modelos teóricos de construcción de conocimiento matemático

3.1.- La Teoría de la Reificación

La Teoría de la Reificación ha sido desarrollada por Sfard (1991,1992) y en ella se consideran tanto las distintas formas de conocer los conceptos matemáticos, como las relaciones entre ellas dadas a través de mecanismos de construcción. En este marco teórico los conceptos matemáticos pueden ser conocidos de dos maneras que son secuenciales, como procesos y como objetos. En cuanto a las formas en que se construyen, señala tres mecanismos de construcción: interiorización, condensación y reificación. Sfard (1991, 1992) considera dos concepciones:

- concepción *operacional*, en este caso una noción es concebida como un proceso computacional más que como una construcción teórica, y
- concepción *estructural*, donde se tratan las nociones como objetos o entidades,

Considera tres pasos-fases secuenciales en la transición desde la concepción operacional a la concepción estructural, éstos se denominan ***interiorización***, ***condensación*** y ***reificación***. Estas tres fases deben ser consideradas jerárquicamente, es decir un estado no puede alcanzarse hasta que todos los pasos del anterior estén dados (Sfard, 1991):

Interiorización[21], en esta fase el aprendiz se familiariza con los procesos que darán lugar al nuevo concepto, por ejemplo, contar que lleva al número natural, o bien, manipulaciones algebraicas que se convertirán en funciones. Estos procesos son operaciones realizadas sobre objetos. En el caso de las funciones en este nivel se tiene la idea de variable y la habilidad de usar una fórmula para encontrar valores de la variable dependiente.

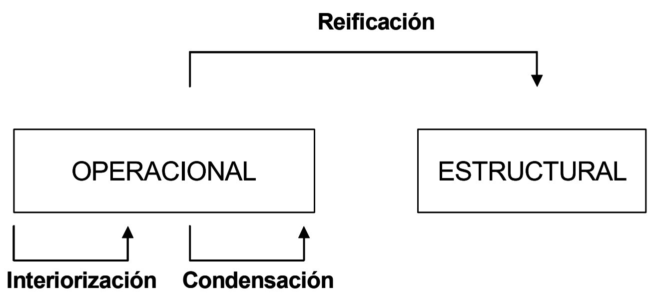
Condensación, es un período de "compactifición" de largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. Se piensa en un proceso sin necesidad de detalles, el aprendiz se refiere a procesos en términos de relación entrada-salida sin indicación de cualquier operación. Es en este punto cuando oficialmente el concepto nace. En este nivel es posible combinar procesos con otros, hacer comparaciones y generalizar. Se pueden alternar diferentes representaciones del concepto. En el caso de las funciones se llega a manejar la correspondencia como un todo sin mirar valores específicos, eventualmente se pueden investigar funciones, dibujar gráficas, combinar funciones (es decir,

[21]Interiorización está tomado de Piaget (Sfard, 1991). Dubinsky (1991) también toma el término de Piaget.

componerlas) y encontrar la inversa de una función.

La diferencia entre las dos fases anteriores es que en la segunda hay un cambio en el cual los procesos son vistos en término entrada/salida sin necesidad de considerar sus componentes detallados. El proceso puede ser evocado, manipulado y referido por su nombre (Sfard, 1992).

Reificación (Sfard, 1991,1992; Sfard y Linchevski, 1994) es la fase en la que se produce un objeto matemático. El cambio que se produce en la reificación es cualitativo, mientras que en la condensación el cambio es cuantitativo. Sobre el objeto que se construye es posible aplicar procesos, y nuevos objetos pueden ser construidos y por tanto este estado de reificación es el punto donde la interiorización de conceptos de un nivel superior comienza. Sin reificación la aproximación que puede tener un aprendiz es sencillamente operacional. El siguiente cuadro esquematiza el funcionamiento del modelo con las distintas componentes, concepciones y fases, de la propuesta de Sfard.



Cuadro 2.6 Modelo de reificación: relaciones entre concepciones y fases

Sfard (1991, 1992) utiliza los términos procesos y objetos como formas de conocer un concepto, pero debe tenerse en cuenta que no son totalmente distintas, sino que son diferentes facetas de la misma cosa, es más, son aspectos complementarios; a veces el concepto es concebido tanto operacional como estructuralmente. Y además los objetos emergen a partir de ciertos procesos computacionales, en el camino de formación de un concepto la concepción operacional debería preceder a la estructural.

En relación a la cuestión de secuencialidad, se pueden encontrar dos ejemplos. Para el concepto de número racional, desde el punto de vista histórico primero fueron considerados en un contexto de medida y posteriormente fueron considerados objetos formados por pares de números. Para la noción de función, históricamente las funciones aparecen primero como formas de calcular, por ejemplo, para Galileo son formas de calcular velocidades en un movimiento de caída (enunciado verbalmente en forma de proporción), para Bernoulli las funciones son el resultado de calcular de cualquier manera con variables y constantes (Azcárate y Deulofeu, 1990). En ambos casos son visiones operacionales del concepto matemático considerado, es decir, procesos.

Para Sfard (1991, 1992) los conceptos matemáticos desde la aproximación estructural son considerados como cosas reales que tienen existencia y pueden ser manipulados como un todo sin necesidad de detalles. Esta característica de la manipulación es clave ya que al manipular se está construyendo otro concepto de otro nivel, la manipulación se lleva a cabo mediante un nuevo concepto que se está formando a nivel de proceso (concepción operacional); además esa manipulación es una señal de reificación. Un problema importante con respecto a la reificación es el denominado por Sfard "problema del inherente círculo vicioso", por un lado la reificación precede a la manipulación de más alto nivel (la manipulación se hace sobre el objeto), y por otro lado, el objeto se construye cuando se manipula, en otras palabras, la reificación de bajo nivel y la interiorización de alto nivel son prerrequisitos cada uno del otro. Sfard propone que podemos diferenciar ambas formas de considerar un concepto del siguiente modo, la concepción estructural es estática, instantánea e integrativa (combinar en un todo), mientras que la operacional es dinámica, secuencial y detallada.

Considera Sfard (2000) que a veces la introducción de nuevos “nombres” o “símbolos matemáticos” puede ayudar a que se produzca la reificación, es decir, encaminarse hacia la aproximación estructural de un concepto. La distinción estructural/operacional en los símbolos es relativa al discurso o contexto en el que son empleados, el mismo símbolo puede a veces ser operacional y otras veces estructural, este aspecto es muy similar a lo que Gray y Tall (1994) señalan al indicar que con el mismo símbolo se evoca tanto el concepto como el proceso (lo que denominan procepto, procept) y esto permite una cierta ambigüedad y flexibilidad al manejar los símbolos lo que da lugar al éxito en el pensamiento matemático.

Con respecto a los modos de representación, Sfard (1991, 1992) indica que aunque no de forma general, algunas representaciones parecen ser más susceptibles de la interpretación estructural que otras, valga como ejemplo para el caso de una función, el modo gráfico puede ser más estructural que cuando se usa un programa de ordenador para calcular valores (donde la función es un proceso de cálculo, no una entidad). Sin embargo, cuando se identifica sólo un modo de representación con el concepto, estamos ante una concepción pseudoestructural. Por ejemplo, en el caso del concepto de función, se tiende a identificar la función con su representación en forma de fórmula de cálculo. La concepción pseudoestructural se produce cuando se comete el error de tomar un significado por el significante. De hecho, el trabajar con los estudiantes varios tipos de representación, puede ayudar a desarraigar las concepciones pseudoestructurales.

3.2.- Los proceptos y unidades cognitivas en la comprensión de conceptos matemáticos

Este marco teórico se inscribe dentro de las líneas que explican el desarrollo cognitivo de conceptos, en concreto, en las construcciones mentales que se deben (o es conveniente) realizar para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Para este enfoque hay dos concepciones de un concepto matemático, una primera concepción proceso y una concepción como objeto, dando lugar a un conglomerado de ambos denominada "procepto", este enfoque da un lugar preferente a los símbolos utilizados para representarlos. El paso de proceso a procepto no tiene una denominación explícita en esta teoría y cuando se ha generalizado a unidades cognitivas ha recibido mayor atención el mecanismo de "compresión".

Para Tall y sus colegas (Gray y Tall, 1994; Tall, 1996; Gray et al., 1999) las nociones matemáticas tienen dos aspectos, aspecto "proceso" que llevado a cabo da lugar a un aspecto concepto [llamarlo objeto sería más correcto] representado por algún tipo de símbolo que hace referencia tanto al proceso como al concepto. Este doble aspecto les lleva a denominar *"procepto"*[22] a los conceptos. La noción de procepto está ligada a la ambigüedad de los símbolos, un mismo símbolo puede evocar tanto al proceso como al concepto. Artigue (1998) señala que la noción de procepto sirve para marcar el papel principal jugado por el simbolismo en el mecanismo de encapsulación. Se utiliza el término procepto para referirse a una amalgama de concepto y proceso representados por el mismo símbolo. No se concede un lugar específico a la construcción de proceptos ya que esto no es lo único a tener en cuenta sino que también hay que considerar su uso.

Gray y Tall (1994) de manera más detallada establecen que se puede considerar un *procepto elemental* como un concepto y proceso representados por el mismo símbolo, es decir, es una amalgama de tres componentes: proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que representa tanto al proceso como al concepto. Una colección de proceptos elementales que tienen el mismo nombre

[22]En el original *procept*, *pro*cess y con*cept*, (Tall, 1996)

es un procepto.

En este marco teórico se puede distinguir entre *proceso* y *procedimiento*, el término proceso se refiere a la representación cognitiva de una operación matemática, el término procedimiento se refiere al algoritmo específico que implementa un proceso. Un algoritmo que lleva a cabo un proceso es entendido como una sucesión de pasos, esta sucesión de pasos permite distinguir una sensación de movimiento, de ahí que este aspecto sea denominado "dinámico", el resultado es el concepto (objeto) y éste es estático (Gray y Tall, 1994; Gray et al., 1999). De esta forma tenemos tres niveles de sofistificación en este marco: procedimientos, procesos y proceptos. Por ejemplo, consideramos el proceso de contar que llega a producir un concepto como es el de número, para realizar dicho proceso de contar pueden emplearse distintos procedimientos, cuando se utiliza un único procedimiento podemos decir que se está en el primer nivel de desarrollo, cuando el estudiante plantea diversos tipos de procedimientos para contar es cuando se alcanza el segundo nivel de desarrollo, el nivel proceso (Tall, 1996; Gray et al,1999).

Tall et al. (2001) distinguen en las diferentes áreas de las matemáticas distintos tipos de proceptos diferenciados por la naturaleza del proceso del que provienen. En aritmética son proceptos computacionales (esencialmente son cálculos), en álgebra son procesos potenciales (en cuanto a que son expresiones que permiten evaluar distintos valores) con conceptos manipulables; para la noción dinámica de límite, los procesos son potencialmente infinitos con conceptos infinitesimales. Hay otros proceptos asociados a las definiciones formales y demostraciones características de lo que se conoce por pensamiento matemático avanzado en matemáticas (Tall, 1992).

Este enfoque da relevancia a los símbolos y representaciones utilizados. Las representaciones pueden ser a través de materiales concretos, palabras habladas, símbolos escritos. La importancia es debida a que los "símbolos" representan simultáneamente tanto el proceso como el producto de dicho proceso. Esta ambigüedad en la interpretación es la raíz para tener éxito en matemáticas (Gray y Tall, 1994). Entre las formas de representación disponibles están (Tall, 1996):

- representación *enactiva* (podemos traducirla como manipulativa),
- representaciones *numéricas y simbólicas*, manipuladas a mano o con el ordenador,
- representaciones *visuales* (gráficas), producidas a mano y dinámicas sobre el ordenador, y
-representaciones *formales*, que dependen de las definiciones formales y demostraciones; éstas son las representaciones propias del pensamiento matemático avanzado.

Las primeras representaciones son las representaciones enactivas que son la base para el desarrollo de las matemáticas a niveles cada vez más sofisticados. Cada representación tiene sus propias características, ventajas y desventajas desde el punto de vista cognitivo (Tall, 1996). Para estos autores (Gray et al., 1999) hay diferencias en la formación de diferentes conceptos matemáticos. Así es diferente la construcción de conceptos geométricos y la construcción de conceptos aritméticos, como el número. Consideran que los conceptos aritméticos, algebraicos y del cálculo tienen un desarrollo similar a través de los símbolos. Este grupo de investigadores ha generalizado la noción de procepto, considerandolo como un tipo particular de "unidad cognitiva". Una unidad cognitiva es una parte de la estructura cognitiva en la que se puede centrar la atención en un momento, es una unidad mental que se utiliza al pensar en una noción matemática y su estructura cognitiva relacionada (Barnard y Tall, 1997; Crowley y Tall, 1999; Tall, 2000).

A partir de unidades cognitivas, podemos establecer conexiones entre ellas y formar a su vez una nueva unidad cognitiva y en esta situación los "nombres" o "símbolos" vuelven a jugar un papel importante ya que dar un nombre puede ayudar en este mecanismo que forma unidades cognitivas a partir de las conexiones entre otras, el símbolo puede centrar la atención y ser manipulado. Este mecanismo se denomina "compresión conceptual[23]" y consiste en pasar de concebir ideas distintas a concebir una idea con diferentes aspectos (Crowley y Tall, 1999). Dörfler (2002) considera que su propuesta en relación a la decisión consciente y deliberada de construir objetos matemáticos se complementa con esta noción de compresión, ya que para él las partes deben ser previamente tratadas como entidades en sí, y posteriormente formar el todo, y esto es muy similar a las unidades que se agrupan para formar una nueva unidad con relaciones internas que previamente eran externas. Así un procepto es un caso particular de unidad cognitiva. Un "procepto" se desarrolla cada vez con mayor amplitud estableciendo conexiones entre diversos procedimientos que dan lugar a un mismo proceso (Tall y Barnard, 2002). Este establecimiento de conexiones es clave en el desarrollo de unidades cognitivas cada vez más sofisticadas, así podemos conectar diversas unidades cognitivas y construir una nueva unidad cognitiva más sofisticada a través del proceso de compresión.

Por tanto, desde el punto de vista de esta teoría (Barnard y Tall, 1997; Tall y Barnard, 2002) una unidad cognitiva puede ser concebida y manipulada como una entidad y también ser "descomprimida" para revelar su propia estructura interna. Se sugiere que hay dos factores complementarios que son importantes en la construcción de estructuras de pensamiento: por un lado, la habilidad de "*comprimir*" información en unidades cognitivas; y por otro lado, la habilidad de hacer conexiones dentro y entre unidades cognitivas de modo que otra información relevante pueda ser traída o sacada del foco de atención a voluntad. Esta idea puede ser utilizada para realizar futuros análisis de conceptos.

[23]"Conceptual compression" en el original (Crowley y Tall, 1999, p. 2 de la versión electrónica).

3.3.- La Teoría de la abstracción reflexiva: APOS

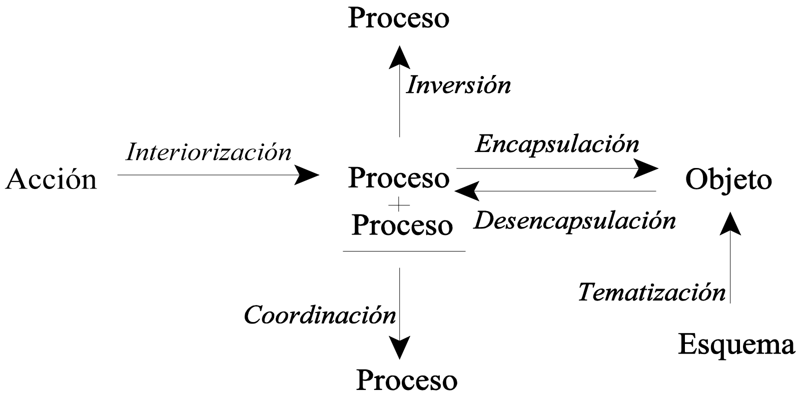
Este modelo de comprensión tiene dos componentes: las formas de conocer un elemento matemático (acción, proceso, objeto y esquema) y los mecanismos de construcción de las mismas (interiorización, encapsulación, desencapsulación, entre otros). Estos mecanismos son distintas manifestaciones de lo que Piaget denominó "abstracción reflexiva". También se contemplan los distintos estados de desarrollo de los esquemas identificados por Piaget y García (1983): intra-inter-trans.

Esta teoría constructivista ha sido desarrollada por Dubinsky y colaboradores (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1996) y tiene como objetivo la investigación y desarrollo curricular. Pretende posibilitar el diseño de sesiones de instrucción con el objetivo de que los estudiantes adquieran una cierta comprensión de los conceptos matemáticos. Esta comprensión es interpretada en este marco en el sentido de que los estudiantes realicen ciertas construcciones (acción, proceso, objeto y esquema). Nosotros nos centraremos en su propuesta de modelo de comprensión que modela la epistemología del concepto en cuestión: qué significa comprender el concepto, y cómo esa comprensión puede ser construida por el aprendiz. Esto se recoge en la propuesta de una descomposición genética[24] del concepto matemático. Hay que señalar que un concepto no tiene una única descomposición genética y que ésta representa una forma razonable que los estudiantes pueden usar para construir un concepto. La descomposición genética puede estar basada en revisiones de la literatura, investigaciones anteriores y el propio conocimiento matemático de los investigadores (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala et al., 1997). La descomposición genética del concepto hace referencia a las dos componentes del modelo de comprensión:

[24] De los elementos teóricos del marco APOS, éste junto a encapsulación, son de los que están presentes desde los primeros trabajos publicados (Dubinsky y Lewin, 1986).

- las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y
- los mecanismos de construcción: interiorización, encapsulación, desencapsulación...

En el cuadro 2.7 se describen las relaciones entre las formas de conocer y los mecanismos de construcción a través de los cuales se produce la comprensión.



Cuadro 2.7 Modelo APOS: relaciones entre formas de conocer y mecanismos

Las acciones podemos definirlas como transformaciones de objetos que el individuo percibe como algo hasta cierto punto externo. Cuando sólo hay comprensión a nivel de acción, únicamente puede realizarse la transformación cuando hay detalles precisos sobre qué pasos dar; la idea de "ser externas" proviene de que el entendimiento conceptual tiene su fuente en la manipulación de los objetos físicos y en este caso, con referencias externas dadas por los detalles precisos. De acuerdo con este referente teórico, las acciones marcan el principio para el entendimiento de un concepto. Un ejemplo de construcción a nivel de acción puede ser el siguiente: cuando un estudiante sólo es capaz de interpretar una función si dispone de una fórmula para calcular valores (Dubinsky, 1996; DeVries, 2001).

Cuando una acción tiene lugar enteramente en la mente del individuo, sin necesidad de realizar todos los pasos se dice que ha sido "interiorizada" para convertirse en un proceso. El mecanismo de construcción de la forma conocer proceso a partir de la forma de conocer acción se conoce como interiorización. Para obtener la comprensión a nivel de proceso el individuo necesita repetir la acción y reflexionar sobre ella; en este sentido la construcción es interna al sujeto y ya no es necesario realizar todos los pasos para hacer la transformación (Dubinsky et al., 1994; Dubinsky, 1996). Algunos autores distinguen las acciones y los procesos del siguiente modo:

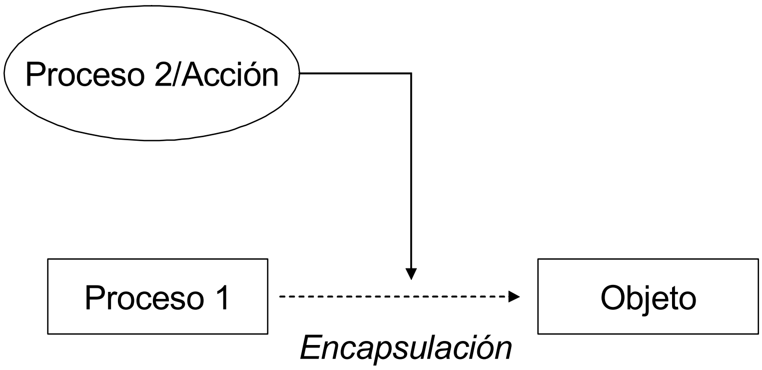
- Breidenbach et al. (1992) indican que a pesar de que ambas transformaciones actúan sobre objetos, la diferencia entre una acción y un proceso es la necesidad en la primera de una receta o fórmula explícita que describa la transformación.

- Zazkis y Campbell (1996) caracterizan el salto a la concepción proceso del siguiente modo, cuando la acción es entendida pero no tiene que ser realizada de manera efectiva sino que la actividad se realiza en la mente y se tiene alguna comprensión de la influencia de las condiciones iniciales sobre los resultados.

- Cottrill et al. (1996) al tratar el tema del límite, cuando ven la necesidad de realizar infinitos pasos o cálculos para obtenerlo: cualquier cálculo que necesite un número infinito de pasos, sólo puede ser comprendido a través de una concepción proceso.

Una vez obtenida la construcción proceso a partir de la interiorización de acciones es posible obtener nuevos procesos, coordinando dos procesos (por ejemplo, composición de funciones) o por inversión de uno de ellos (por ejemplo, para calcular la función recíproca).

El mecanismo de encapsulación es la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo. Este objeto puede ser visto como una entidad total (o totalidad coherente) y puede ser afectado/transformado (mentalmente) por acciones o procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Desencapsulación es el mecanismo de volver atrás (retroceder) desde un objeto al proceso del cual el objeto fue encapsulado (DeVries, 2001), los mecanismos de encapsulación y desencapsulación son recíprocos en cierto sentido. Señalar un aspecto importante dentro de este marco teórico, la encapsulación de un proceso (proceso 1) puede llevarse a cabo por la necesidad de aplicar a éste alguna acción u otro proceso (proceso 2/acción). Para nosotros, esta situación se manifiesta por la necesidad de hacer un uso de él a través de una acción o proceso (proceso 2/acción), la situación se esquematiza de la siguiente manera:



Cuadro 2.8 Modelo APOS: mecanismo de encapsulación

Un ejemplo, Ayers et al. (1988, p. 247) al tratar el aprendizaje de la composición de funciones señalan que “para realizar operaciones sobre funciones, el estudiante debe considerar las funciones como objetos mentales[25]”. De esta manera la forma de conocer proceso para la función pasa a ser el objeto “utilizado” con la forma de conocer acción/proceso “operación sobre funciones”, la transformación “operación con funciones” es la que transforma el proceso función, convirtiéndo de esta manera la función en un objeto.

[25]Basada en esta idea, Ayers et al. (1988, p. 248) indican “convertir un proceso en un objeto, aplicándole un procedimiento o un sistema de comandos, es hecho muy frecuentemente en el curso de actividades de programación”. Un “comando” es una instrucción dada al ordenador.

Las acciones y procesos actúan sobre objetos. Hay dos formas de construir objetos, a partir de procesos o partir de esquemas. Los objetos se pueden obtener a través de la reflexión sobre un proceso y de este modo llega a ser consciente del proceso como una totalidad. La forma de construir los objetos a partir de procesos es la siguiente, cuando un estudiante se enfrenta a una situación en la que se le pide aplicar una acción, entonces tiende a encapsular un proceso en orden a tener un objeto sobre el que aplicar la acción (Dubinsky et al.,1994; Asiala et al.,1996).

También es posible construir un objeto a partir de un esquema, según señalan Cottril et al. (1996), un esquema es una colección coherente de acciones, procesos y objetos; se pueden aplicar acciones a un esquema, lo que significa que estos esquemas serán interpretados como objetos, este mecanismo se denomina tematización. Los desarrollos últimos de la teoría Apos están produciéndose en el sentido de incorporar a la teoría el desarrollo de esquemas (Clark et al., 1997; Cottrill, 1999; Bakers et al., 2000; DeVries, 2001; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, prepublicación). Para analizar el desarrollo de los esquemas se han usado las ideas de Piaget y García (1983) según las cuales hay tres niveles en el desarrollo de un esquema para un concepto: nivel intra, nivel inter y nivel trans.

Estos tres niveles de desarrollo de los esquemas se describen (Baker et al., 2000; DeVries, 2001) del siguiente modo: el nivel intra se caracteriza porque los objetos se analizan en términos de sus propias propiedades. El nivel inter, está caracterizado por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. El individuo es consciente de las relaciones presentes y puede deducirlas, a este nivel se comienza la construcción del esquema y se señala indicando que se tiene un “pre-esquema”. A nivel Trans se es consciente de la amplitud del esquema, cuando es aplicable y cuando no lo es, se identifican las relaciones entre objetos que se incluyen en el esquema y las que no.

Sánchez-Matamoros (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., prepublicación)[26] plantea el análisis del desarrollo de la comprensión de la derivada en estudiantes de diferentes niveles educativos. El marco teórico utilizado es una adaptación de la propuesta de Piaget y García (1983) para el desarrollo de un esquema. En este trabajo se identifica que lo relevante en el desarrollo de un esquema son los tipos de relaciones entre elementos matemáticos y los elementos matemáticos del concepto, que usan los estudiantes cuando intentan resolver una situación problemática. Las relaciones lógicas entre elementos matemáticos consideradas son: conjunción lógica (y lógica), contrarrecíproco y equivalencia lógica (o doble implicación). Esta investigadora identifica en el desarrollo del esquema derivada los niveles INTRA, INTER y TRANS y distintos subniveles en cada uno de ellos, todos caracterizados a través del tipo de relaciones lógicas establecidas entre elementos matemáticos y el uso paulatino de más elementos matemáticos de la derivada en la resolución de problemas, por lo que habla de una construcción progresiva del esquema derivada. Respecto a los modos de representación, indica que la construcción progresiva no va ligada a ellos, donde los subniveles (salvo el nivel trans) se ligan a un modo de representación, sin prioridad de ninguno. El nivel trans se caracteriza por la "síntesis" de los modos de representación. La síntesis se utiliza cuando hay que relacionar información gráfica y analítica.

Sánchez-Matamoros (Sánchez-Matamoros, 2004; García et al., prepublicación) indica que el desarrollo progresivo finaliza con la tematización del esquema por el estudiante. Caracteriza la "tematización" del esquema derivada, mediante la capacidad del estudiante de determinar los dominios de validez de las propiedades, por ejemplo, trasladar las relaciones entre f y f ´, al par f´y f ´´.

[26]Más adelante volveremos detalladamente sobre algunas ideas aportadas por esta investigación de las que haremos uso en nuestra investigación.

4.- NUESTRA PROPUESTA PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA: LA MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE UNA NOCIÓN MATEMÁTICA

4.1- Introducción

La adopción explícita de marcos teóricos en la investigación en Educación Matemática ha sido destacado por Goldin (1997) ya que es necesaria para poder describir o caracterizar lo que se quiere inferir. Como hemos indicado en el Capítulo I (Problema de investigación) nuestro propósito es describir y explicar la práctica del profesor a partir del presupuesto de que los profesores pretenden que su estudiantes construyan conocimiento matemático, y por tanto nuestro análisis de la práctica del profesor lo es desde el punto de vista de la construcción de conocimiento que se potencia en los estudiantes. Pretendemos realizar esta descripción de la práctica del profesor a través de la caracterización de la perspectiva de la práctica del profesor. Nuestro análisis debe permitirnos "identificar y delimitar" varias perspectivas de la práctica cuando se admite que el profesor quiere ayudar a que el alumno comprenda el contenido matemático.

El elemento teórico que nos va a permitir la caracterización de la perspectiva de la práctica del profesor es la noción de "modelación de la descomposición genética de una noción matemática[27]". Este elemento teórico se construye utilizando la noción de descomposición genética introducida por el grupo RUMEC (Dubinsky, 1991; Asiala et al.,1996). Desde la práctica del profesor, la modelación de la descomposición genética debemos entenderla como una descripción y secuencia (orden en el que se presentan y las relaciones) de los mecanismos de construcción que el profesor modela cuando pretende que sus estudiantes lleguen a comprender un concepto. Es decir, cuando hablamos del conocimiento que potencialmente pueden llegar a construir los estudiantes. La

[27]En nuestro trabajo hablamos de la noción de derivada que incluye distintos conceptos: derivada de una función en un punto, función derivada, operador derivada.

idea de modelar la entendemos como una interpretación que hace el investigador de las acciones (y su justificación) del profesor mediante las cuales modela el mecanismo que internamente debe realizar el estudiante para llegar a conocer de una determinada manera. Esta interpretación del investigador se realiza apoyándonos en las acciones y discurso del profesor. Las "acciones" del profesor en esta investigación tienen un sentido amplio incluyendo las tareas, la secuencia de tareas y lo que "hace" el profesor.

La caracterización de la práctica de un profesor usando la idea de la modelación que el profesor hace de los mecanismos de construcción del concepto en orden a conseguir desarrollar la comprensión de los alumnos nos permitirá inferir la perspectiva de la práctica de profesor. Miramos la práctica del profesor, no de manera arbitraria sino viendo como "modela" los mecanismos que se suponen permiten a los alumnos desarrollar la comprensión. Esto es así, como ya indicamos, porque asumimos como hipótesis de partida que existe cierto paralelismo entre lo que el profesor hace (modela) y el desarrollo de la comprensión del alumno. Desde un punto de vista piagetiano el "aprendizaje" es un proceso de adaptación al medio. En nuestro caso uno de los aspectos del medio es la manera en la que el profesor presenta el contenido (lo que hace y dice), por tanto la práctica del profesor determina las condiciones (por lo menos parte de ellas) del medio a través de las cuales el alumno tiene la oportunidad de aprender. De ahí que lo importante sea la "práctica" del profesor y en qué medida permite "constituir" el medio que favorezca las construcciones mentales del estudiante para el desarrollo de la comprensión.

Consideramos "la perspectiva" de la práctica del profesor como lo que subyace a su práctica, hace referencia a los aspectos caracterizadores de dicha práctica desde la potenciación de la construcción de conceptos. En esta investigación vamos a caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor a partir de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada.

Para "mirar" lo que subyace en la práctica hemos utilizado el elemento teórico "modelación de la descomposición genética de la noción o concepto". La definición del elemento teórico "modelación de descomposición genética del concepto" lleva implícita unos referentes teóricos de comprensión. Desde los distintos marcos teóricos que nos hablan de formas de conocer y mecanismos de construcción (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Tall y Barnard, 2002) hemos tomado como referente el marco APOS. Adoptado el marco APOS y la modelación de la descomposición genética del concepto, la idea de modelación de mecanismos de construcción puede ser ampliada con la modelación que el profesor hace de la forma de conocer acción, ya que esta forma de conocer tiene por un lado la característica de ser externa al sujeto que comprende y venir dada, generalmente, por una regla (Dubinsky, 1996) y por tanto es "visible"e identificable en la práctica del profesor y por otro se da el hecho de que:

> *"Las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto*." (Dubinsky, 1996, p. 34)

Desde este posicionamiento previo podemos dar sentido a "la enseñanza para la comprensión" a través de la "modelación de la descomposición genética del concepto" desde la modelación que el profesor hace de los mecanismos de construcción y de la forma de conocer acción. En la modelación por el profesor de un mecanismo de construcción y forma de conocer acción a través de las acciones y discurso lo que hace y dice es visible. Desde nuestra forma de entender qué es modelar un mecanismo, hay dos aspectos importantes, (i) la visibilidad de las manifestaciones del profesor (hace y dice), y (ii) el hecho de que la visibilidad viene dada por los instrumentos de la práctica que usa el profesor.

Los "instrumentos de la práctica" son para nosotros los modos de representación y los elementos matemáticos del concepto. De esta manera hacemos visibles las modelaciones por el profesor de los mecanismos de construcción y de la forma de conocer acción a través de un elemento teórico relacionado con la práctica del profesor como es “los instrumentos de la práctica”, tal y como se consideran en la perspectiva sociocultural (Llinares 1999, 2000 a, 2002):

> *“Algunas investigaciones han empezado a identificar aspectos del uso del profesor de los instrumentos como un medio para caracterizar las prácticas matemáticas en el aula... también en cómo el profesor comprende el cómo usarlos y para qué propósito... Ver la práctica del profesor de matemáticas desde una perspectiva sociocultural implica dos cosas: (i) tener que identificar aquellos instrumentos que emplea el profesor... y (ii) caracterizar cómo el profesor los usa*”(Llinares, 2000 a, p. 116).

En definitiva, queremos describir la práctica del profesor de matemáticas dando cuenta de cómo usa y justifica los modos de representación y los elementos del concepto matemático cuando modeliza la descomposición genética. Esta descripción nos permitirá inferir la “perspectiva” que subyace a dicha práctica.

Para inferir la perspectiva de la práctica del profesor, lo que subyace y justifica la práctica del profesor, nos apoyamos en dos ideas. La primera idea se plantea a partir de los resultados de Escudero (2003) en el sentido de que la organización y la gestión del contenido matemático realizada por el profesor en el aula está relacionada con sus concepciones sobre las matemáticas escolares y por la manera en la que los profesores conocían dichos contenidos. Además Escudero (2003) considera que es necesario apoyarse en los resultados de los análisis epistemológicos de los conceptos matemáticos que el profesor enseña para identificar las concepciones que sobre las matemáticas subyacen en su práctica. A partir de estos resultados nos apoyamos en los análisis epistemológicos sobre la noción de derivada realizada en otros estudios

(Azcárate, 1990; Azcárate y Deulofeu, 1990; Font, 1999; Badillo, 2003) en las que se subraya la importancia del papel que desempeñan los sistemas de símbolos en el proceso de construcción del significado de derivada a través de la historia. La segunda idea que consideramos en la caracterización de la perspectiva de la práctica es la que procede de la manera en que históricamente se han ido reificando los significados de la noción de derivada.

Escudero (2003) afirma que las diferencias en la arquitectura relacional que pueden ser identificadas en la práctica del profesor pueden explicarse por las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Estas dos ideas son las que nos permiten considerar la “perspectiva de la práctica” del profesor definida por un “conglomerado” de ideas agrupadas en dos dimensiones:

- cómo concibe el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos visto a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que se potencia, secuencia-relaciones y su justificación, y
- su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje visto a través de cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo.

Los distintos valores que pueden tener las dimensiones descritas nos caracterizan la “perspectiva de la práctica” del profesor. Es lo que subyace en la práctica. Queremos indicar que la perspectiva identificada es una construcción teórica derivada del análisis de los datos empíricos obtenidos. Creemos que entre las posibles caracterizaciones de perspectivas podemos encontrar desde la tradicional a la más ajustada a las reformas curriculares[28]. En cada caso concreto puede suceder que lleguemos a perspectivas de la práctica del profesor que se puedan ajustar en mayor o menor grado a las descritas. Como consecuencia consideramos la idea de "continuo" entre las distintas perspectivas de la práctica. Esta idea de continuo la abordaremos con más detenimiento en el capítulo final al abordar la discusión e implicaciones de nuestra investigación.

Para obtener información sobre las ideas que se agrupan en las dos dimensiones anteriores utilizamos las variables siguientes:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar el profesor mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

El uso de los sistemas de representación hace referencia a la forma en la que son usados por el profesor los sistemas de representación analítico y gráfico. Podemos encontrar los dos sistemas de representación, o sólo uno de ellos. La organización de los conceptos matemáticos: hace referencia a los distintos conceptos y sus relaciones (derivada de una función en un punto, función derivada, operador derivada) que conforman la noción de derivada. Los distintos conceptos que se identifican en la práctica pueden estar o no relacionados. Las formas de conocer que se potencian (acción, proceso, objeto): hace referencia a las formas de conocer para cada concepto. Se pueden potenciar diferentes formas de conocer, y éstas pueden estar aisladas o relacionadas entre sí.

[28]De las revisiones aquí señaladas hemos obtenido que existen diversas perspectivas, pero que los casos "extremos" justifican, por un lado un estilo tradicional de enseñanza y un estilo de enseñanza que se acerca a las recomendaciones de la reforma de las matemáticas, aunque pueden tener diferentes etiquetas.

Por lo tanto, la caracterización del uso de los modos de representación, la organización-relaciones de los conceptos que forman la noción y la manera en la que el profesor modela los diferentes mecanismos de construcción del concepto nos proporcionan los medios para inferir las diferentes perspectivas de la práctica.

En los siguientes apartados vamos a comentar más ampliamente los distintos elementos que aparecen en nuestra propuesta.

4.2- Los instrumentos

Los instrumentos de la práctica y la forma en que son usados por el profesor son los que hacen visible a los investigadores las modelaciones de mecanismos de construcción realizadas por el profesor. Modelar un mecanismo de construcción es una interpretación del investigador de las acciones y su justificación del profesor, en el sentido del mecanismo que internamente debe realizar el estudiante para llegar a conocer un concepto matemático de una determinada manera. Esta modelación la realiza el profesor a través de las acciones y discurso. En las acciones y discurso del profesor se contempla la organización del contenido, los objetivos, las justificaciones, así como lo que "dice" y "hace" durante la gestión de la clase.

En la literatura se han identificado diversos tipos de instrumentos, Adler (2000) considera los "recursos", con un significado similar a lo que nosotros denominamos instrumentos e incluye entre ellos, los libros de texto y otros materiales de aprendizaje, y también considera recursos culturales como el lenguaje. Meira[29] (1998) considera desde el punto de vista escolar, los diversos tipos de signos como representaciones en tablas de valores y gráficas de patrones numéricos. Desde una visión más general, Llinares (2000 a) identifica algunos

[29]Meira (1998) y Llinares (2000 a, 2002) se refieren a los instrumentos, y al uso de los mismos.

instrumentos de la práctica como los problemas propuestos a los estudiantes y los modos de representación. En nuestra investigación hemos considerado los elementos matemáticos de un concepto como un instrumento de la práctica del profesor.

Hemos considerado en el análisis de la práctica del profesor dos instrumentos de la práctica, los modos de representación y los elementos matemáticos de la noción sobre la que el profesor centra su enseñanza. Pasaremos a caracterizarlos y a indicar cómo entendemos "su uso". El uso de estos instrumentos lo entenderemos como las relaciones que el profesor establece entre ellos.

4.2.1.- Los modos de representación

Las representaciones vienen definidas de la siguiente manera:

"Son notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes, ... cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra" (Castro y Castro,1997, pp. 96 y 103)

Para Rico (2001) las representaciones son aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático. Distinguen Castro y Castro (1997) y Rico (2001) dos clases de representaciones, las representaciones internas, que son la imágenes mentales que se forman en la mente al evocar o pensar en un concepto matemático; y las representaciones externas, aquellas que tienen soporte físico, y son a las que se hace referencia en la cita anterior de estos mismos autores. Rico (2001) al analizar las dos clases de representaciones, plantea la cuestión de qué relación mantienen ambas representaciones. García (1999) hace una aproximación a la comprensión de los conceptos a través de la noción de representación, tanto de las externas como internas:

> *"Una manera de entender el conocimiento de conceptos es mediante la forma en que están estructuradas las representaciones internas de los mismos y que no pueden observarse directamente. Además, para poder comunicarse y usar ideas matemáticas en diferentes contextos es necesario utilizar y por lo tanto conocer representaciones externas de esos conceptos, ... las características de las representaciones externas de los conceptos vienen influenciadas por la representación interna y viceversa actuando como elemento fundamental el contexto social"* (pp. 9 y ss.)

Para García (1999) las interacciones y el uso que se hace de las representaciones externas de los conceptos permite inferir características de las representaciones internas y de sus relaciones, además la comprensión de los conceptos matemáticos está vinculada a establecer conexiones entre distintas representaciones externas para los mismos.

Podemos señalar dos grandes familias de representaciones externas (Castro y Castro, 1997; Rico 2001):

- *representaciones simbólicas*: digitales, discretas, se basan en signos alfanuméricos estructurados con sus propias reglas de sintaxis, y
- *representaciones gráficas*: analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada por las reglas de composición y convenios de interpretación.

Algunos investigadores (Duval, 1996; Rico, 2001) señalan que los conceptos y estructuras matemáticas tienen la característica de necesitar diversas representaciones para poder captarlos en toda su complejidad y por tanto hay que considerar las relaciones entre los distintos sistemas de representación para un mismo concepto, lo que se denomina traslaciones o conversiones. Desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las representaciones (y sus traslaciones) juegan un papel fundamental para la comprensión de los conceptos. Por otro lado, los estudiantes tienen dificultades con los modos de presentación (bien porque no los interpretan correctamente, o bien porque no manejan varios modos para un mismo concepto) por ello es conveniente que los estudiantes sean instruidos y educados en el uso y comprensión de las representaciones (Castro y Castro, 1997).

Para las nociones matemáticas escolares relacionadas con el Análisis Matemático podemos concretar distintos modos de representación, Janvier (1987) en su trabajo sobre representaciones de la noción de función indica los siguientes, descripción verbal, tablas de valores, gráficas y expresión algebraica. Las descripciones detalladas sobre dichas representaciones del concepto función podemos encontrarlas en Azcárate y Deulofeu (1990) y de forma más general en el campo del álgebra[30] en Friedlander y Tabach (2001). Tall (1996) incluye un modo de representación más respecto a los anteriores, que denomina "representación enactiva", que caracteriza como aquella representación de las acciones de las personas que dan significado al cambio, velocidad y aceleración, podemos considerar que es una representación de tipo "manipulativa", por ejemplo, con simuladores de movimiento, esta representación es la básica, la base sobre la que apoyan las restantes[31]. Por último, para un nivel avanzado del

[30]El álgebra incluye en el currículum la noción de función.

[31]Excluye esta representación del Calculo Teórico y la considera la representación del Cálculo del mundo real (Tall, 1996).

análisis incluye las "representaciones formales", aquellas que dependen de las definiciones formales y demostraciones[32].

En relación a la noción de derivada, Zandieh (2000) investiga la comprensión de los estudiantes del concepto derivada y construye su marco conceptual sobre varios componentes, uno de ellos las múltiples representaciones.

> *"Para funciones éstas* [representaciones] *incluyen analíticos o simbólicos, gráficos, numéricos, verbales, y representaciones físicas. Numerosos textos de la reforma han enfatizado el uso de múltiples representaciones como manera de desarrollar la comprensión de los estudiantes. Los conceptos que implican funciones, tales como límite de una función o la derivada de una función, pueden ser descritos en términos de estas representaciones"* (p. 105)

En relación a la construcción de conceptos matemáticos Sánchez-Matamoros (2004) en su análisis del desarrollo del concepto derivada en estudiantes de distintos niveles (desde bachillerato a primer año de universidad) cuando habla del nivel trans dice:

> *"En este nivel se produce la "síntesis" de los modos de representación. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática. La "síntesis" se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica. Es decir, usar información procedente de los dos sistemas de representación para considerarla conjuntamente y obtener una "cosa" que no se conocía."* (p.74)

Para Font (1999, 2000 a, b) en relación a las representaciones ostensivas

[32]Características del Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1992).

y refiriendose a la noción de derivada, en concreto al cálculo de la función derivada de la función seno, considera representaciones gráficas, tablas de valores, descripciones verbales de situaciones y expresiones analíticas de la función derivada f ´(x) con algunas traslaciones entre ellas para y entre f(x) y f ´(x).

A partir de los distintos modos de representación que se han identificado en la revisión anterior: descripción verbal, gráfico, numérico y algebraico, consideraremos dos sistemas de representación, gráfico y analítico; éste ultimo engloba el modo de representación algebraico y el modo de representación numérico. Como hemos indicado al abordar la noción de instrumento, hay que tener en cuenta el uso que se hace de los mismos. Consideramos que una forma de uso de este instrumento son las relaciones o conversiones (Duval, 1996) que se establecen entre los distintos modos de representación. Las relaciones entre modos de representación las consideramos de dos tipos:

- Relaciones unidireccionales, aquellas en las que de un modo de representación se sigue otro modo de representación.
- Relaciones bidireccionales, se establecen entre dos modos de representación y hay dos relaciones entre ellos, una en cada sentido.

4.2.2.- Los elementos matemáticos

El segundo instrumento que hemos seleccionado para el análisis de la práctica del profesor son los elementos matemáticos. El uso de este instrumento lo vamos a entender como las relaciones que el profesor establece entre distintos elementos matemáticos durante su práctica. Para considerar este instrumento nos hemos basado en la noción de unidad cognitiva de Tall (2000).

Para Tall (2000) las unidades cognitivas son "bloques" mentales que usamos para pensar sobre algo y su estructura cognitiva relacionada. Como un ejemplo de unidades cognitivas Tall propone los proceptos. Para Tall (2000) los proceptos y unidades cognitivas son maneras de describir como la mente matemática maneja los conceptos matemáticos. Para explicar esta idea Tall (2000) usa la noción de "relación/conexión lineal" como ejemplo de concepto que se puede expresar con distintas formas de representación externa:

- una ecuación explícita de la forma y=mx+n,
- una ecuación implícita,Ax+By+C=0
- una línea a través de dos puntos dados,
- una línea con pendiente dada y por un punto dado,
- el gráfico de una línea recta,
- una tabla de valores, etc

Para Tall (2000) el desarrollo efectivo de la idea de "relación lineal" se realiza a través de una unidad cognitiva que abarca muchas de las conexiones entre los ítems anteriores (unidades cognitivas).

Por otra parte Sánchez-Matamoros (2004) define los elementos matemáticos de un concepto a partir de la idea de Piaget (1963):

> *"Un elemento matemático será el producto de una disociación o de una segregación en el interior de un concepto"* (p. 72)

Indica que se pueden considerar distintos aspectos de los elementos matemáticos:

> *"Respecto a los modos de representación, consideramos **analítico** y **gráfico**[33], ya que la noción de Derivada tiene componentes analíticas y gráficas reflejadas en sus elementos constituyentes"* (Sánchez-Matamoros, 2004, p. 72)

En cada modo de representación se pueden distinguir el carácter puntual o global del elemento matemático, un elemento matemático es puntual si se refiere a una propiedad local en un punto x=a, un elemento matemático es global si se refiere a una propiedad en un intervalo (Sánchez-Matamoros, 2004).

[33] En negrilla en el original.

De esta manera un elemento matemático tiene significado por sí mismo ya que es una unidad de información relativa al concepto matemático de derivada. Los elementos matemáticos y las relaciones entre ellos ayudan a caracterizar el contenido matemático para la enseñanza/aprendizaje en un contexto concreto. Así, no se utilizan los mismos elementos matemáticos y relaciones entre ellos para el concepto de integral definida (Integral de Cauchy, a lo sumo la Integral de Riemann) que se aborda en el Bachillerato, que para el que se estudia en una licenciatura de Matemáticas (Integral de Lebesgue).

En Sánchez-Matamoros (2004) aparecen los elementos matemáticos de la noción de derivada según el modo de representación (analítico/gráfico) y el carácter (local/global), a continuación se proponen dos ejemplos de elementos matemáticos:

Elemento matemático analítico/global:
"**Función derivable:**
f es derivable en (a,b) si es derivable en todos los puntos de (a,b)
[es decir, existe f ´(x) para todo x en (a,b)]"

Elemento matemático gráfico/puntual:
"**Secante/pendiente de la recta**:
Las rectas secantes a una curva son rectas de pendiente (f(a+h)-f(a))/h pasando por los puntos (a, f(a)) y (a+h, f(a+h))"

Las relaciones entre diferentes elementos matemáticos las consideramos de dos tipos:

- <u>Relaciones unidireccionales</u>, aquellas en las que un elemento matemático "lleva a" otro elemento, el sentido de la flecha en la relación indica que elemento lleva a otro. Por ejemplo, la relación unidireccional entre el elemento matemático 1 y elemento matemático 2, lo representaremos como “Elemento 1 -->(implica)Elemento 2”.

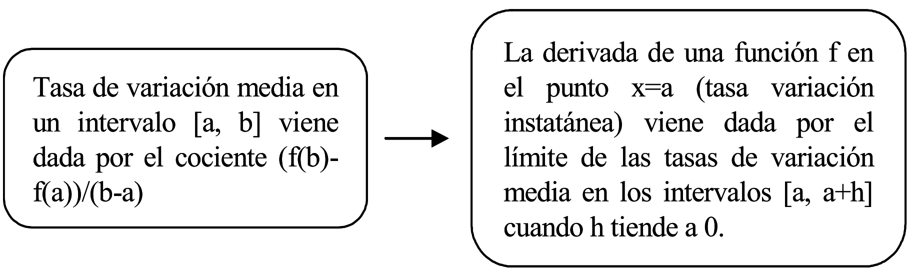
- Relaciones bidireccionales, se establecen entre dos elementos matemáticos y hay dos relaciones entre ellos, una en cada sentido. Por ejemplo la relación bidireccional entre el elemento matemático 1 y el elemento 2 lo representaremos “Elemento 1<->Elemento 2” para indicar que se establecen las dos relaciones unidireccionales siguientes:
Elemento 1 --->Elemento 2, y
Elemento 2 ---> Elemento 1.

Un ejemplo de relación entre elementos sería: en el cálculo de la derivada de una función en un punto concreto x=a pueden relacionarse dos elementos de manera unidireccional (los elementos matemáticos están tomados de Sánchez-Matamoros, 2004).

Elemento matemático 1(analítico puntual): “**Tasa de variación media**:
Cociente incremental = Tasa de Variación Media (TVM)
TVM[a, a+h]=(f(a+h)-f(a))/h”

Elemento matemático 2 (analítico puntual): “**Tasa de variación instantánea**
Límite cuando h tiende a 0 de la tasa de variación media”

Gráficamente representaremos esta relación con un diagrama de elementos matemáticos:



Pueden aparecer en un diagrama tres o más elementos, y las relaciones entre ellos pueden ser de distinto tipo.

Un mismo elemento matemático puede representarse de diferentes modos. Por ejemplo, consideremos un elemento matemático para el concepto de derivada de una función en un punto a, lo denominamos *elemento matemático analítico puntual*:

Elemento matemático 1 (analítico puntual): "**Tasa de variación media**:

Cociente incremental = Tasa de Variación Media (TVM)

TVM[a, a+h]=(f(a+h)-f(a))/h"

Si consideramos este elemento matemático para una función concreta f(x)=x^2, en un punto específico x=1 y para un incremento 0.1, es decir, en el intervalo [1, 1.1] entonces la tasa de variación media viene representada en forma numérica:

$$\frac{(1.1)^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$$

El modo de representación que aparece para "representar" el elemento matemático es el modo numérico, englobado por nosotros en el modo analítico.

Ahora bien, si para la misma función se considera un incremento h, es decir, en el intervalo [1, 1+h] tenemos una representación de tipo algebraico:

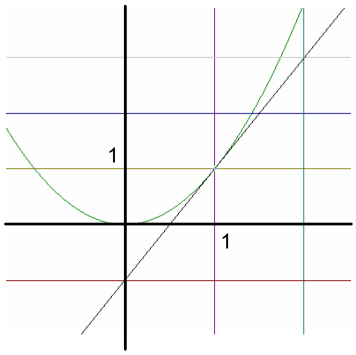
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$$

El modo de representación para el elemento matemático es el modo algebraico, que también lo englobamos en el modo analítico.

Otro ejemplo es el *elemento matemático gráfico puntual*:

"f ´(a) = pendiente de la recta tangente a f en x=a"

Si consideramos este elemento para la siguiente función



El modo de representación en el que se materializa el elemento es el modo gráfico.

Este mismo elemento matemático puede materializarse o representarse para obtener la derivada de la función f(x)=2x-1 en el punto x=0, en este caso el modo de representación en el que se representa es en el modo algebraico.

De esta manera pensamos que los dos instrumentos de la práctica seleccionados son complementarios y pueden hacer visible la perspectiva de la práctica del profesor.

4.3.- El modelo de comprensión para la noción de derivada

Pretendemos analizar la práctica del profesor considerando la construcción del conocimiento que parece estar potenciando en sus estudiantes. Con ese objetivo usamos el marco APOS como modelo de comprensión.

En la revisión que hemos realizado se han descrito los elementos teóricos fundamentales del marco APOS, centrándonos en las “formas de conocer y en los mecanismos de construcción de dichas formas de conocer”. En este punto vamos a aplicar el modelo a la noción de derivada. Nuestra investigación se centra en el análisis de la práctica del profesor y cómo a través de su práctica crea oportunidades para que sus alumnos "construyan" la comprensión del concepto. "Construir" en el modelo APOS de comprensión significa querer que se desarrollen los mecanismos de interiorización, encapsulación, etc. Por este motivo vamos a centrarnos en los mecanismos de construcción de conocimientos que los profesores "modelan" con vistas a que los estudiantes lleguen a construir el concepto. Nos parece necesario señalar que la forma de conocer acción es también modelable por el profesor, ya que son el principio de la construcción de la comprensión de un concepto, (Dubinsky, 1996) dadas por una regla o receta y externas al sujeto y por lo tanto pensamos que es visible en la práctica del profesor, e identificable en nuestro análisis.

El marco teórico APOS aborda el análisis de la comprensión de los estudiantes en una perspectiva de aprendizaje, nosotros utilizamos dicho marco para describir la práctica del profesor a través de los mecanismos de construcción y formas de conocer que "modela", por este motivo alguno de los elementos teóricos se han de adaptar a una perspectiva de enseñanza. La noción de descomposición genética de un concepto desde la perspectiva de aprendizaje viene dada por (Asiala et al.,1997):

> *"El propósito del análisis teórico es proponer una descomposición genética*[34] *o modelo de cognición: esto es, una descripción de las construcciones mentales específicas que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar su comprensión del concepto. Estas construcciones mentales son llamadas acciones, procesos, objetos y esquemas."* (p. 400)

En Asiala et al. (1997) se hace una propuesta de descomposición genética de la **derivada de una función en un punto**. Para estos autores hay dos caminos que se recorren en la construcción de este concepto: un camino gráfico y un

[34]En cursiva en el original.

camino analítico y es necesario vincular los dos caminos. Comienza la descomposición genética con la identificación de la forma de conocer acción:

> *"**1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos.*
>
> ***1b. Analítico:** la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto*[35]*."* (p. 407)

Asiala et al. (1997) hacen referencia a una acción distinta a las anteriores, como es la posibilidad de recordar un hecho de la memoria (Cottrill et al. 1996) o de forma más precisa aplicar una fórmula, Dubinsky et al. (1994)

> *"Un sencillo tipo de acción en matemáticas es calcular de acuerdo con una fórmula, frecuentemente, un estudiante puede tener éxito con cálculos antes de que el concepto esté totalmente comprendido."* (p. 286)

En el caso de la derivada de una función en un punto es particularizada por Asiala et al. (1997) de la siguiente manera:

> *"Como una acción, la línea tangente es identificada en el punto, y su pendiente es calculada. Hay (al menos) dos formas para que esta acción sea construida. El estudiante puede haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la línea tangente a la gráfica en el punto."* (p. 425)

De esta forma existen tres acciones diferentes a tener presente cuando abordemos el mecanismo de interiorización de acciones. El mecanismo de

[35]El cociente diferencial en un punto a viene dado por la tasa de variación media en un intervalo del tipo [a, a+h], (f(a+h)-f(a))/h (p. 409 en la definición del procedimiento D).

interiorización de acciones está descrito en el mismo artículo, teniendo presente que cuando indican "cada vez más próximos" o de “la amplitud del tiempo se acerca cada vez más a cero” interpretamos que se refieren al paso al límite de las cuerdas/pendientes y del cociente incremental:

> *“**2a. Gráfico:** Interiorización de las acciones del punto 1a a un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están “cada vez más próximos.”* [36]
>
> ***2b. Analítico:*** *Interiorización de las acciones del punto 1b cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños, es decir, la amplitud del intervalo tiempo se acerca cada vez más a cero...* ” (p. 407)

El siguiente mecanismo de construcción que podemos encontrarnos en la descomposición genética de la derivada de una función en un punto es el mecanismo de encapsulación de un proceso. En Asiala et al. (1997) se describe este mecanismo tanto para la forma analítica como gráfica del siguiente modo:

> *“**3a. Gráfico:** Encapsulación del proceso del punto 2a para producir la línea tangente como la posición límite de líneas secantes y también producir la pendiente de la línea tangente en un punto del gráfico de una función.*
>
> ***3b. Analítico:*** *Encapsulación del proceso del punto 2b para producir la razón de cambio instantánea de una variable respecto a otra.”* (p.407)

La síntesis de lo gráfico y analítico produce la definición de derivada de una función en un punto como: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

[36]Entre comillas en el original.

El segundo concepto integrado en la noción de derivada al que se hace referencia como diferenciación de funciones, es un operador que a una función f --> f′, para este **“operador derivada”** podemos proponer una descomposición genética. En la literatura no aparece la descomposición genética del operador derivada de manera tan detallada como la que se tiene de la derivada de una función en un punto, si bien es posible encontrar algunas ideas en DeVries (2001).

En el glosario DeVries (2001) se describen caracterizaciones de distintas formas de conocer la diferenciación de funciones:

> *“1.- Dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinómica, y dada una función polinómica concreta una acción podría ser encontrar la derivada por sustitución de los números en la formula general. Uno está a nivel de concepción acción para la diferenciación si sólo es capaz de encontrar la derivada de una función cuando cada paso es externamente proporcionado (por la memoria, por ejemplo, o mirando en una lista de reglas) por una regla que es aplicada y sólo se tiene que introducir los números concretos.”* (On-line)

Esta caracterización es una particularización de la forma más general antes citada de Dubinsky et al. (1994) respecto a aplicar una fórmula. Puede ser el punto de partida de la descomposición genética del operador derivada, ya que según este referente teórico, las acciones marcan el principio para la comprensión de un concepto matemático (Dubinsky, 1996; Asiala et al., 1996). Para el mecanismo de interiorización del operador derivada no se da una descripción, pero en general, para la interiorización de acciones Dubinsky (1996) dice:

> *“Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no*

necesariamente dirigida por un estimulo externo." (p. 34)

Este estímulo externo puede venir dado por una fórmula o algoritmo, por tanto para el mecanismo de construcción de interiorización del operador derivada, tenemos que "prescindir" de una fórmula. Además DeVries (2001) caracteriza la forma de conocer proceso para el operador derivada:

> *"Uno realiza un proceso cuando encuentra la función derivada de una función dada usando las reglas estándares. Se tiene a lo sumo una concepción proceso de la diferenciación si puede encontrar la derivada de funciones estándares pero no puede utilizar la idea de la derivada segunda de una función a no ser que haya calculado la derivada primera para una función concreta."* (On-line)

Con esta caracterización DeVries considera que un estudiante conoce la diferenciación como proceso cuando aplica las reglas estándares de derivación a cualquier función para obtener su función derivada. Pero también se indica que si el estudiante no es capaz de usar la idea de diferenciación aplicada a la derivada primera para obtener la derivada segunda no se ha llegado a construir la diferenciación como objeto.

Una vez construido un proceso, en la descomposición genética podemos encontrarnos dos mecanismos de construcción distintos al mecanismo de encapsulación, los mecanismos de coordinación (de procesos) y de inversión (de un proceso). La composición o coordinación de dos o más procesos permite obtener un nuevo proceso a partir de dos ya conocidos, el ejemplo más representativo es el caso de la composición de dos funciones para obtener otra función (la función compuesta) (Ayers et al., 1988). La inversión de un proceso, construye a partir de un proceso otro proceso, el proceso inverso o recíproco. Dubinsky (1991) propone como ejemplo de reversibilidad de un proceso el operador derivada, para el proceso que es la interiorización de la acción calcular la derivada de una función. Si hemos interiorizado esta acción, podemos invertir el mismo y resolver la pregunta de dada una función ¿de qué otra función es la derivada?

En Asiala et al. (1997) se hace referencia al mecanismo de inversión del operador derivada como proceso cuando se refieren al "uso del concepto de derivada" (referido al operador derivada) e indican:

> *"Sobre el resultado de usar (invirtiendo) la noción de derivada* [operador derivada] *para obtener el gráfico de la función original. Esta inversión indica una clara concepción proceso de la interpretación gráfica de la derivada que puede ser la desencapsulación de una concepción objeto* [de la función derivada][37]*."* (p. 425)

Con un proceso, mediante el mecanismo de encapsulación se construye el objeto, el mecanismo de desencapsulación permite volver al proceso desde el objeto encapsulado. Por ejemplo, en Sánchez-Matamoros (2004) cuando se le plantea a los estudiantes que dada la gráfica de f´, construyan la gráfica de f. Se enfrentan a una situación en la que deben invertir el operador derivada (proceso). Al ser dicho proceso una transformación, el objeto sobre el que actúa es la función derivada y por tanto es necesario desencapsular este objeto (función derivada) para volver al proceso y obtener la función original.

Sobre la regla de la cadena Clark et al. (1997) y Cottrill (1999) han utilizado el marco APOS, pero no teniendo en cuenta la construcción de acciones-procesos-objetos, ya que para estos autores la teoría de construcciones

[37] Lo indicado entre corchetes es una aclaración nuestra que no aparece en el original. El objeto al que hacen referencia es el objeto "función derivada". De forma que aquí Asiala et al. (1997) parecen indicar que para la inversión del operador derivada puede ser necesaria la desencapsulación de la función derivada, es decir, se invierte el operador derivada a través de la desencapsulación de la función derivada.

(acción-proceso-objeto) no es suficiente para explicar cómo comprenden los estudiantes la regla de la cadena. Utilizan como elemento teórico la teoría sobre desarrollo de esquemas a partir de las ideas de Piaget y García (1983), en la que como hemos comentado hay tres estados o niveles de desarrollo del esquema: inter, intra y trans. Para Clark et al. (1997):

> *"la comprensión de la regla de la cadena involucra la construcción de un esquema. El esquema debe contener un esquema para la función, que incluya al menos una concepción proceso de función, composición de funciones y descomposición*[38]*. El esquema de función está conectado con el esquema de diferenciación que incluye las reglas de diferenciación al menos a nivel proceso*." (p.359)

Terminamos este apartado haciendo referencia al concepto de función, ya que la función derivada es un concepto que aparece en la noción de derivada y puede ser el nexo entre la derivada de una función en un punto y el operador derivada. La noción de función es de los conceptos matemáticos más estudiados en la investigaciones sobre el cálculo (Dubinsky y Harel, 1992). En Asiala et al. (1997) se hacen algunas referencias a la función derivada y a su forma de conocer como proceso, cuando indican que después de calcular la derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente en el punto se puede construir a partir de este cálculo la función derivada como proceso:

> *"A partir de esta acción* [identificar la línea tangente a la curva en un punto y calcular su pendiente] *el estudiante construirá la función derivada como proceso. Un estudiante muestra esto como una acción cuando se centra en un punto del dominio en cada momento"* (p. 425)

[38]Dada una función identificar las funciones que se componen para definirla.

En Zandieh (2000) se aborda la función derivada como proceso, éste se caracteriza por tomar (posiblemente) infinitos valores de entrada y para cada uno de ellos se determina un valor de salida dado por el límite de los cocientes incrementales en cada punto. Para esta autora, la característica de la forma de conocer proceso para la función derivada es la de dar infinitos valores de entrada (al menos potencialmente), a diferencia de la forma conocer acción que se centra en valores concretos cada vez. Respecto a la forma de conocer objeto de la función derivada:

> *"La función derivada puede también ser vista como un objeto reificado, como cualquier otra función (la función derivada puede ser considerada como un objeto que es el resultado de otro proceso, el operador derivada)."* (p. 107)

Una observación a realizar es que Zandieh (2000) utiliza como marco teórico la teoría de la reificación de Sfard. Algunos autores han relacionado el marco APOS y la teoria de la Reificación, estableciendo algunas similitudes (Tall, 1996; Artigue 2001; Selden y Selden, 2001, Franzblau y Warner, 2001) de manera precisa Monk (1992) establece un claro paralelismo entre las ideas de Dubinsky y Sfard:

> "*Sfard (1987) usa los términos concepción estructural y concepción operacional de una función, reflejando la distinción por los matemáticos (entre otros) entre entidades matemáticas como cosas, constructos u objetos, y como operaciones, actividades o procesos. ...Breidenbach y cols. (En prensa[39]) distinguen además dos niveles de la concepción operacional (en términos de Sfard) de funciones, una concepción acción y una concepción proceso de función."* (p. 178)

[39]Se refiere a Breindebach et al. (1992).

Sánchez-Matamoros (2004) y García et al. (prepublicación) señalan que la construcción del esquema derivada es progresiva y en dicha construcción la función derivada juega un papel fundamental:

> *"Además hemos caracterizado la tematización del esquema a través de la consideración de f ′como función y de (f ′)′ como su derivada, una de las manifestaciones de este hecho es aplicar a f ′ y a su derivada (f ′′) las mismas relaciones e implicaciones que se aplican a f y a su derivada f ′."* (p. 246)

En nuestra investigación, para la descripción de la práctica del profesor lo que hacemos es "chequear" las acciones, discurso y justificaciones que el profesor realiza con el modelo de comprensión de la derivada considerado en la descomposición genética descrita. De esta manera tenemos la modelación de la descomposición genética que realiza el profesor en su práctica cuando pretende que sus estudiantes lleguen a comprender un concepto, es decir, cuando hablamos del conocimiento que potencialmente pueden llegar a construir los estudiantes. La modelación de la descomposición genética de una noción parece una forma razonable que los investigadores utilizamos para describir la práctica e inferir la perspectiva de la práctica del profesor.

La idea de modelación de la descomposición genética de una noción es similar a la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de Simon (1995). Podemos considerar que las descomposiciones genéticas modeladas por el profesor son un tipo concreto de trayectorias cuando el constructivismo se entiende como lo describe APOS. Como señala Dubinsky (1991) un concepto no tiene una única descomposición genética y representa una forma razonable que los estudiantes pueden usar para construir un concepto.

Nuestro objetivo es describir la práctica del profesor a través de los mecanismos de construcción que modela y esta modelación se caracteriza en términos de los modos de representación y elementos matemáticos para la noción de derivada considerados como instrumentos de la práctica usados por el profesor.

A partir de nuestro análisis de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada por el profesor caracterizaremos la perspectiva de la práctica del profesor. Consideramos la perspectiva de la práctica del profesor como lo que subyace a su práctica y hace referencia a los aspectos caracterizadores de dicha práctica.

5.- PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Pretendemos en nuestra investigación analizar la práctica del profesor bajo el presupuesto de que la enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo que los estudiantes comprendan las nociones matemáticas involucradas. Como señalan Hiebert y Carpenter (1992):

> *"Una de las ideas aceptadas más ampliamente en la comunidad de educadores matemáticos es la idea de que los estudiantes deberían comprender las matemáticas."* (p. 65)

Otros investigadores (Simon et al., 2000; Artzt y Armour -Thomas 1999) apoyan esta línea de investigación sobre "la enseñanza de las matemáticas para la comprensión":

> *"Primero, es una visión ampliamente mostrada entre investigadores y profesores que la meta de la instrucción es promover el aprendizaje con comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992). Segundo, investigaciones teóricas y empíricas sobre aprendizaje desde la psicología, educación matemática, y ciencias cognitivas sugieren consecuencias positivas para los estudiantes que aprenden con comprensión."* (Artzt y Armour -Thomas 1999, p. 213)

La importancia de centrarse en los aspectos de la enseñanza para la comprensión con referencia a contenidos matemáticos concretos es resaltada por Simon y sus colegas:

> *"De este modo, seleccionamos datos que nos dan evidencias de cómo el profesor trabaja para promover el aprendizaje de las matemáticas*[40] *concretas más que datos limitados a revisar, evaluar o lecciones de resolución de problemas que no tienen fines específicos del contenido matemático."* (Simon et al., 2000, p. 583)

La opción que nosotros hemos tomado para abordar la problemática del "análisis de la práctica del profesor" es hacerlo desde la perspectiva de la construcción de conocimiento que potencia en sus estudiantes. La idea teórica "modelación de la descomposición genética de la noción" puede ayudarnos al análisis de la práctica bajo este supuesto. De alguna forma la actividad del profesor en el aula tiene reflejo en el aprendizaje que alcanzarán los estudiantes (Kendal y Stacey, 2001 a, b; Weber, 2004).

Desde las investigaciones sobre la práctica del profesor se dan distintas caracterizaciones de la misma. Por ejemplo, Simon y colegas (Tzur et al., 2001) caracterizan diferentes "perspectivas de la práctica" y Artzt (1999) delimita diversos "estilos de enseñanza":

> *"El estado inicial de enseñanza que se caracteriza por una instrucción tradicional, la creencia que guía al profesor es que los estudiantes aprenden recibiendo información clara de un profesor con conocimiento. Los subsiguientes estados ... son caracterizados por una instrucción que está más centrada en ayudar a los estudiantes a construir lo que comprenden"* (Artzt, 1999, p. 144)

[40]Tzur et al. (2001) señalan que como investigadores están interesados en cómo el profesor promueve el aprendizaje de los estudiantes de ideas matemáticas concretas. Simon (1995) ya señalaba que uno de los papeles del profesor es promover el desarrollo de conocimiento conceptual en sus estudiantes.

En este contexto, nuestra investigación se pregunta:

-- **¿Cuál es la perspectiva que subyace a la práctica del profesor?**

- ¿Es posible caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor a través de la modelación de la descomposición genética que realiza el profesor en su enseñanza?
- ¿Podemos inferir distintas perspectivas de la práctica?

CAPÍTULO III

CAPÍTULO III: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

1.- INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es el análisis de la práctica del profesor cuando a través de ella se pretende la construcción de conocimiento o desarrollo de los conceptos por los estudiantes por lo que el diseño metodológico está pensado para obtener datos que nos permitan llegar a dicho objetivo. Como nos dice Schoenfeld (1998 a) en su trabajo sobre "Teoría de la Enseñanza en Contexto" centrarse en el profesor explica una parte significativa de lo que sucede. Nuestro análisis (y por tanto los datos que recogimos) hace referencia al papel del alumno sólo en la interacción con el profesor, y no aborda la comprensión que llegan construir los estudiantes. Dada la naturaleza de nuestro problema de investigación adoptamos una aproximación metodológica de tipo cualitativo, a través del estudio de casos, para Teppo (1997):

> *La investigación cualitativa se centra sobre procesos, significados y la naturaleza de la realidad socialmente conformada y proporciona nuevas intuiciones sobre los fenómenos que se estudian que no pueden ser obtenidos por otros medios.*" (p. 2)

En los capítulos anteriores hemos explicitado las referencias teóricas en las que nos situamos para realizar nuestra investigación. En este capítulo describiremos detalladamente a los participantes, los instrumentos para la recogida de la información, los datos obtenidos y el análisis de los datos realizado. Respecto a la triangulación, que es un aspecto básico a considerar en las investigaciones de naturaleza cualitativa (Schoenfeld, 2000; McKnight et al., 2000) consideraremos diversas fuentes de datos. En relación al análisis de datos, detallaremos los diferentes niveles de análisis que hemos realizado indicando el producto de los mismos.

2.- PARTICIPANTES Y CONTEXTOS

Los participantes en la investigación han sido dos profesores de Enseñanza Secundaria con varios años de servicio en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Los llamaremos con los seudónimos Juan y María. Ambos son profesores muy preocupados por su desarrollo profesional. La observación de las clases de Juan y María se centró en la enseñanza de la derivada en primer curso de Bachillerato LOGSE (los alumnos tenían una edad de16-17 años). En ningún caso, hemos pretendido que los profesores elegidos sean muestra de ningún tipo de población, han sido elegidos por las circunstancias de acceso a ellos, por su predisposición y colaboración hacia el grupo de investigadores y por las posibilidades de realización de un trabajo de esta naturaleza que requiere un seguimiento durante un periodo largo de tiempo.

Juan desempeña su labor docente en un Instituto de Enseñanza Secundaria en una localidad rural cercana a la capital (Sevilla). El centro era anteriormente un centro de Bachillerato (se impartía el antiguo BUP) y en el momento de la investigación se impartía ESO y los dos cursos de Bachillerato. Tiene más de 20 años de experiencia docente con estudiantes de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Es Licenciado en Ciencias (especialidad matemáticas) y Catedrático de Enseñanza Media. Para este profesor es importante tener en cuenta las dificultades que pueden tener los estudiantes respecto al contenido matemático que se aborda y hace especial referencia a los aspectos conceptuales sobre los aspectos procedimentales del tema.

La clase estaba formada por un grupo de 25 estudiantes. Los estudiantes no tenían conocimientos previos del tema objeto de nuestra investigación, la noción de derivada. La unidad didáctica realizada por este profesor se grabó completa y abarcó 17 clases de una duración aproximada de 45 minutos cada una. Este profesor no disponía de libro de texto por lo que entregaba colecciones de problemas a los estudiantes.

El centro disponía de un aula de informática con varios ordenadores. Algunas de las sesiones de clase fueron impartidas en dicha aula, las clases nº 3, nº 9 y nº 16. Se utilizó software de dos tipos, primero el programa de geometría dinámica *Cabri-Géomètre II* en la clase nº 3 y con dos archivos realizados por el profesor; y segundo se utilizó un programa, *Funciones para Windows*, en las clases nº 9 y nº 16. Cabri-Géomètre II es un programa de geometría dinámica, permite la construcción de figuras en la que pueden moverse algunos objetos de la misma, conservándose las propiedades geométricas utilizadas en la construcción de la figura (y aquellas propiedades que se deducen de ellas), tiene la posibilidad de representar funciones en ejes cartesianos. Funciones para Windows, es un programa que permite el estudio de funciones utilizando expresiones algebraicas, tablas de valores y representaciones gráficas, además entre las opciones disponibles calcula la función derivada, la derivada en un punto, etc. Los estudiantes estaban familiarizados con ambos programas en el momento en el que realizamos nuestra investigación. Las grabaciones se realizaron durante el tercer trimestre del curso, desde abril hasta junio.

María también desempeña su labor docente en un Instituto de Enseñanza Secundaria, pero en este caso está situado en una zona céntrica de la ciudad

(Sevilla), por lo que son estudiantes de clase media. Pertenece al cuerpo de Catedráticos de Enseñanza Secundaria y tiene más de 20 años de experiencia como profesora, siempre en centros de Bachillerato (BUP). También es licenciada en Ciencias (especialidad matemáticas). Considera que el tema de la noción de derivada es un tema importante del currículum y pone énfasis en los aspectos procedimentales y conceptuales.

En este caso los estudiantes tampoco habían recibido ningún tipo de enseñanza relativa al tema de la derivada. El grupo estaba formado por 25 estudiantes. A María se le grabaron las 12 clases que comprendía la unidad didáctica, con una duración media de 50 minutos cada una. Los estudiantes disponían de libro de texto, "Bachillerato, Matemáticas I (Andalucía)[1]" Grupo Anaya, que era seguido por la profesora. Del libro de texto planteaba a los estudiantes la mayoría de las tareas. Todas las sesiones de la unidad didáctica de María se desarrollaron en el aula de clase. La profesora realizó la unidad didáctica en el segundo trimestre del curso, desde febrero hasta marzo.

En ambos casos los investigadores comunicamos a los profesores en una entrevista informal los objetivos de nuestro trabajo y lo que pretendíamos de ellos. Les explicamos que sería necesario realizar varias entrevistas y que la primera de ellas sería antes de que comenzasen las clases de la unidad didáctica de la noción de derivada. Las siguientes entrevistas se realizarían a lo largo del desarrollo de las clases que componen la unidad didáctica. También se les explicó que grabaríamos todas las clases de la unidad didáctica y que llevarían un micrófono en todas las sesiones de clase. En algún caso, los mismos profesores gestionaron con la Dirección del Centro y los padres de los estudiantes la autorización para la grabación y uso de imágenes de menores. Ambos profesores manifestaron su interés por colaborar en una investigación de esta naturaleza.

[1]Autores: José Colera, Mª José Oliveira, Rosario García y Santiago Fernández, año 2000.

3.- INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN: LOS DATOS

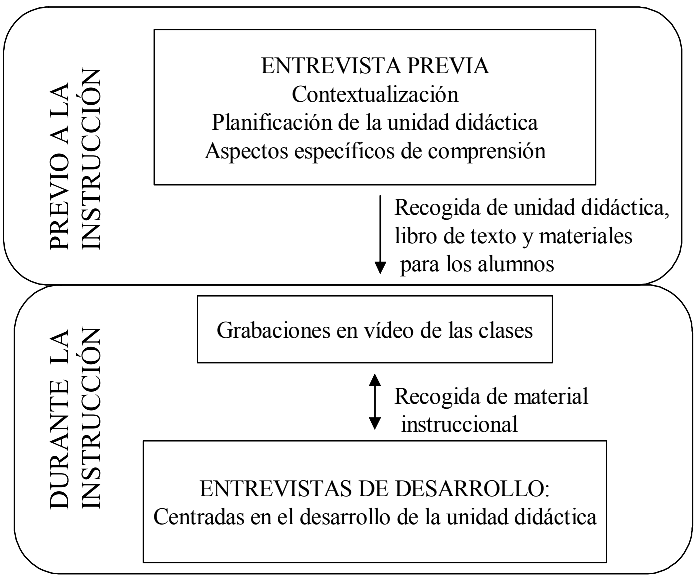
La noción de práctica del profesor engloba distintos escenarios, el trabajo en el aula, en el seminario de matemáticas, en cursos de formación. Llinares (2000 a) indica que hay dos fases o momentos claves para el análisis de la práctica, *el momento de la planificación y organización de las matemáticas* que tiene lugar previamente a su llegada al aula, y el *momento de la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje*. Para la investigación realizada nos centramos en estas dos fases, la fase de planificación y en el trabajo del profesor en el aula. Como indica Schoenfeld (1998 a) las entrevistas con los profesores, las previas y posteriores a la instrucción son fuentes de información; Simon (1995) también considera que la planificación puede ser una fuente de datos para la investigación de la práctica del profesor. Simon y Tzur (1999) de manera general indican:

> *"Nuestra meta es producir un informe en el que describimos cómo el profesor se ocupa de fomentar el aprendizaje de los estudiantes de ideas matemáticas nuevas o modificadas. Así, intentaremos caracterizar la perspectiva fundamental que muestra la práctica del profesor y dar cuenta de los aspectos de la práctica que observamos... Recogemos datos para producir los informes de práctica a través de grabaciones en vídeo y de entrevistas grabadas en audio."* (p. 258)

La primera fuente de datos proviene de la entrevista con el profesor sobre la planificación y organización de las matemáticas en la unidad didáctica sobre la noción de derivada, más los materiales que el profesor usaba. Esta entrevista de planificación se grabó en vídeo y audio y se realizó la transcripción de la misma. En esta fase previa al desarrollo de la unidad didáctica también recogimos como materiales, la unidad didáctica elaborada por el profesor (en nuestro caso ambos profesores tenían elaborado un documento escrito) y el capítulo del libro de texto relativo a la noción de derivada para el caso de María, ya que Juan no seguía libro de texto.

Durante la fase de gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje grabamos las sesiones de clase de toda la unidad didáctica de ambos profesores (17 y 12 clases respectivamente) y éstas fueron transcritas completamente. Durante el desarrollo de las clases realizamos tres entrevistas de desarrollo o progreso, estas entrevistas fueron transcritas en su totalidad. También se recogieron los materiales introducidos por los profesores en cada momento y los documentos escritos entregados por los profesores a los estudiantes. Para el caso de Juan, varias colecciones de problemas "hojas de problemas" y dos ficheros de ordenador, cada uno de ellos con una construcción de tipo figura, que se utilizaron con el programa Cabri Géométre II, para el otro programa de ordenador Funciones para Windows no se utilizaron ficheros. En el caso de María el material entregado a los estudiantes fue una "tabla resumen de las reglas de derivación".

De forma esquemática en el cuadro 3.1 se muestran las diferentes fuentes de datos o instrumentos de recogida de los mismos.



Cuadro 3.1 Esquema metodológico: fuentes de datos

A continuación vamos a describir los diferentes instrumentos de recogida de la información en cada una de las dos fases de la práctica (planificación y gestión).

3.1.- Planificación

En la fase de planificación las fuentes de datos utilizada fue la entrevista de planificación, los materiales previstos, la unidad didáctica y libro de texto. Las entrevistas fueron transcritas y se incorporaron las notas aclaratorias.

3.1.1- La entrevista previa de planificación

Antes de comenzar el desarrollo de la unidad didáctica realizamos a cada uno de los profesores una entrevista relativa a la planificación y organización del contenido de la unidad didáctica. Esta entrevista era semiestructurada en el sentido de que disponíamos de un guión previo para el desarrollo de la misma. Las cuestiones a abordar en la entrevista de planificación fueron de diferente naturaleza por lo cual distinguimos varios niveles de indagación, partiendo de aspectos más generales hasta llegar a los aspectos puntuales que más nos interesaban. Con objeto de hacer operativas las entrevistas a los profesores, éstas tenían prevista una duración aproximada de una hora.

La entrevista de planificación tenía tres partes diferenciadas:

La primera parte eran preguntas para contextualizar al profesor, grupo y tema concreto: información sobre la biografía profesional del profesor/a, tipo de estudiantes, lugar que ocupa el tema en el currículum y dificultades que puedan llegar a tener los estudiantes. Algunas preguntas de este bloque fueron:

Me haces un breve resumen de tu trayectoria profesional.

¿Qué tipo de clase y de estudiantes vas a tener?

¿Qué conocen los estudiantes sobre el tema de la derivada de cursos anteriores? ¿Qué llegan a comprender tus alumnos sobre el concepto de

derivada?

¿Es un tema difícil para los estudiantes?

¿Qué dificultades crees que van a tener los estudiantes?

¿Cuál es el lugar que ocupa este tema en el currículum de bachillerato?

¿Qué materiales vas a utilizar?

La segunda parte era relativa a la unidad didáctica, el profesor explicaba que planes que tenía respecto a la unidad didáctica y cómo pensaba realizarla, qué tipos de tareas pensaba proponer en la unidad didáctica y los objetivos.

Vamos a analizar un poco algunas preguntas globales de la unidad didáctica y luego analizamos las tareas

¿Cómo organizas globalmente el contenido?

Si tuvieras que describir la unidad didáctica de forma global ¿dónde empiezas?

¿Cuáles serían para ti los objetivos principales de la unidad didáctica?

¿Qué planes tienes para lograr estos objetivos de la comprensión del concepto?

¿Crees que entienden la diferencia de que por un lado estás haciendo derivadas en un punto y luego pasas a la función derivada?

¿Demuestras las reglas de derivación?

¿Cuándo das la regla de la cadena, identifican las funciones que se componen... cómo lo haces...?

La tercera parte abordó cuestiones de detalle que inciden más en aspectos relativos a la "comprensión en términos del marco teórico APOS".

¿Enuncias y haces utilizar a los alumnos la regla de los "cuatro pasos" para hacer derivadas?

¿Utilizas cálculo de cuerdas/secantes?

¿Cálculo de secantes, de pendientes de secantes para derivadas? [el objetivo era indagar sobre los significados gráficos y la presencia de

mecanismos de interiorización]

¿Qué estrategia utilizas para pasar de la derivada de una función en un punto a derivada de una función?

¿Vas a ver funciones a trozos o no vas a plantearles funciones a trozos? [el objetivo era indagar sobre el posible uso de significados y la presencia de mecanismos de desencapsulación]

El Teorema Fundamental del Cálculo ¿lo llegas a ver? [el objetivo era la posibilidad de uso del operador derivada y la presencia de mecanismos de encapsulación o coordinación]

3.1.2.- La unidad didáctica y el libro de texto

Los dos profesores habían elaborado un documento escrito que pensaban utilizar para el desarrollo de la unidad didáctica, nos facilitaron copia de dicho documento en el momento de realizar la entrevista de planificación.

Para el caso de Juan, la unidad didáctica estaba detallada con las tareas que pensaba plantear al comienzo y en él se distinguían claramente los conceptos de la noción de derivada que pensaba abordar: la derivada de una función en un punto, función derivada y el operador derivada. De acuerdo con este documento, tenía mucho más peso en la unidad didáctica el concepto de derivada de una función en un punto y la función derivada que el operador derivada. Este documento de Juan contenía comentarios sobre las tareas y los objetivos que tenía para el desarrollo del tema. El elemento básico de la planificación era la noción de derivada de una función en un punto, y a partir de él se llegaba a la función derivada y al cálculo de funciones derivadas. En este documento base para realizar la unidad didáctica, el profesor ya tenía presente el uso de programas de ordenador, en concreto, tenía planteado el uso de MAPLE, que luego no utilizará y sustituirá por *Cabri-Géomètre II* y *Funciones para Windows*, ya que los estudiantes estaban familiarizados con ellos.

María tenía preparado también un documento escrito sobre la unidad didáctica que pensada llevar a cabo. La unidad didáctica de María abordaba los conceptos de la noción de derivada: derivada de una función en un punto, función derivada, y operador derivada. A diferencia de Juan la parte más importante en la planificación de María era el operador derivada. En este caso el documento tenía como guía el contenido del libro de texto y venían indicadas las tareas del mismo que se irían realizando y en qué orden. En lo referente al material a utilizar además del libro de texto, María utilizaría una tabla con las reglas de derivación.

A partir de la entrevista previa de planificación y de la unidad didáctica podíamos identificar los objetivos previstos por cada profesor y la organización del contenido previsto, de esta manera estos elementos de la planificación nos aportaron información.

3.2.- Gestión

En la fase de gestión y desarrollo de la unidad didáctica, las fuentes de datos utilizadas fueron las grabaciones de las clases, las entrevistas de desarrollo (progreso) y los materiales del profesor. Los datos obtenidos fueron: transcripciones de las clases y de las entrevistas, y observaciones escritas realizadas por el investigador de las grabaciones y materiales recogidos.

3.2.1.- Las grabaciones de las clases

Las clases de ambos profesores fueron grabadas en vídeo. Las grabaciones fueron realizadas con una cámara fija que seguía generalmente la actuación del profesor, ya que éste era nuestro sujeto de estudio. Los estudiantes sólo aparecían cuando el profesor interactúa con ellos o tenían el papel protagonista resolviendo tareas en la pizarra para todo el grupo. Las grabaciones fueron transcritas en su totalidad. Cuando realizamos las transcripciones incluimos notas escritas para facilitar el seguimiento del flujo de las clases. Con objeto de disponer de las intervenciones del profesor de forma más "fidedigna", le colocamos un micrófono inalámbrico que le permitía moverse con total libertad dentro del aula y podíamos recoger todas sus intervenciones. Este micrófono sólo recoge las intervenciones de los estudiantes cuando están en el campo de acción del profesor, generalmente interactuándo con él. La mayoría de las veces pudimos tener una segunda fuente de sonido, el micrófono que llevaba incorporado la cámara de vídeo, que nos permitía obtener información del ambiente general y de las intervenciones de algunos estudiantes.

Para distinguir, en las transcripciones de las grabaciones de las clases, las intervenciones de los estudiantes, éstas se delimitaban entre corchetes [....]. En las transcripciones hacemos indicaciones/observaciones de lo que estaba ocurriendo y que aparecía implícito en las mismas, por ejemplo, si el profesor decía "cogemos esto" y estaba señalando una expresión en la pizarra, la expresión se pone entre los símbolos < >. En las transcripciones de las grabaciones numeramos las líneas para que las referencias a ellas sea más fácil.

Se grabaron todas las clases de la unidad didáctica de Juan y María (17 y 12 sesiones de clase respectivamente). Como las grabaciones se llevaron a cabo en las sesiones ordinarias de clase, con objeto de familiarizar a los estudiantes con nuestra presencia, realizamos alguna grabación previa al comienzo de dicha unidad. Esta sesión previa nos permitió familiarizarnos con el lugar físico en el que realizaríamos las grabaciones y resolver algunos problemas de ubicación, como dónde colocar la cámara y el equipo de sonido para afectar lo mínimo el desarrollo de las clases.

3.2.2.- Las entrevistas de desarrollo de la unidad didáctica

A lo largo del desarrollo de la unidad didáctica llevamos a cabo tres entrevistas con los dos profesores. En estas entrevistas indagábamos sobre cómo veían los profesores que iba desarrollándose la unidad didáctica planificada, sobre las dificultades que iban encontrándose y sobre el desarrollo futuro de las clases.

3.2.3.- Los materiales utilizados

A lo largo de las clases de que constaban las unidades didácticas los dos profesores entregaron materiales a los estudiante que fuimos recogiendo. Juan entregaba como material, fundamentalmente, colecciones de “hojas de problemas” y utilizó además dos ficheros de ordenador para el programa Cabri-Géomètre II. Juan pretendía que los estudiantes realizaran las tareas y se enfrentasen a las dificultades previamente a la discusión en clase. Los ficheros de Cabri-Géomètre II que contenían construcciones de tipo figura permitieron a los estudiantes manipular las figuras, sin necesidad de que ellos las realizasen. Con el programa Funciones para Windows no se utilizaron ficheros, sino que se definían las funciones cuando se necesitaban.

María, se guiaba por el libro de texto para el desarrollo de la unidad didáctica y las tareas que les proponía a los estudiantes eran del libro de texto. El material que les proporcionó a los estudiantes fue una “tabla” de derivadas (reglas de derivación) dividida en tres partes: 1) derivadas de la funciones elementales, tales como, funciones potenciales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y trigonométricas inversas; 2) reglas para derivar operaciones entre funciones, derivada de la suma, producto, cociente, función constante y función identidad; y 3) *regla de la cadena* aplicada a la composición de funciones elementales de las que se daban la función derivada.

4.- REDUCCIÓN DE LOS DATOS Y ANÁLISIS

El análisis tenía como objetivo identificar las características de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor. Pretendemos caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor a partir de la modelación de la descomposición genética de la derivada.

El análisis de los datos fue realizado a diferentes niveles (Powell et al., 2003):

- Nivel descriptivo, en el que identificabamos las tareas, los objetivos del profesor, elementos matemáticos y relaciones, los modos de representación y relaciones en las tareas y usados en las clases. Este primer paso en el proceso de análisis tenía como objetivo realizar un proceso de "inmersión" en los datos reunidos.

- Nivel inferencial (1º), en el que se identificaban "segmentos" en las grabaciones de clase caracterizados por las modelaciones de mecanismos de construcción. Este análisis se llevó a cabo con los datos aportados de la planificación de la unidad didáctica del profesor y de las grabaciones de las clases que organizamos en "viñetas". Se realizó en dos fases:

- En la fase 1, se identificaron segmentos de enseñanza (dados por un tiempo de enseñanza) caracterizados por la modelación de un mecanismo de construcción (y potenciación de una determinada forma de conocer un concepto), denominados S_i, con i=1...

Para esta identificación de los segmentos de enseñanza usamos como referencia el análisis de la noción de derivada que hemos presentado en el capítulo II desde sus dos perspectivas:

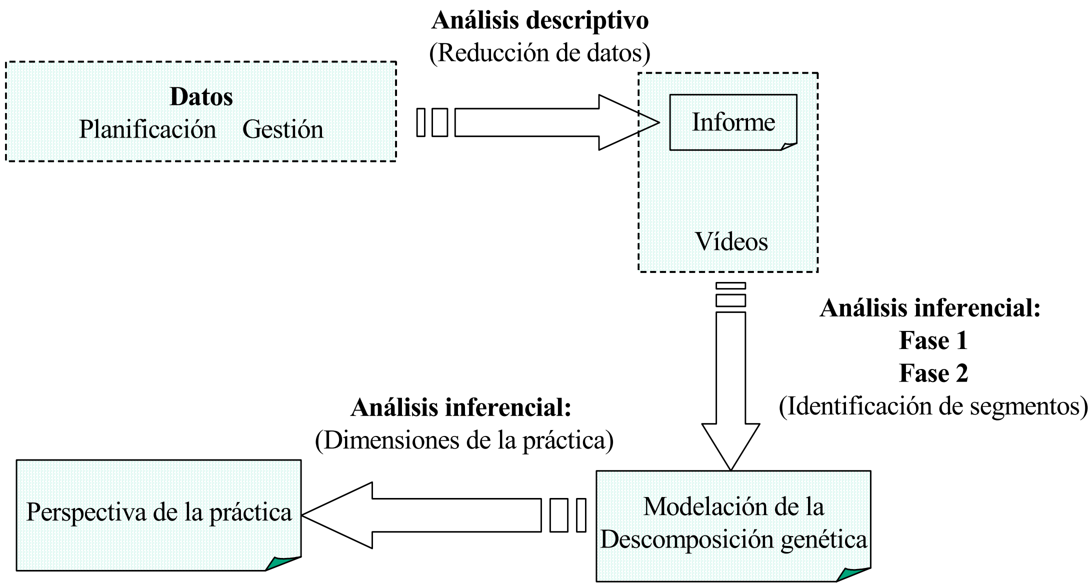
- el uso de los modos de representación como instrumento para comunicar los elementos matemáticos y sus relaciones, y
- los mecanismos de construcción de la comprensión del concepto.

- En la fase 2, los segmentos anteriores se agruparon en conjuntos de segmentos en los que se construía globalmente la modelación de un mecanismo de construcción. A estos conjuntos de segmentos los denominamos $(Si)_j$ con j=1...

-Nivel inferencial (2º), se caracterizó la perspectiva de la práctica del profesor a partir de la modelación de la descomposición genética de la derivada realizada por el profesor. La caracterización se llevó a cabo mediante las dimensiones que se consideran relevantes:

- concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas, y
- concepción sobre las matemáticas escolares.

En los párrafos siguientes describiremos los distintos niveles de análisis realizados en la investigación. En el cuadro 3.2 se esquematiza dichos niveles así como los resultados obtenidos.



Cuadro 3.2 Esquema metodológico: análisis de datos

1.- El primer nivel de análisis era descriptivo, y nos permitió reducir el volumen de datos y hacerlos más manejables para el segundo nivel de análisis:

-- Identificando segmentos. La unidad de análisis viene dada por un *segmento*. Más adelante (página 124) detallaremos los distintos tipos de segmentos (un ejemplo de segmento puede venir dado por el tiempo dedicado por el profesor para realizar una tarea). La unidad de análisis en la gestión considerada de esta manera es similar a la “secuencia de acciones” definida por

Schoenfeld[2] (1998 a) para su análisis en la "enseñanza en contexto". Schoenfeld (1998 a) considera una secuencia de acciones[3] como un segmento de instrucción en el que las acciones del profesor pretenden alcanzar un(os) objetivo(s), la separación entre secuencias viene dada por un cambio en el carácter de la instrucción que es significativo.

-- Analizando segmentos. En este nivel de análisis identificabamos, los elementos matemáticos y modos de representación (Sánchez-Matamoros, 2004) y su uso por parte del profesor, y el objetivo del profesor mirando las tareas propuestas y la interacción. Incluimos aquellas observaciones que nos parecen relevantes para nuestro objetivo de investigación en relación a lo anterior y que pueden ser útiles en la identificación de las modelaciones de mecanismos.

Las tareas (problemas) usados por el profesor son analizados:

- individualmente y atendiendo a la secuencia planificada, lo que nos proporciona inferencias sobre la organización del contenido globalmente considerado.

- individualmente las tareas son analizadas considerando, los modos de representación y la demanda al resolutor (lo que se exige).

2.- El segundo nivel de análisis era de tipo inferencial y usamos el modelo de comprensión APOS[4] con las descripciones generales de los mecanismos de construcción y de las formas de conocer (Dubinsky, 1991, 1996; Dubinsky et al.,

---

[2]Por el tipo de análisis propuesto por Schoenfeld (1998 a), sólo tiene sentido en su caso la unidad de análisis para la gestión.

[3]Schoenfeld (1998 a) se refiere a las secuencias de acciones como unidad para su análisis de la práctica, teniendo en cuenta que una secuencia de acciones puede ser subdividida a su vez (en función del objetivo priorizado en cada momento), señala que "En resumen, este aspecto de la separación produce una descomposición de lo que sucede durante la instrucción en una anidada colección de secuencias de acción" (p. 36).

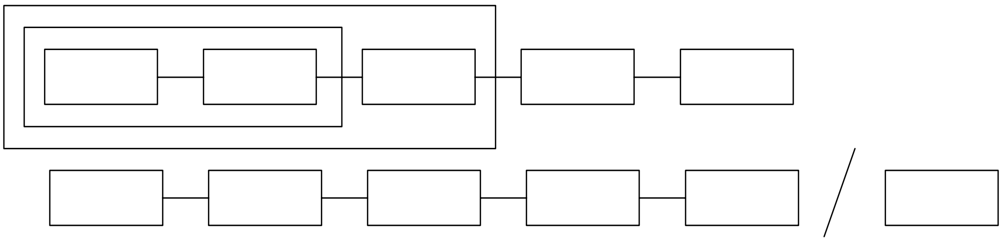
[4]El modelo APOS aparece descrito detalladamente en el capítulo II, tanto de manera general, como particularizado a la noción de derivada.

1994; Breidenbach et al., 1992; Asiala et al., 1996; Cottrill et al., 1996) y más particular las caracterizaciones de la descomposición genética de la derivada (Asiala et al., 1997; DeVries, 2001). Pretendíamos en este nivel identificar la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor en su práctica. Para ello es necesario identificar los distintos mecanismos de construcción modelados y la secuencia (relaciones) de los mismos. Describimos cada modelación realizada por el profesor en términos de los elementos matemáticos y modos de representación considerados como instrumentos de la práctica.

Este análisis lo realizamos en dos fases. En la fase 1, considerábamos como unidad de análisis un *segmento de enseñanza* en el que el profesor modelaba con su intervención y la tarea presentada un mecanismo de construcción de conocimiento. Escudero (2003) siguiendo a Leinhardt (1989) considera que los segmentos configuran partes de la lección y son reconocibles tanto por el profesor como por los estudiantes. Para esta investigadora los segmentos se pueden caracterizar en base a los objetivos de aprendizaje pretendidos por el profesor. Ese objetivo de aprendizaje para nosotros es potenciar una determinada forma de conocer un concepto. En nuestro caso, un segmento puede venir dado por una tarea, ser parte de una tarea, o bien un conjunto de tareas.

En la fase 2, hicimos una segunda lectura de los segmentos identificados en la fase 1 con el objetivo de agrupar segmentos de enseñanza que mostraran aspectos más generales del proceso de modelación. Este proceso de agrupar segmentos de enseñanza permitió identificar nuevas modelaciones de los mecanismos de construcción realizadas por el profesor.

Esta segunda fase de análisis fue necesaria realizarla para dar cuenta del carácter sistémico de la enseñanza de las matemáticas que se puso de manifiesto en algunos casos. La forma de representar gráficamente las secuencias de enseñanza vistas de esta manera puede mostrarse por el esquema recogido en el siguiente cuadro (cuadro 3.3).



Cuadro 3.3 Agrupación de segmentos de enseñanza

Como hemos señalado anteriormente usamos las ideas teóricas del marco APOS para caracterizar los mecanismos modelados por el profesor y que considerados de manera conjunta nos daban la modelación de la descomposición genética realizada por el profesor.

3.- Finalmente, en el tercer nivel de análisis, a partir de la modelación de la descomposición genética realizada por el profesor inferimos las características de las dimensiones de la práctica del profesor, y podemos caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor.

4.1.- Reducción de datos, análisis descriptivo. Primer nivel de análisis

Una vez realizadas las transcripciones completas de las entrevistas y de las grabaciones de las sesiones de clase empezamos el análisis de los datos. Para la planificación utilizamos las transcripciones de la entrevista y los documentos de la unidad didáctica, libro de texto y tarea/secuencia de tareas. Para el análisis de la gestión de clase utilizamos, las transcripciones de los vídeos de clase (con observaciones), las transcripciones de las entrevistas de desarrollo y los materiales instruccionales recogidos. El volumen de datos, tanto de las transcripciones de la entrevistas como de la grabaciones de clase era elevado y nos planteamos reducirlo bajo la perspectiva de identificar, objetivos del profesor, elementos matemáticos usados y modos de representación usados por el profesor.

A continuación vamos a describir el primer nivel de análisis incluyendo algunos ejemplos de cómo lo realizamos. Los ejemplos los hemos tomado de la fase de gestión. Como unidad de análisis en este primer nivel utilizábamos *segmentos.* Los segmentos pueden ser de distinto tipo:

- comentarios realizados por el profesor sobre la tarea prevista,
- tiempo dedicado por el profesor a la realización para una tarea en la gestión,
- segmentos de transición, segmentos de institucionalización.

Como ejemplo de segmento de transición, consideramos el siguiente: el profesor después de resolver dos tareas (las tareas 1 y 2 de la unidad didáctica en las clases nº 1 y nº 2) comienza la clase nº 3 con un breve resumen de lo visto hasta ese momento, el profesor recuerda los contenidos más importantes y relevantes de lo sucedido hasta ese momento[5]:

> *"Antes de que hagáis nada, por favor, os recuerdo lo que habíamos visto ya hasta ahora, ya para ir ordenando un poquito las ideas."*

Identificados los segmentos en el primer análisis de tipo descriptivo, llegamos a reducir el volumen de datos disponibles. El análisis de cada segmento se estructuraba de la siguiente manera:

- Identificación de los objetivos del profesor, siempre que era posible establecíamos el objetivo "declarado o profesado" por el profesor, en otros casos teníamos que considerar el objetivo "atribuible" entre los

[5] De alguna forma el profesor "institucionaliza" sus objetivos, vistos desde nuestra perspectiva como investigadores éstos son potenciar determinada forma de conocer y modelar un mecanismo de construcción.

considerados o emergentes (Schoenfeld, 1998 a[6]).

- Análisis de las tareas teniendo en cuenta el lugar en la secuencia de planificación y la demanda al resolutor.

- Identificación de los elementos matemáticos usados por el profesor y las relaciones que se establecen entre ellos, estas relaciones pueden ser unidireccionales o bidireccionales.

- Identificación de los modos de representación usados por el profesor y las relaciones entre ellos.

- Por último, se hacían inferencias de aquellos eventos que parecían ser representativos de la práctica del profesor. Por ejemplo, un aspecto que detectamos relacionado con los modos de representación era la tensión existente en el profesor respecto a los modos en cuanto a su "jerarquía" para la justificación/validación de resultados matemáticos.

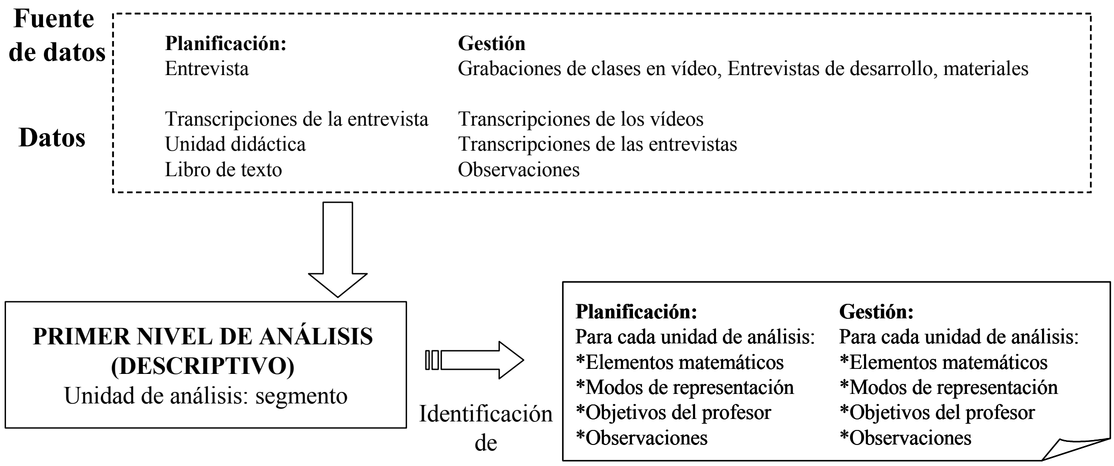
Este proceso de análisis nos permitía elaborar un informe dividido en dos partes, uno para la planificación y otro para la gestión en el aula, en el que indicábamos:

- Contexto cronológico: en qué clase tenía lugar, y dentro de la clase en que momento de la misma.
- Mediante los protocolos (generalmente intervenciones del profesor) las evidencias empíricas significativas de los aspectos anteriores (objetivo, modos de representación, elementos matemáticos y relaciones, observaciones).

[6]Schoenfeld (1998 a) distingue entre objetivos del profesor "profesados" refiriéndose a aquellos objetivos que son manifestados por el profesor, y objetivos "atribuidos" refiriéndose a objetivos que los investigadores atribuimos al profesor a partir de la conducta observada; la atribución debe se cuidadosa y la triangulación es importante en esa atribución.

- Indicación de la numeración de las líneas de los protocolos anteriores en las transcripciones.

En cuadro 3.4 se describe este primer análisis de los datos y el informe producido:



Cuadro 3.4 Esquema metodológico: primer nivel de análisis, reducción de datos

En este informe, tanto en la planificación como en la gestión, indicábamos los elementos matemáticos, codificados para hacerlos más manejables, AP 1[7], GP 2, etc. y las relaciones se representan con flechas indicando el sentido de la relación que el profesor establece. Los objetivos del profesor aparecen también codificados, A1[8]....

A continuación presentamos un ejemplo de un segmento de la gestión, el análisis realizado, y cómo se elaboraba el informe de dicho análisis:

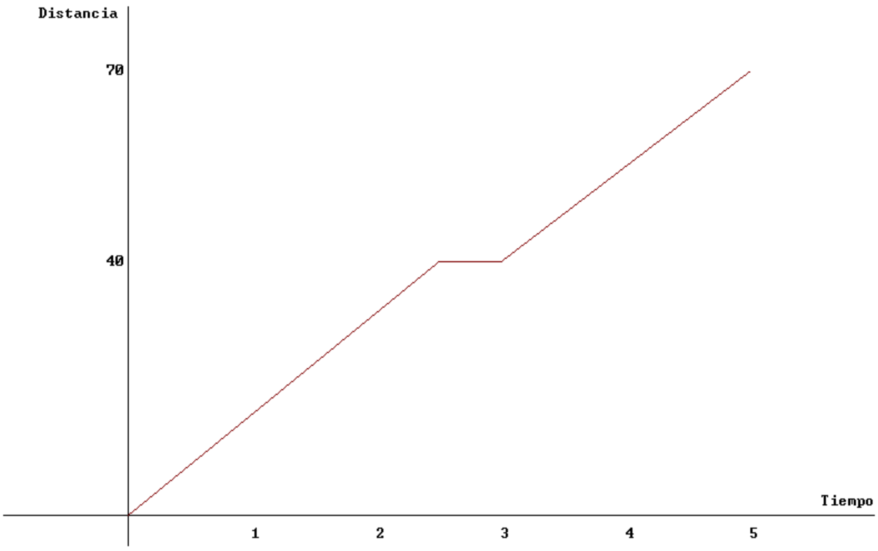
La tarea es la primera de la clase nº 1 (27 de abril de 2000). El enunciado de la tarea es:

[7]AP 1: La tasa de variación media de una función en un intervalo [a,b] es (f(b)-f(a))/(b-a). GP 2: trazar la recta secante a una curva en dos puntos (a, f(a)) y (b, f(b) y su pendiente es (f(b)-f(a))/(b-a).

[8]A1: El significado de la derivada de una función en un punto ligado a dos aspectos: la tangente a una curva en un punto y la medida de la variación de una función en un punto.

"La siguiente gráfica representa un viaje,

eje X: tiempo (minutos), eje Y: distancia (kilómetros)



1) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido a las 2 horas?

2) ¿Cuánto ha recorrido a las 2 horas y media?

3) ¿Qué velocidad ha llevado en el primer tramo?

4) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido entre las 2 horas y media y las 3?

5) ¿Qué velocidad ha llevado?

6) Y lo mismo para el último tramo ¿Cuántos kilómetros ha recorrido entre la tercera hora y la quinta? ¿Qué velocidad ha llevado?

A partir de la grabación de las clases y las transcripciones de la grabación (en la que numerábamos las líneas), se recogen en el informe los protocolos más significativos junto con observaciones nuestras. Usamos los protocolos para identificar: cómo usa el profesor los modos de representación y los elementos matemáticos y los objetivos del profesor.

Powell et al. (2003) señalan respecto al análisis de grabaciones en vídeo que éstas pueden producir el fenómeno de "saturación" de datos, y por tanto es necesario reducir el volumen de información. Este es un objetivo de nuestro primer nivel de análisis. En este primer análisis seleccionamos los datos más relevantes para nuestro interés (Clement, 2000 citado en Powell et al. 2003), teniendo presente como indican Powell et al. (2003) que cuando se usan vídeos existe la posibilidad de revisar las interpretaciones que se hacen por los investigadores de lo que ha sucedido. La información la organizamos en cuadros como se observa en la siguiente página.

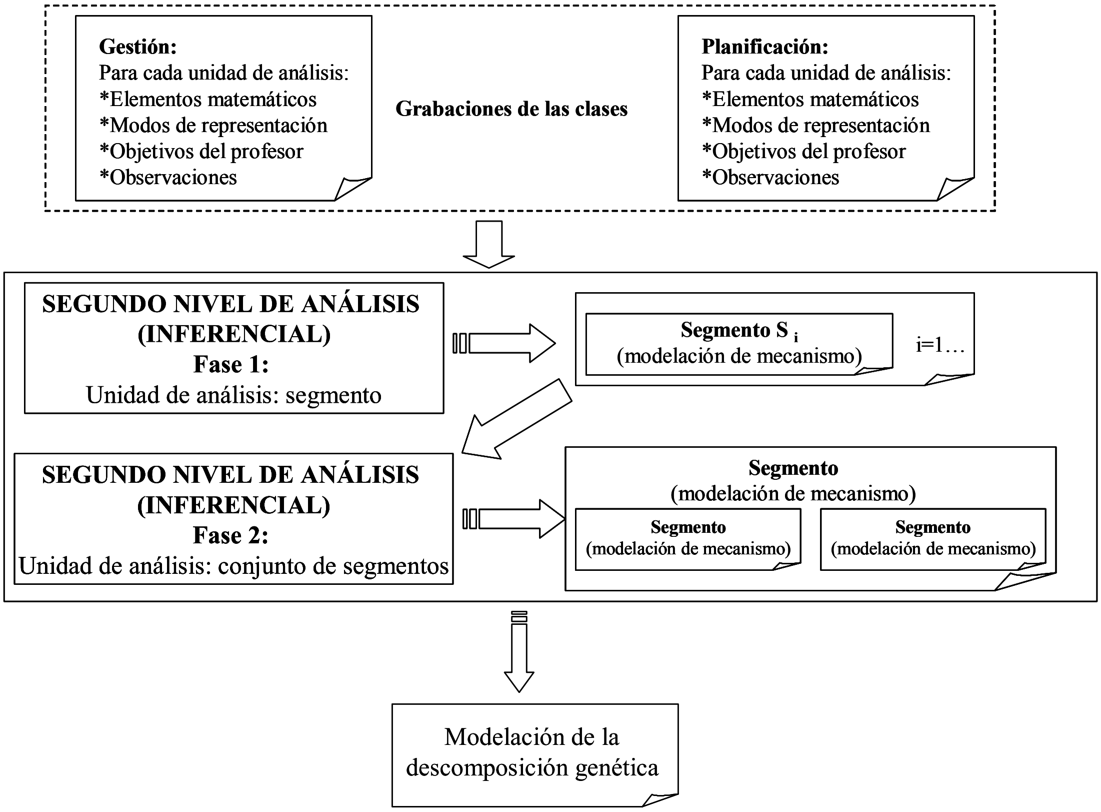
Este análisis permitió reducir el volumen de los datos disponibles y por tanto hacer más manejable la información a la hora de pasar al siguiente nivel de análisis. En este momento ya disponemos de los objetivos del profesor, elementos matemáticos, modos de representación y relaciones que se establecen entre ellos.

Línea en la transcripción	Protocolo de Juan (Gestión: vídeo correspondiente a la clase 3, transcripciones del vídeo) (Planificación: es la tarea 1 de la entrevista)	Comentario nuestro (En relación a los comentarios de J.)	Modos de representación relaciones entre ellos y objetivo	Elementos matemáticos y relaciones
26 33-34	¿Cuál es la velocidad? Vamos a calcular la velocidad media cómo va variando, cómo va variando el espacio en función del tiempo	Objetivo: introducir el significado de la derivada: medida de variación de una función , A1	Gráfico ↔ Numérico ↘ ↙ Objetivo A1	Elementos matemáticos: AP1 ↔GP2
36-37 40-41	unos han hecho la pendiente y otros han hecho una regla de tres... 40 dividido entre 2 y medio tiene que ser igual a la altura que sea partido por 2, y hago esto y sale	Cálculo de la velocidad		
49-50 53-54	La velocidad siempre que estamos en esta recta coincide con la pendiente... la velocidad en este espacio de tiempo también coincide con la pendiente de la gráfica de la función	Los modos de representación y las relaciones entre ellos.		
92-93	realmente lo que nos interesaba de esta gráfica era calcular las pendientes, la velocidad ¿cómo ha variado esta función en función del tiempo?	El objetivo se destaca		

4.2- Segundo nivel de análisis: inferencias. Modelación de la descomposición genética de la práctica del profesor

A partir del informe producido en el primer nivel y junto con las grabaciones de las clases (con sus transcripciones), pasamos a un segundo nivel de análisis. Hay que destacar la distinción entre lo que se observa en las entrevistas y grabaciones y las inferencias que se extraen de las observaciones, dichas inferencias dependen de los modelos teóricos adoptados y es necesario dejar tan explícito como sea posible dichos modelos (Goldin, 1997). Como hemos señalado anteriormente hemos utilizado ideas del modelo de comprensión APOS (mecanismos de construcción de conocimiento, formas de conocer, descomposición genética). Nuestro objetivo del análisis era describir la modelación de la descomposición genética del concepto derivada (en términos de mecanismos de construcción de las formas de conocer y su secuencia-relaciones) realizada por el profesor.

En este nivel de análisis mirábamos los intentos del profesor en el aula de modelar algún mecanismo de construcción de conocimiento (interiorización, encapsulación...). Este análisis lo realizamos en dos fases que se recogen en el siguiente cuadro (cuadro 3.5):



Cuadro 3.5 Esquema metodológico: análisis inferencial, fases 1 y 2

FASE 1: en esta fase identificábamos los segmentos de las grabaciones caracterizados por la modelación de un mecanismo de construcción por el profesor. El análisis lo realizamos de la siguiente manera. A través de los vídeos identificabamos “segmentos” (segmentos de enseñanza), es decir, partes de la lección que se caracterizan en base a los objetivos de aprendizaje pretendidos por el profesor. Nosotros consideramos, siguiendo a Escudero (2003), que el objetivo de aprendizaje del profesor caracteriza el segmento, y ese objetivo de aprendizaje para nosotros es potenciar una determinada forma de conocer un concepto, modelando un mecanismo de construcción. Por tanto, desde nuestro punto de vista lo que caracteriza un segmento es la modelación por el profesor de un mecanismo de construcción.

Esta identificación-inferencia del mecanismo de construcción de conocimiento modelado por el profesor es realizada por nosotros ya que pretendemos caracterizar la práctica del profesor, pero desde nuestra perspectiva como investigadores y no desde la perspectiva del profesor (Tzur et al., 2001). Los profesores en ningún momento hacían referencia alguna a esta modelación. El proceso de inferencia, como hemos señalado en la introducción, se apoya en el modelo teórico APOS, tanto en las descripciones generales de sus componentes como en las concretas para el tema de la derivada que aparecen en diversas publicaciones y que hemos reunido en la caracterización de la "modelación de la descomposición genética de la noción de derivada" realizada en el Capítulo II.

Cada segmento de enseñanza identificado fue consensuado por al menos dos investigadores. De esta forma se realiza una "triangulación" en el sentido del grupo RUMEC (Asiala et al., 1996). Hay que señalar que a veces es necesario considerar juntos varias tareas o modelaciones. Por ejemplo, en alguna situación de los segmentos se identifican dos mecanismos de construcción como cuando el profesor modelaba la interiorización de la función derivada y la desencapsulación de la derivada de una función en un punto.

Una vez identificados los segmentos confeccionamos una lista cronológica de segmentos. Para analizar los segmentos utilizabamos las transcripciones de las clases, los informes elaborados en el análisis descriptivo (primer nivel) teniendo como apoyo las transcripciones de las entrevistas y la unidad didáctica. Con todos estos datos formabamos lo que denominamos una "viñeta[9]" que está elaborada con la información reunida desde las distintas fuentes[10].

Para cada viñeta indicamos el contexto en el que sucede, qué tarea/tareas

[9]La idea es similar a "videoportfolio" de Maher y Martino (1996, citado en Powell et al., (2003)) "una colección de diferentes tipos de datos centrados en un episodio o una serie de episodios de interés" (p. 410). Un episodio para estos investigadores es un periodo de tiempo con un suceso que debe explicarse desde el enfoque de las preguntas de investigación planteadas.

[10]Cumpliendo el requisito de "triangulación" en el sentido dado por Schoenfeld (2000), para el que hay que disponer de datos de diferentes fuentes, entre ellas, vídeos de clase, entrevistas con el profesor, planes para la lección, notas de clase... .

se resuelven en el mismo, la organización del contenido (entrevista de planificación, unidad didáctica), lo que el profesor hace y dice durante la gestión y la justificación de la gestión realizada. Además en cada viñeta indicamos la inferencia realizada sobre la modelación del mecanismo de construcción que realiza el profesor mediante los elementos matemáticos y sistemas de representación (instrumentos de la práctica).

Un ejemplo de viñeta es el siguiente:

VIÑETA:

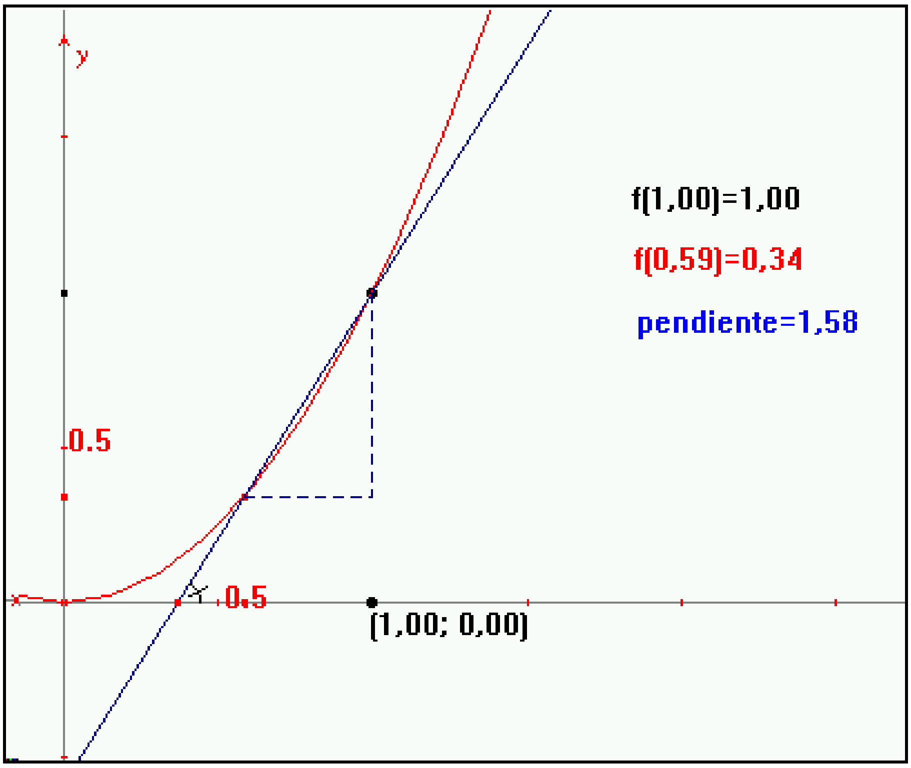
La situación descrita en esta viñeta tiene lugar en la tercera clase de la unidad didáctica realizada por Juan. La tarea planteada por Juan es "calcular la derivada de la función en un punto, x=1 para $f(x)=x^2$".

En la entrevista de planificación en relación a este tipo de tareas y al cálculo de rectas secantes, Juan indicaba:

"Con aproximaciones, cogemos la secante y ahora vamos obteniendo un poquito más, vamos obteniendo cada vez más ... una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Sí, también algunas veces lo hacemos, vamos, esto es lo que te digo que le hago en el programita. Claro van así, vamos tendiendo hacia el punto y lo que vamos cogiendo realmente una secante, cogiéndola, echándola para acá, hasta..., y van calculando las pendientes en cada momento, entonces ahora tenemos la tangente."

Juan confecciona una tabla de valores de las pendientes de las rectas secantes que se calculan en la figura de forma automática. Juan para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto x=1 hace lo siguiente: pone a disposición de los estudiantes una figura de Cabri II (realizada por él) para que puedan manipularla (usando el "arrastre[11]" de puntos). La figura es:

[11]En Cabri II, un objeto (punto, recta, etc) de una figura puede ser desplazado con el ratón conservándose las relaciones geométricas utilizadas en la construcción de la figura, ese desplazamiento se conoce como "arrastre".



Aparecen dos puntos en la figura, un punto negro y un punto rojo. El punto negro se sitúa en el punto x=1. A continuación el profesor pide a los estudiantes que muevan el punto rojo aproximándolo al punto negro (1) y que confeccionen la siguiente tabla:

X	0,59	0,89	0,9	....	1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$					

También les pide ver qué ocurre con la recta secante cuando el punto rojo se aproxima al negro (1). Juan y sus alumnos van confeccionando la tabla de cocientes utilizando la figura del ordenador.

El diálogo en clase es el siguiente:

P: Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular, lo que vamos a calcular es cómo está variando, cómo está variando la función en el punto 1.

Entonces si nosotros vamos aproximando, si nosotros nos vamos aproximando, aquí, cogiéndolo con la manita el punto éste <punto rojo> , pues nos va tomando distintos valores.
Si cogemos este punto <punto rojo> nos vamos aproximando ¿cuánto me sale la tasa de variación? ¿qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí.
Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0.63, pues la pendiente que me aparece 1.63, cuando yo me acerque más. En 0.80 ¿qué pendiente me aparece?
E: 1.75
P:Si yo pongo aquí 0.9¿qué hay que poner aquí?<Indicando cómo completar la tabla>
E: 1.85
P: Cuando yo ponga aquí un 1 ¿qué voy yo a tener que poner aquí?
E: 1.
P: Cuando este punto x se vaya acercando a éste de aquí <punto negro>, fijaros la recta ésta <recta secante> ¿a qué va tendiendo? ¿a qué se va pareciendo? a la recta tangente a la curva ¿lo veis o no lo veis? se va aproximando, aproximando
E: A la tangente.
P: Hasta que llega a la tangente, pues lo que tengo realmente es la recta tangente.
E: Sí.
P: A eso es a lo que vamos a llamar la derivada. Entonces cuando yo este punto <punto rojo> lo hago tender, se lo hago cada vez más cerca del punto negro, pues, esta recta que yo tenía aquí que era una recta secante ¿a dónde? ¿a dónde se nos va a ir?, mira ¿lo veis? cada vez más cerca, cada vez más cerca, cuando llego al punto ése, realmente ¿qué es lo que tengo aquí? la recta tangente.
Realmente nosotros lo que hemos hecho , lo que hemos hecho es calcular el límite cuando x tiende a 1 de esto de aquí , eso es lo que hemos hecho, de (f(1)-f(x))/(1-x), esto es lo que se llama el valor de la derivada en el punto 1 y se representa de esta manera, f ´(1), eso va a ser la derivada, nada más, o sea que va a ser únicamente una pendiente.

En una de las entrevistas de desarrollo Juan indicó:

"Elegí enseñarles el método de aproximaciones, la tangente mediante un gráfico de un ordenador porque creo es lo que te da más juego, en una clase te da tiempo a ver muchos puntos aproximando y verlo una y otra vez sin tener que escribir en la pizarra, de una forma más directa, se hagan idea de qué es realmente aproximar, cómo pueden coger puntos aproximándolos al otro y cómo va variando la tangente, cómo va variando en principio la secante y va tendiendo hacia la tangente geométrica de la curva, ésa era la idea."

En el documento de la unidad didáctica Juan indica:

"En este sentido se puede hacer una buena visualización de la obtención de la recta tangente como límitede secantes a través del programa MAPLE mediante la rutina with (plots): animate({x^2, (t+2)*(x-

2)+4{ que corresponde a la función x^2 en el punto x=2".

Aunque Juan hace referencia en este momento al programa MAPLE que luego no usó, lo que importa aquí es subrayar el uso que hace de los programas informáticos para modelar la idea de aproximación sucesiva y paso al límite del cociente incremental como una manera de ayudar a los estudiantes a dotar de sentido a la idea de derivada.

El hecho de que Juan lo tuviera previsto en la planificación muestra el énfasis en poder visualizar el proceso de aproximación de la secante hacia la tangente. La manera de actuar usando otros instrumentos se apoya en el mismo principio de visualizar la idea de derivada de una función en un punto integrando lo analítico y lo gráfico.

ANÁLISIS DE LA VIÑETA:

Esta manera de actuar del profesor muestra la modelización del paso al límite de la función $f(x)=x^2$ en el punto concreto x=1. Este paso al límite lo hace Juan integrando lo gráfico (pasar de la recta secante a la recta tangente) y lo analítico (la construcción de los cocientes incrementales correspondientes). Este comienzo de integración de lo gráfico y analítico en una misma actividad se hace mediante el uso de un software específico.

Lo que hace Juan en este segmento lo describimos como "modelación del mecanismo de interiorización" (paso de acción a proceso) del significado de la derivada de $f(x)=x^2$ en x=1 como paso al límite del cociente incremental.

La relación entre lo gráfico y lo analítico aparece en:

-- El cálculo de la tasa de variación media de una función en un intervalo [a, b] con el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [Línea 6], y

-- cuando se traza la recta secante a una curva en dos puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) y el cálculo de su pendiente como el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [Líneas 7-9 y en las entrevistas].

Asiala et al. (1997) describen los mecanismos de interiorización para la derivada de una función en un punto diciendo:

*“**2a. Gráfico:** Interiorización de las acciones del punto 1a a un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están “cada vez más próximos.”* (p. 407)

El punto 1a en la descripción de la descomposición genética realizada por Asiala et al. (1997) describe las acciones en los siguientes términos:

*“**1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos.*

***1b. Analítico:** la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto”* (p. 407)

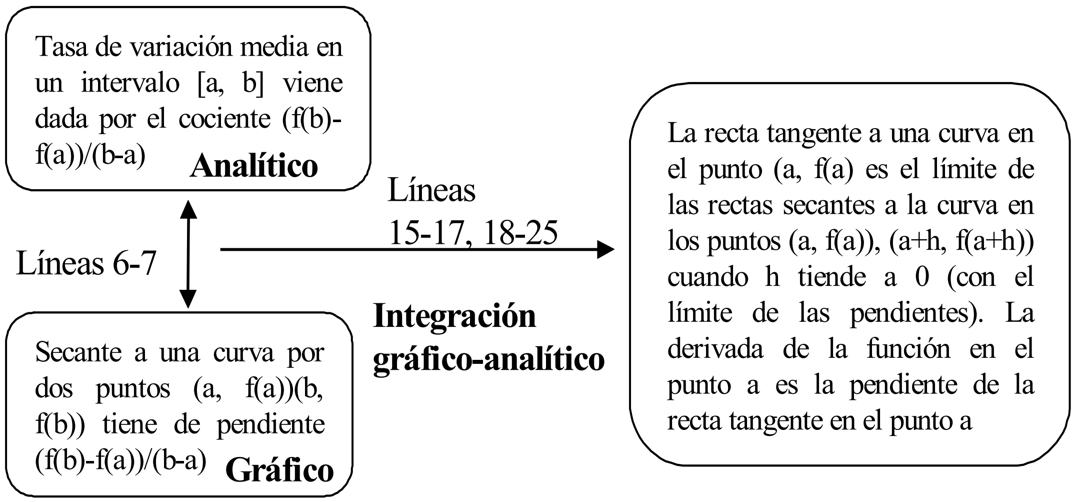
Por otra parte Cottrill et al. (1996) indica que:

“cuando [los estudiantes] *ven la necesidad de realizar infinitos pasos o cálculos para obtenerlo: cualquier cálculo que necesite un número infinito de pasos, sólo puede ser comprendido a través de una concepción proceso”* (p. 173)

La modelación por parte de Juan del mecanismo de interiorización se lleva a cabo cuando considera los intervalos que aparecen cada vez “más pequeños”, modelando el paso al límite en una situación general. Este paso al límite se lleva a término a través de tablas de valores de cocientes incrementales que se deben completar calculando algunos de ellos (dos, tres, cuatro, etc.).

La modelación de la interiorización que se presenta es la que en Asiala et al. (1997) se denomina gráfica, en las líneas 4, 15-17, 18 y siguientes, y en las entrevistas, la de planificación y en la de desarrollo.

El aspecto de la práctica de Juan inferida desde este segmento, la interiorización del paso al límite y la integración de lo gráfico y lo analítico a través de la tecnología puede ser descrita a través de los elementos matemáticos y modos de representación del siguiente modo:



FASE 2: a partir del conjunto de segmentos identificados en la fase 1, y descritos en forma de viñetas procedimos a agrupar segmentos en los que se identificaba la modelación de un nuevo mecanismo de construcción apoyado en las modelaciones anteriores. Esta fase de análisis <u>intenta</u> hacer explícito el carácter <u>sistémico</u> de la práctica de algunos profesores. Por ejemplo, en la fase 1 se habían identificado dos segmentos (segmentos 1 y 2) analizados a través de las viñetas y será descrito en la sección de resultados. La práctica del profesor

vinculaba estos dos segmentos, lo que llevó en esta fase 2 a identificar aquellos grupos de segmentos que tenían alguna vinculación.

Segmento 1	**Segmento 2**
(Viñeta 1)	(Viñeta 2)
Interiorización	Interiorización
$F(x)=x^2$, x=1	Situación estanque
Paso al límite:	Paso al límite:
-Geométrico (secantes)	-Geométrico (secantes)
-Analítico (cocientes incrementales)	-Analítico (cocientes incrementales)
-Integración de lo gráfico y lo analítico	-Integración de lo gráfico y lo analítico

Las acciones de las que se modela su interiorización vienen dadas por:
-Cálculo de la tasa de variación media, y
- Trazar la recta secante a una curva en dos puntos y calcular su pendiente.
En ambos segmentos se modela el mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto.

Para Asiala et al. (1997) el objeto derivada de una función en un punto es $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ con los dos significados, gráfico (pendiente de la recta tangente a la curva en el punto) y analítico (variación instantánea de la función en el punto).

Las dos viñetas son ejemplos de modelaciones del mecanismo de interiorización, con integración de lo gráfico y lo analítico para el concepto derivada de una función en un punto, a través de la tecnología. Consideradas conjuntamente las viñetas 1 y 2 muestran un aspecto característico de la práctica de Juan: los intentos de hacer visible el paso al límite en el modo gráfico (de secante a tangente) y en el modo analítico (cociente incremental) con ejemplos distintos ($f(x)=x^2$; x=1, situación del estanque) mediante el uso de tecnología informática.

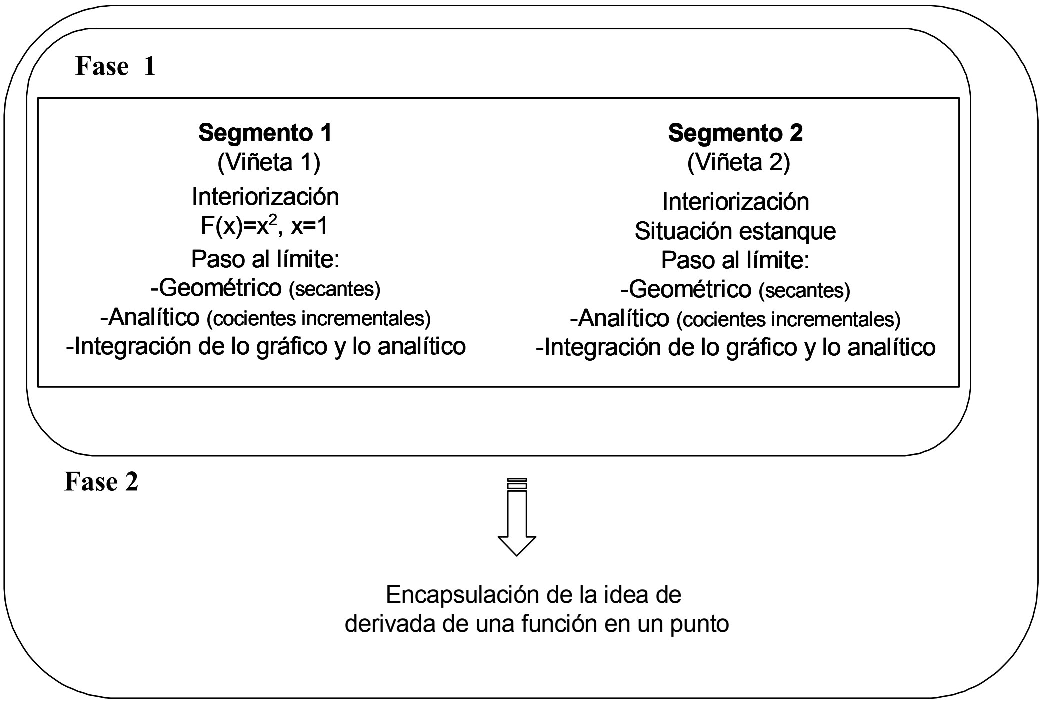
Para los dos segmentos anteriores podemos inferir que se podía estar intentando modelar la encapsulación de la derivada de una función en un punto, ya que se pretende que el proceso potenciado por interiorización llegue a considerarse como "un todo" susceptible de uso, y este uso viene dado por la posibilidad de generalizarse a otros puntos y funciones.

Juan, modela el mecanismo de interiorización en distintos puntos y funciones (la primera dada por una gráfica y su expresión analítica, la segunda por una gráfica que describe una situación) y parece pretender considerar que es posible tener en cuenta dicha interiorización como un "todo" susceptible de realizarse en cualquier punto (al considerar puntos distintos, en el primer caso y en el segundo, sin depender del punto en que se hace) y cualquier función (función y situación, no depende del tipo de función). Por tanto, para Juan la aproximación y paso al límite se consideran englobados como totalidad. Este planteamiento permite a Juan apoyar la encapsulación de la idea de derivada de una función en un punto desde la interiorización del paso al límite en el caso de ciertas funciones y en determinados puntos:

La característica de modelar interiorizaciones en puntos y funciones diferentes es la que nos permite considerar conjuntamente las viñetas como una primera aproximación de Juan a la modelación del mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto.

En el siguiente cuadro (cuadro 3.6) representamos de forma esquemática el proceso de análisis seguido en las dos fases en este caso concreto.

Nivel de análisis: inferencial



Cuadro 3.6 Esquema metodológico: ejemplo de análisis inferencial en dos fases

A partir de este segundo nivel de análisis podremos responder a las siguientes preguntas ¿qué mecanismos el profesor modela con su práctica respecto a la noción de derivada? ¿Qué secuencia (relaciones) establece el profesor entre los distintos mecanismos de construcción modelados para la noción de derivada?

En definitiva, a partir de este análisis disponemos de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor con su práctica. Esta modelación de la descomposición genética de la derivada es una construcción teórica que nos informa de los objetivos del profesor en cuanto a la potenciación en su práctica de determinadas formas de conocer y cómo alcanzarlas. Es una descripción de la práctica del profesor desde el punto de vista de los investigadores.

4.3 - Tercer nivel de análisis: perspectiva de la práctica del profesor

Una vez descrita la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor en su práctica, pasamos a caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor en función de las dimensiones que consideramos en nuestra propuesta teórica. Consideramos la perspectiva de la práctica del profesor como lo que subyace a su práctica, los aspectos caracterizadores de dicha práctica desde la consideración de la potenciación de la construcción de conceptos.

La perspectiva de la práctica la caracterizamos a través de dos dimensiones:

- cómo concibe el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos visto a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que se potencia, secuencia-relaciones entre ellos y su justificación.
- su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje visto a través de cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo.

Para obtener las dimensiones que definen la perspectiva de la práctica del profesor introducimos en el análisis tres variables:

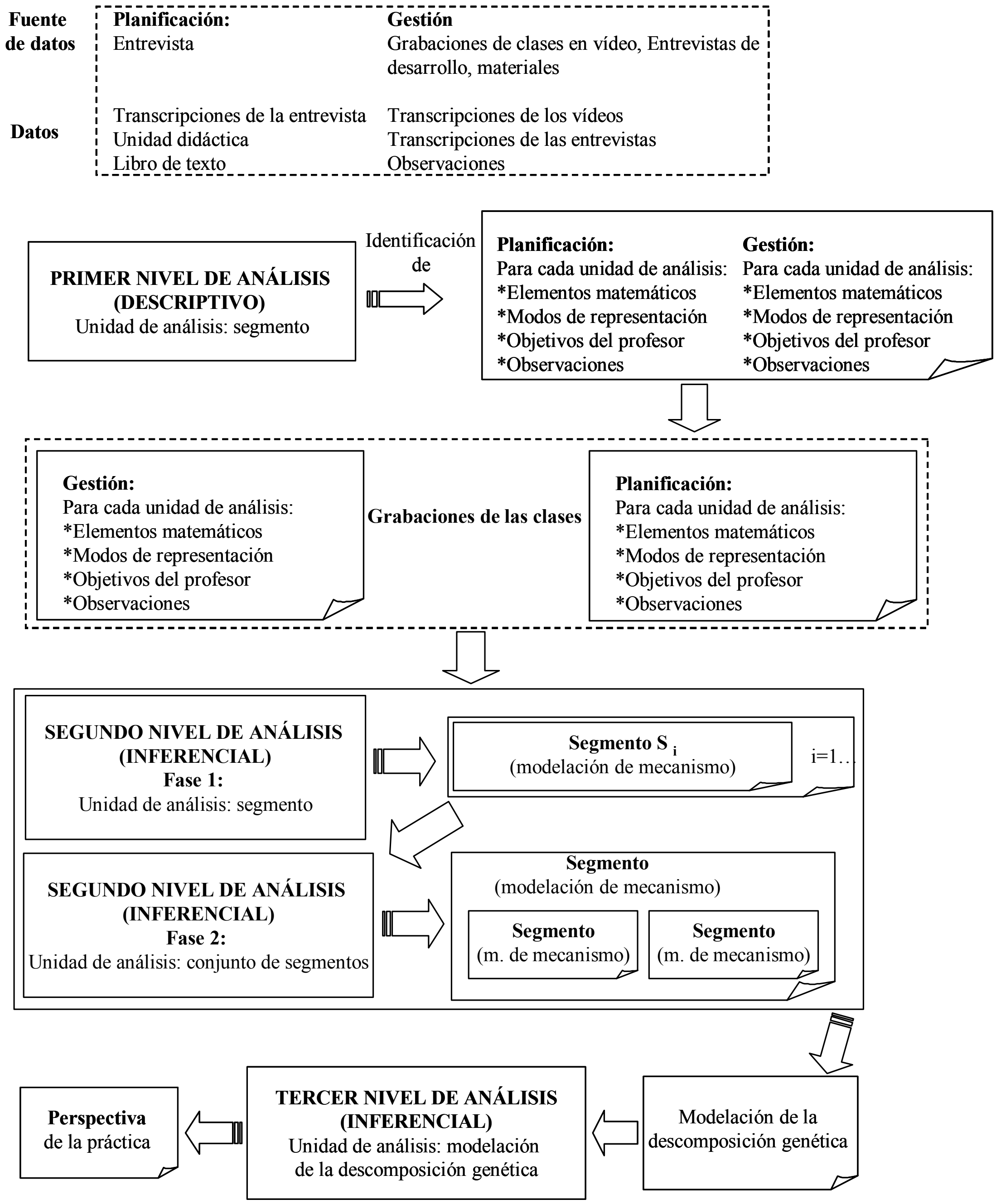
- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

A partir de los valores de cada una de ellas podemos realizar las inferencias sobre las dimensiones. La caracterización del uso de los modos de representación, la organización de los conceptos y la manera en la que el profesor modelaba los diferentes mecanismos de desarrollo del concepto nos han proporcionado los medios para caracterizar las dimensiones que nos permiten identificar las diferentes perspectivas de la práctica.

Por ejemplo, de las dos viñetas anteriores inferíamos que Juan pretende mostrar la vinculación entre los significados de la derivada de una función en un punto, analítico y gráfico, produciendose la integración de las representaciones. Esto manifiesta la construcción de la idea de "relación" entre significados. Esto es una manifestación de cómo concibe las matemáticas y cómo concibe el aprendizaje. Una concepción sobre las matemáticas en las que el contenido matemático se organiza alrededor de los distintos significados de los conceptos y sus traslaciones y una concepción del aprendizaje de las matemáticas que sigue de forma implícita la descomposición genética de la derivada, lo que nos "habla" de una construcción progresiva del conocimiento matemático.

Nuestro análisis debe permitirnos identificar características de una práctica del profesor que trascienda lo específico del caso concreto, y debe intentar producir conocimiento relevante para comprender la idea de "práctica del profesor". Queremos caracterizar "perspectivas de la práctica del profesor" teóricas inferidas desde los datos y resultados empíricos utilizados en la investigación.

En cuadro 3. 7 recogemos el esquema metodológico seguido que nos han permitido llegar a la caracterización de la perspectiva de la práctica del profesor.



Cuadro 3.7 Esquema metodológico: niveles de análisis

CAPÍTULO IV

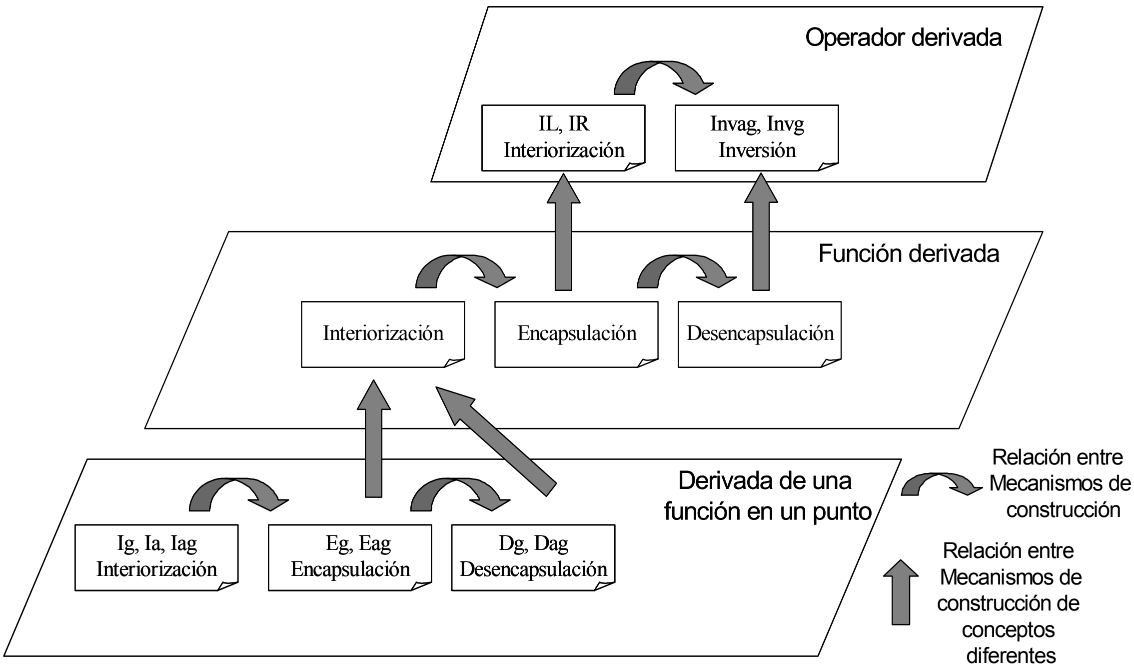
CAPÍTULO IV: RESULTADOS

1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se detallan los resultados obtenidos en los dos profesores estudiados. Para cada uno de los casos describimos la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada (en términos de mecanismos de construcción de las formas de conocer y su secuencia-relaciones) realizada por el profesor. A continuación se presentan de forma pormenorizada los aspectos característicos de la práctica de cada uno de los profesores, incluyendo las viñetas en las que nos apoyamos y por último caracterizamos la perspectiva de la práctica inferidas en los dos casos. Entendemos por perspectiva de la práctica del profesor lo que subyace a su práctica en términos de las dimensiones: concepción sobre el aprendizaje y sobre las matemáticas como objeto de enseñanza-aprendizaje.

2.- EL CASO DE JUAN: LA MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA NOCIÓN DE DERIVADA EN LA PRÁCTICA DE JUAN

En este apartado vamos a describir los resultados del análisis de la práctica de Juan. La modelación de la descomposición genética de la noción de derivada viene dada en términos de la modelación de mecanismos de construcción y su secuencia. Juan modela mecanismos de construcción para la derivada de una función en un punto, la función derivada y el operador derivada. La función derivada aparece como puente entre la derivada de una función en un punto y el operador derivada. En el cuadro 4.1 se indican los mecanismos modelados para los diferentes conceptos de la noción de derivada.



Ia=Interiorización analítica	Eg=Encapsulación gráfica	IL=Interiorización límite
Ig=Interiorización gráfica	Eag=Encapsulación analítico-gráfico	IR=Interiorización regla
Iag=Interiorización analítico-gráfico	Dg=Desencapsulación gráfica	Invg=Inversión gráfica
	Dag=Desencapsulación analítico-gráfico	Invag=Inversión analítico-gráfico

Cuadro 4.1 Modelación de mecanismos de construcción en la práctica de Juan

En la práctica de Juan hemos podido identificar la modelación de mecanismos de interiorización, encapsulación y desencapsulación para la derivada de una función en un punto. Para la función derivada identificamos los mismos mecanismos de construcción (interiorización, encapsulación y desencapsulación) y para el operador derivada Juan modela los mecanismos de interiorización e inversión. De esta manera la construcción de las maneras de conocer que modela Juan es progresiva, en el sentido de que van modelandose sucesivamente los mecanismos de construcción para cada uno de los conceptos (derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada) y potenciando de manera relacionada las distintas formas de conocer los conceptos.

Para la derivada de una función en un punto la modelación del mecanismo de interiorización Juan lo hace de forma analítica (Ia), gráfica (Ig) y analítico-gráfico (ambas de forma integrada, Iag). Cuando Juan modela el mecanismo de interiorización integrando los sistemas de representación analítico y gráfico interpretamos que Juan pretende que los alumnos construyan como proceso la derivada de una función en un punto. El uso que hace Juan de las relaciones entre los sistemas de representación persigue la construcción de significados independientemente del modo de representación.

A partir del uso integrado de los modos gráfico y analítico en la presentación como proceso de la derivada de una función en un punto Juan modela el mecanismo de encapsulación. De esta manera Juan pretende que los estudiantes lleguen a construir la “derivada de una función en un punto” como objeto integrando la forma analítica y la forma gráfica. A través de la modelación del mecanismo de encapsulación gráfica se pretende que el alumno construya el objeto “derivada de una función en un punto” como “pendiente de la recta tangente” y a través de la modelación de la encapsulación analítica-gráfica se pretende que el alumno construya el objeto como “tasa de variación instantánea” y como “pendiente de la recta tangente”. La modelación que hace Juan de esta parte de la descomposición genética objeto “derivada de una función en un punto” engloba la idea de la “pendiente de la recta tangente” y la idea de “tasa de variación instantánea”. Después, Juan modela el mecanismo de desencapsulación de la derivada de una función en un punto, de forma gráfica (Dg) y de forma analítico-gráfico (Dag). Esta desencapsulación analítico-gráfico (Dag) supone que Juan parte del objeto “derivada de una función en un punto”.

La modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada se realiza a través de la generalización a todos los puntos del paso al límite de la derivada de una función en un punto integrando lo gráfico y lo analítico. De esta forma Juan pretende que los alumnos construyan como proceso la idea de "función derivada". Juan repite esta manera de actuar con diferentes funciones, por lo que puede ser interpretado como que Juan modela el mecanismo de encapsulación para intentar que los alumnos construyan la idea de función derivada como objeto y den significado al operador derivada .

La enseñanza de la derivada de una función en un punto y de la función derivada desarrollada por Juan se apoya en las modelaciones en forma gráfica y analítica de los mecanismos de construcción del concepto, integrándolos a través de la tecnología. Para ello usa las herramientas informáticas Cabri II Géomètre y Funciones para Windows que le permiten relacionar los diferentes significados en ambos modos de representación.

Para el operador derivada Juan modela dos mecanismos de construcción, el mecanismo de interiorización y el de inversión lo que le permite introducir la noción de integral conectada al operador derivada. Juan modela el mecanismo de interiorización del operador derivada cuando utiliza el límite del cociente incremental para obtener la función derivada de diferentes funciones. Con esta manera de actuar Juan pretende que los estudiantes construyan como proceso la idea de operador derivada. También modela Juan la interiorización del operador derivada mediante el uso de reglas de derivación, generalmente construidas mediante el uso de límites de cocientes incrementales.

Juan modela el mecanismo de inversión del operador derivada, esta forma de actuar de Juan permite potenciar en los estudiantes como proceso un nuevo concepto (antidiferenciación) y conectar los conceptos de operador derivada y operador integral indefinida y de manera más general las nociones de derivada e integración. Juan actúa de manera que las relaciones entre ideas matemáticas surjan de manera natural. El mecanismo de inversión de un proceso construye un nuevo proceso. Así cuando Juan modela la inversión del operador derivada, le permite considerar la integración indefinida (antidiferenciación) como un proceso. Juan modela el mecanismo de inversión en forma analítico-gráfico (Invag) con las reglas de derivación y en forma gráfica (Invg) ya que modela la desencapsulación los significados de la función derivada. Esta forma de actuar permite a Juan potenciar la construcción del operador derivada como proceso y del operador integral indefinida también como proceso.

Esta forma de actuar de Juan modelando los diferentes mecanismo de construcción del conocimiento y la forma en la que se apoya en:

- la derivada de una función en un punto para mostrar el significado de la función derivada,
- la forma en que se apoya en el significado de la función derivada para mostrar el significado del operador derivada, y
- a partir del operador derivada introducir el operador inverso “anti-diferenciación”

constituye la característica de la práctica de Juan.

La práctica de Juan se describe a partir de la modelación de la descomposición genética realizada, mediante las variables: uso de modos de representación, organización de conceptos, y formas de conocer potenciadas[1], que consideramos que ayudan a caracterizar la perspectiva de la práctica. En relación al uso de los sistemas de representación cómo instrumento de la práctica, Juan pretende la integración de los significados gráficos y analíticos de los conceptos matemáticos. Esta integración le permite a Juan hacer visibles las ideas subyacentes, como son la aproximación y el paso al límite. Juan persigue con la integración que los alumnos construyan el significado de las ideas matemáticas

[1]Descritas en el capítulo III (Diseño de la investigación).

de la noción de derivada independientemente del modo de representación usado.

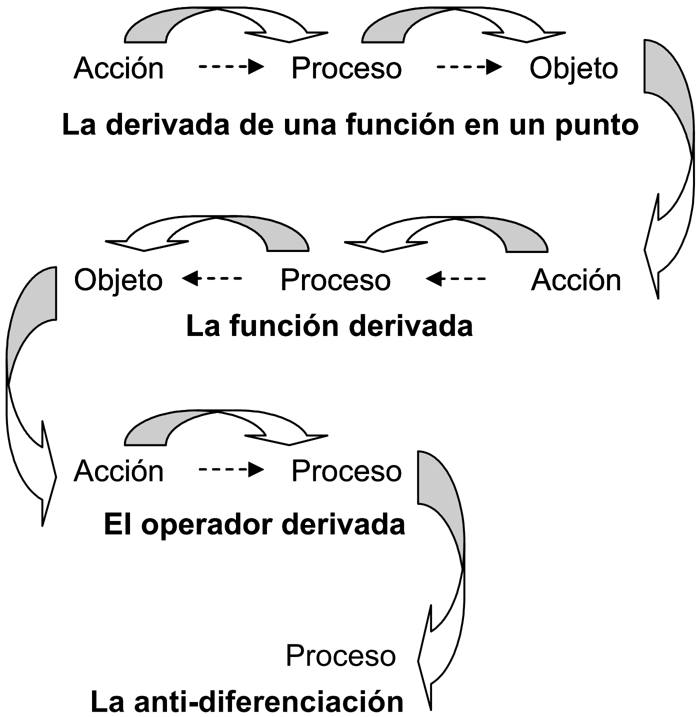
Juan organiza los distintos conceptos que conforman la derivada de manera que para construir una idea se apoya en las construidas previamente. Juan hace "visibles" las relaciones que se establecen y son para él un objetivo explícito. Juan construye de manera explícita la idea de función derivada a partir de la idea de derivada de una función en un punto, a partir del significado de f ´(a) dota de significado a f ´(x). A partir de la función derivada Juan intenta que los estudiantes den significado al operador derivada.

Juan subraya explícitamente las relaciones entre ideas matemáticas como una manera de dotar de significado a los conceptos. Es decir, en la práctica de Juan aparece como característica una construcción progresiva entre conceptos, que denominamos "vertical".

En relación a las formas de conocer que parece potenciar en los estudiantes, la práctica de Juan se caracteriza por potenciar los significados gráficos y analíticos de los conceptos mediante las distintas formas de conocer. Juan establece relaciones entre las formas de conocer, apoyándose en una para potenciar la siguiente (acción-proceso-objeto). Juan modela la descomposición genética de la derivada de una función en un punto y de la función derivada potenciando la construcción de los objetos.

Señalaremos que la manera de proceder de Juan se apoya en que tiene en consideración de manera implícita la descomposición genética de cada concepto enseñado. Esta forma de construir un concepto de manera progresiva la denominamos "horizontal". Esta manera de actuar de Juan ayuda a caracterizar el contenido matemático enseñado.

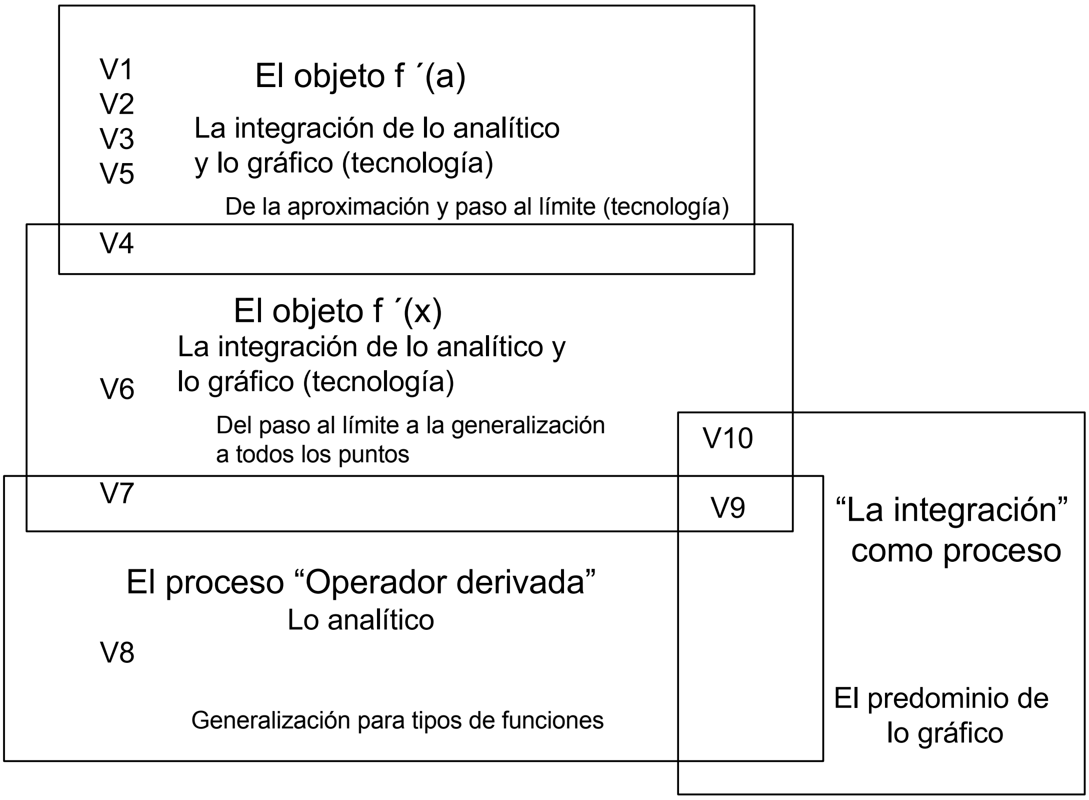
En el cuadro siguiente (cuadro 4.2) esquematizamos las relaciones entre las formas de conocer potenciadas para cada concepto, y las relaciones entre los distintos conceptos que conforman la noción de derivada en la práctica de Juan.



Cuadro 4.2 Relaciones entre conceptos y formas de conocerlos

Esta actuación sistémica de Juan a lo largo de la unidad didáctica se identifica a través de las relaciones que se establecen entre las ideas matemáticas que constituyen la noción de derivada y la manera en que modela los mecanismos de construcción de significados. Lo que parece justificar esta manera de actuar de Juan es una determinada concepción sobre el aprendizaje y sobre la naturaleza de las matemáticas escolares, sobre este punto volveremos al describir la perspectiva de la práctica de Juan.

En el cuadro siguiente (cuadro 4.3) se esquematiza las formas de conocer potenciadas para cada concepto, junto con el uso de los sistemas de representación e ideas "visibles" en las que se apoya. Indicamos las viñetas que nos proporcionan las evidencias empíricas para nuestra inferencia.



Cuadro 4.3 Organización de las viñetas: formas de conocer, modos de representación e ideas

En el siguiente punto detallamos las evidencias empíricas que permiten caracterizar la práctica de Juan. Estas evidencias empíricas tendrán la forma de viñetas que nos permitirán ejemplificar aspectos de la práctica de Juan desde los que inferir lo que fundamenta su práctica. El hecho de mirar la práctica de Juan a través de la "modelación que realiza de la descomposición genética de la noción" permite ordenar las viñetas siguiendo el orden de los mecanismos que modela. Juan sigue el orden de modelación que se prescribe en el marco APOS: interiorización, encapsulación, desencapsulación.

Queremos señalar que las viñetas son "prototípicas" de lo sucedido en una serie de días (momentos de enseñanza). Indicamos a continuación los días y viñetas.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Viñetas	V2... ... V10		V1	V4 V6 V7...	V5... ... V4(bis)		V9	V3			V8...						

En cada viñeta se indican:

- la tarea y/o el grupo de tareas con las que se desarrolla el segmento de enseñanza presentado,
- organización del contenido (desde la entrevista de planificación, y de la unidad didáctica),
- discurso en el aula (lo que el profesor dice y hace en el aula), y
- cómo justifica la gestión realizada.

Además en cada viñeta indicaremos la inferencia realizada sobre la modelación del mecanismo de construcción que realiza el profesor mediante los elementos matemáticos y sistemas de representación (instrumentos de la práctica).

La presentación la hemos organizado en tres apartados:

i) derivada de una función en un punto, f ´(a)

ii) de la "derivada de una función en un punto" al "operador derivada" a través de la "función derivada" f´(x), y

iii) del operador derivada a la integración.

2.1.-Derivada de una función en un punto

En este primer apartado describimos cómo Juan modela la descomposición genética de la derivada de una función en un punto. Se organiza en dos partes. La primera parte es relativa a las modelaciones de mecanismos de construcción de la derivada de una función en un punto como objeto a través del paso al límite de las secantes y de las tasas de variación. Esta aproximación da lugar a la recta tangente (pendiente) y a la variación instantánea de una función en un punto. La segunda parte trata la modelación del mecanismo de desencapsulación de la derivada de una función en un punto como objeto.

La construcción de la derivada de una función en un punto que pretende potenciar Juan en los estudiantes es progresiva ya que primero modela el cocnepto de derivada de una función en un punto como acción. Posteriormente modela los mecanismos de interiorización, encapsulación y desencapsulación. De esta manera la enseñanza de Juan se apoya en una "secuencia" de formas de conocer la derivada de una función en un punto como acción/proceso/objeto de acuerdo con el marco APOS. Una característica de las modelaciones realizadas por Juan deriva del papel desempeñado por los sistemas de representación y la relación que establece entre ellos dandose en algunos casos la integración de lo analítico y lo gráfico.

2.1.1.- De la interiorización a la encapsulación: la integración de lo analítico y lo gráfico a través de la tecnología

En este apartado vamos a considerar: 1) la modelación de los mecanismos de interiorización de la derivada de una función en un punto integrando lo analítico y lo gráfico a través de la tecnología, y 2) la modelación de los mecanismos de encapsulación de la derivada de una función en un punto a través del paso al limite.

V1: Modelación del paso al límite del cociente incremental en contexto gráfico (de secante a tangente) y analítico (tasa de variación)[2]

La situación descrita en esta viñeta tiene lugar en la tercera clase de la unidad didáctica realizada por Juan. La tarea es "calcular la derivada de $f(x)=x^2$ en $x=1$".

En la entrevista de planificación Juan indica:

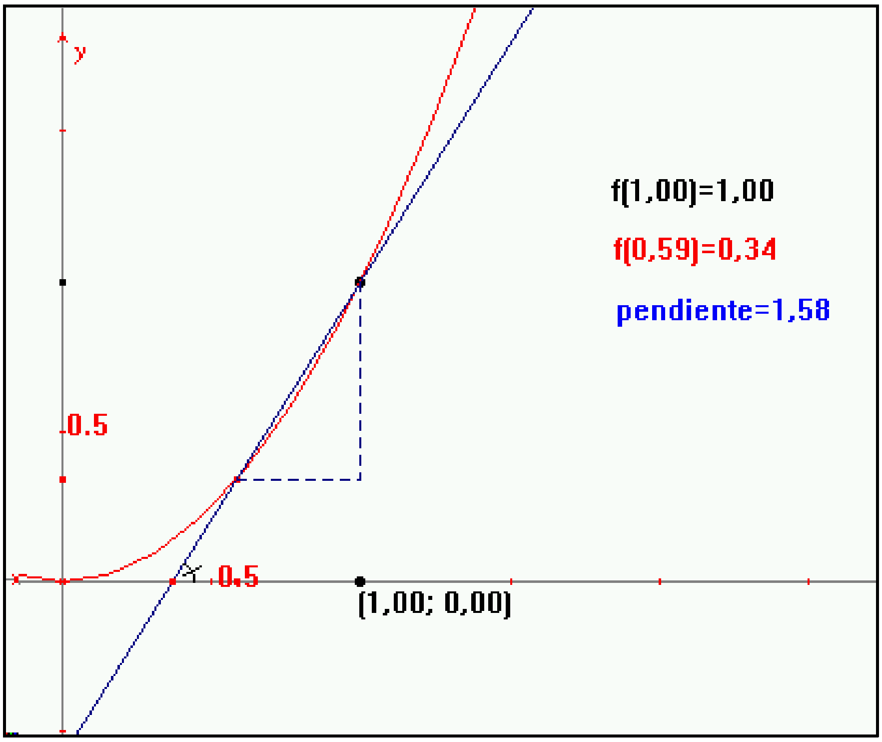
"Con aproximaciones, cogemos la secante y ahora vamos obteniendo un poquito más, vamos obteniendo cada vez más ... una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que

[2]Esta viñeta ha sido considerada en la sección de metodología para explicar la organización general de las viñetas.

nos vaya saliendo la tangente. Una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Sí, también algunas veces lo hacemos, vamos, esto es lo que te digo que le hago en el programita. Claro van así, vamos tendiendo hacia el punto y lo que vamos cogiendo realmente una secante, cogiéndola, echándola para acá, hasta..., y van calculando las pendientes en cada momento, entonces ahora tenemos la tangente."

Juan confecciona una tabla de valores de las pendientes de las rectas secantes que se calculan en la figura de forma automática. Juan para calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto x=1 hace lo siguiente:

Pone a disposición de los estudiantes una figura de Cabri II (realizada por él) para que puedan manipularla (usando el "arrastre[3]" de puntos). La figura es:



Aparecen dos puntos en la figura, un punto negro (1) y un punto rojo (0.5). El punto negro se sitúa en el punto x=1. A continuación el profesor pide a los estudiantes que muevan el punto rojo aproximándolo al punto negro (1) y que confeccionen la siguiente tabla:

[3]En Cabri II, un objeto (punto, recta, etc) de una figura puede ser desplazado con el ratón conservándose las relaciones geométricas utilizadas en la construcción de la figura, ese desplazamiento se conoce como "arrastre".

X	0,59	0,89	0,9	....	1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$					

También les pide ver qué ocurre con la recta secante cuando el punto rojo se aproxima al negro (1). Juan y los estudiantes van confeccionando la tabla de cocientes utilizando la figura del ordenador.

El diálogo en clase es el siguiente:

P: Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular, lo que vamos a calcular es cómo está variando, cómo está variando la función en el punto 1.

Entonces si nosotros vamos aproximando, si nosotros nos vamos aproximando, aquí, cogiéndolo con la manita el punto éste <punto rojo> , pues nos va tomando distintos valores.

Si cogemos este punto <punto rojo> nos vamos aproximando ¿cuánto me sale la tasa de variación? ¿qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí.

Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0.63, pues la pendiente que me aparece 1.63, cuando yo me acerque más. En 0.80 ¿qué pendiente me aparece?

E: 1.75

P:Si yo pongo aquí 0.9¿qué hay que poner aquí?<Indicando cómo completar la tabla>

E: 1.85

P: Cuando yo ponga aquí un 1 ¿qué voy yo a tener que poner aquí?

E: 1.

P: Cuando este punto x se vaya acercando a éste de aquí <punto negro>, fijaros la recta ésta <recta secante> ¿a qué va tendiendo? ¿a qué se va pareciendo? a la recta tangente a la curva ¿lo veis o no lo veis? se va aproximando, aproximando

E: A la tangente.

P: Hasta que llega a la tangente, pues lo que tengo realmente es la recta tangente.

E: Sí.

P: A eso es a lo que vamos a llamar la derivada. Entonces cuando yo este punto <punto rojo> lo hago tender, se lo hago cada vez más cerca del punto negro, pues, esta recta que yo tenía aquí que era una recta secante ¿a dónde? ¿a dónde se nos va a ir?, mira ¿lo veis? cada vez más cerca, cada vez más cerca, cuando llego al punto ése, realmente ¿qué es lo que tengo aquí? la recta tangente.

Realmente nosotros lo que hemos hecho , lo que hemos hecho es calcular el límite cuando x tiende a 1 de esto de aquí , eso es lo que hemos hecho, de (f(1)-f(x))/(1-x), esto es lo que se llama el valor de la derivada en el punto 1 y se representa de esta manera, f ´(1), eso va a ser la derivada, nada más, o sea que va a ser únicamente una pendiente.

En una de las entrevistas de desarrollo Juan indicó:

"Elegí enseñarles el método de aproximaciones, la tangente mediante un gráfico de un ordenador porque creo es lo que te da más juego, en una clase te da tiempo a ver muchos puntos aproximando y verlo una y otra vez sin tener que escribir en la pizarra, de una forma más directa, se hagan idea de qué es realmente aproximar, cómo pueden coger puntos aproximándolos al otro y cómo va variando la tangente, cómo va variando en principio la secante y va tendiendo hacia la tangente geométrica de la curva, ésa era la idea."

En el documento de la unidad didáctica Juan señaló:

"En este sentido se puede hacer una buena visualización de la obtención de la recta tangente como límitede secantes a través del programa MAPLE mediante la rutina with (plots): animate({x^2, (t+2)*(x-2)+4{) que corresponde a la función x^2 en el punto x=2".

Aunque Juan hace referencia en este momento al programa MAPLE que luego no usó, lo que importa aquí es subrayar el uso que hace de los programas informáticos para modelar la idea de aproximación sucesiva y paso al límite del cociente incremental como una manera de ayudar a los estudiantes a dotar de sentido a la idea de derivada.

El hecho de que Juan lo tuviera previsto en la planificación muestra el énfasis en poder visualizar el proceso de aproximación de la secante hacia la tangente. La manera de actuar usando otros instrumentos se apoya en el mismo principio de visualizar la idea de derivada de una función en un punto integrando lo analítico y lo gráfico.

Esta manera de actuar del profesor muestra la modelización del paso al límite de la función $f(x)=x^2$ en el punto concreto x=1. Este paso al límite lo hace Juan integrando lo gráfico (pasar de la recta secante a la recta tangente) y lo analítico (la construcción de los cocientes incrementales correspondientes). Este comienzo de integración de lo gráfico y analítico en una misma actividad se hace mediante el uso de un software específico.

Lo que hace Juan en este segmento puede ser descrito como una modelación del mecanismo de interiorización (paso de acción a proceso) del significado de la derivada de $f(x)=x^2$ en $x=1$ como paso al límite del cociente incremental.

La relación entre lo gráfico y lo analítico aparece en:

-- El cálculo de la tasa de variación media de una función en un intervalo [a, b] con el cociente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [Línea 6].

-- Trazar la recta secante a una curva en dos puntos de ella (a, f(a)) y (b, f(b)) y el cálculo de su pendiente como el cociente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [Líneas 7-9 y en las entrevistas].

Asiala et al. (1997) describen los mecanismos de interiorización para la derivada de una función en un punto:

*"**2a. Gráfico:** Interiorización de las acciones del punto 1a a un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están "cada vez más próximos"* (p. 407)

El punto 1a reseñado describe las acciones en los siguientes términos en Asiala et al. (1997):

*"**1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos.*

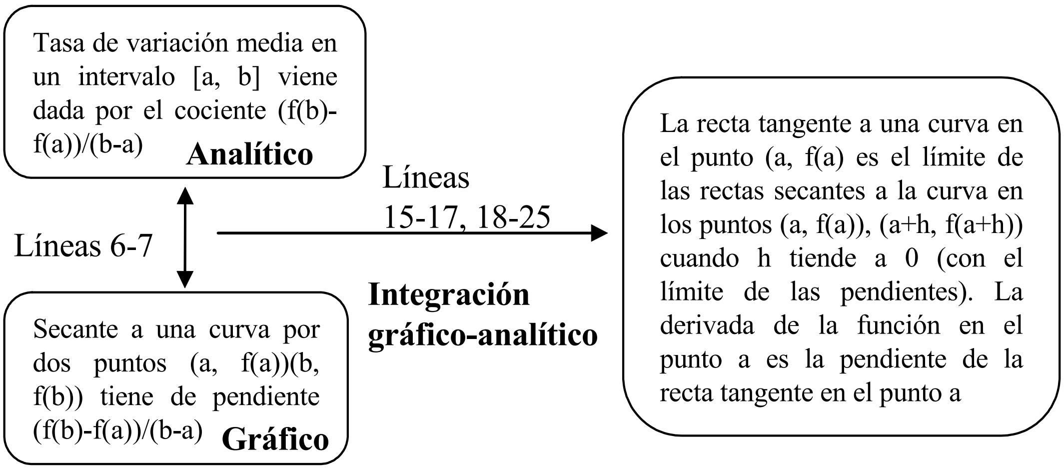
1b. Analítico: *la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto*[4]*"* (p. 407)

Por otra parte Cottrill et al. (1996) indica que:
"cuando [los estudiantes] *ven la necesidad de realizar infinitos pasos o cálculos para obtenerlo: cualquier cálculo que necesite un número infinito de pasos, sólo puede ser comprendido a través de una concepción proceso"* (p. 173)

La modelación por parte de Juan del mecanismo de interiorización se lleva a cabo cuando considera los intervalos que aparecen cada vez "más pequeños", modelando el paso al límite en una situación general. Este paso al límite se lleva a término a través de tablas de valores de cocientes incrementales que se deben completar calculando algunos de ellos (dos, tres, cuatro, etc.). La modelación de la interiorización que se presenta es la que en Asiala et al. (1997) se denomina gráfica, en las líneas 4, 15-17, 18 y siguientes, y en las entrevistas, la de planificación y en la de desarrollo.

El aspecto de la práctica de Juan inferida desde este segmento, la interiorización del paso al límite y la integración de lo gráfico y lo analítico a través de la tecnología puede ser descrita a través de los elementos matemáticos y modos de representación del siguiente modo:

[4]Ver página 95



V2: Modelación del paso al límite de la tasa de variación y de la recta secante

Esta viñeta recoge un segmento que sucedió en la primera y segunda clase de la unidad didáctica. En la tarea usada en esta clase Juan modela el paso al límite en un contexto gráfico. En las cuestiones de la tarea propuesta se aborda: seis cuestiones (a-b-c-d-e-g) relativas a la lectura de la gráfica (interpretar significados), la cuestión f es relativa al significado gráfico de la “velocidad de cambio” y la cuestión h se centra en el significado de la derivada de una función en un punto. Las cuestiones añadidas al final pretenden facilitar la modelación del paso al límite que aparece en la cuestión h.

Enunciado de la tarea:

Un agricultor tiene embalsada cierta cantidad de agua para regar su explotación agrícola. Para sacar el agua del embalse dispone de una bomba. Un día comienza a regar a las 7:00 h. de la mañana. La gráfica adjunta corresponde al agua que va quedando en el embalse en cada instante. El eje de ordenadas indica los m3, el eje de abscisas minutos (obsérvese que puede hablarse de 20'3 minutos, que serían 20 minutos y 18 segundos, y todavía cantidades más pequeñas 20'001 minutos).

A las nueve de la mañana el agricultor desayuna y para la bomba durante media hora.

Averiguamos:

a) Cantidad de agua embalsada.

b) ¿En cuánto tiempo se ha consumido la mitad del agua?

c) Cantidad de agua que se ha consumido la primera hora de riego.

d) Cantidad de agua que se ha consumido durante la segunda hora de riego.

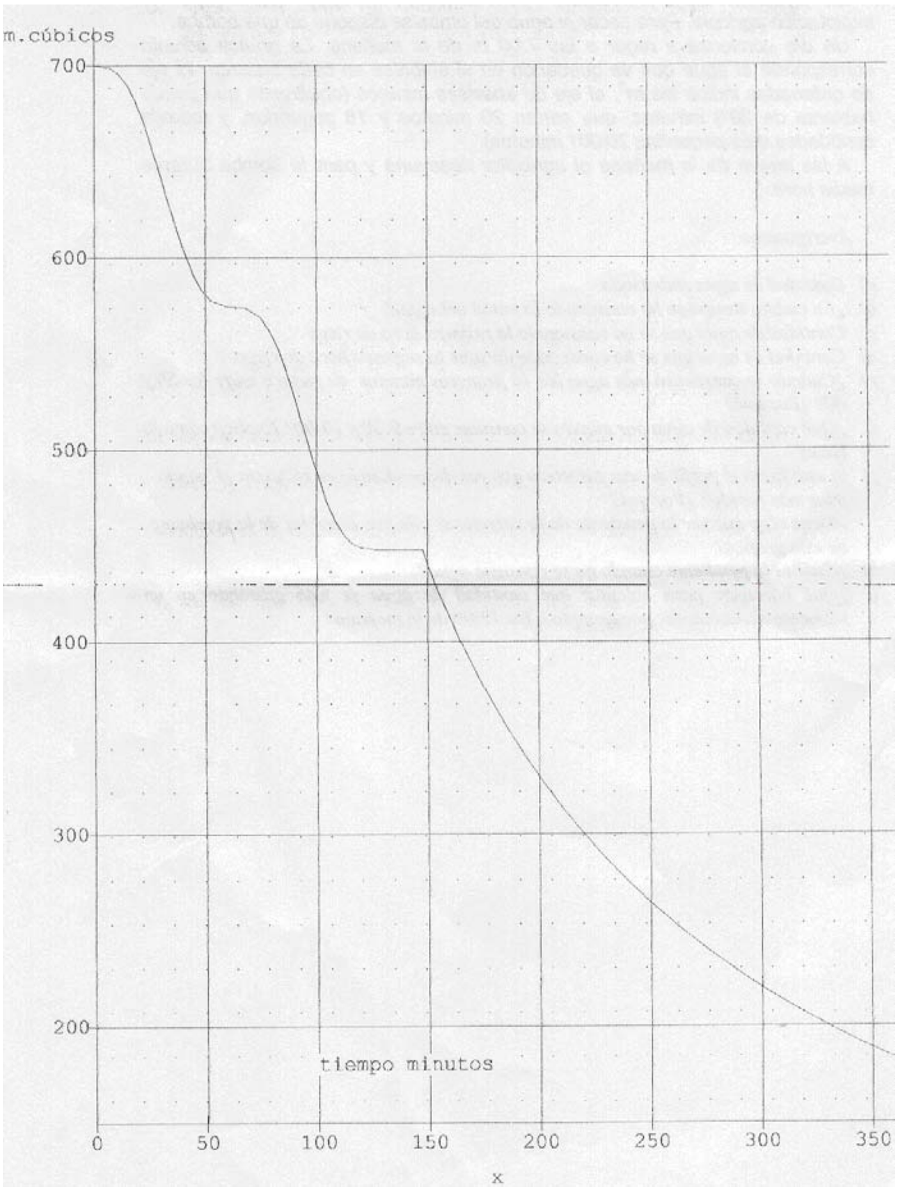
e) ¿Cuándo se consumirá más agua los 10 primeros minutos de riego o entre los 50 y 60? ¿Por qué?

f) ¿Qué cantidad de agua por minuto se consume entre 9: 30 y 10:00.? Explica como lo haces.

¿Se puede hablar de la pendiente de esta gráfica?

g) ¿Cuál es la pendiente cuando no se consume agua?

h) ¿Qué haríamos para calcular qué cantidad de agua se está gastando en un momento determinado, por ejemplo, a las 12:00 de la mañana?



Para resolver la tarea Juan añade las dos siguientes:

¿Cuántos m^3 se ha consumido por minuto en la primera hora?

¿Cuántos m^3 se ha consumido por minuto durante la segunda hora?

La información de que se dispone procede de la lectura de la gráfica, no se tiene la expresión algebraica de la función. Juan confecciona una tabla de valores de cocientes incrementales para la función,

X	299	299,5	299,99	....	300
$\frac{f(300)-f(x)}{300-x}$					

El diálogo en la clase con esta tarea es el siguiente:

P: ¿Cuántos metros cúbicos se han consumido por minuto en la primera hora? O sea, estamos calculando el consumo medio durante la primera hora. Entonces sería 125 lo dividíamos entre 60 y nos daría el consumo por minuto durante la primera hora.
Fijaros que ahora lo que vamos a... Vamos a fijar en un punto determinado, en un tiempo determinado, tenemos aquí las 12 y queremos calcular ¿qué agua se está consumiendo ahí? Ahora lo que hay que ver esto con una lupa <hace un zoom[5] sobre la parte de la gráfica en el entorno del punto 5> en el minuto de las 5 horas, vamos a ver cómo somos capaces nosotros de encontrar el consumo de este agua. En el minuto que llega de las 11:59, a las 11, a las 12 ¿eh? ¿Qué cantidad de agua se está consumiendo aquí? aquí tendríamos 300, y aquí tendríamos el minuto 299. ¿Seríamos nosotros capaces de encontrar el consumo de agua, en el minuto, en ese último minuto? Incluso ¿Podríamos aproximarnos un poquito más? ¿Y en el medio minuto? En vez de 299, considerar que esto es el minuto 299.5 ¿Podemos calcular nosotros el consumo de agua en el minuto, en el medio minuto ese último?
¿Todavía nos podemos aproximar un poquito más? En vez del medio minuto, podemos coger en el cuarto de minuto, en lugar de coger 299.5 ¿Podemos considerar que esto es el 299.75? Estamos calculando el consumo de agua en el cuarto de minuto. ¿Más todavía, podemos aproximarnos? cuando yo ponga aquí el 299.9, pues estamos calculando el consumo de agua en una décima de minuto y así sucesivamente ¿no? Y si ponemos aquí 299.99, estamos calculando el consumo de agua en una centésima de minuto, y si todavía consideramos esto más cercano, 299.999, estamos calculando el consumo de agua ¿en qué?
E: En una centésima.
P: ¿En una? en una milésima de minuto. Podemos seguir, manteniendo, manteniendo esta progresión que

[5] El zoom es manual, realizado por el profesor en la pizarra, no se hace uso de software informático.

estamos haciendo y cada vez ¿a dónde nos vamos acercando?

E: A 300.

P: Entonces ¿qué es lo que estamos haciendo por aquí?

E: El límite.

P: El límite. Aquí está el 300 y vamos a suponer que estamos calculando, estamos calculando esto de aquí, la pendiente estamos calculando de esta recta <recta secante a la curva en dos puntos (300, f(300)) y un punto en su entorno> y ¿vale?.Estamos calculando esto <diferencia de ordenadas, f(a)-f(x)>entre esto <diferencia de abscisas, a-x>, el consumo, esto partido por esto que habíamos dicho que era la tangente correspondiente a esta recta de aquí.

¿A qué va a tender esta recta? ¿A qué se va a ir aproximando? cuando yo quiero más chico quedaría todavía más chico y cuando todavía esté casi, casi, casi pegada, pues me va a quedar una cosa así, que es la tangente a la curva. Y esto lo que nos va a dar, el consumo, diríamos instantáneo, en ese instante Esto iba a coincidir precisamente con el ángulo que formaba la recta tangente a la curva con el eje de las X ¿Qué podríamos haber hecho nosotros para calcular el consumo en este instante? Pues calculamos la tangente, y sabiendo ese ángulo, calculamos su tangente.Dibujamos la tangente, dibujamos la tangente, aquí tenemos un ángulo o tendríamos un triángulo rectángulo <triángulo rectángulo formado por el eje x, recta tangente y una recta paralela al eje y> y calculamos <tangente del ángulo formado en el triángulo entre el eje x y la recta tangente>.

Entonces si dijéramos calcular, si dijéramos calcular aquí ¿Cuál sería el consumo, el consumo instantáneo en este punto, <se refiere a un punto concreto, 1 hora> que es en una hora, a lo mejor? bueno una hora aquí. El consumo en este punto ¿Cuánto sería? El consumo instantáneo, si quisiéramos calcular el consumo instantáneo en este punto de aquí arriba ¿qué tendríamos que hacer?

Dibujamos la tangente, dibujamos la tangente, aquí tenemos un ángulo o tendríamos un triángulo rectángulo y calculamos.

El discurso de Juan se centra en la idea de aproximación para modelar el paso al límite para obtener la recta tangente a la curva en un punto. Al día siguiente Juan recuerda a sus estudiantes sobre lo que había hecho hasta ahora. El objetivo de Juan era fijar las ideas que consideraba relevante para construir sobre ella el significado de "relación" (particularizada en la tasa de variación y recta secante) y la integración del significado analítico y gráfico, esta integración le permitió visualizar la idea de aproximación.

"Antes de que hagáis nada, por favor, os recuerdo lo que habíamos visto ya hasta ahora, ya para ir ordenando un poquito las ideas.

Si aquí teníamos un punto, un punto a , cuya imagen, cuya imagen es f(a), esto es lo que tenemos,

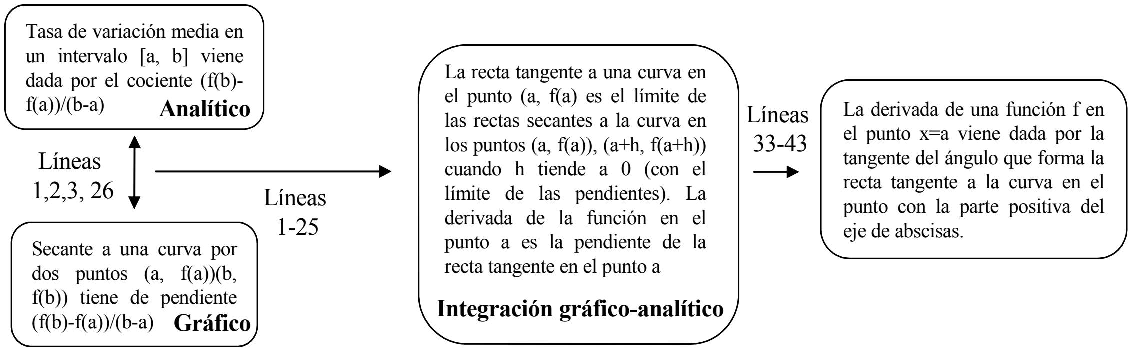
entonces lo que estábamos intentando calcular de alguna manera era la relación que había entre lo que aumentaba la ordenada y la variación que había con respecto de la abscisa
Esto coincidía con la tangente en un ángulo se aquí, la tangente geométrica, la tangente trigonométrica. Entonces lo que estamos viendo es, esto es lo que se va a llamar tasa de variación, (f(a)-f(x))/(a-x). Tal y como yo lo he dibujado la función. Esta es la tasa de variación que estábamos viendo y esto coincide precisamente con la tangente trigonométrica de este ángulo aquí, <dibuja la curva y la recta secante por dos puntos de ella> ¿qué vamos a hacer nosotros? Pues recordáis cuando estábamos viendo, cuando me dice, el agua en minutos, luego decía en una milésima de minuto. Lo que estamos haciendo es aproximando."

El contexto usado permite a Juan añadir un significado concreto a la "velocidad de cambio"que es determinado por la derivada matemática. La característica importante de esta viñeta radica en que Juan modela el mecanismo de interiorización de la idea de derivada de una función en un punto apoyándose en hacer visible el paso al límite (en punto específico) integrando lo geométrico y lo analítico.

Juan modela el mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto descrito por Asiala et al. (1997) relacionando la forma gráfica y la forma analítica. En forma gráfica la recta tangente a la curva en (a, f(a)) es el límite de rectas secantes a la curva por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) cuando b tiende a a (junto con el límite de las pendientes), y en la forma analítica la tasa de variación instantánea de la función f en el punto x=a es el límite de las tasas de variación media en (a, f(a)) y (b, f(b)).

Para Asiala et al. (1997) el objeto derivada de una función en un punto es $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ con los dos significados, gráfico (pendiente de la recta tangente a la curva en el punto) y analítico (variación instantánea de la función en el punto).

Describimos la modelación del mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto realizada por Juan usando los elementos matemáticos y modos de representación:



Las dos viñetas son ejemplos de modelaciones del mecanismo de interiorización, con integración de lo gráfico y lo analítico para el concepto derivada de una función en un punto, a través de la tecnología. Consideradas conjuntamente las viñetas 1 y 2 muestran un aspecto característico de la práctica de Juan: los intentos de hacer visible el paso al límite en el modo gráfico (de secante a tangente) y en el modo analítico (cociente incremental) con ejemplos distintos ($f(x)=x^2$; $x=1$, situación del estanque) mediante el uso de tecnología informática.

Juan, modela el mecanismo de interiorización en distintos puntos y funciones (la primera dada por una gráfica y su expresión analítica, la segunda dada por una gráfica que describe una situación) y parece tener en cuenta que es posible considerar dicha interiorización como un "todo" susceptible de realizarse en cualquier punto (en el primer caso y en el segundo, sin depender del punto en que se hace) y cualquier función (función y situación, no depende del tipo de función). Por tanto, para Juan la aproximación y paso al límite se consideran englobados como totalidad.

Este planteamiento permite a Juan apoyar la encapsulación de la idea de derivada de una función en un punto desde la interiorización del paso al límite en el caso de ciertas funciones y en determinados puntos.

La característica de modelar interiorizaciones en puntos y funciones diferentes es la que nos permite considerar conjuntamente las viñetas como una primera aproximación de Juan a la modelación del mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto.

Así, Juan considera el contenido matemático sobre la derivada de una función en un punto mediante las aproximaciones y el paso al límite. Este paso al límite da significado al concepto mediante la integración de las representaciones gráficas (secantes aproximando a la recta tangente) y analíticas (tasas de variación media aproximando a la tasa de variación instantánea). Juan pone de manifiesto un uso integrado de los modos de representación.

Viñeta 1	**Viñeta 2**
Interiorización $F(x)=x^2$, x=1 Paso al límite: -Geométrico (secantes) -Analítico (cocientes incrementales)	Interiorización Situación estanque Paso al límite: -Geométrico (secantes) -Analítico (cocientes incrementales)

Encapsulación de la idea de derivada de una función en un punto

V3: Modelación del paso al límite de la tasa de variación en un contexto analítico

La situación descrita en esta viñeta tiene lugar en la octava clase de la unidad didáctica. En esta tarea Juan va a modelar el paso al límite de la tasa de variación. La primera cuestión plantea la traslación entre modos de representación. La segunda cuestión aborda el significado de la derivada de una función en un punto como “medida de la variación”, la parte en la que plantea el procedimiento de aproximaciones aborda la modelación del paso al límite para obtener la derivada de una función en un punto. El contexto introducido en la tarea permite añadir un significado concreto a la “velocidad de cambio” que es determinado por la derivada matemática.

En la entrevista de planificación hace referencia a este tipo de tareas sobre la derivada de una función en un punto:

“mas que todo con ejemplos de, de velocidad, de variación y cosas de estas, lo ven en un intervalo de tiempo determinado, o sea, calcular una velocidad media en un momento determinado la pueden calcular pero y entonces pues dicen, pues sí, yo esto veo cada vez más chico, cada vez más chico y puedo ver en qué varían en un punto, entonces se hacen una idea”

En la misma entrevista de planificación para referirse a esta tarea Juan indica:

“aunque sea un poco pesado, pues coger la calculadora, pum, pum, y ver cómo se va aproximando, ¿qué pasa para puntos próximos? ¿no?, que es una cosa que puede ser familiar para ellos, puede decir pues, vaya lata que es tener que poner aquí esto, calcular lo otro. Aquí pongo, en general cualquier función, dependa del tiempo o no, se puede averiguar qué variación está sufriendo en ese instante o punto, al menos por aproximaciones”

Juan pretende trabajar la idea de aproximación para interiorizar el significado analítico de la derivada de una función en un punto como tasa de variación instantánea en el punto. Lo que pone de manifiesto la importancia dada por Juan a los significados.

Enunciado de la tarea:

Los coches a medida que aumenta la velocidad, aumenta el consumo de la gasolina. Puede considerarse que el consumo de gasolina en automóvil depende de la velocidad ya que varía en función de ésta.

Supongamos que la función que nos da el consumo de gasolina según la velocidad es:

$$c(v) = \frac{18 + 0.52v^2}{1000} \text{ litros}$$

(C(100) = 7 litros)

a) Dibuja la gráfica de esta función entre 0 y 150.

b) Si pasamos de una velocidad de 100 km/h a una de 120 km/h ¿Por cada km. de velocidad aumentado qué aumento ha tenido el consumo?

¿Y si pasamos de 100 km/h a 100.5 km/h?

Aplica el procedimiento de aproximaciones para averiguar qué variación está sufriendo el consumo de gasolina a la velocidad de 100 km/h.

En el desarrollo de esta tarea el profesor confecciona una tabla de valores de los cocientes incrementales del siguiente tipo:

X	100,5	99,9	99,99	....	100
$\frac{f(a) - f(100)}{a - 100}$					

El diálogo en el aula:

P: Si pasamos de una velocidad de 100 km/h a una de 120 , por cada km de velocidad aumentado, ¿qué aumento ha tenido el consumo?
Luego realmente la tasa de variación media entre 100 y 120 es de 2.3 litros entre los 20 km que hemos aumentado. Esto es lo primero que nos pedían.
El otro apartado lo que hacía era <u>aproximar</u> un poquito más ¿y si pasamos de 100 km/h a 105 km/h? ¿qué ocurriría aquí? Fijaros que ahora tenemos la tasa de variación media mucho más pequeña, vamos a poner aquí 100.5 ¿eso lo has calculado? ¿cuánto sale?

E:5.2

P: 5,2 Ahora, poner aquí <confeccionar la tabla de valores de cocientes incrementales>, aplicar aquí el procedimiento de aproximaciones para averiguar qué variación está sufriendo el consumo de gasolina a la velocidad de 100 km
¿Puedo yo <u>aproximarme</u> todavía un poco más a 100? Puedo hacerlo por arriba y por abajo. Aquí lo estábamos haciendo por arribas,un número un poquito <u>más próximo</u> a 100 que no llegue a 100, 99.9, y calcular, cuánto sería esto <cociente incremental en 99.9> , pero ya tendríamos que calcular la imagen de 99,9.

Vamos a poner aquí, por ejemplo, 99,99, venga, uno que tenga calculadora que calcule, primero tenemos que calcular cuál es la imagen de 99.99 aquí <en la fórmula de c(v) >.
Venga otro nada más, 99.999, aquí se tiene que aproximar <tabla de valores de cocientes incrementales>, aquí al valor de la derivada de esta función <último valor de la tabla de valores de cocientes incrementales>.

En la entrevista de desarrollo de la unidad didáctica, indica respecto a esta tarea:

"Que vean que, claro, que también con el mismo esquema que habíamos hecho, de poner cada vez el tiempo más pequeño, minutos, segundos, décimas de segundo, ver cómo iba variando el tiempo, podíamos decir, en una velocidad muy próxima a, me parece que era a 100, cómo va variando poquito a poco la velocidad y cómo va variando la función, cómo va variando en este caso el consumo de gasolina. Hemos dado en clase de la tasa de variación media con un intervalo entre 100 y 120 ¿cuál es la media de ¡uhm..! la media del consumo con respecto a la velocidad? ¿cómo va variando esto? deben calcular la diferencia de ordenada y dividirla entre la diferencia de abcisas, esto es, aquí vamos a llegar 20 km es la diferencia y en lo otro me sale, pero se divide entre 20 y ya está. Luego, automáticamente pues paso al esquema que habíamos visto de y del y tendiendo hacia un número, hacia 100, con un valor próximo a 100, este valor de 105, de 100 km a 100,5 km, o sea, yo cojo la tasa de variación media pero en un intervalo en el que solamente varía medio km. La misma idea que habíamos hecho con el espacio tiempo, pero con este aspecto y ahora decimos que aplicamos el procedimiento de aproximaciones que habíamos visto. En vez de 100.5, cada vez más próximo a 100 para que intentes calcular el consumo que está sufriendo de gasolina a los 100 km/h."

Juan subraya la idea de aproximación y paso al límite del cociente incremental (tasa de variación media) como una manera de dotar de significado a la noción de derivada en un contexto.

El uso de este tipo de tareas por parte de Juan y la manera en la que subraya los aspectos que considera relevantes (aproximación y paso al límite para dar significado a la derivada de una función en un punto) pone de manifiesto el interés de Juan en que los alumnos construyan el significado de la idea de derivada de una función en un punto independientemente del modo de representación usado. Como indica la entrevista de desarrollo la idea importante aquí es hacer "visible" para el alumno la idea de "aproximación sucesiva" y lo que ésta significa en relación a la idea de derivada de una función en un punto.

En esta viñeta se modela el mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto. Las acciones que se interiorizan son las dadas por las tasas de variación media en intervalos cada vez más pequeños, tal y como aparece en las líneas 1-11, estas acciones son descritas en Asiala et al. (1997):

> ***"1b. Analítico:*** *la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto"* (p. 407)

La modelación del mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto se infiere de las líneas 5-20 y de los comentarios de las entrevistas, dicha modelación se ajusta a la caracterización del mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto dada por Asiala et al. (1997):

> ***"2b. Analítico:*** *Interiorización de acciones del punto 1b cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños, es decir, la amplitud del intervalo tiempo se acerca cada vez más a cero..."* (p. 407)

La modelación de la interiorización de las acciones (tasa de variación media) se hace a través del paso al límite al completar las tablas de valores de los cocientes incrementales.

También podemos usar una descripción dada por Dubinsky (1996) en relación a que obtener la comprensión a nivel de proceso, es decir para realizar el mecanismo de interiorización, el individuo necesita repetir la acción y reflexionar sobre ella; en este sentido la construcción es interna al sujeto y ya no es necesario realizar todos los pasos para hacer la transformación. En la viñeta se repite la acción varias veces (cada vez que se completa un cuadro de la tabla de valores) y la reflexión se manifiesta cuando se pretende rellenar el último cuadro de la tabla de valores (el valor de la derivada de la función en el punto 100) que no es posible calcular directamente con la tasa de variación media sino que se debe "obtener" a partir de la tendencia, siendo necesaria la reflexión sobre lo que se va calculando. Además Zazkis y Campbell (1996) caracterizan el proceso del siguiente modo:

> "*Cuando la acción es entendida pero no tiene que ser realizada...*
> *la actividad se realiza en la mente y se tiene alguna comprensión*
> *de la influencia de las condiciones iniciales sobre los resultados.*"
> (pp. 545 y 547)

En esta viñeta la influencia de las condiciones iniciales, valores de x cercanos a 100, influyen en los resultados de las acciones (cálculos de tasas de variación media) sin realizar de manera efectiva todas las tasas de variación media. La modelación del mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto realizada por Juan usando los elementos matemáticos y modos de representación puede ser representada de la siguiente manera:

Tasa de variación media en un intervalo [a, b] viene dada por el cociente (f(b)-f(a))/(b-a) **Analítico**	Líneas 5-20 $\longrightarrow$	La derivada de una función f en el punto x=a viene dada por el límite de las tasas de variación media en los intervalos [a, a+h] cuando h tiende a 0. **Analítico**

Consideradas las tres viñetas conjuntamente muestran un aspecto característico de la práctica de Juan, las modelizaciones del paso al límite en:

- un contexto gráfico y analítico
- una situación general, y
- un contexto analítico

en las que lo importante es conseguir la interiorización de lo que significa la idea de "aproximación" puesta de manifiesto en lo que es el paso al límite de la "velocidad de cambio". Para hacer esto visible en las viñetas 1 y 2 se hace uso de la integración de lo gráfico y lo analítico. Este planteamiento le va a permitir a Juan apoyar la encapsulación de la derivada de una función en un punto desde la interiorización del paso al límite en el caso de funciones específicas y en puntos concretos.

Las tres viñetas en su conjunto ejemplifican dos aspectos característicos de la práctica de Juan relativa al contenido matemático: potenciar los significados de la derivada de una función en un punto, f ´(a), mediante la idea de "aproximación" a través del paso al límite en la modelación del mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto con el uso integrado de lo gráfico y analítico, y apoyar la modelación de la encapsulación de la derivada de una función en un punto a partir de la interiorización del paso al límite, lo que pone de manifiesto la idea de relación (entre diferentes formas de conocer).

V4: Modelación del paso al limite en contexto gráfico y analítico, el objeto f ´(a)

Esta viñeta recoge un segmento que sucede en la cuarta clase de la unidad didáctica. Juan modela el paso al límite en contexto gráfico y analítico. A partir de la función $f(x)=x^2$, se plantean varias cuestiones. La primera cuestión aborda la modelación del paso al límite en un punto concreto x=1 (similar a la tarea planteada en la viñeta 1). La segunda cuestión plantea lo mismo pero en otro punto concreto, x=2, y de ahí pasa a confeccionar una tabla de valores para la función derivada.

En la entrevista de planificación Juan indica respecto a esta tarea:

"halla la pendiente de la recta secante que corta a la gráfica en el punto de abscisa 1.5 y 2, pon el resultado anterior en la columna correspondiente y completa los demás. Lo que estamos viendo un poco, límite, pero calcular estos valores, f(x), el cociente incremental en puntos muy próximos a 2, y ahora que los vayan poniendo, aquí a qué va tendiendo, realmente calcular el límite, pero calcular el límite con aproximaciones"

En la misma entrevista en relación a cómo pasar de la derivada de una función en un punto a la función derivada Juan comenta:

"yo tengo una función, entonces qué pasaría si yo pongo aquí los valores y aquí pongo su derivada, aquí lo que vamos a obtener la tabla que corresponde realmente a una función, función que tiene una forma algebraica y que va a ser la función derivada. O sea, que van a dar el paso de esta manera de la tabla esta a la forma algebraica de la función"

Juan pretende fijar las ideas que consideraba relevante para construir sobre ella el significado de "relación" (entre la tasa de variación y pendiente de la recta secante) con la integración del significado analítico y gráfico, visualizando la aproximación independientemente del modo de representación.

Enunciado de la tarea:

Dada la función f(x)=x^2 . Completar la tabla de valores dada por las tasas de variación media en el punto x=1. Obtener f´(1). Repetir y obtener f´(2).

Para resolver la tarea Juan propone realizar la tabla siguiente:

X	0,9	0,99	0,995	....	1
$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$					

Representa gráficamente la función f(x).

Se confecciona la tabla de valores para x=1 y después se hace el límite de forma algebraica, $\lim_{a\to 1} {f(1)-f(a)}\big/{1-a}$ para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

A continuación empieza a construir una nueva tabla de valores, pero ahora es una tabla de valores de la función derivada del tipo siguiente:

X	0	1	-1	2
f ´(x)				

Después se confecciona otra tabla de valores de cocientes incrementales pero en el punto x=2:

X	1,9	1,99	1,999	....	2
$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}$					

Después se vuelve al límite de forma algebraica, $\lim\limits_{a\to 1} {f(2)-f(a)}/{2-a}$ para comprobar que se obtiene el mismo resultado. Ambos límites se obtienen algebraicamente a través de la indeterminada 0/0, factorizando los polinomios que resultan y simplificando, de esta forma se resuelve la indeterminada y se obtiene el valor de la derivada de una función en cada punto.

Esto le permite a Juan mostrar la vinculación entre los significados de la derivada de una función en un punto, analítico y gráfico, produciendose la integración de las representaciones. Juan pretende hacer visibles los significados mediante el paso al límite. La consideración "conjunta" de las aproximaciones aplicada a diferentes puntos "en forma de límite algebraico" pretende subrayar la consideración de la derivada de una función en un punto como objeto, puesto de manifiesto de manera general al utilizar una variable x.

El diálogo en la clase es el siguiente:

P: La tasa de variación media, cogíamos un punto próximo, calculábamos el valor, vamos a llamar el punto próximo, **a**, y aquí nos salía una recta que realmente no era tangente, pero ibamos acercando el punto **a** al punto 1 cada vez más, por ejemplo cogíamos ¿cuánto mide esta altura? Pues en el punto 1, este va a valer 1, 1^2 y en el punto a esto va a valer $\mathbf{a^2}$, luego la diferencia esto va a ser 1-$\mathbf{a^2}$ y esto de aquí

¿cuánto va a valer? Esto es lo que hacíamos, pues esto va a valer 1-**a**, entonces aquí obteníamos la relación que había entre lo que aumentaba el valor de la función y lo que aumentaba el valor de la x.

En un primer momento Juan recuerda a los estudiantes cómo calculaba la tasa de variación y luego subraya el proceso de aproximación.

Cuándo a se va acercando a 1 cada vez más ¿y si **a** vale 0.9? ¿y si vale 0.99? entonces ibamos poniendo estos valores <confeccionando la tabla de valores de cocientes incrementales>, aquí teníamos el valor, el valor de **a** y aquí poníamos, recordáis como lo poníamos (f(1)-f(a))/(1-a), estos valores y decíamos ¿cuánto nos va a salir cuando pongamos aquí el 1? ¿Cual es la variación de la función en el punto 1?

Si aquí poníamos 0.9, aquí va a salir una cosa, si aquí ponemos 0.99 otro valor, aquí ponemos 0.99999. Cuando ponga 0.9 al cuadrado, pues saldrá 0.81/(1-0.9) ¿A ver cuánto sale aquí?. Venga que otro haga éste <valor de la tabla para 0.99> y otro que haga el siguiente <valor 0.995>.

E: El primero da 1.9.

P: ¿el segundo?

E: 1.99.

P: ¿el tercero?

E: 1.999

P: Luego aquí ¿qué habrá que poner?

E: 2

P: 2, la pendiente de la tangente en el punto1, es decir, cuando sea la recta tangente la pendiente va a ser precisamente 2.

El "salto" que implica identificar el límite al cual tiende los sucesivos valores obtenidos permitía a Juan "hacer visible" de dónde procede el valor numérico. La manera en la que la manipulación algebraica encapsula todo el proceso es introducido a continuación.

Límite cuando tiende a 1 de (1-**a**^{2})/(1-**a**). Vamos a hacer ya el límite forma algebraica, para hallar la tangente.

Vamos a hacer ya el límite de forma algebraica, esto, si yo sustituyo **a** por 1 aquí pues evidentemente nos va quedar 0/0, entonces cuando había una indeterminación del tipo 0/0 ¿qué se podía hacer? Podíamos factorizarlo ¿eh? como estamos en un proceso de límite, que todavía esto no era 1, simplificamos arriba y abajo, cuando todavía no estamos llegando a cero, y luego podíamos obtener otro número, otro número, 1-**a**^{2} como es muy fácil factorizarlo os recuerdo que esto es diferencia de cuadrado (1-**a**)(1+**a**), y el de abajo se quedad igual 1-**a**, entonces ¿se puede simplificar algo? Estamos tendiendo a 1 ¿eh? no ha , todavía no es cero esto, entonces podemos simplificar arriba y abajo y lo que nos va a quedar límite cuando **a** tiende a 1 de 1+**a** y esto ¿que va a ser? 2,1+1 vale 2, luego eso sería, eso sería el valor de la derivada en el punto 1, lo que varía la función o sea , que si yo tengo aquí la función, la función, x, f(x) <Juan hace la tabla de valores de la función, x|f ´(x)> que pongo 0, 0 que pongo aquí 1, 1, que pongo aquí -1, 1 también, que pongo aquí 2 <confeccionar la tabla de valores de cocientes incrementales para x=2>.

La repetición del procedimiento, paso al límite, y la manipulación algebraica del cociente incremental permite a Juan mostrar el aspecto general de los significados construidos y empezar a hacer visible el significado de f´(a) (derivada de una función en un punto).

P: Si pongo aquí un 2 será esto mismo, vamos a poner esto mismo, esto mismo de aquí, será <límite algebraico de cocientes incrementales pero cuando x tiende a 2> f ´ (2)¿quién va a ser? Va a ser el limite. He puesto aquí, ahora, límite cuando a tiende **a** 2 de (f(2)-f(**a**))/(1-**a**).Nos centramos en el punto 2, cogemos un punto próximo, este es el valor ¿un punto próximo a 2? Aquí y ahora calculamos la tasa de variación media, y luego lo que hacemos es tender este punto, acercarse cada vez mas a 2, o sea que sería, cambiar todos estos valores. Sería coger aquí el 2 y cogemos un número que se vaya acercando a 2 ¿cuál puede ser? 1.9, el 1.99, el 1.999¿haber que valores nos salen?

E: 3.9.

P: 3.9, aquí nos a sale 3.9, éste saldrá a ver si lo acaba

E: 3.99.

P: 3.99 sale aquí ¿no? y aquí saldrá 3.999 luego ¿esto hacia dónde va?

P: Vamos a hacer el límite de forma algebraica también igual que antes, esto también es diferencia de cuadrado.

Estamos intentando calcular la pendiente de la tangente en el punto 2.

Será, aquí será ((2-**a**)(2+**a**))/(2-**a**), entonces esto se va con esto, y lo que nos va a quedar 2+**a** que cuando a se va acercando cada vez más a 2, esto se va acercando a 4 ¿Seremos nosotros capaces de encontrar la forma algebraica de esto? si yo pongo aquí x ¿qué tengo que poner aquí? o dicho de otra manera ¿a quien sera igual f ´(x)? O lo que es lo mismo, la función derivada de x^2.

La relación entre los dos casos calculados x=1 y x=2 permite a Juan hacer visible el significado de f´(a).

Sería esto mismo, pero en vez de poner 1 y 2, aquí en vez de poner 4 y en estas cosas, pues poner x, y ahora a se tiene que ir acercando a x, o sea, va a ser esto mismo que estamos haciendo aquí, no perdón, aquí, en vez de poner 4 pongo aquí una x, en vez de poner aquí un 2, pongo una x, habrá que calcular el límite cuando a tiende a x de... (x^2-a)/(x-a) ¿Somos capaces nosotros? Lo he puesto al revés a tiende a x ¿somos capaces nosotros de hacer este límite? ¿Cuánto valdrá $(x^2\text{-}a)/(x\text{-}a)$ cuando a se está acercando a x?.Estamos en un punto cualquiera, x, calculamos la ordenada y ahora cogemos un punto próximo a él, a, calculamos la ordenada, calculamos la tasa de variación media. O lo que es lo mismo la expresión algebraica de una función nueva que se va a llamar función derivada.... esto va a ser x+x, que vamos a tener 2 veces x, luego esto va a ser, esto cuando yo ponga aquí x, que voy a poner aquí 2 veces x, esta va a ser la función derivada ¿eh?

El paso de x=1 y x=2 a considerar una x genérica (generalización) es modelado por Juan para mostrar el significado de f´(a).

El paso de la derivada de una función en un punto (f´(a)) a la idea de "función derivada" (f´(x)) apoyándose en el significado de f´(a) es un objetivo explícito de Juan, realizado por la generalización a x. En la entrevista de desarrollo dice:

"O sea, que lo que era, era pasar de la derivada en un punto, que es una cosa que ya me imagino que los chavales estaban viendo, cómo pasábamos a lo que es la función derivada, que es dónde me parece a mí que están, que hay un poquito más de dificultad, el paso. A lo mejor pueden entender la tangente en un punto, pero ver que eso, que esas pendientes se pueden conseguir a través de una función, cuesta trabajo"

Esta manera de actuar del profesor muestra la modelización del paso al límite de la función en varios puntos (x=1, x=2). En este paso al límite se produce la plena integración de lo gráfico (rectas secantes) y lo analítico (las tasas de variación media). El confeccionar la tabla de valores de la función derivada es lo que permite modelar el mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto.

La modelación que hace Juan del mecanismo de interiorización es similar a las realizadas en las viñetas anteriores (1 a 3), en las que se caracteriza dicha modelación, haciendo visible el paso al límite a través de las tablas de valores de cocientes incrementales y las aproximaciones.

En relación a la inferencia de la modelación del mecanismo de encapsulación, Asiala et al. (1997) señalan:

*"**3a. Gráfico:** Encapsulación del proceso del punto 2a para producir la línea tangente como la posición límite de líneas secantes y también producir la pendiente de la línea tangente en un punto del gráfico de una función.*
***3b. Analítico:** Encapsulación del proceso del punto 2b para producir la razón de cambio instantánea de una variable respecto a otra.*
***4.** La encapsulación de los procesos de los puntos 2a y 2b, en general, produce la definición de derivada de una función en un punto como límite de cocientes de diferencias en un punto."* (p. 407)

En la viñeta, Juan modela la encapsulación cuando utiliza los límites de forma algebraica, como podemos ver en las líneas 23-34 y cuando usa el límite para construir la función derivada, en tabla de valores y usando la variable x, en las líneas 35 y 54 y siguientes.

Otra caracterización dada para este mecanismo de construcción viene dada por (Dubinsky, 1991):

"*Los objetos se pueden obtener a través de la reflexión sobre un proceso, y de este modo llega a ser consciente del proceso como una totalidad*." (p. 108)

En la viñeta, la reflexión sobre el proceso viene dada por la posibilidad de que la "modelación de la interiorización en un punto" es posible para cualquier otro punto, Juan lo hace primero en un punto concreto x=1 y posteriormente en otro punto x= 2.

Tomando en consideración la siguiente caracterización dada sobre la forma de construir los objetos a partir de procesos, según Dubinsky et al. (1994):

"cuando un estudiante se enfrenta a una situación en la que se le pide aplicar una acción, entonces tiende a encapsular un proceso en orden a tener un objeto sobre el que aplicar la acción."(p. 280)

Zazkis y Campbell (1996) indican que la necesidad de realizar una acción sobre un proceso existente, sirve como una precondición para la encapsulación. Además no sólo es un prerrequisito sino que también es una indicación de que la encapsulación se ha realizado. Esta idea la señalan Breidenbach et al.(1992) y no sólo de aplicar acción sino también de aplicar un proceso:

"Cuando es posible para un proceso ser transformado por alguna acción, entonces podemos decir que ha sido encapsulado como un objeto. De manera más general, en el mismo sentido de la afirmación anterior la encapsulación viene como necesidad de una acción o proceso." (p. 250)

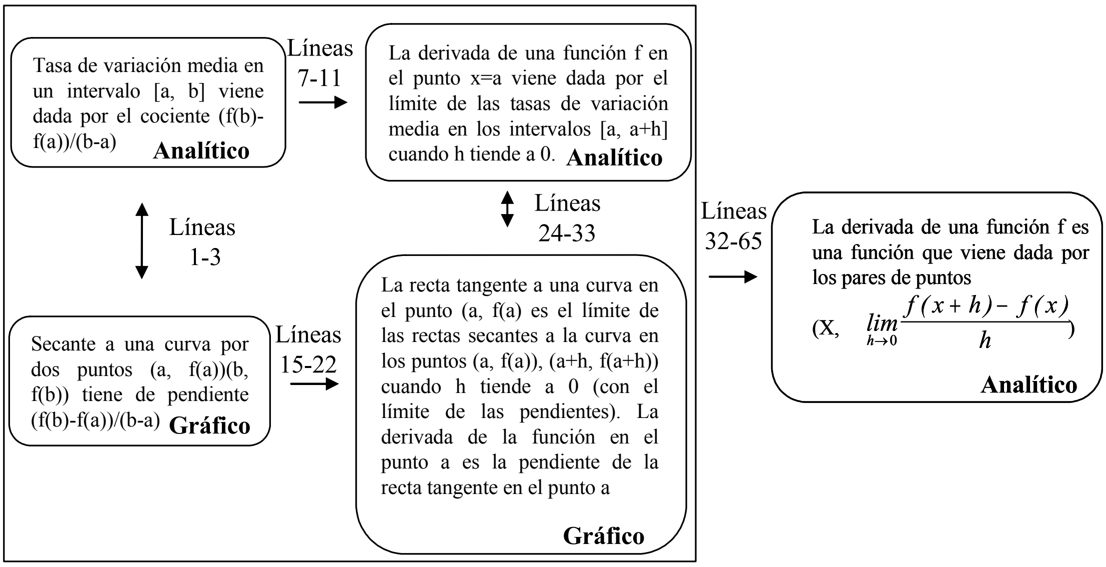
De manera más general Asiala et al. (1996) señalan que cuando se pretende aplicar una acción a un proceso, éste último se tiende a encapsular, y lo que sucede es que tres cosas pueden ocurrir al mismo tiempo:

"*1.- la necesidad de crear un objeto (en orden a aplicar una acción a un proceso),*
2.- la encapsulación del proceso para formar un objeto, y
3.-la aplicación de la acción al objeto." (p. 20)

En la viñeta aparece una modelación de una acción para el concepto función, esta modelación se da al confeccionar una tabla de valores (lo que significa centrarse en un punto en cada momento) para la función derivada, líneas 33 y siguientes (también puede comprobarse en la entrevista de planificación). De esta manera se modela la encapsulación de la derivada de una función en un punto. Además podemos considerar que se produce una modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada, sobre esto volveremos en el apartado 2.2 (sub-apartado 2.2.1) en la viñeta que denominamos 4 (bis)

En el cuadro 2.8 (página 74) se muestra esta situación (encapsular un concepto “derivada de una función en un punto” mediante la acción del concepto “función”) de la forma en que es descrita por Dubinsky et al. (1994) y Asiala et al. (1996) sobre una acción que se pretende aplicar a un proceso. En esta viñeta el proceso 1 es “derivada de una función en un punto”, y el proceso2/la acción se refiere a la noción de función (acción dada por tabla de valores de la función o proceso dado por usar la variable x).

Podemos representar gráficamente este aspecto de la práctica de Juan como sigue:



A partir de la consideración conjunta de las cuatro viñetas descritas podemos hacer algunas reflexiones. En conjunto o globalmente consideradas muestran el paso de la interiorización a la encapsulación para la idea de función derivada en un punto realizada a través de la integración de lo analítico y lo gráfico.

En primer lugar se observa que un aspecto característico de la práctica de

Juan es el uso integrado de los sistemas de representación que permite hacer visible las aproximaciones y el paso al límite. Desde las primeras viñetas se ha ido perfilando la integración entre lo gráfico (de rectas secantes a recta tangente) y lo analítico (tasas de variación y tasa de variación instantánea), de esta forma se modelan los mecanismos de interiorización de la derivada de una función en un punto. El uso de la tecnología le permite a Juan hacer este uso de los sistemas de representación haciendo "visible" la aproximación independientemente del modo de representación. La idea que subyace en la práctica de Juan es que sus alumnos interioricen lo que significa la idea de "aproximación" puesta de manifiesto a través del paso al límite. Este planteamiento permite a Juan modelar el mecanismo de encapsulación del concepto derivada de una función en un punto desde dichas interiorizaciones, el objeto que Juan potencia en los estudiantes engloba dos significados, "pendiente de la recta tangente" y "variación instantánea" en un punto.

En la organización de las distintos conceptos que conforman la noción de derivada, Juan hace explícito el paso de la derivada de una función en un punto ($f'(a)$) a la idea de "función derivada" ($f'(x)$) apoyándose en el significado de $f'(a)$ construido independientemente de la representación. Juan establece la relación entre los distintos conceptos sobre los que construye la noción de derivada. En la gestión del contenido matemático, Juan hace explícitas las relaciones entre la tasa de variación media y la recta secante, entre los significados de la derivada de una función en un punto en las distintas representaciones. Es importante para Juan que los conceptos matemáticos lleven vinculados significados en distintas representaciones.

En la práctica de Juan la idea de relación se pone de manifiesto de diversas formas, entre los significados de los conceptos y entre los distintos conceptos que aparecen en la noción de derivada.

Respecto a las formas de conocer, una característica de la práctica de Juan es que la construcción de la derivada de una función en un punto es progresiva: interiorización-encapsulación relacionadas. Esta construcción progresiva la denominamos “horizontal”. Juan organiza la construcción de la derivada de una función en un punto de forma que se potencien en los estudiantes las distintas formas de conocer el concepto relacionandolas entre sí, desde la modelación de la interiorización modela la encapsulación. Por tanto las relaciones entre las formas de conocer pone de manifiesto la forma en la que Juan ve la construcción del concepto. El concepto derivada de una función en un punto se construye de manera progresiva, como indicamos en el siguiente esquema teniendo como foco la forma de conocer potenciada en la práctica de Juan.

Acción ----▸ Proceso ----▸ Objeto

La derivada de una función en un punto

2.1.2.- La desencapsulación: Las condiciones de existencia de la derivada de una función en un punto como un objeto

El mecanismos de desencapsulación de la derivada de una función en un punto es modelado por Juan al tratar las condiciones de derivabilidad de una función en un punto. La modelación de este mecanismo lleva la integración de lo gráfico y lo analítico. En esta viñeta se pone de manifiesto las relaciones entre las distintas formas de conocer potenciadas por Juan, lo que ayuda a caracterizar el contenido matemático enseñado. El contenido matemático incluye significados vinculados en diferentes representaciones.

V5: El objeto f ´(a) como límite de cocientes incrementales y límite de rectas secantes

Esta viñeta recoge un segmento sucedido en las clases quinta y sexta de la unidad didáctica. A partir del objeto f ´(a) construido previamente (clase 2ª y 4ª) Juan modela la desencapsulación. Esta manera de actuar de Juan pone de manifiesto su interés en que sus alumnos puedan realizar una construcción de los significados de los conceptos teniendo en cuenta de manera implícita una determinada manera de entender la idea de “construcción del conocimiento” (que en la teoría APOS se expresa a través de la descomposición genética del concepto). La forma en que se manifiesta esto es la introducción de las condiciones en las que una función es derivable en un punto y la manera en que lo hace.

La desencapsulación que se modela en esta viñeta nos permite mostrar la “relación” entre las formas de conocer potenciadas proceso-objeto para f´(a).

Enunciado de la tarea:

Consideremos la función definida por

$$f(x = \begin{cases} x^2 \; si\, x \;\; en\,(-inf,\, 1] \\ x \;\; si\, x \;\; en\,(1\,,\, inf) \end{cases}$$ Hallar el dominio y representar gráficamente f(x).

Continuidad y derivada en el punto 1.

La primera parte de la tarea pide trasladar la representación del modo algebraico al modo gráfico. La segunda parte plantea la continuidad y derivabilidad de una función en un punto. La derivabilidad de la función en un punto se aborda desde la gráfica de la función y desde la expresión algebraica y la existencia de los límites laterales de los cocientes incrementales.

En la entrevista de planificación Juan dice en relación a los puntos donde no es derivable la función, con funciones definidas a trozos:

“Otras de las tareas, o de los puntos conflictivos que hemos puesto es ver qué pasaba en puntos que no era derivable, qué ocurría por aquí, qué ocurría por allí.

Qué cómo hace, por límites, por límites, no derivada por derivada, qué pasa por aquí, qué pasa por allí, pero no te vayas a creer que pongo yo mucho énfasis en eso, le pongo más énfasis en la gráfica, que lo vean, aunque ellos vean una cosa así pues ya van a saber que esto es una función a trozos,

algebraicamente, o sea, que de aquí a ponerlo de esta manera van a tener que poner, hasta aquí una recta, y hasta aquí va a ser una recta diferente.
Y aquí van a ver evidentemente que la pendiente es de una manera y aquí va a ser la pendiente otra, ahora como límite por aquí, límite por allí, pues también lo usaremos pero yo prefiero que lo entiendan mejor por aquí <se refiere a la gráfica>, prefiero vamos."

Juan hace lo siguiente para resolver la derivada: para calcular la derivada de f(x) en el punto 1 se confeccionan dos tablas de valores de cocientes incrementales, una con valores de x a la derecha de 1 y otra para valores de x a la izquierda de 1:

X	0,9	0,99	0,999	....	1
$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$					

X	1,1	1,01	1,001	....	1
$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$					

Se representa gráficamente la función y se razona utilizando la gráfica de la función y las tablas de valores, para cada valor de la tabla se representa la recta secante.

El diálogo en el aula es el siguiente:

P: Primero vamos a ver ¿Cuál es el dominio de la función?
E: R.
P: Venga, representarla en un minutito ¿Esa es la recta? ¿Y la parábola x^2?
Si nosotros queremos calcular la derivada en el punto 1, ¿qué vamos a hacer? un trozo de parábola hasta el 1, y a partir del 1, un trozo de recta.
Lo que queremos intentar calcular es la tangente en este punto, busquemos un punto próximo a 1 por un lado nos va a salir una cosa, y por otro lado la pendiente va a ser otra, la pendiente de esta recta vale 1, pero cuando yo calcule, cuando yo ponga a un poquito más pequeña que 1, esa pendiente no va a ser, por ese lado no va a ser 1.

Juan pone en antecedentes a los alumnos sobre el significado geométrico de las aproximaciones laterales. Hacer explícito esto le permite modelar la desencapsulación del objeto $f'(a)$ (derivada de una función en un punto) en el contexto de determinar la existencia de $f'(a)$.

Primero damos valores próximos a 1, pero que sean un poquito más pequeños , 0.9 ó 0.99 ó 0.999. a ver qué valores nos va saliendo aquí la tasa de variación, <en la tabla de valores de cocientes incrementales> y que qué valor tengo que poner aquí <el último valor de la tabla, el valor de la derivada lateral>

Y luego estos mismos, pero en vez de poner un poquito más pequeños que 1, vamos a poner números que se vayan acercando a 1, pero superiores. por ejemplo, 1.1, 1.01, 1. 001 y aquí <último valor de la tabla> coloco el 1, a ver qué tengo que poner aquí, y a ver, que casi a ojo lo podemos ver.

Juan intenta hacer visible a sus alumnos el comportamiento distinto del cociente incremental alrededor del punto x=1 pero haciendo uso de los significados integrados de lo analítico y gráfico de $f'(a)$.

Fijáos que la tasa media de variación o variación media cuando estamos cogiendo puntos muy próximos a 1 pero un poco más pequeños que 1, esto nos va tendiendo a 2 esto es lo que significa es que la pendiente de la tangente a esta curva valores un poquito más pequeños que 1, esta pendiente va a ser precisamente 2.

Ahora, si cogemos valores un poquito más grandes que 1, ¿a ver cómo nos quedamos? Vamos, eso lo ha hecho la calculadora. Bueno, ahí siempre va a ser 1, porque precisamente es una recta que tiene pendiente constante, luego ahí precisamente va a ser 1.

Si nosotros calculamos la pendiente en el punto 1, pero vamos cogiendo valores por la derecha, pues nos sale 1, y si vamos cogiendo valores por la izquierda nos sale 2, a esto es lo que le vamos a llamar nosotros, a este límite, f(1) menos f (a) partido por 1 menos a, al límite cuando estamos cogiendo a tiende a 1, pero un poquito mayores que 1, lo expresábamos poniendo aquí un +, esto es 1^+, esto es lo que le vamos a llamar nosotros la derivada en el punto 1 pero también por la derecha.

En el que nos vamos acercando a 1 pero por valores inferiores vamos a llamar nosotros la derivada de la función pero por la izquierda, y lo vamos a representar.

Juan modela la idea de derivabilidad en un punto haciendo explícito en este ejemplo lo que significa que las aproximaciones laterales no coincidan. Esta manera de actuar pone de manifiesto el uso que hace Juan de los significados para explicar lo que significa la existencia de $f'(a)$. Es una manifestación de la modelación de la desencapsulación del objeto. El uso de los significados de los objetos construidos para explicar las condiciones de existencia del propio objeto es una característica de la práctica de Juan. Así en el discurso en el aula Juan continua diciendo:

Para que sea derivable, lo que tiene que ocurrir es que ambas cosas,¡eh! coincidan. Cuando una función está bien perfilada en la gráfica, en estos puntos, no hay problema,pero cuando tiene ángulos, pues evidentemente en estos puntos si voy por la derecha me sale una pendiente positiva, y si voy por la izquierda me sale una pendiente negativa, por lo que en estos puntos nunca va a ser derivable. Si me acerco por un lado o por otro, la función no van a coincidir las tangentes, por tanto no va a tener una tangente en este punto propiamente dicho, y por tanto no va a ser derivable.

Aunque podamos calcular estos límites < límites laterales> y existan como existen aquí, como el 1 y el 2, pero como no coinciden, pues, si me acerco por un lado o por otro, la función no van a coincidir las tangentes, por tanto no va a tener una tangente en este punto propiamente dicho, y por tanto no va a ser derivable

En la entrevista de desarrollo Juan subraya la importancia de hacer visible a los estudiantes las características de los puntos en los que no existe f ´(a). Su mención de no recurrir a cálculos de límites "engorrosos" sino hacerlo a través de mostrar la "idea" es una manifestación de la característica de la práctica de Juan apoyada en el uso de los significados para hacer visible las condiciones de existencia:

"Bueno, pienso ver algo más, pienso insistir un poco en lo que eran las derivadas laterales. En fin, aunque creo que este no es un concepto difícil en realidad es bastante fácil, dónde no será derivable, los vértices, los puntos angulosos, eso creo yo que es más fácil que los alumnos lo aprendan con algún ejemplo, si hace falta recurrir a los límites recurrimos, si podemos evitarlos, los evitamos, en fin, que se queden con la idea".

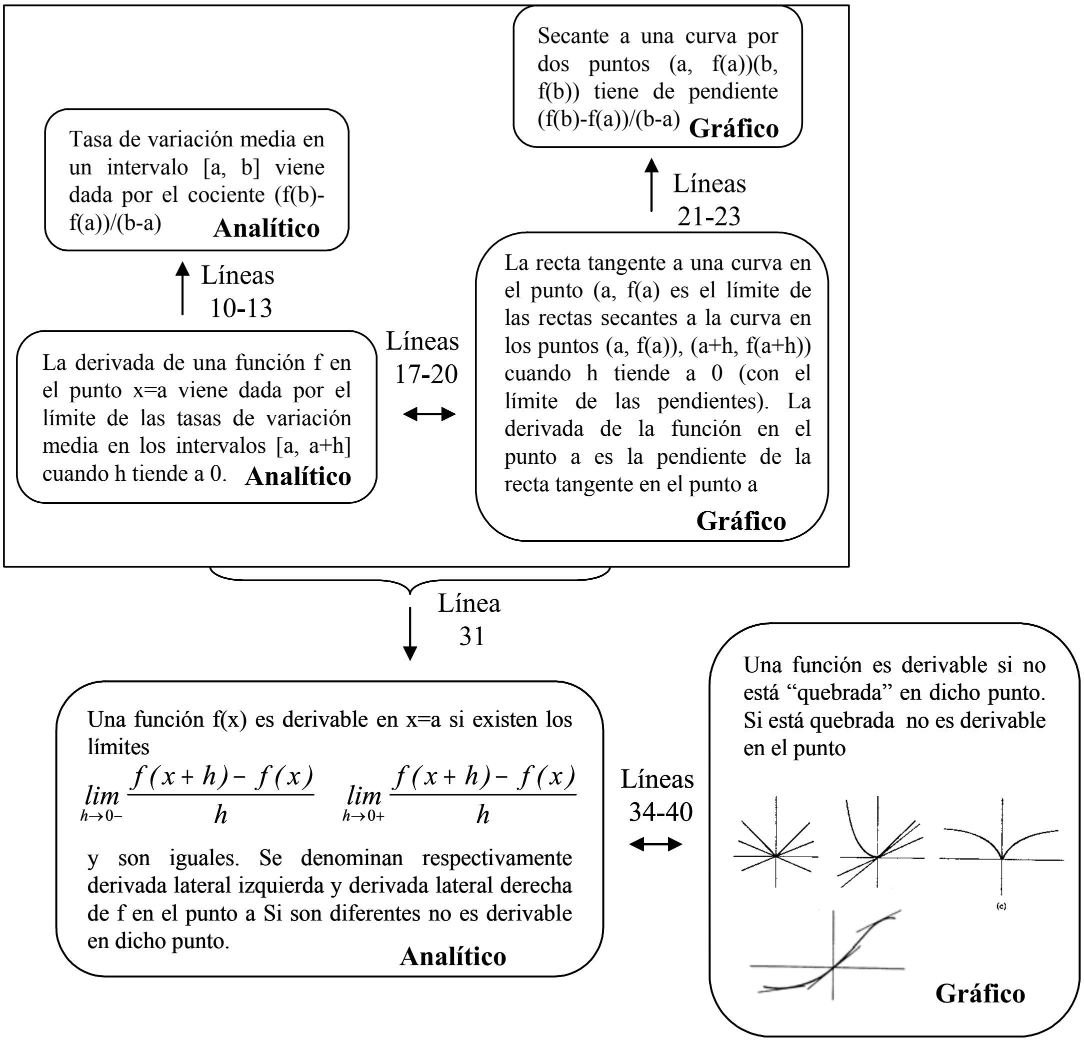
En esta viñeta podemos hablar de desencapsulación ya que Juan justifica la necesidad de hablar de las "condiciones para que exista la derivada". Un rasgo importante de esta tarea es la discusión sobre la derivabilidad en x=1. En el caso de que la función que Juan hubiera presentado fuera derivable en el punto considerado habría más dificultades para poder identificar la modelación del mecanismo de desencapsulación a pesar de que los alumnos hubieran “tenido que volver al proceso” de igual forma.

Por tanto, la clave para interpretar que esta situación es una modelación del mecanismo de desencapsulación del objeto f´(a) es la **no** derivabilidad de la función usada como ejemplo en el punto x=1. Esto es lo que permite a Juan hablar de que es necesario considerar las condiciones en las que existe “algo” (el objeto f ´(a)). Esta discusión de las condiciones de existencia (tanto como límite de cocientes incrementales, como límite de rectas secantes) es lo que permite “afianzar” la comprensión de los estudiantes de la derivada de una función en un punto como objeto.

En la viñeta se parte de que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente (línea 6) y para ello con la gráfica de la función se va a obtener el límite, pero a ambos lados y con aproximaciones de cocientes incrementales. La inferencia sobre la modelación del mecanismo de desencapsulación se basa en que el objeto derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente ya se ha construido, el objeto “pendiente de la recta tangente” se caracteriza como se señala en Asiala et al. (1997) por el límite del cociente incremental (como pendiente de una recta secante a la curva) donde ese límite es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. En las líneas 6-9 se considera el límite a través de la aproximación por los dos lados, esta caracterización con “aproximaciones” es la modelación del paso al límite que al no existir le permite a Juan la discusión sobre la existencia del objeto.

Planteada por Juan las condiciones para existir el “objeto” la presencia del paso al límite (proceso) nos indica la modelación de Juan del mecanismo de desencapsulación. En las siguientes líneas, 10-30 se hacen las aproximaciones laterales, en las que basamos la inferencia de la modelación del mecanismo de desencapsulación de la derivada de una función en un punto. Por último en las líneas 31-40 Juan indica la condición para que una función sea derivable en un punto a través de las derivadas laterales. En la entrevista de planificación Juan ha hecho referencia al predominio de hacerlo con las gráficas. Hay una integración de lo gráfico y analítico al abordar la existencia de los límites junto con las rectas secantes a ambos lados.

Gráficamente podemos representar este aspecto de la práctica de Juan de la siguiente manera:



Las manifestaciones externas de la modelación de la desencapsulación de f´(a) son “similares” a las que se presentan al modelar el mecanismo de interiorización. Esto no es un hecho que debiera parecernos extraño, ya que ambos mecanismos, interiorización y desencapsulación, desembocan en la forma de conocer proceso. La diferencia en las modelaciones de ambos mecanismos de construcción las encontramos en el punto de partida. En la modelación del mecanismo de interiorización Juan parte de la forma de conocer acción y en la modelación del mecanismo de desencapsulación partimos de la forma de conocer objeto. El siguiente cuadro figura describe esta característica:

Cuadro 4.4 Modelo APOS: relaciones entre “proceso” y mecanismos de construcción

En este segmento de enseñanza el aspecto de la tarea que le permite a Juan la modelación de la desencapsulación es poner el centro de discusión en el estudio de las condiciones de existencia del objeto f ´(a), utilizando una función que no es derivable en un punto. Como hemos indicado antes, si la función hubiese sido derivable en el punto habría dificultades para diferenciar las modelaciones de los mecanismos de interiorizar y desencapsular.

Podemos hacer algunas reflexiones sobre la práctica de Juan a partir de la consideración conjunta de las cinco viñetas descritas.

Juan pretende hacer visible la idea de aproximación y vincular mediante la de aproximación y paso al límite los significados del objeto f ´(a). El contenido matemático de “la derivada de una función en un punto” asocia diferentes significados integrando lo gráfico y lo analítico. La práctica de Juan gestiona el contenido matemático para que los alumnos construyan el significado de la idea de derivada de una función en un punto independientemente del modo de representación usado. La idea de “generalización” mediante el uso de la variable x (manipulación algebraica) conecta con la función derivada.

En la práctica de Juan subyace la idea de “relación”en las matemáticas, aparece respecto a los sistemas de representación (y significados asociados en cada uno de ellos), y a las distintas formas de conocer el concepto f ´(a). Las distintas relaciones entre formas de conocer facilitan a Juan el uso de los significados. La relación entre los conceptos f ´(a) y f ´(x) empieza a perfilarse en la práctica de Juan.

Un aspecto de la práctica de Juan es que la construcción progresiva horizontal de la derivada de una función en un punto, parte de potenciar la derivada de una función en un punto como acción hasta llegar a construir el objeto f ´(a). Por lo tanto, en la construcción del concepto “derivada de una función en un punto” aparece implícitamente la modelación de la descomposición genética del mismo, estableciendo relaciones entre las distintas formas de conocer, y cuando es posible esta relación se manifiesta en ambos sentidos (encapsulación-desencapsulación).

Además se perfila una construcción progresiva (vertical) entre conceptos que conforman la noción de derivada ya que hemos podido empezar a vislumbrar que la función derivada va a ser construida a partir de la derivada de una función en un punto.

2.2.- De la “derivada de una función en un punto” al “operador derivada” a través de la “función derivada”

En este apartado vamos a describir cómo Juan modela los mecanismos de construcción de f ´(x) (función derivada) a partir del objeto f ´(a) y cómo usa la función derivada para abordar las modelaciones del operador derivada. La construcción de la función derivada es progresiva (horizontal) en el mismo sentido en que lo hizo para la idea de f ´(a). Juan comienza modelando f ´(x) como acción, y modela los mecanismos de interiorización y de encapsulación para llegar a potenciar en los estudiantes la construcción de f ´(x) como objeto.

Mediante la función derivada Juan pone de manifiesto la existencia del operador derivada, para el que modela el mecanismo de interiorización en un contexto analítico.

La práctica de Juan va a potenciar en los estudiantes una construcción de la función derivada como objeto integrando lo gráfico y lo analítico; y de una construcción del operador derivada como proceso en un contexto analítico.

Identificamos de manera precisa en la práctica de Juan un nuevo matiz relativo a la idea de construcción progresiva de los significados. En el caso del significado de $f'(a)$ consideramos que la práctica de Juan permite un desarrollo de la comprensión progresiva, indicando con esto que la modelación de la descomposición genética parte de la modelación de acciones, interiorización... y sigue el orden prescrito en el modelo APOS, referido al desarrollo del concepto (desarrollo progresivo de tipo “horizontal”). Este desarrollo progresivo sigue presente en la introducción de la función derivada. Además si consideramos la noción de derivada conformada por los conceptos: derivada de una función en un punto, función derivada, y operador derivada, la práctica de Juan permite un desarrollo de construcción progresiva entre los distintos conceptos. Entendemos este desarrollo progresivo cuando un concepto se construye a partir de otro, hace referencia a relaciones entre distintos conceptos. Este tipo de desarrollo del concepto lo hemos denominado progresivo “vertical”.

En este apartado las características de la práctica de Juan se hacen más explícitas: integración de los modos de representación gráfico y analítico; el desarrollo de los conceptos es progresivo de forma horizontal (en el concepto) a partir de significados y el desarrollo de conceptos es progresivo (entre distintos conceptos). Estas características de la práctica vienen justificadas por determinadas concepciones de las matemáticas escolares y sobre el aprendizaje de las matemáticas de Juan.

2.2.1.- La construcción del significado de la función derivada (f ´(x)): del paso al límite en un punto a la generalización en todos los puntos

La construcción de la derivada de una función en un punto se ha apoyado en la modelación del paso al límite y la aproximación, y la construcción de la función derivada se va a apoyar en la generalización a todos los puntos del paso al límite. A partir de la función derivada Juan introduce el operador derivada.

La función derivada es una función siendo los significados asociados a los valores de la función, tasa de variación instantánea y pendiente de la recta tangente en un punto. El operador derivada es introducido por Juan a partir de la función derivada, modelando primeramente el mecanismo de interiorización para potenciar en los estudiantes el operador derivada como proceso, y esto desde dos caminos, mediante una aproximación por límites y, usando reglas.

V4(bis): De la derivada de una función en un punto a la función derivada en contexto analítico

Esta viñeta es una parte de la viñeta 4 anterior en la que se recoge un segmento de la cuarta clase de la unidad didáctica. Reproduciremos aquí el protocolo en el que Juan modela la interiorización de la función derivada para potenciar en los estudiantes la concepción proceso de f ´(x).

Esta viñeta muestra la construcción de la función f ´(x) a partir de los significados de f ´(a), aspecto que caracteriza la práctica de Juan. Esto le permite a Juan relacionar los conceptos de derivada de una función en un punto y función derivada, de esta manera la construcción de la noción de derivada que realiza Juan es progresiva vertical.

En la entrevista de planificación en relación a cómo pasar de la derivada de una función en un punto a la función derivada Juan comenta para explicitar la relación:

“yo tengo una función, entonces qué pasaría si yo pongo aquí los valores y aquí pongo su derivada, aquí lo que vamos a obtener la tabla que corresponde realmente a una función, función que tiene una forma algebraica y que va a ser la función derivada. O sea, que van a dar el paso de esta manera de la tabla esta a la forma algebraica de la función”

Aquí incluimos la parte de la tarea en la que se confecciona la tabla de valores de la función derivada ya que queremos hacer explícito en este informe la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada y cómo esta modelación se apoya en f´(a). La tabla es:

X	0	1	-1	2
f ´(x)				

El protocolo en el aula:

P: Luego eso sería, eso sería el valor de la derivada en el punto 1, lo que varía la función o sea , que si yo tengo aquí la función, la función, x, f´(x)<Juan hace la tabla de valores de la func. derivada, x|f ´(x)> que pongo 0, 0 que pongo aquí 1, 1, que pongo aquí -1, 1 también, que pongo aquí 2 <confeccionar la tabla de valores de cocientes incrementales para x=2>. Si pongo aquí un 2 será esto mismo, vamos a poner esto mismo, esto mismo de aquí, será <límite algebraico de cocientes incrementales pero cuando x tiende a 2> f ´ (2)¿quién va a ser? Va a ser el limite. He puesto aquí, ahora, límite cuando a tiende **a** 2 de (f(2)-f(**a**))/(1-**a**).Nos centramos en el punto 2, cogemos un punto próximo, este es el valor ¿un punto próximo a 2? Aquí y ahora calculamos la tasa de variación media, y luego lo que hacemos es tender este punto, acercarse cada vez mas a 2, o sea que sería, cambiar todos estos valores. Sería coger aquí el 2 y cogemos un número que se vaya acercando a 2 ¿cuál puede ser? 1.9, el 1.99, el 1.999¿haber que valores nos salen?
E: 3.9.
P: 3.9, aquí nos a sale 3.9, éste saldrá a ver si lo acaba
E: 3.99
P: 3.99 sale aquí ¿no? y aquí saldrá 3.999 luego ¿esto hacia dónde va?

Juan intenta hacer visible hacia dónde tienden los valores usando la tabla, visibilidad de la aproximación.

Vamos a hacer el límite de forma algebraica también igual que antes, esto también es diferencia de cuadrado. Estamos intentando calcular la pendiente de la tangente en el punto 2. Será, aquí será ((2-**a**)(2+**a**))/(2-**a**), entonces esto se va con esto, y lo que nos va a quedar 2+**a** que cuando a se va acercando cada vez más a 2, esto se va acercando a 4

A partir de este momento Juan intenta hacer visible el paso a una x general. Es el intento de hacer concebir las acciones anteriores como proceso. La introducción de f´(x) para $f(x)=x^2$ se hace usando el lenguaje.

¿Seremos nosotros capaces de encontrar la forma algebraica de esto? si yo pongo aquí x ¿qué tengo que poner aquí? o dicho de otra manera ¿a quien sera igual f ´(x)? O lo que es lo mismo, la función derivada de x^2.

Sería esto mismo, pero en vez de poner 1 y 2, aquí en vez de poner 4 y en estas cosas, pues poner x, y ahora a se tiene que ir acercando a x, o sea, va a ser esto mismo que estamos haciendo aquí, no perdón, aquí, en vez de poner 4 pongo aquí una x, en vez de poner aquí un 2, pongo una x, habrá que calcular el límite cuando a tiende a x de... $(x^2-a)/(x-a)$ ¿Somos capaces nosotros? Lo he puesto al revés a tiende a x ¿somos capaces nosotros de hacer este límite? ¿Cuánto valdrá $(x^2-a)/(x-a)$ cuando a se está acercando a x?.Estamos en un punto cualquiera, x, calculamos la ordenada y ahora cogemos un punto próximo a él, a, calculamos la ordenada, calculamos la tasa de variación media. O lo que es lo mismo la expresión algebraica de una función nueva que se va a llamar función derivada.... esto va a ser x+x, que vamos a tener 2 veces x, luego esto va a ser, esto cuando yo ponga aquí x, que voy a poner aquí 2 veces x, esta va a ser la función derivada ¿eh?

El énfasis en el uso de una x general se apoya en menciones reiteradas a valores particulares x=2, x=4... Esta manera de modelar la interiorización de las acciones que calculaban los valores f ´(2), f ´(4) para obtener el proceso f ´(x) es una característica de la práctica de Juan justificada por su concepción de la forma en que los estudiantes construyen el significado matemático.

Confeccionar Juan la tabla de valores de la función derivada f ´(x) y el lenguaje que usa permite modelar el mecanismo de encapsulación de la derivada de una función en un punto (viñeta 4). En esta viñeta nos interesa la modelación de la interiorización de la función derivada, que Juan lleva a cabo intentando generalizar a todos los puntos mediante la variable x.

Considerando el concepto de función (para referirnos a la función derivada), Dubinsky (1996) considera que cuando se conoce la función como acción poco puede hacerse además de evaluarla en puntos concretos, la función como proceso se caracteriza de la siguiente forma:

> *"Una concepción proceso permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe una o más entradas, o valores de las variables independientes, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa las salidas, o los valores de las variables dependientes, como resultado."* (p. 35)

De manera más precisa, referente a la función derivada, Asiala et al. (1997) se refieren a la función derivada como acción cuando para obtenerla, el estudiante se va centrando en puntos concretos en cada momento. Zandieh (2000) indica que la función derivada como proceso se caracteriza por considerarse pasando por infinitos valores de entradas (lo que denominamos en el título del apartado "generalización a todos los puntos") y para cada uno determinando un valor de salida dado por el límite de los cocientes incrementales en cada punto.

A partir de las caracterizaciones de la interiorización, inferimos que en el segmento recogido en esta viñeta se modela por Juan el mecanismo de interiorización para la función derivada. La generalización a todos los puntos se identifica en la viñeta cuando cambia de los valores concretos en los que calcula el límite a tomar una variable genérica x, todo en un contexto analítico.

Respecto a los elementos matemáticos y modos de representación podemos verlos en la viñeta 4 del punto 1.1, al abordar la derivada de una función en un punto.

V6: De la derivada de una función en un punto (f´(a)) a la función derivada (f´(x)), integración de lo gráfico y lo analítico

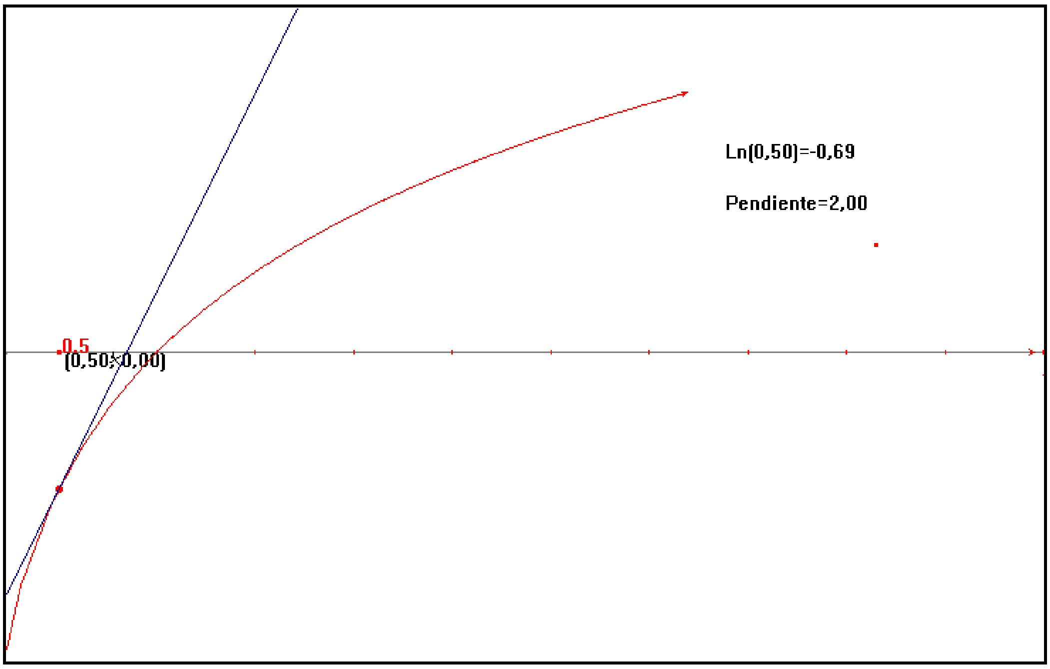
Esta viñeta recoge un segmento sucedido en la tercera clase de la unidad didáctica. En esta tarea Juan modela el mecanismo de interiorización de la función derivada, a partir de la generalización en todos los puntos de la derivada de una función en un punto. Juan obtiene la función derivada de una función (ln (x)) utilizando el programa Cabri II.

Enunciado de la tarea:

Obtener la función derivada de y=ln(x) utilizando una figura construida con Cabri II, gráficamente y si es posible obtener la expresión algebraica.

Juan pone a disposición de los estudiantes una figura de Cabri II (realizada por él) para que puedan manipularla (usando el “arrastre” de puntos). Usa la figura de Cabri II y calcula la derivada en varios puntos. Con la figura obtiene la recta tangente en un punto y el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto, así como el valor de la función en dicho punto. Los puntos en los que se obtiene la derivada son 1, 2, 0.5 y completan una tabla de valores de la derivada. Termina el segmento cuando Juan indica como las posibilidades de Cabri a través de varias herramientas permite la generalización a todos los puntos de la derivada de una función en un punto y obtener la función derivada.

La figura de Cabri es la siguiente:



x	f ´(x)
5	
1	

El diálogo en el aula es el siguiente:

P: Me imagino que todo el mundo, esa función la reconoce ¿Cuál es esa función?
E: El logaritmo.
P: ¿el? el logaritmo neperiano… si cogemos aquí este punto y lo vamos variando <punto rojo marcado con 0.5> ¿Cómo va saliendo la recta?
E: Tangente a eso.
P: Tangente a esto, entonces la pendiente de esto, eso es la derivada.

Con esta interacción con sus alumnos Juan intenta hacer visible en este momento el significado geométrico de f´(a). Aunque el objetivo inicial es llegar a identificar la función f´(x) en su forma algebraica, Juan intenta que realmente se construya desde la interiorización del significado de f´(a).

E: ¡ah! O sea, cuando la tangente está, cuando la recta está tangente a la curva esa, la pendiente es la derivada.

P: La pendiente es la derivada.

¿Cuál sería la derivada del logaritmo neperiano en 1, por ejemplo? en 1.¿Qué tendríamos que hacer nosotros para calcular la derivada del logaritmo neperiano en 1?. En 1 que está en el eje.

Pues llevar este punto a 1 <el punto del eje 0.5, arrastralo a 1> .ahora no estamos aproximando, sino lo que hace únicamente esta figura es obtener, obtener la recta tangente, entonces la tangente en el 1,y dice que aquí no sale, bueno aquí he puesto yo 1.02, sale 0.95

Cuando lo aproximo un poquito más, este punto, cuando lo aproximo a 1, 1, pues nos va salir 1. No, no, aquí, me he pasado un poquito, pero tener en cuenta la imprecisión del programa, vamos, que no es exacto, exacto.

La derivada, por ejemplo, en 2 ¿Cuánto sería? Pues cogemos el punto 2, ves, ves, y voy calculando la pendiente de esta recta tangente cuando llegue a 2, aquí la tengo ¿Qué pendiente tengo? 0.48, pues esa es la derivada en el punto 2, la derivada, calculamos la tangente y ahora la tangente trigonométrica de ese ángulo.

¿Cuánto sería la derivada del logaritmo neperiano en 0.5? Lo que estamos viendo ahora ya, ya no lo estamos haciendo por aproximaciones ¿eh? sino que automáticamente y nos da la pendiente y la tangente. Nada más que tenemos, nada más que tenemos que aproximar el punto al que nos aparece ahí y nos da la tangente ¿Qué?

E: 2

Con este tipo de expresiones y apoyado en las facilidades dadas por el software, Juan intenta que sus alumnos lleguen a conocer como proceso primero f ´(a) y luego variando el punto x=a, la función f ´(x).

P: Efectivamente sale a 2, sale 2, entonces ¿seríamos nosotros capaces de calcular?, o sea, si yo pongo aquí, hemos dicho, x, si yo pongo aquí f ´(x) <tabla de valores para x|f ´(x)> por ejemplo. Si yo pongo 0.5 sale un 2, si pongo 1, habéis visto que sale un 1, si pongo aquí todos los valores ¿Podré yo encontrar, podré yo encontrar la forma algebraica de esta función? Lo que si nos va a dar el programa qué forma va a tener. A ver si somos capaces de reconocer eso.

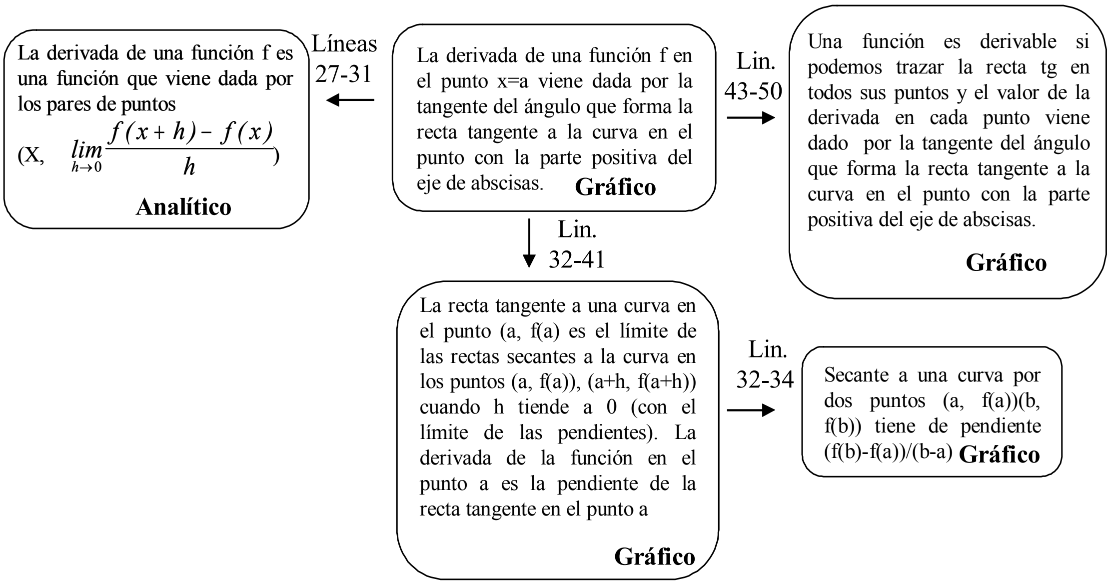
Otro valor cualquiera, bueno en otro valor ¿cuánto sería el logaritmo neperiano de un punto próximo a 0.5? que sería 0.49, y luego partido por 0.1 <calcula cocientes incrementales para puntos próximos a 0.5> Tú has puesto aquí <(f(0.5)-f(0.49))/0.1>, has calculado 0.5 y 0.49, la diferencia entre estos dos es, es de una centésima ¿no? pues deja aquí <denominador del cociente incremental> 0.1, luego cuando la diferencia sea más pequeñita, o sea, esta diferencia entre ordenada y abscisa, a ver ¿a qué va a tendiendo? <completar la tabla de cocientes incrementales en un

entorno de 0.5> Entonces así, eso sería utilizar aproximaciones para calcular el límite.
E: Sí
P:Lo hacéis con la calculadora
E: Sí.
P: Eso es lo que quiero que veáis.
Bueno, tendríamos que haber hecho, que haber hecho, un momentito por favor, tendríamos que haber hecho, coged, activad la traza de la imagen que nos aparece aquí en pendiente, llevarla aquí, activarla y ver qué gráfica nos aparecía de la función, como lo hemos hecho otras veces. A ver si podéis reconocer esa función, la función que habría que poner aquí , o sea, nos va a salir una cosa así, nos va a salir una cosa así, esto no escribe, y es precisamente la gráfica de la función 1/x, pero cuando x es más grande que cero únicamente.<Lo hace en la pizarra y se refiere a la herramienta Traza de Cabri que permite que de manera automática quede una “huella” de algún elemento de una figura de Cabri al arrastrar algún otro elemento de dicha figura>

En esta viñeta el recurso tecnológico permite integrar lo gráfico y analítico para construir la gráfica de la función derivada de ln(x) e identificar una expresión algebraica para ella. En esta viñeta la integración de lo gráfico y lo analítico le permite a Juan modelizar el paso de la idea de la derivada de una función en un punto a la idea de función derivada. Para realizar este paso Juan modela la desencapsulación del significado gráfico y analítico de $f'(a)$ para el caso de $f(x)=\ln(x)$.

Para modelar el mecanismo de interiorización de la función derivada Juan usa el significado de $f'(a)$ como “pendiente de la recta tangente en el punto”. Usar este significado, es lo que en términos APOS se denominaría desencapsular. Esta situación viene dada en las líneas 32-42. Este mecanismo de desencapsulación de la derivada de una función en un punto está conectado a la construcción de la función derivada.

Los usos de los instrumentos de la práctica en esta viñeta:



Esta viñeta es similar a la anterior en el siguiente sentido, en ambas se dispone de un método para calcular la derivada de una función en un punto concreto (en la viñeta anterior a través de los límites de cocientes incrementales en cada punto, en esta viñeta a través del ordenador que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto), en ambas se van obteniendo valores concretos para la derivada de una función en un punto y confeccionando la tabla de valores para la función derivada. También en ambas se hace lo que llamamos una *generalización a todos los puntos*, en la viñeta anterior analíticamente mediante el uso de la variable independiente x y en esta viñeta viendo con las posibilidades que ofrece Cabri de arrastrar el punto situado en el eje X e ir obteniendo la recta tangente en cada punto y el valor de la pendiente (de la derivada en dicho punto). Una diferencia entre viñetas es que en la viñeta anterior el contexto era analítico, y en esta viñeta hay integración de lo gráfico y analítico, a través del uso de la tecnología.

Podemos hacer algunas reflexiones a partir de la consideración conjunta de las dos viñetas (4 (bis) y 6). Un aspecto característico de la práctica de Juan en relación al contenido matemático es el uso de la idea de "generalización a todos los puntos" para introducir la función derivada. El papel jugado en el concepto derivada de una función en un punto por las ideas de aproximación y paso al límite es interpretado ahora para la función derivada por la idea de generalización a todos los puntos. La idea de "generalización" analítica la hace visible Juan mediante el uso de la variable x.

Respecto a la función derivada la práctica de Juan pretende potenciarla como proceso. La tecnología facilita la visualización de la generalización y la potenciación de f ´(x) como proceso mediante el uso integrado de los sistemas de representación, gráfico y analítico.

En relación a la organización de los conceptos que van conformando la noción de derivada, Juan intenta atribuir significado matemático a la función derivada mediante la construcción de la misma a partir de los significados de f ´(a), analíticamente mediante el uso de la variable x y gráficamente "variando el punto" en el que se tiene la recta tangente. En la práctica de Juan se hace explícito la relación entre los conceptos derivada de una función en un punto y función derivada ya que la noción de "función derivada" (f ´(x)) se apoya en el significado de f ´(a). Esta característica es una manifestación de las concepciones de Juan respecto a las matemáticas escolares y al aprendizaje de las matemáticas.

En la práctica de Juan aparece por tanto, un desarrollo de la noción de derivada que es progresiva en sentido vertical: construyendose f ´(x) a partir de f ´(a). La potenciación de la función derivada como proceso a partir de los significados de f´(a). La relación entre ambos, viene dada modelando el mecanismo de interiorización de la función derivada (f ´(x)) apoyándose en los mecanismo de encapsulación y desencapsulación de la derivada de una función en un punto (f ´(a)). Aquí observamos que en la potenciación de determinadas formas de conocer un concepto aparecen explícitamente otros conceptos, volviendo a aparecer la idea de "relación" en la prática de Juan respecto a los distintos conceptos.

V7: Modelación de la generalización en todos los puntos: la función derivada como un objeto

Esta viñeta recoge un conjunto de segmentos sucedidos en distintas clases, cronológicamente los distintos segmentos que consideramos son: i) función derivada de $f(x)=7x^2$ en la cuarta clase, ii) $f(x)=x^2+x$ en la quinta clase, iii) $f(x)=x^3$ en la quinta clase, iv) $f(x)=x^4$ séptima clase. Los distintos segmentos que recogemos en la viñeta son similares, a partir de la derivada de una función en un punto (como límite de los cocientes incrementales $\lim_{a\to x}\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$) va a construir la función derivada. A lo largo de la unidad didáctica este tipo de segmento se sigue repitiendo: $f(x)=\ln(x)$ y $f(x)=\text{sen}(x)$ en la novena clase, $h(x)=f(x)g(x)$ y $h(x)=f(x)/g(x)$ en la décima clase (indica cómo hacerlo). Analizamos los segmentos[6], y considerados en forma conjunta nos permite hacer la inferencia respecto al operador derivada. Los dos segmentos últimos aquí recogidos están resumidos para que se observen las similitudes.

Esta viñeta muestra los intentos de Juan de modelar la encapsulación de $f'(x)$ con los significados construidos previamente. En relación a las matemáticas y su contenido muestra cómo las diversas formas de conocer el concepto se relacionan. La idea matemática en la que se apoya es la de "generalización a todas las funciones". En relación al desarrollo de los conceptos se muestra un aspecto característico de la práctica de Juan, la construcción de los conceptos de manera progresiva horizontal, a partir de la modelación de la interiorización de $f'(x)$ potencia como objeto $f'(x)$.

Previamente a estos segmentos de la viñeta Juan ha calculado la función derivada de $f(x)=x^2$ descrito en la viñeta nº4 y 4 bis. En ese segmento ha modelado el mecanismo de interiorización de $f'(x)$ para potenciar en los

[6]Con objeto de no ser repetitivos incluimos protocolos de 4 de los segmentos.

estudiantes la función derivada como proceso. El significado de la función derivada como proceso permite considerarla como recibiendo entradas (valores de x) y obteniendo como salida el límite de cocientes incrementales con los significados analítico y gráfico.

Enunciado:

Calcular la función derivada de la función $y=7x^2$.

Juan plantea la derivada de la función en un punto como límite de los cocientes incrementales y después generaliza a cualquier punto (este apartado de los resultados lo hemos denominado del paso al límite a la generalización en todos los puntos).

El diálogo en el aula.

P: ¿y cuando tengamos nosotros, cuando tengamos un número por una función? Por ejemplo $y=7x^2$. Entonces vamos a tener, o sea, la derivada en el punto 2, si le llamamos f ´(2), será como antes el límite cuando a tiende a 2 de el valor de la función en 2 que va a ser 7 por 2^2 menos el valor de la función en un punto próximo, en un punto que vamos a llamar a como antes, $7a^2$ partido por 2-a, ¿eh? Siempre hasta ahora estoy cogiendo el a un poco más pequeño que el 2, pero también lo podíamos coger un poco más grande.

Bueno en este caso que es lo que nos interesa, fijaros que este número está multiplicado por 7, este número está multiplicado por 7, yo puedo poner esto como límite cuando a tiende a 2 de 7 que multiplica a $(2^2-a^2)/(2-a)$, en este 7 no hay ningún valor de a, en este 7 no hay ningún valor de a, luego al yo hacer las operaciones que tenga que hacer de simplificar esto cosas luego es lo mismo que si yo el límite lo hiciera sin el 7 y luego lo multiplicara por 7, o sea, que yo puedo poner aquí el "por" y ahora límite cuando a tiende a 2, (2^2-a^2) /2-a y esto que tenemos aquí es la derivada de esta función sin el 7, en la cual la he multiplicado por 7, 7 por la derivada de la función,

Entonces, si yo tengo que derivar esta función, sino en cualquiera de estos puntos,¿que voy a poder hacer? Si 7 por la derivada de x^2, y esto era 2x ¿vale? Luego ya sabemos derivar cuando aparezca un número por x^2. ¿Igual que yo he puesto x^2, pues lo mismo va a aparecer cuando no sea x^2, sea x^3, otra.

Aquí construye la función derivada y al final del segmento intenta mostrar que ocurre lo mismo para otras potencias.

<Posteriormente con el límite obtiene la función derivada de las funciones, va a obtener una nueva regla de derivación, derivada de una suma de funciones, $y=x^2+x$ para ello hace la derivada de una función en un punto concreto x=1 con el límite de cocientes incrementales>

Vamos a llamar a esta función si queréis f (x), y vamos a calcular f `(1), entonces lo podemos hacer por aproximaciones o ya directamente podemos calcular el límite.

La pendiente de la tangente o el valor de la derivada en el punto 1, cogemos un punto próximo a 1, un punto **a** calculamos en ese punto la recta que lo une aunque aquí como está la curva lo pongo más exagerada. Y ahora lo que vamos a hacer como siempre es tender este punto **a** al punto 1, para calcular la pendiente de la recta secante que va a tender a la recta tangente.

Por lo tanto aquí vamos a tener 3, luego la pendiente va a ser 3.

El uso del significado de f´(a) permite a Juan plantear la generalización del procedimiento “a cualquier punto”. Esta manera de actuar de Juan pone de manifiesto su uso de la idea de generalización para crear las condiciones para que los alumnos construyan el significado de f´(x) como proceso. La manera en la que va a repetir esta forma de proceder para diferentes funciones permite suponer que está creando las condiciones para que los alumnos puedan dotar de significado al operador derivada.

En definitiva, si en vez de hacerlo con 1, lo hacemos con un punto cualquiera, va a funcionar exactamente igual...

que yo aquí puedo poner directamente que f ` de x es dos veces x más 1, y lo mismo aquí, cuando tengamos una función de la forma <y=f(x)+g(x)>, esa que he puesto aquí, o sea, suma de dos funciones, su derivada va a ser, la derivada de ésta, de esta función, más la derivada de esta otra.

<Juan calcula la función derivada de $y=x^3$. Para ello hace la derivada de una función en un punto concreto, x=2, con el mismo procedimiento que en el primer y segundo segmento, límite algebraico>.

¿Seréis capaces ustedes de calcular la derivada de esta función? La hacemos como siempre en un punto, la hacemos en un punto, lo que vamos a hacer, como siempre, es la tangente aquí. <Juan obtiene la derivada por el límite de cocientes incrementales>.

Fijaros que en definitiva lo que nos ha quedado es, lo que nos ha quedado aquí, f ` (x) igual a 3 veces x^2...cuando lo hagamos en un punto, nos va a quedar esto, 3 x^2... pero en el punto 2 , 3 por 4, 12. O sea, que si en vez de hacer esto en un punto concreto, en 2, lo hubiéramos hecho poniendo aquí x y aquí **a** tendiendo a x, pues lo que nos hubiera quedado es esto de aquí, 3 x^2, ¿vale? Entonces ya, como ejercicio, podréis hacer en vez de 3, 4 ó 5, o lo que sea, y siempre vamos a seguir esta misma regla, o sea, que de un polinomio cualquiera, f de x igual a x^n. ¿Quién va a ser la derivada? ¿quién será? N veces por x siempre elevado a n-1.

<Juan continua haciendo funciones derivadas con el límite, y = x^4 para calcular la función derivada hace la derivada de una función en un punto x=2 por aproximaciones con tabla de valores de cocientes incrementales y con el límite algebraico >.

Que la derivada de esta función y prima en el punto 2 nos quedará 4 veces por 2 al cubo. Si todo lo cambiamos y en vez de poner aquí, ¡eh! Si en vez de poner aquí 2 pongo 5 y de 5, nos quedaría 4 veces por 5 al cubo, y si yo en lugar de poner aquí 5 pongo una x, ¿qué nos quedaría? 4 veces por x al cubo.

En el primer segmento construye la función derivada para un caso particular de función y en un punto concreto, generalizando a funciones más generales del mismo tipo potencial (x^n). Repite el procedimiento en los restantes segmentos de la viñeta: la función derivada se obtiene a partir de la derivada de una función en un punto, utilizando un punto concreto y viendo que se generaliza a todos los puntos.

A partir de la construcción de varias funciones derivadas para casos concretos, aparece la relación entre una función y su derivada (el operador derivada). En este caso pensamos que sólo se empieza a modelar su interiorización mostrando para casos particulares la existencia de la función derivada.

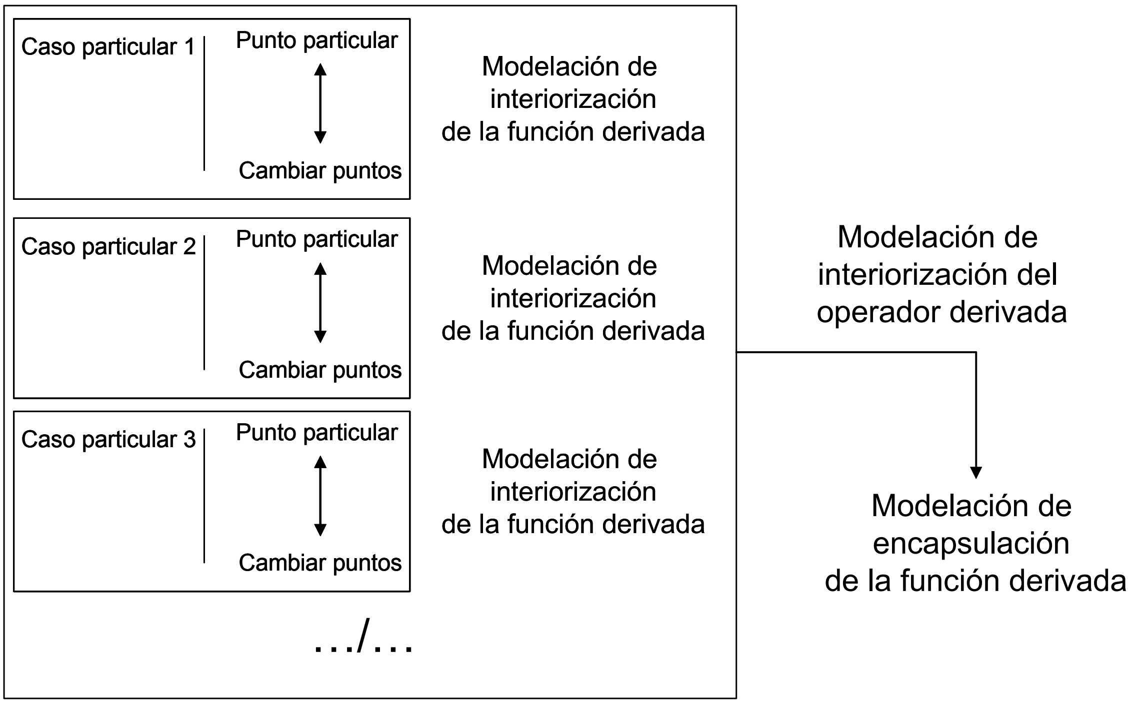
Queremos señalar que la acción que se modela viene dada por el procedimiento para construir la función derivada: "obtener la derivada de una función en un punto concreto con un límite y generalizar a cualquier punto", que se ajusta a la descripción general de la forma de conocer acción dada por Dubinsky et al. (1994):

> *"Un sencillo tipo de acción en matemáticas es calcular de acuerdo con una fórmula, frecuentemente, un estudiante puede tener éxito con cálculos antes de que el concepto esté totalmente*

comprendido."(p. 286)

Para Dubinsky (1996), la interiorización de acciones para llegar a conocer como proceso conlleva que las acciones se repitan y se reflexione sobre ellas. En los distintos segmentos se aplica la regla para obtener la función derivada a través del límite. En este sentido Juan repite varias veces el procedimiento y plantea la reflexión. La reflexión en el caso de las acciones la entendemos en el sentido de que va planteando a los estudiantes que dichas acciones pueden aplicarse para diversos tipos de funciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, para las cuales modela de forma detallada la acción. También se modela esta acción (pasar de un punto a generalizar a todos los puntos) para las operaciones con funciones polinómicas, funciones logarítmicas, trigonométricas. De esta manera, Juan empieza a modelar el mecanismo de interiorización del operador derivada con acciones. Aquí encontramos que la función derivada de funciones particulares es el puente entre la derivada de la función en un punto y el operador derivada.

Un aspecto de esta viñeta que queremos señalar es respecto a la doble generalización que presenta lo que Juan hace en estos segmentos. Por un lado, generaliza cuando pasa de un punto particular a todos los puntos, que antes hemos identificado como la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada, pero a su vez generaliza en el tipo de funciones a los que aplica el procedimiento, el siguiente cuadro (cuadro 4.5) esquematiza a lo que nos estamos refiriendo:



Cuadro 4.5 Doble generalización, modelación de encapsulación de la función derivada

Al definir el operador derivada D, estamos considerando un operador que a funciones le hace corresponder otras funciones, en este caso, a una función le corresponde su función derivada: $f \xrightarrow{D} f'$. La función derivada de la que se ha modelado su interiorización, al aplicar el operador derivada, produce la encapsulación de f´(x).

Zandieh (2000) a este respecto señala que:

"La función derivada puede ser vista como objeto reificado, como cualquier función (la función derivada puede ser concebida como un objeto que es la salida de otro proceso, el operador derivada)." (p. 107)

Por tanto en la viñeta con los distintos segmentos consideramos que:

- se empieza a modelar el mecanismo de interiorización del operador derivada, y

- se modela la encapsulación de la función derivada.

La manera de actuar de Juan pone de manifiesto que el contenido matemático relativo a la función derivada se construye a partir de la derivada de una función en un punto mediante generalización. La idea de doble generalización le permite construir significados, una primera generalización a todos los puntos para el objeto f´(a) y la generalización a todas las funciones para el objeto f´(x).

En la práctica de Juan observamos la característica (ya detectada) de la construcción de relaciones, en este caso para f ´(x) a partir de f ´(a) y pretendiendo que los alumnos puedan dotar de significado al operador derivada

V8: El operador derivada como proceso

Esta viñeta recoge un conjunto de segmentos sucedidos en distintas clases, cronológicamente los distintos segmentos que se consideran son aquellos en los que dada una función Juan pide obtener la función derivada a partir de las reglas de derivación. El primer segmento sucede en la cuarta y quinta clase, el segundo en la quinta clase, el tercer segmento sucede en la quinta clase, el último segmento reseñado en la viñeta sucede en la undécima clase.Las restantes funciones de la viñeta se van resolviendo a lo largo de la unidad didáctica.

En la viñeta anterior (V7) se ha ido introduciendo la aritmética del operador derivada (suma, resta, producto y cociente) mediante la generalización a todos los puntos y a todas las funciones. Así dispone tanto de dicho operador como de su aritmética para su aplicación a distintos tipos de funciones (trigonométricas, etc.). Un caso diferente es el de la “regla de la cadena”, que es introducida directamente como tal regla.

El procedimiento que sigue Juan para determinar las funciones derivadas es utilizar las reglas de derivación en todos los casos. Las tareas aquí reseñadas que conforman la viñeta, como en las restantes tareas planteadas que incluimos enunciadas[7] permiten obtener una idea de lo Juan pretende y hace.

Enunciado de la primera tarea:

Calcular la derivada de la función: $y=8x^2$.

Se calculan también las siguientes funciones derivadas: $y=3x^2+2x-8$, $y=5x^3-3x^2+x-8$, $y = \ln(\cos\sqrt{x})$.

El diálogo de clase es el siguiente:

P: Por ejemplo si yo pongo aquí $y=8\ x^2$ ¿quién será la función y ´? Y ¿cómo derivar? Será...
E: 18x.
P: ¿Cuánto sería? 8 por 2, 16x.
P: ¿Cuál es la derivada de 1/2 x^2?
E: ½ de 2 x.
P: ½ por 2 x.
¿cuál será la deriva de esta función? <Escribe en la pizarra $y =3x^2+2x-8$> la función que se obtiene al derivar esto, otra cosa será que os diga, ¿cuál será la derivada en un punto determinado?¿Quién será la función derivada? Sería 6x+2, la derivada de una parábola, ¿qué es ?
E: Una recta.

El uso del operador derivada con las funciones particulares permite a Juan generar las condiciones para que los alumnos puedan interiorizar el significado del operador derivada y poder estar en condiciones de conocer como proceso.

---

[7]Juan plantea determinar las funciones derivadas de: $y =sen(x)+cos(x)+$Logaritmo neperiano$(x)+x^2$, $y=xsen(x)$, $g(x)=xln(x)$, $h(x)=$raíz$(sen(x))$, $y=sen(2x+1)$, $y=(sen(x)+x)^2$, $y=ln(x+x^2)$ $y=$raíz$(sen(x))$, $y = \sqrt{sen(x^2+2)}$,

$y = \dfrac{sen(x^2-\sqrt{x})}{cos(ln(\sqrt{x}))}$, $y = e^{x^2}$, $y = e^{sen(x)}$ e $y = 2^{cos(x)}$, $f(x) = L\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

$g(x) = \dfrac{sen^2(2x+1)}{cos(1-x)}$.

P: Una recta, lo que bajamos siempre cuando tengamos un polinomio al derivar lo que vamos obteniendo es rebajando el grado del polinomio, yo puedo derivar ésta <y=6x+2> también,¿no? Esto es, una recta, puedo encontrar su pendiente; pues a eso le vamos a llamar la derivada segunda. Y lo vamos a escribir igual, en vez de ponerle un sólo palito aquí, pues le ponemos dos. La derivada segunda sería derivar ahora esta función. Estamos derivando de la derivada ¿Y cuál sería la derivada segunda en este caso? ¿cuál es la derivada de $3x^2$? 6x ¿Cuál es la derivada de 2x?2 ¿Cuál es la derivada si quieres de menos 8?

E: 0.

P:Hemos pasado de una parábola a una recta, de una recta a una recta constante, y de una recta constante a 0. Pues ya sabemos derivar <Escribe en la pizarra: $y = 5x^3-3x^2+x-8$> esta función ya tenemos que saber derivarla como función. ¿no?

15, 5 por la derivada de x^3 que es $3x^2$, 3 por 5, 15, $15x^2$, 2 por -3,- 6, lo pasas para aquí <exponente de x> y es una menos, lo hemos hecho antes. Habéis dicho que la derivada de x^3 es 3 x^2 , y cuando estamos multiplicando por 5 pues esto también queda multiplicado por 5.

P: Bueno, pues conociendo esto <se refiere a las reglas para derivar suma, potencia y producto de una función por una constante> entonces, ya sea el polinomio, sea el polinomio que sea, tenemos que saber encontrar la función derivada, la función derivada.

Juan reitera la aplicación de combinaciones de reglas con el objetivo de posibilitar que los estudiantes construyan por sí mismos una nueva regla para un tipo de funciones e interioricen el operador derivada, de esta manera crea las condiciones que permiten a los estudiantes establecer las relaciones entre reglas. En el siguiente ejemplo Juan posibilita que los estudiantes combinen las reglas para determinar funciones derivadas.

<Juan va a calcular la función derivada de $y = \ln(\cos\sqrt{x})$ >

P: Como siempre estamos intentando nada más hacer las reglas, pero que en los puntos donde eso tiene sentido es bastante complicado. Hay 3 funciones efectivamente, ahora tenemos que aplicar la regla de la cadena pero reiteradamente, primero con el logaritmo, luego con el coseno y luego con la raíz. ¿Cuál es la derivada del logaritmo?

E: 1/x.

P: 1 partido de lo que tenga dentro, pues 1 partido por lo que tenga dentro, no le metas una raíz más de la cuenta.. mira la derivada del logaritmo es 1/x

E: Sí

P: Pues 1 partido por el coseno de lo que sea.

Hombre es un poquito largo pero ya está, Como ya veo que casi todo el mundo lo tiene bien hecho, primero derivamos el logaritmo, derivada del logaritmo ¿es? 1 partido por, si es x es x, si es todo esto, pues todo esto, 1 partido coseno de raíz de x por, ahora tendremos que derivar el coseno, la derivada del coseno, -seno, el coseno está aplicado a raíz de x, pues -seno también va a estar aplicado a raíz de x por, y ahora tendremos que derivar la raíz, 1 partido por 2 raíz de x.

En las líneas 1-6 Juan modela el operador derivada como acción, acorde con la caracterización de DeVries (2001) para esta concepto:

> *"1.- Dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinómica, y dada una función polinómica concreta una acción podría ser encontrar la derivada por sustitución de los números en la formula general. Uno está a nivel de concepción acción para la diferenciación[8] si sólo es capaz de encontrar la derivada de una función cuando cada paso es externamente proporcionado (por la memoria, por ejemplo, o mirando en una lista de reglas) por una regla que es aplicada y sólo se tiene que introducir los números concretos."* (On-line)

Estas acciones modeladas por Juan están basadas en las reglas de derivación para las funciones elementales y las operaciones entre funciones. DeVries (2001) caracteriza el operador derivada como proceso:

> *"Uno realiza un proceso cuando encuentra la función derivada de una función dada usando las reglas estándares. Se tiene a los sumo una concepción proceso de la diferenciación si puede encontrar la derivada de funciones estándares pero no puede utilizar la idea de la derivada segunda de una función a no ser que haya calculado la derivada primera para una función concreta."* (On-line)

La inferencia de la modelación del mecanismo de interiorización se basa

[8]Diferenciación es una forma de referirse al operador derivada.

en que Juan pretende potenciar el operador derivada como proceso ya que pretende que sus estudiantes deriven funciones estándares a partir de las reglas de derivación, pero no aplicando una regla sino combinándolas. La idea central para identificar la interiorización es la necesidad de "combinar reglas" ya que no hay una regla que calcule directamente ninguna de las funciones derivadas sino que son necesarias más de una, y las reglas que se utilizan para calcular las funciones derivadas no se combinan siempre de la misma manera, a veces se combina primero la regla de la cadena y alguna de operaciones entre funciones ($y=\ln(x+x^2)$)y otras veces primero las operaciones entre funciones y después la regla de la cadena ($y = \dfrac{sen(x^2 - \sqrt{x})}{cos(ln(\sqrt{x}))}$) , incluso en algunas son necesarias dos reglas de la cadena, es decir, la regla de la cadena se utiliza con otra regla de la cadena y con distintas funciones (y = log neperiano(cos(raìz de x))). Creemos que con la modelación del operador derivada sólo a nivel de acción (en este caso, una regla de derivación) no es posible calcular las funciones derivadas[9]; creemos que esta situación es a la que se refiere DeVries (2001) cuando señala el operador derivada como proceso permite obtener las funciones derivadas estándares.

De manera más detallada en esta viñeta en las líneas 7-26 Juan modela el mecanismo de interiorización del operador derivada para funciones polinómicas. Para las funciones polinómicas Juan no usa una fórmula y sustituye los valores, sino que combina la regla de derivación para una suma, para el producto de un escalar por una función y de la función potencial. Modelar una acción para el operador derivada en las funciones polinómicas puede ser dar la regla:
"dada $f(x)=a_n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \ldots\ a_1 x + a$, la función derivada $f\,'(x)=n a_n x^{n-1} + \ldots\ a_1$".

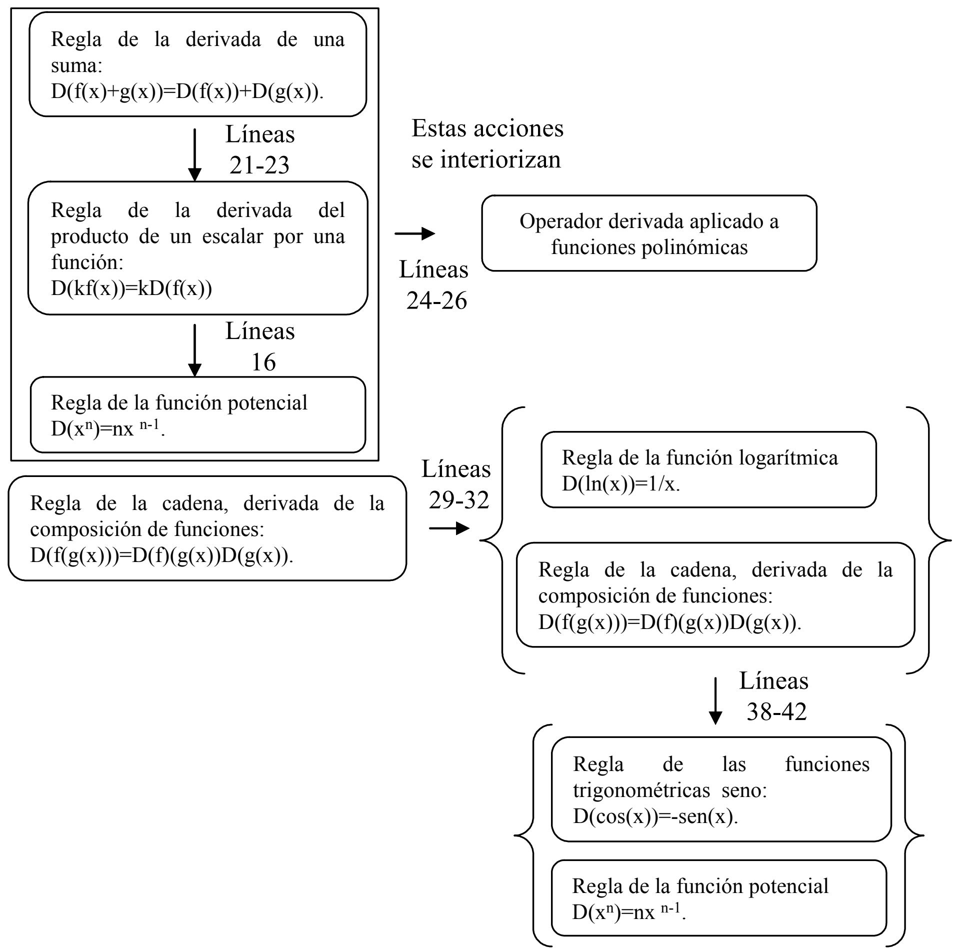
En las líneas 27-42 Juan modela el mecanismo de interiorización del

[9]La diferencia esencial entre acción y proceso es disponer de una regla, cuestión que no se da en estos casos.

operador derivada para la regla de la cadena. A partir de la regla de la cadena para dos funciones se obtiene la función derivada de una composición de tres funciones, combinando dos reglas de la cadena y las reglas de algunas funciones elementales (logaritmo neperiano, coseno y potencial). La combinación de diferentes reglas de derivación, en cada caso de distinta manera, es una forma de modelar el mecanismo de interiorización del operador derivada, ya que no hay una fórmula que aplicándola llegue a la función derivada, es de esta forma en la que podemos entender la idea de reflexión (qué reglas hay que combinar y cómo combinarlas) que lleva a interiorizar acciones según describe Dubinsky (1996):

> *"Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso"* (p. 34)

Una manera de describir la modelación del mecanismo de interiorización analítico que realiza Juan es el siguiente esquema:



De manera conjunta las cuatro viñetas (4 (bis), 6, 7 y 8) (y las reflexiones sobre las cuatros primeras viñetas) permiten inferir algunos aspectos de la perspectiva de la práctica de Juan.

El uso de los sistemas de representación en la práctica de Juan posibilita integrar lo gráfico y lo analítico a través de la tecnología cuando se modelan los mecanismos de construcción de la función derivada. La construcción que se modela sigue los “caminos” gráfico y analítico de forma relacionada.

En este caso, como en el de la derivada de una función en un punto, la construcción del concepto función derivada es progresiva horizontal (interiorización y encapsulación). Las formas de conocer que se potencian se construyen a partir de los significados previamente interiorizados.

En la organización de los conceptos, la construcción de la función derivada permite introducir el operador derivada como una función que a cada función le hace corresponder su función derivada. En este caso para el operador derivada se empieza la modelación de la interiorización por medio de una doble generalización (paso al límite generalizado a todos los puntos y esta generalización de todos los puntos a distintos tipos de funciones) y posteriormente se pasa a la modelación del mecanismo de interiorización para potenciar en los estudiantes el operador derivada como proceso visto a través de la combinación de reglas, en ambos casos en un contexto analítico. La “doble generalización” es la manera en la que Juan establece la relación entre los conceptos que conforman la noción de derivada organizando los conceptos.

Esta manera de organizar el contenido matemático y plantear la enseñanza parece apoyarse en una concepción de las matemáticas que potencia las relaciones y una concepción del aprendizaje que potencia la construcción progresiva de los significados.

Un aspecto característico por lo tanto de la práctica de Juan es la potenciación de la idea de “generalización” tanto cuando se trata “a todos los puntos” como para “todas las funciones”. Cuando Juan trabaja el concepto de función derivada y operador derivada, el papel que la idea de “paso al límite” jugaba en la construcción de la derivada de una función en un punto, lo realiza en estos nuevos conceptos la idea de “generalización”. Podemos decir que las ideas sobre el contenido matemático que guían la práctica de Juan son: “aproximación, paso al límite, generalización”. La función derivada es la conexión entre la derivada de una función en un punto y el operador derivada, desarrollándose una construcción progresiva, tanto horizontalmente (dentro del concepto) como verticalmente (entre los distintos conceptos).

Todo esto indica que respecto a la construcción de nociones matemáticas en la práctica de Juan subyace la idea que esta construcción se realiza de forma progresiva. Por un lado los significados se construyen mediante relaciones de distinta naturaleza: relaciones que posibilitan que se vinculen los significados gráficos y analíticos, y relaciones entre las diferentes formas de conocer un concepto que se potencian para un mismo concepto. También se establecen relaciones entre los diferentes conceptos, vinculando los significados, en este caso los significados de $f'(x)$ se apoyan en los de $f'(a)$, y a partir de $f'(x)$ interiorizar el significado del operador derivada y poder estar en condiciones de conocer como proceso. La construcción de la noción de derivada pretende Juan realizarla de forma progresiva, horizontal (para cada concepto) y vertical (entre los distintos conceptos).

En relación a las matemáticas en la práctica de Juan subyace la idea de que los conceptos matemáticos llevan vinculados diversos significados. Cuando es posible Juan vincula los significados en los distintos modos de representación. La visualización de los conceptos de función derivada y operador derivada la lleva a cabo Juan apoyándose en la idea de generalización. Hay una doble generalización, primero “a todos los puntos” y posteriormente pasa a generalizar “a todas las funciones”. La visualización de la “generalización a todos los puntos” la pretende realizar Juan independientemente del modo de representación. El contenido matemático sobre la función derivada y operador derivada se organiza mediante dichas ideas. Los distintos conceptos que forman la noción de derivada se organizan mediante relaciones entre ellos: de la derivada de una función en un punto a la función derivada y de ésta al operador derivada. La idea de relación juega un papel preponderante en las matemáticas desde el punto de vista de Juan.

2.3.- Del operador derivada a la integración

Para Zazkis y Campbell (1996), dentro del marco APOS se proporcionan dos formas de obtener procesos a partir de procesos existentes: coordinación, e inversión. Esta manera de construir un proceso deja de lado la necesidad de disponer de acciones a partir de las que construir por interiorización dicho proceso, pues el punto de partida de ambos mecanismos (coordinación e inversión) son procesos.

Juan modela el mecanismo de inversión del operador derivada integrando lo gráfico y lo analítico. Con esta modelación Juan potencia en los estudiantes la construcción del recíproco del operador derivada como proceso. El inverso del operador derivada es un nuevo operador, el operador integral indefinida (antidiferenciación). De esta manera la integración indefinida se potencia como proceso sin necesidad de modelar el mecanismo de interiorización para este concepto. La relación entre el operador derivada (diferenciación) modelado como proceso (a través de combinación de reglas de derivación) y su proceso recíproco se indica por Dubinsky (1991):

> *“Interiorizar acciones es una forma de construir procesos. Otra manera es trabajar con los procesos que ya existen para formar nuevos procesos. Esto se puede hacer, por ejemplo, con la*

inversión [reversal]. *Un estudiante de cálculo puede haber interiorizado la acción de calcular la derivada de una función y puede ser capaz de hacerlo con éxito en un gran número de ejemplos usando varias técnicas que son enseñadas con frecuencia y aprendidas ocasionalmente en los cursos de cálculo. Si el proceso es interiorizado, el estudiante puede ser capaz de invertirlo para resolver problemas en los que se proporciona una función y se pide encontrar una función cuya derivada sea la función original"* (p.107)

2.3.1.- La inversión del operador derivada

Juan modela la inversión a partir de la función derivada, que es el objeto sobre el que actúa el operador integral (antidiferenciación). Juan usa los significados de la función derivada para modelar la inversión del operador derivada. Asiala et al. (1997) indican que usar estos significados de la función derivada para invertir el operador derivada puede ser una manifestación de la desencapsulación de la función derivada:

"Esta inversión[10] [del operador derivada] *indica una clara concepción proceso de la interpretación gráfica de la derivada que puede ser la desencapsulación de una concepción objeto* [de la función derivada]" (p. 425)

En las dos viñetas siguientes se muestran las relaciones que permiten a Juan relacionar el operador derivada y su recíproco. Estas relaciones permiten preparar el terreno para cuando posteriormente trate la noción de integración. En la práctica de Juan aparece explícitamente la vinculación entre la noción de derivada y la noción de integración. En ambas viñetas Juan usa los significados

[10]Del operador derivada: dada la función derivada obtener la gráfica de la función original. Dentro del esquema más general de relaciones entre propiedades de funciones y derivadas (Asiala et al., 1997, p. 407 y 425).

de la función derivada y de esta forma posibilita que los estudiantes desencapsulen el objeto f´(x).

V9: Lo gráfico y lo analítico como medio para usar la función derivada

El segmento recogido en esta viñeta abarca dos tareas, Juan propone la primera y después plantea la misma cuestión con una función más elemental (función constante). La viñeta sucede en la séptima clase.

En la entrevista de planificación en relación a este tipo de tareas Juan indica:

"Dada la derivada hacernos una idea de la función, son tareas que no son complicadas, que no son complicadas, pero vamos si se las pongo son gráficamente, esto sería la derivada, dónde va a ser creciente, dónde decreciente y si podemos imaginarnos un poco cómo va a ser la función que evidentemente podemos buscar una función paralela y todas sus paralelas no la podemos afianzar hasta que no sepamos un punto por el que pasa."

Enunciado de la tarea:

Dada la recta y = -2(x-3), encontrar una función cuya derivada sea dicha recta.

Para resolver la tarea: a partir de la ecuación de la recta se obtiene la función, para reforzar la idea plantea que dada y ´= 4 obtener la expresión de y.

El diálogo de clase:

P: Hemos dicho, la derivada de una función que representa un polinomio de grado 3, ¿qué será? si es de grado 3, grado 2, según esto siempre un grado menos de grado 2, que es una parábola, la derivada es una recta, una recta, otra recta, pero ya horizontal.

¿Y al revés? Seríamos nosotros capaces de hacer estas cosas? Si yo doy la derivada, ¿podemos encontrar la función? Que es pensarlo al revés.

Una función que es una cosa fácil. Esta recta. esta recta -2 (x - 3) ¿somos capaces de encontrar una función cuya derivada sea esta recta? Estamos pensándolo al revés.¿cómo tendría que ser esa función?

E: Una parábola.

La forma en la que Juan plantea la tarea permite conectar de manera natural el operador derivada con su inversa. Esta manera de actuar subraya la concepción de Juan sobre el contenido matemático escolar. Juan subraya las relaciones entre ideas matemáticas como una manera de dotar de significado a los conceptos.

P: Estás diciendo que en el 3 la parábola tiene que tener el vértice porque su pendiente ahí es 0. Bien, una parábola ¿cuándo esa función va a ser creciente y cuándo esa función va a ser decreciente? ¿cuándo van a tener las pendientes positivas esa función, y cuándo van a tener las pendientes negativas? estás diciendo que en el 3 la parábola tiene que tener el vértice porque su pendiente ahí es 0. La parábola irá hacia arriba o hacia abajo. En general, estará de esta manera o de esta manera. <La parábola será cóncava o convexa>.

E: Está para abajo.

P: Está para abajo ¿porqué está para abajo? tendremos que ver la pendiente de la parábola. La parábola va para arriba, o la parábola va para abajo. Vamos a suponer que aquí la ponemos para arriba y aquí la ponemos para abajo. En el 2, ¿cuánto valdría la derivada en el 2? ¿positiva o negativa? Positiva, luego ¿a qué parte corresponde?

Va a tener que ir creciendo en las partes en que su pendiente es positiva, o sea hasta el 3, hasta el 3 van creciendo, porque todas las pendientes aquí van a ser positivas, en el 3 vale 0, y a partir del 3, va a venir de esta manera.

A esta de aquí <parábola con máximo>, luego efectivamente es una parábola que va hacia abajo

Supongamos que yo pongo esto y´= 4 ¿Podemos saber cuál es y? Dado y´=4, tendría que ser y = 4 x, ó y = 4x +9, ó y igual a 4x - 18 ¿porqué? porque si la derivada es constante Esto de aquí <dada la función y se pude obtener y´>es lo que hemos intentado que vierais pero un poquito más complicado, lo que quiero decir, lo que os quiero hacer ver, es que si nos dan la derivada, nosotros a partir de la derivada, ya tenemos que saber mucho de la función, porque a partir de la derivada, podemos saber cuándo tiene la pendiente positiva, cuándo tiene la pendiente cero.

El apoyo de Juan en el significado de las gráficas de las funciones y las traslaciones entre los distintos modos de representación como un medio para construir el significado de la inversa del operador derivada permite inferir una concepción sobre el aprendizaje. La construcción de los conceptos se hace de forma progresiva, después de potenciar un proceso (operador derivada) se persigue potenciar otro (operador antidiferenciación).

En la entrevista de desarrollo respecto a estas tareas Juan comenta:

"Yo les pedía que hicieran la integral realmente, la integral, la integral indefinida. Para que supieran cómo tenía que ser una función que tenía por derivada esto, para que hicieran el proceso inverso a la derivada. Saben que si la derivada es una recta la función tiene que ser una parábola, una parábola que derivándola diera eso, pues eso es lo único que tenía que saber por la regla de derivación"

En las líneas 4-8 Juan pretende modelar la inversión del operador derivada. Lo mismo sucede en las líneas 25-26. Para Juan de la función derivada podemos obtener información de la función original, en las líneas 27-29. Pero para la modelación de la inversión va a usar la función derivada, que tiene ya potenciada su construcción como objeto, por tanto y de acuerdo con lo señalado por Asiala et al. (1997) va a desencapsular los significados (gráficos y analíticos) de la función derivada, en concreto en la viñeta para los casos particulares de una recta y una parábola. En esta viñeta por tanto Juan usa significados de la función derivada para dotar de sentido a la idea de "buscar la función de la cuál *y* es la derivada".

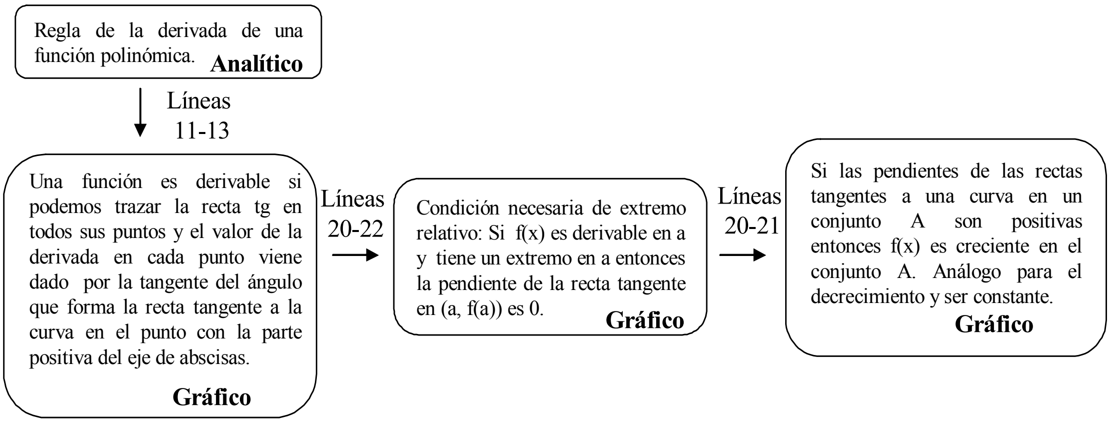
En las líneas 1-3 y 6-8 Juan utiliza la regla de derivación de las funciones polinómicas tal y como Juan indica en la entrevista de desarrollo de la unidad didáctica (función derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado n-1, al revés, si la derivada es un polinomio de grado n la función es de grado n+1, pero referido como recta, parábola, etc). En las líneas 9-24, se obtienen características (monotonía y extremos) de la función a partir de propiedades de la función derivada (signo), que es una de las informaciones que para Asiala et al.(1997) permite resolver el problema "dada y´obtener y ", que proviene de la desencapsualción de la función derivada:

> *"Algunas coordinaciones para obtener la gráfica de f: ... el proceso de mover x a través de un intervalo[11],... monotonía de la función y signo de la derivada"* (p. 425)

[11]Pensar en x (variable) moviéndose a través de un intervalo, pensamos que es una característica de concebir el concepto función (en este caso, función derivada) como proceso ya que no se reduce a pensar en puntos concretos.

En el marco APOS, la inversión de un proceso es un mecanismo de construcción de nuevo proceso, Juan modela el proceso recíproco o inverso del operador derivada que es la integración indefinida (anti-diferenciación), sin necesidad de modelar la interiorización de acciones para la misma.

La manera en que Juan usa los elementos matemáticos integrando lo gráfico y lo analítico puede describirse a través del cuadro siguiente:



V10: Lo gráfico como medio para usar la función derivada

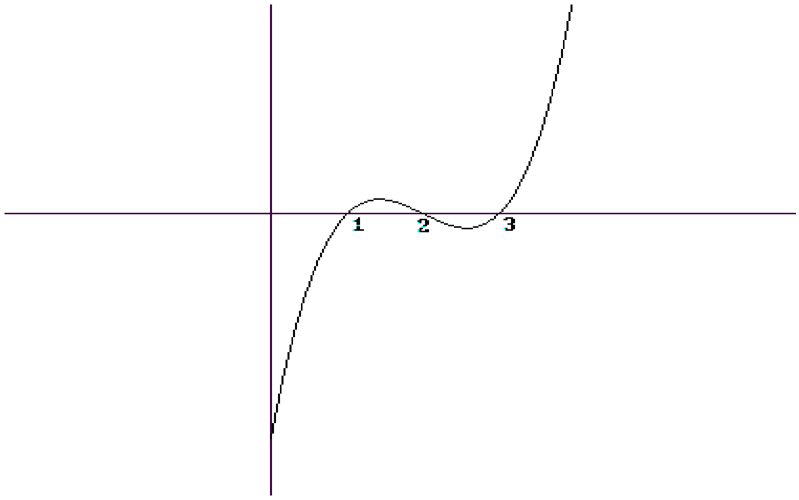
La situación descrita en este segmento sucede en la última clase de la unidad didáctica cuando ya se han modelado los mecanismos de construcción descritos hasta este momento. Para resolver la tarea Juan va a usar la función derivada. En esta viñeta Juan intenta poner de manifiesto a sus estudiantes que el uso de los significados gráficos de la función derivada son lo suficientemente potentes como para resolver cualquier tipo de situación para la inversión del operador derivada.

En la entrevista de planificación en relación a este tipo de tareas Juan indica:

"Dada la derivada hacernos una idea de la función, son tareas que no son complicadas, que no son complicadas, pero vamos si se las pongo son gráficamente, esto sería la derivada, dónde va a ser creciente, dónde decreciente y si podemos imaginarnos un poco cómo va a ser la función que evidentemente podemos buscar una función paralela y todas sus paralelas no la podemos afianzar hasta que no sepamos un punto por el que pasa.”

Enunciado de la tarea:

Dada la gráfica de la derivada, esbozar la gráfica de la función y determinar algunas propiedades de la función que se deducen de la derivada.



El diálogo en el aula es el siguiente:

P: Hacer lo mismo de antes ¿eh? Lo mismo que hemos hecho antes, poner la tabla de la función y a ver entre qué valores va a ser creciente, entre qué valores va a ser decreciente, etc, etc, etc., o sea, aquí ponemos, estas son las pendientes y ahora empezaremos ¿qué pasa en el 1? ¿qué pasa entre el 1 y el 2? ¿qué pasa entre el 2 y el 3? ¿o qué pasa por aquí? <en valores de x mayores que 3>.

Con estas indicaciones Juan intenta que sus alumnos puedan interpretar la información que le proporciona la gráfica de una función (f ´) y poder inferir el “comportamiento” de la función primitiva (f).

Pues ahora vais poniendo los signos y vais a poner dónde va a ser creciente, dónde va a ser decreciente, y luego cogéis una función que se ajuste a eso.

E: Bueno y si tenemos que decrece crece, tenemos crece decrece ¿dos mínimos? <se completa una tabla con los signos de la función en el dominio de la función>.

P: Vamos a ver, claro, esto pasa de decrecer a crecer, mínimo, mínimo ¿dónde?

E: En el 1.

P: En el 1.

Luego pasa crecer a decrecer.
E: máximo.
P: máximo en el 2 ¿y luego?
E: De decrecer a crecer, mínimo en 3.
P: Mínimo en 3. Y luego, luego va creciendo.
E: ¿Todo eso?
P: Exactamente no tiene porqué estar en este lado, vamos ni ser rectas.
<el estudiante representa una función a trozos dada por segmentos que da una función continua pero no derivable en los puntos en que se continúan las rectas, 1,2,3>.
P: ¿esta función <representada por el estudiante> es derivable en el 1? entonces tienes que poner una función que sea derivable en el 1,. por que en el 1 no sería derivable .
E: En el 2 tampoco.
P: En el 2 tampoco.
E: En el 3 tampoco.
P: En el 3 tampoco, no, luego esta función no puede ser, rectas así cortadas de pico no podría ser, podemos dibujar una función que haga esto, pero que sea en todos los puntos derivables y no aquí con estos picos, con estos puntos angulosos.
Esta función no puede ser, rectas así cortadas de pico no podría ser. Podemos poner, lo que sí sabemos que hasta el 1 va a ser decreciente, del 1 al 2 va a ser creciente, del 2 al 3 decreciente y a partir del 3 creciente otra vez ¿eh? Así es como va a ir, podemos dibujar una función que haga esto <trozos de parábolas que en los puntos 1,2, 3 coinciden pero no con pico sino de forma derivable>.

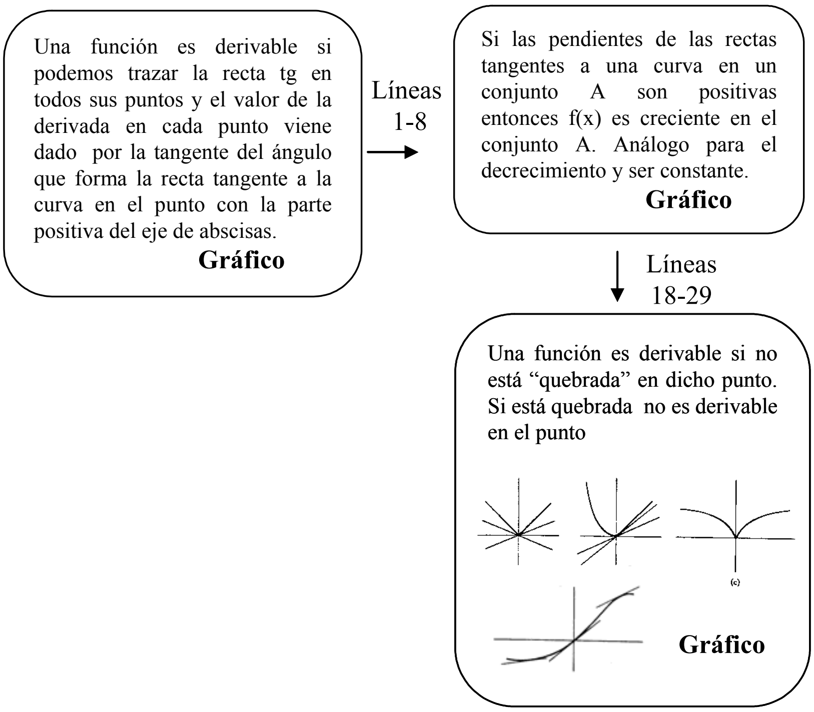
En esta viñeta Juan modela la desencapsulación de la función derivada como objeto de la misma manera que hemos indicado en la viñeta anterior (viñeta 9) para obtener la función original a partir de la función derivada y algunas características de la función que se deducen de la función derivada.

Tall (1996) señala que el cálculo puede resumirse como el estudio de “hacer” y “deshacer[12]” de los procesos implicados, para la noción de razón de cambio (derivada) propone para la representación simbólica como “hacer” la derivada simbólica y su correspondiente “deshacer” es antiderivada (soluciones simbólicas de ecuaciones diferenciales), en la representación gráfica como

[12]Los términos originales son *doing* e *undoing*.

deshacer aparece visualizar la gráfica de una función a partir del gradiente dado. A esta última situación corresponde esta viñeta.

La descripción de la forma en la que Juan modela el mecanismo de inversión del operador derivada a través del uso de los elementos matemáticos y modos de representación se puede representar de la siguiente forma:



Consideradas en forma conjunta las viñetas 9 y 10, Juan modela el mecanismo de inversión del operador derivada $f \xrightarrow{D} f'$. De esta manera aparece un nuevo operador, integral indefinida o anti-diferenciación, relacionado con el operador derivada. Juan realiza esta relación por medio de la modelación de la desencapsulación de la función derivada haciendo uso de la gráfica y del modo analítico. Es decir, la construcción del operador integral la lleva a cabo utilizando la desencapsulación de la función derivada.

Esta forma de introducir el operador integral permite a Juan conectar la noción de derivada con la noción de integral. Podemos identificar características de la práctica de Juan que subyacen en estas viñetas:

- una característica es el predominio de lo gráfico para dar significado a la anti-diferenciación. El contenido matemático se organiza a partir de las posibilidades que ofrecen los distintos modos de representación: el modo analítico posibilita funciones polinómicas fácilmente reconocibles gráficamente y el modo gráfico abre el campo a funciones más generales sobre las que "visualizar" la inversión del operador derivada, y

- otra característica de la práctica de Juan que subyace es que el desarrollo de la construcción de la noción es progresiva en cada concepto (desarrollo horizontal):

i) el concepto función derivada se ha encapsulado y a continuación en estas viñetas modela la desencapsulación de dicho objeto usando los significados, y

ii) Juan modela la inversión del operador derivada a partir de que previamente se ha modelado su interiorización.

Además hay una construcción de la noción de derivada en la que se relacionan distintos conceptos (desarrollo vertical): para modelar la inversión del operador derivada usa los significados de la función derivada, dichos significados son usados mediante la modelación que hace Juan de la desencapsulación de la función derivada. Los conceptos que conforman la noción de derivada se relacionan entre sí y la noción de derivada se relaciona con la noción de integral.

De todas las viñetas en su conjunto podemos indicar las siguientes reflexiones sobre la práctica de Juan.

En la práctica de Juan hay un uso de los sistemas de representación integrados, de manera que los significados se construyen relacionando los significados gráficos y analíticos. La tecnología le da a Juan el soporte necesario para llevar a cabo esta integración.

Respecto a las formas de conocer potenciadas para cada uno de los conceptos de la noción de derivada, la práctica de Juan refleja la descomposición genética de cada uno de ellos. Tanto para la derivada de una función en un punto como para la función derivada se llevan a cabo modelaciones de los mecanismos de interiorización, encapsulación y desencapsulación. Los objetos que se potencian se construyen a partir de los significados interiorizados. Las desencapsulaciones que modela Juan posibilitan el uso de los significados. Para el operador derivada Juan modela el mecanismo de interiorización e inversión, sin llegar a potenciarlo como objeto. La modelación de Juan del mecanismo de inversión lleva a introducir el significado de la "anti-diferenciación".

Considerando la organización de los conceptos que conforman la noción de derivada, en la práctica de Juan los conceptos se construyen unos a partir de otros:

- la idea de función derivada se construye a partir de los significados de la derivada de una función en un punto,
- el operador derivada se introduce a partir de la función derivada, y
- el operador integral indefinida (anti-diferenciación) se introduce a partir de los significados del operador derivada y usando el significado de la función derivada.

Esta forma de organizar la noción de derivada alrededor de los conceptos involucrados mediante relaciones es otra característica de la práctica de Juan. Juan ve el desarrollo de la derivada como progresivo vertical.

De esta manera se subrayan algunas características de la práctica de Juan: el uso integrado de los sistemas de representación, el desarrollo de los conceptos es progresivo y la importancia dada por Juan a la idea de "relación". Estas características son una manifestación de las concepciones de Juan respecto a las matemáticas escolares y al aprendizaje.

3.- LA PERSPECTIVA DE LA PRÁCTICA DE JUAN: PERSPECTIVA HOLÍSTICA

Consideramos la perspectiva de la práctica del profesor como "lo que subyace" a su práctica. La perspectiva de la práctica del profesor hace referencia a los aspectos que caracterizan su práctica cuando se considera la potenciación de la construcción de conceptos. Vamos a caracterizar la perspectiva de la práctica del profesor a partir de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada.

La perspectiva de la práctica es un "constructo" teórico definido por un "conglomerado" de ideas agrupadas en dos dimensiones:

- cómo concibe el profesor el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos visto a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que se potencia, secuencia y relaciones y su justificación.
- su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje visto a través de cómo organiza el contenido matemático para enseñarlo.

Las inferencias sobre estas dimensiones la hemos realizado mediante el uso de las variables siguientes:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

El análisis de la práctica de Juan permite identificar el "posicionamiento" de Juan en cada una de las dimensiones que definen la idea de “perspectiva de la práctica” en general. Con este objetivo describimos los valores de las tres variables utilizadas para la inferencia sobre dichas dimensiones.

En relación al uso de los sistemas de representación como instrumentos de la práctica, podemos señalar que Juan promueve en sus estudiantes la integración de lo analítico y lo gráfico. Cuando el concepto que se maneja admite las dos representaciones, Juan utiliza las dos representaciones y lo hace de forma integrada, realizando una síntesis de los modos de representación. Algunas de las situaciones de integración de lo gráfico y analítico se facilita a través del uso del software. Juan pretende con su manera de actuar hacer visibles las ideas subyacentes y que los significados de los conceptos en los diferentes sistemas de representación aparezcan vinculados. Sobre esta característica de integración de modos de representación Juan empieza a construir el significado de “relación”, haciendo visible la relación entre los significados gráficos y analíticos y la síntesis de los modos de representación. Esta manera de proceder de Juan manifiesta una concepción sobre las matemáticas en las que el contenido matemático se organiza alrededor de los distintos significados de los conceptos y sus traslaciones. Además pone de manifiesto una concepción del aprendizaje de las matemáticas en el que los conceptos se construyen con significados vinculados en las traslaciones entre las distintas representaciones.

Respecto a la organización de los distintos conceptos vinculados a la noción de derivada en la práctica de Juan se pone de manifiesto que la construcción de la noción de derivada a través de los distintos conceptos (derivada de una función en un punto, función derivada, operador derivada) se lleva a cabo estableciendo relaciones entre ellos.

Juan se apoya en unos significados para proceder a la construcción de los significados de nuevos conceptos. Juan considera necesario hacer explícito el paso de la derivada de una función en un punto (f´(a)) a la idea de "función derivada" (f´(x)) apoyándose en el significado de f´(a) construido independientemente de la representación. Del mismo modo Juan hace explícito el significado del operador derivada a partir de los significados de la función derivada. La forma de actuar de Juan pone de manifiesto su interés en hacer visibles las relaciones entre conceptos mediante la manera en la que se apoya en:

- la derivada de una función en un punto para mostrar el significado de la función derivada,
- la forma en que se apoya en el significado de la función derivada para mostrar el significado del operador derivada, y
- el operador anti-diferenciación a partir del operador derivada

Esta manera de actuar de Juan pone de manifiesto cómo organiza el contenido matemático, la función derivada se organiza alrededor de la derivada de una función en un punto mediante "generalización a todos los puntos" y el operador derivada a partir de la función derivada mediante "generalización a todas las funciones". Juan subraya las relaciones entre ideas matemáticas como una manera de dotar de significado a los conceptos.

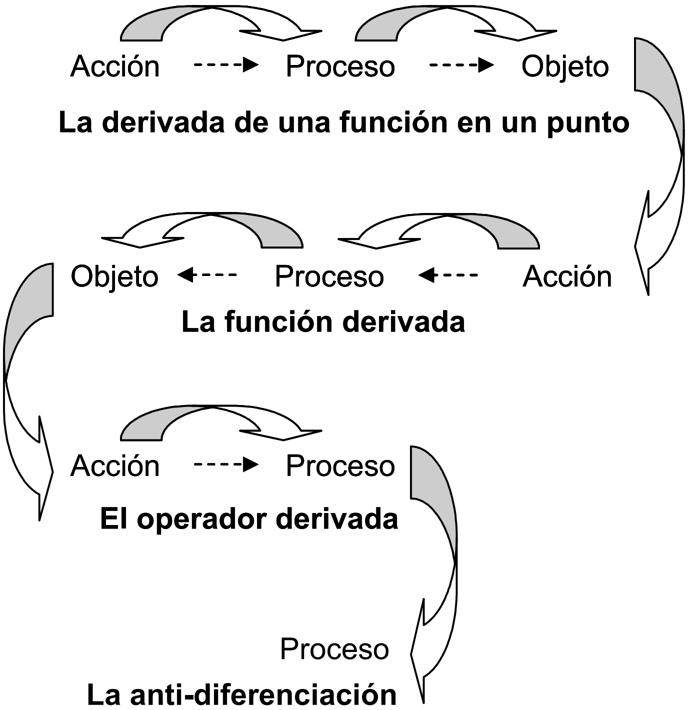
Esta forma de proceder pone de manifiesto una concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje en la que las matemáticas están formadas por conceptos relacionados entre sí, formando una red integrada. Las relaciones entre conceptos ayudan a vincular determinados significados a los conceptos.

La construcción de la idea de "relación" en la práctica de Juan aparece ahora vinculada a los distintos conceptos: los objetos de un nivel (de un concepto) se relacionan con las acciones de un nivel superior (otro concepto). Juan pretende que sus alumnos puedan realizar una construcción de los conceptos teniendo en cuenta de manera implícita las relaciones que se prescriben en el marco APOS.

En el cuadro 4.2 las flechas en sentido vertical indican las relaciones entre los distintos conceptos, esta manera de actuar de Juan pone de manifiesto una concepción del aprendizaje constructivista entre conceptos, el desarrollo entre conceptos es progresivo vertical.

Respecto a las formas de conocer que se potencian, la práctica de Juan potencia una construcción progresiva para cada uno de los conceptos de la noción de derivada. Para la derivada de una función en un punto la progresión que sigue Juan en las formas de conocer es acción-proceso-objeto, al igual que en el caso de la función derivada. Para el operador derivada se potencia la forma de conocer proceso. Haciendo uso de los objetos construidos con el fin de afianzar los significados.

Juan respecto a las formas de conocer que se potencian en cada concepto matemático, manifiesta su interés en que sus alumnos construyan los significados de conceptos teniendo en cuenta de manera implícita la descomposición genética del concepto. El desarrollo progresivo en cada concepto es otra manifestación de una concepción del aprendizaje constructivista para un concepto matemático. En el cuadro 4.2 las flechas en sentido horizontal indican las relaciones entre las distintas formas de conocer potenciadas. El desarrollo de cada concepto es progresivo horizontal.



Cuadro 4.2 Relaciones entre conceptos y formas de conocerlos

En un intento de fundamentar psicológicamente la práctica de enseñanza, Ernest (1989 b) propone un modelo de estructura cognitiva en el que las creencias se consideran separadas del conocimiento. Según este autor pueden caracterizarse distintas visiones de las matemáticas, entre ellas la basada en el "falibilismo"[13]. En esta visión, se enfatiza la práctica de los matemáticos en la que son tan importante los productos como los procesos matemáticos. Una característica viene dada por las "conexiones", valorando las relaciones y la tendencia a ser holísticas (Ernest, 1996). Basándose en esta aproximación, Golafshani (2004) caracteriza una visión constructivista de las matemáticas en la que se ven como en continuo crecimiento, cambiantes y revisables. El modo de instrucción permita a los estudiantes explorar e investigar mientras el profesor es un facilitador. La resolución de problemas es central en esta enseñanza y las actividades propuestas

[13]Considera que el conocimiento matemático es "falible" y por tanto sujeto a revisión, inspirada en el "cuasi-empirismo" de Lakatos (1978)

requieren razonar y pensamiento creativo, obtener y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar y validar ideas (a partir de Thompson, 1992). La visión de las matemáticas escolares que incorpora todas estas características son las pretendidas en las reformas propugnadas por la NCTM (1980, 1989). Por otro lado, centrándonos en la visión del aprendizaje matemático, Wilson y Cooney (2002) señalan que en las investigaciones sobre creencias de profesores el papel desempeñado por dicha visión, particularmente sobre cómo aprenden los estudiantes, desempeñan un papel cada vez más preponderante. Caracterizan una visión "relativista" de la enseñanza de las matemáticas en la que lo más importante es la comprensión del estudiante, contrasta esta visión con una orientación "dualística" hacia la enseñanza caracterizada por poner en énfasis en los productos, tales como la adquisición de procedimientos sin significados.

En nuestro caso, la práctica de Juan hace explícita la idea de "relación" a lo largo de toda la unidad didáctica. Las diferentes formas de visualizar la idea de relación en la práctica de Juan vienen dadas por: relaciones entre significados en distintos modos de representación, relaciones entre los diferentes conceptos que conforman la noción de derivada, y relaciones entre las distintas formas de conocer potenciadas para cada concepto. Esta forma de proceder haciendo explícito el significado de "relación" es una manifestación de las concepciones que sobre las matemáticas escolares y sobre el aprendizaje de las matemáticas que justifican la práctica de Juan. De esta forma en Juan una determinada concepción sobre las matemáticas escolares tiene relación con una determinada concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Las dos dimensiones de la "perspectiva" se manifiestan en la práctica de Juan de la siguiente forma. La práctica de Juan se apoya en la potenciación de la idea de "aproximación" que se hace visible con el paso al límite para la derivada de una función en un punto ($f'(a)$). Además potencia la idea de "generalización", tanto cuando se trata "a todos los puntos" para construir la función derivada, como para "todas las funciones" para dar significado al operador derivada. Cuando Juan trabaja el concepto de función derivada y operador derivada, el papel que la idea de "paso al límite" jugaba en la construcción de la derivada de una función en un punto, lo realiza en estos nuevos conceptos la idea de "generalización". Podemos decir que las ideas matemáticas que subyacen para Juan en la noción de derivada desde el punto de vista de su enseñanza en este nivel (Bachillerato) son: "aproximación, paso al límite, (doble)generalización a todos los puntos-a todas las funciones".

La concepción de las matemáticas escolares de Juan se apoya en la "riqueza de relaciones" y eso es coherente con su visión del aprendizaje apoyada en procesos de construcción de conocimiento, de ahí que la práctica de Juan "muestre" un mundo de relaciones entre las ideas matemáticas o entre las distintas formas de conocer que potencia con su práctica.

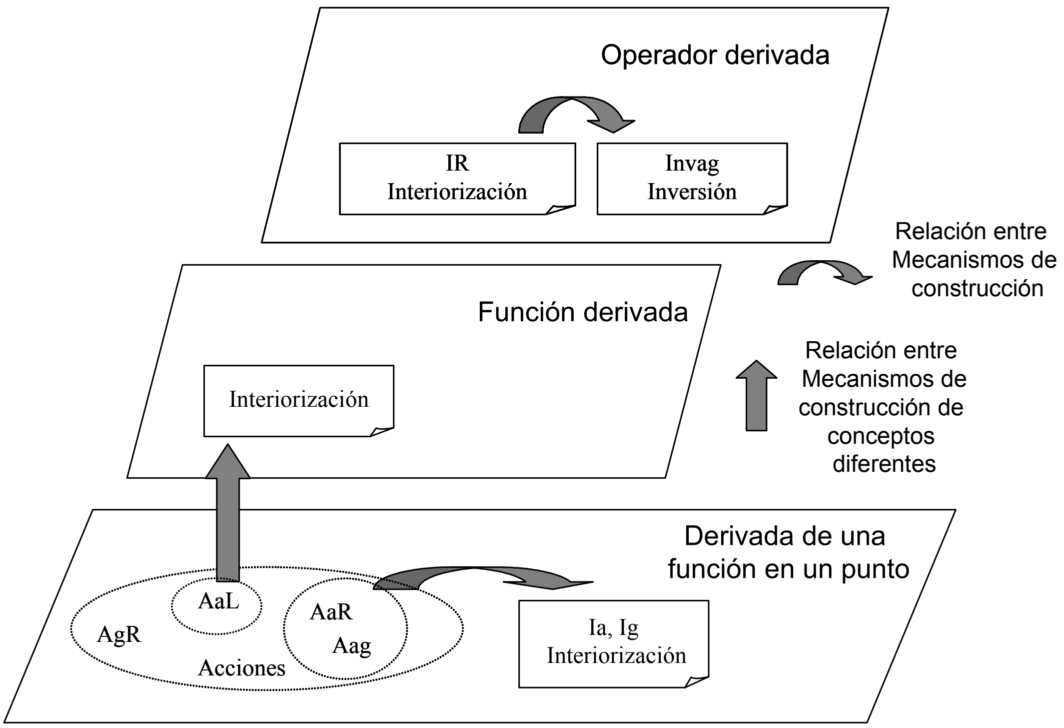
De manera resumida podemos por tanto caracterizar la perspectiva de la práctica de Juan en función de las dos dimensiones consideradas:

a) Las concepciones sobre el aprendizaje que se infieren de la práctica de Juan. Para Juan la construcción o desarrollo de los conceptos matemáticos es progresivo y conectado. Progresivo para la construcción de cada concepto, y progresivo entre los distintos conceptos. La síntesis de los modos de representación juega un papel fundamental en la construcción. Juan considera necesario potenciar la construcción de los conceptos como objeto.

b) La visión de las matemáticas escolares que se infiere de la práctica de Juan. Para Juan las matemáticas son algo más que un conjunto de reglas y procedimientos para recordar, son un conjunto de conceptos con significados vinculados y con diferentes representaciones, e interconectados entre sí, donde un concepto está relacionado con otros conceptos formando una red de conceptos.

4.- EL CASO DE MARÍA: LA MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA NOCIÓN DE DERIVADA EN LA PRÁCTICA DE MARÍA

En este apartado vamos a describir los resultados del análisis de la práctica de María. La modelación realizada por María de la descomposición genética de la noción derivada viene dada en términos de mecanismos de construcción y su secuencia-relaciones. María modela mecanismos de construcción para la derivada de una función en un punto, la función derivada y el operador derivada. Algunos de estos conceptos aparecen relacionados, al menos una parte de ellos. Las relaciones se establecen entre la derivada de una función en un punto y función derivada (mediante reglas), mientras que el operador derivada no se relaciona con los otros dos conceptos. En el cuadro siguiente se indican los mecanismos modelados por María para los diferentes conceptos de la noción de derivada y sus relaciones.



AgR=Acción gráfica regla
AaL=Acción analitica límite
AaR=Acción analítica regla
Aag=Acción analítico-grafico
Ia=Interiorización analítica
Ig=Interiorización gráfica
IR=Interiorización regla
Invag=Inversión analítico-gráfico

Cuadro 4.6 Modelación de mecanismos de construcción en la práctica de María

En el cuadro anterior de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada, además de los mecanismos de construcción hemos incluido las modelaciones que hace María de la derivada de una función en un punto como acciones (señaladas con una elipse). Lo hemos hecho así porque en el caso de María hemos identificado algunas modelaciones de acciones que no se interiorizan. Las modelaciones de acciones se identifican al principio de la unidad didáctica, lo que es acorde con el marco APOS, en el que las acciones marcan el principio para la construcción de un concepto (Dubinsky, 1996; Asiala et al., 1996). Esta modelación de acciones desvinculadas del mecanismo de interiorización pone de manifiesto el interés de María en la formulación de "reglas" vinculadas a los conceptos.

María modela la interiorización y algunas acciones (no interiorizadas) para la derivada de una función en un punto. Los significados interiorizados y las aciones no interiorizadas no guardan relación alguna, hay una separación entre ambas, en este sentido entendemos que no hay progresión en las formas de conocer potenciadas para el concepto. Los significados se interiorizan mediante el paso al límite. Lo esencial en la práctica de María es el disponer de un procedimiento de cálculo siempre que sea posible, y si es necesario "pegar" un significado de naturaleza geométrica. No se hace uso de los significados de la derivada de una función en un punto. María no modela otros mecanismos para la derivada de una función en un punto.

María modela para la función derivada el mecanismo de interiorización a partir de las acciones de la derivada de una función en un punto dadas por una regla (regla de los cuatro pasos). La función derivada se potencia mediante la generalización a una variable x de la regla dada para un punto. De esta forma se pone de manifiesto el interés de María en vincular "reglas" a los diferentes conceptos. Para el operador derivada María modela los mecanismos de interiorización e inversión.

De esta manera la construcción de la derivada de una función en un punto que potencia la práctica de María es como proceso y como acción, para la función derivada y para el operador derivada potencia la construcción como proceso. Una característica de la práctica de María es la no integración entre lo analítico y lo gráfico en las modelaciones de mecanismos y acciones, si aparecen ambas representaciones predomina la analítica y el significado geométrico es meramente "testimonial".

Como hemos indicado, María modela diferentes acciones para la derivada de una función en un punto. María modela el mecanismo de interiorización gráfica (Ig: la recta tangente a la curva en un punto como límite de rectas secantes) a partir de las acciones analíticas-gráficas y el mecanismo de interiorización analítica (Ia: la tasa de variación instantánea en un punto como límite de las tasas de variación media) a partir de las acciones analíticas. Las acciones modeladas y no interiorizadas vienen dadas por reglas para obtener el número f ´(a), AaL (regla de los cuatro pasos) y AgR (la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente). La relación entre ambas desempeña un papel mínimo en la práctica de María.

Para la función derivada María generaliza la derivada de una función en un punto dada por un límite como regla $f'(a) = \lim_{h \to 0} {f(a+h) - f(a)}/{h}$. Ésta es la conexión entre la derivada de una función en un punto y la función derivada. De esta forma la modelación del mecanismo de interiorización permite a María introducir la función derivada como generalización de una regla. La regla introducida calcula la derivada de una función en un punto como límite en 4 pasos[1]. La generalización para cualquier x permite obtener una regla general.

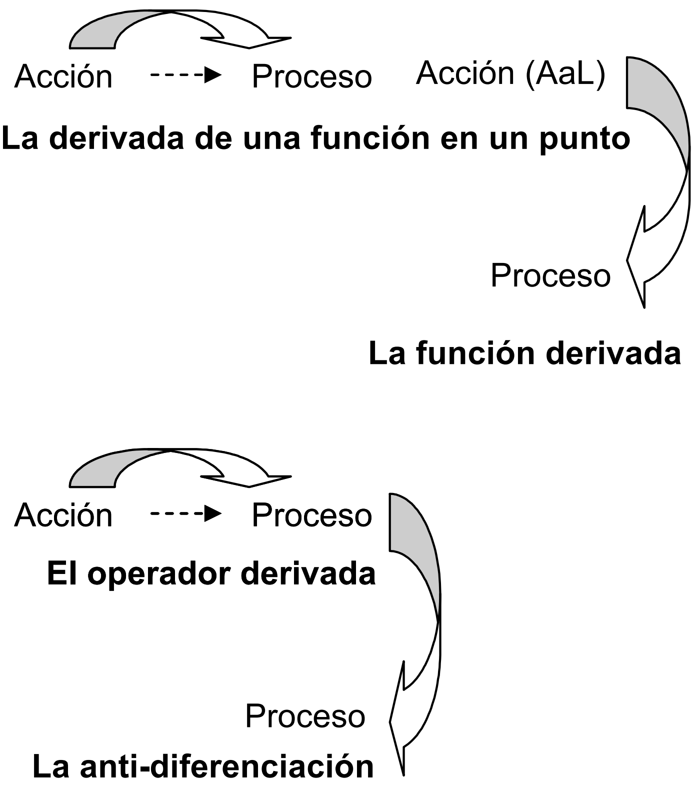
[1]Los cuatro pasos para calcular f ´(a) son: 1) calcular f(a+h) y f(a), 2) calcular f(a+h)-f(a), 3) calcular (f(a+h)-f(a))/h, y 4) calcular lim(h tiende a 0)(f(a+h)-f(a))/h.

Dicha regla para un x genérico potencia la función derivada como proceso. Por tanto, María utiliza la regla de la derivada de una función en un punto para producir valores concretos de la función derivada (generalización). Esta construcción potenciada por la práctica de María no se relaciona con el operador derivada. Esta forma de proceder enfatizando la regla de los cuatro pasos hace que los significados geométricos que se pueden vincular no pasen de "testimoniales".

Para el operador derivada, María modela el mecanismo de interiorización a partir de reglas de derivación. María proporciona las reglas de derivación de las funciones elementales y de las operaciones entre funciones (suma, resta, producto, cociente, composición y recíproca de una función). El sistema de representación usado es analítico. Una vez modelado el mecanismo de interiorización, María modela el mecanismo de inversión del operador derivada. El mecanismo de construcción de inversión de un proceso construye un nuevo proceso, en este caso se modela la inversión del operador derivada, lo que permite la consideración de la integración indefinida (anti-diferenciación) como un proceso sin necesidad de modelar las acciones y su mecanismo de interiorización. María modela este mecanismo de inversión del operador derivada colocando el énfasis en la "regla" de "reducir un grado el exponente".

Aparecen varios aspectos de la práctica de María que aportan información sobre la perspectiva de la práctica de María: i) María modela mecanismos que no se relacionan con otros mecanismos, ii) María modela acciones que no se interiorizan y no relacionadas con las acciones interiorizadas (procesos), y iii) papel poco relevante de los significados geométricos.

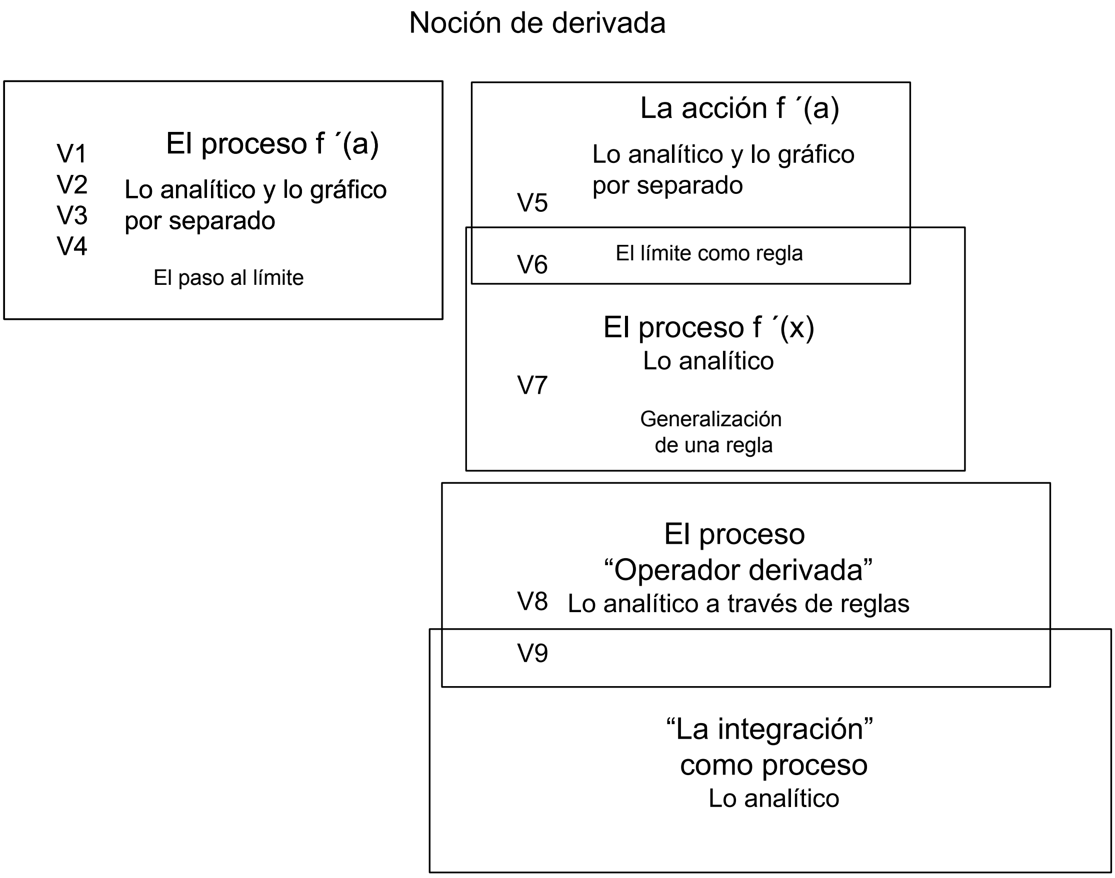
En el siguiente cuadro (cuadro 4.7) se esquematiza para cada concepto las relaciones entre las formas de conocer potenciadas y las relaciones entre los distintos conceptos que conforman la noción de derivada.



Cuadro 4.7 Relaciones entre conceptos y formas de conocerlos

Consideramos que la práctica de María se caracteriza por el énfasis dado a las reglas y procedimientos para calcular, y la poca presencia de relaciones significativas (entre representaciones, formas de conocer y distintos conceptos). La falta de relaciones se observa, por ejemplo, en la construcción "separada"de $f\,'(a)$, $f\,'(x)$ y del operador derivada y en que la relación entre $f\,'(a)$ y $f\,'(x)$ es por generalización de una regla. Los significados interiorizados de $f\,'(a)$ no aparecen para apoyar la construcción de $f\,'(x)$. Esta manera de actuar parece apoyarse en las concepciones que mantiene María respecto a las matemáticas escolares y sobre el aprendizaje de nociones matemáticas.

En el cuadro siguiente (cuadro 4.8) se esquematizan las formas de conocer potenciadas para cada concepto y las relaciones, junto con el uso de los sistemas de representación e ideas "visibles" en las que se apoya. Indicamos las viñetas que nos proporcionan las evidencias empíricas para nuestra inferencia.



Cuadro 4.8 Organización de las viñetas: formas de conocer, modos de representación e ideas

En el siguiente punto detallamos las evidencias empíricas que permiten caracterizar la práctica de María. Estas evidencias empíricas tendrán la forma de viñetas que nos permitirán ejemplificar aspectos de la práctica de María desde los que inferir lo que fundamenta su práctica. El hecho de mirar la práctica de María a través de la “modelación que realiza de la descomposición genética de la noción” permite ordenar las viñetas siguiendo el orden de los mecanismos que modela. María no sigue estrictamente el orden de modelación que se prescribe en la caracterización de la idea de comprensión en el marco APOS, ya que modela acciones no interiorizadas, y salvo el mecanismo de inversión sólo modela interiorizaciones.

Indicamos a continuación los días y las viñetas de la gestión de María.

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Viñetas	V1	V2 V3 V5	V4 V6 V7... ...	V8...								V9

En cada viñeta se indican:

- la tarea y/o el grupo de tareas con las que se desarrolla el segmento de enseñanza presentado,
- organización del contenido (desde la entrevista de planificación y de la unidad didáctica),
- discurso en el aula (lo que el profesor dice y hace en el aula), y
- cómo justifica la gestión realizada.

En cada viñeta indicaremos la inferencia realizada sobre la modelación del mecanismo de construcción que realiza el profesor mediante los elementos matemáticos y sistemas de representación (instrumentos de la práctica).

Esta sección la hemos organizado en tres apartados, i) derivada de una función en un punto, ii) La función derivada como proceso, y iii) del operador derivada a la integración.

4.1.-Derivada de una función en un punto

En este primer apartado describimos como María modela la descomposición genética relativa a la derivada de una función en un punto. Se organiza en dos partes. La primera parte se centra en las modelaciones que potencian la derivada de una función en un punto como proceso a través del paso al límite de las secantes y de las tasas de variación, pero por separado.

La segunda parte trata de las modelaciones de acciones de la derivada de una función en un punto y que no llevan a otra forma de conocer. María modela por separado el mecanismo de interiorización de una función en un punto y la derivada de una función en un punto como acción.

Por tanto la construcción de la derivada de una función en un punto no es progresiva, sino que hay una ruptura entre las dos formas de conocer potenciadas (acción y proceso). María parte de modelar la derivada de una función en un punto mediante una regla dada por un límite (regla de los cuatro pasos) para llegar a modelar el mecanismo de interiorización para la función derivada mediante una regla.

4.1.1.- La derivada de una función en un punto como proceso

En este apartado incluimos las modelaciones que realiza María de los mecanismos de interiorización de la derivada de una función en un punto. En la práctica María modela diferentes acciones, de algunas acciones modela su interiorización y de otras acciones no. La modelación de las acciones las incluimos separadas de la modelación del mecanismo de interiorización de las mismas por la importancia dada por María a esta forma de conocer. María modela la interiorización de las acciones a través del paso al límite.

Los significados gráficos y analíticos aparecen separados en las modelaciones de la interiorización. Únicamente se integran lo gráfico y lo analítico en la modelación de acciones. Estas modelaciones se identifican en la primera parte del desarrollo de la unidad didáctica.

V1: La introducción de la tasa de variación media como proceso en un contexto analítico

La situación descrita en esta viñeta tiene lugar en la primera clase de la unidad didáctica. En esta viñeta María pretende introducir la derivada de una función en un punto usando un contexto de velocidad. Las funciones vienen dadas por su expresión algebraica. María representa las funciones y pide que se calculen velocidades medias en determinados trayectos y generaliza a la noción de tasa de variación media en un intervalo.

En la entrevista de planificación María indica sobre esta tarea:

"La tasa de variación media, se la pretendo introducir pues a través de darle dos funciones con sus gráficas que ellos además las dibujan, es decir, yo les doy las funciones y ellos las dibujan y les planteo el problema sobre que si fuesen por ejemplo la trayectoria de 2 móviles... les planteo que calculen la velocidad media en un intervalo tanto para un caso como para otro, no? y una vez que me hayan calculado las velocidades medias en los distintos intervalos, no? bueno pues les hago ver que como uno lleva una velocidad media, es decir, cómo se calculan las velocidades medias".

Enunciado de la tarea:

Consideremos móviles cuyos movimientos siguen las ecuaciones $y=x^2$ y=raíz(x), tenéis que dibujar sus "trayectorias" [se refiere a la relación tiempo-espacio], y calcular sus velocidades medias en las cuatro primeras horas.

María representa gráficamente las funciones y realiza los cálculos que se piden en la tarea.

El diálogo se centra inicialmente en el intento de María de que los alumnos calculen la velocidad media para la función $f(x)=x^2$.

P: La velocidad media, es decir, tendrás que calcular el espacio que recorre, éste es el espacio y éste es el tiempo <Eje x: tiempo, Eje y: espacio>, tendrás que ver el espacio que ha recorrido en las cuatro primeras horas partido por el tiempo que ha tardado. Venga las velocidades medias.

E: Pero ¿cómo lo calculas? ¿cómo se calcula?

P: ¿tú cómo calculas la velocidad media? El espacio que ha recorrido partido por el tiempo que has tardado.

A lo mejor no está claro que en este ejercicio la x corresponde al tiempo ¿eh? hay quien no lo tiene claro ¿no? pues venga la x corresponde al tiempo y la y ¿corresponde? Al espacio que recorre, entonces cómo se calcula una velocidad. O dicho de otra manera el espacio que recorre en esas cuatro horas partido ¿por?

E: Por el tiempo.

P: El tiempo que tarda en recorrer ese espacio. Pues venga, qué espacio va a recorrer en esas cuatro horas, venga hacerlo para cada una de las ecuaciones de los movimientos.Podemos medirlo en kilómetros por hora ¿no?

E: ¿El espacio?

P: El espacio en kilómetros y el tiempo en horas porque como te lo he dicho ya en horas el tiempo. Luego a las cuatro horas ha recorrido 16 kilómetros, por tanto la velocidad media entre 0 y 4 ¿no? en el intervalo [0, 4] ha sido, pues a 16 que es lo que ha recorrido .

E: 4

P: ¿cómo?

E: menos 4.

P: Le quitamos 0 que ha recorrido en el minuto 0, 4 menos 0, como tú decías muy bien, a ver, espacio final menos espacio inicial ¿no era eso? Partido por tiempo final menos tiempo inicial. En definitiva ¿qué os ha dado?

E: 4.

P: 4 ¿qué?

E: kilómetros por hora.

Posteriormente María centra la atención de sus alumnos en el cálculo de la velocidad media en el intervalo [0, 4] en el caso del segundo móvil.

P: En la otra, cuando la x vale 4 la y vale 2 ¿no? entonces la velocidad aquí entre 0 y 4 ha sido ha sido

E: 2 partido de 4.

P: 0.5 ¿no? kilómetros-hora. Bien, hacerlo ahora entre, entre la cuarta y la novena hora. <Deja un tiempo para hacerlo>.

El foco sigue siendo el cálculo de la velocidad media en otro intervalo.

El espacio final menos el espacio inicial partido del tiempo final menos el tiempo inicial ¿no? ¿no hemos hecho eso? Y aquí igual ¿no? (2-0)/(4-0) ¿vale? Y quiero que hagáis lo mismo, que ya lo habréis hecho, ¿no? entre la cuarta y la novena.

Nosotros vamos a hablar solamente de intervalos y cómo varía la función, en vez de llamarle velocidad media le vamos a poner ahora la tasa de variación media. <Calculan la tasa de variación media en el intervalo [0,4]]>.

Bien, en general, en general la tasa de variación media en un intervalo [a, b] ¿quién sería?

E: f(b)-f(a).

P: Pues copiarlo eso, (f(b)-f(a))/(b-a).

María con esta última intervención pretende generalizar los cálculos realizados en el caso del intervalo [a, b] y por tanto simbolizar la idea de tasa de variación media

En las líneas 5-6, 22-24, 32 y ss, 35 y ss. María modela una acción para la derivada de una función en un punto dada por la tasa de variación media en un intervalo. Esta inferencia se basa en la descripción que hace Asiala et al. (1997) sobre dicha forma de conocer para este concepto derivada de una función en un punto:

> ***"1b. Analítico:*** *la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto[2]."* (p. 407)

La modelación realizada por María mediante los instrumentos de la práctica puede ser representada de la siguiente manera:

Tasa de variación media en un intervalo [a, b] viene dada por el cociente (f(b)-f(a))/(b-a) **Analítico**

Esta forma de actuar es característica de la práctica de María en la que a partir de unos ejemplos particulares intenta "mostrar" a sus alumnos cómo se calcula, en este caso, la tasa de variación media. Desde el punto de vista de construcción de los significados podemos suponer que María intenta que sus alumnos construyan como proceso el significado de la tasa de variación media al vincular la realización de los casos particulares a la notación general.

V2: La tasa de variación media como proceso: la integración de lo gráfico y lo analítico

La situación descrita en esta viñeta tiene lugar en la segunda clase de la unidad didáctica. María introduce la tasa de variación media y lo vincula al significado gráfico dado por la pendiente de la recta secante a la curva en dos

[2] Ver página 95.

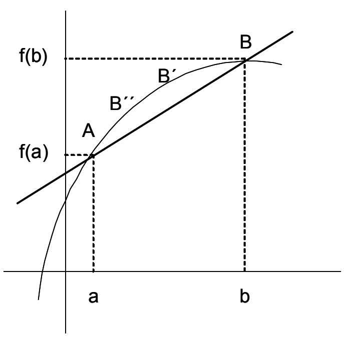
puntos. Como indica María su objetivo aquí es dotar de significado geométrico al número dado por la tasa de variación media. Es por tanto objetivo explícito de María vincular la idea de tasa de variación media calculada como $f(b)-f(a)\big/ b-a$ con la idea de pendiente de la recta secante, en lo que se perfila la integración de lo gráfico y lo analítico.

En la entrevista de planificación María indica sobre esta tarea:

"Ellos en casa perfeccionen sobre cuál es la interpretación geométrica de la tasa de variación media, es decir, qué representa la tasa de variación media en la gráfica, es decir, qué es la gráfica de la tasa de variación media y lo que pretendo es que me digan que es la pendiente de la recta secante que une esos dos puntos, es lo que pretendo que me digan, pero bueno, a ver si ellos intentan gráficamente ver ese número qué es en la gráfica"

Enunciado de la tarea:

Interpretar geométricamente la tasa de variación media de una función en un intervalo. Calcula la T.V:M. de f(x)=3x-2 en los intervalos [-1, 2], [1, 3] y [-3, 4]. Justifica por qué obtienes el mismo resultado (página 286, tarea 80).



Para resolver la primera parte representa gráficamente una función arbitraria, como en la figura anterior y los puntos A (a, f(a)) y B (b, f(b)). Después representa f(x)= 3x-2 y se calculan las tasas de variación media en los intervalos.

En cierta medida el uso simultáneo de un caso genérico (el dibujo de una función arbitraria) y de un caso particular (f(x)=3x-2) para mostrar la vinculación entre el significado analítico y lo gráfico puede ser entendida como un intento de María de que sus alumnos construyan como proceso (esta vez integrando lo gráfico) la idea de tasa de variación media.

El diálogo de clase:

P: Interpretar geométricamente la tasa de variación media de una función en un intervalo. Para hacer esto, aparte de todo lo que hemos hecho durante la clase <María hace un dibujo y calcula la tasa de variación media >, lo penséis, vosotros dibujar una gráfica de una función ¿eh? hallar la tasa de variación media entre dos puntos y ahora ver el número que os da, qué es exactamente, que se puede, ese número qué es en la gráfica. Para ayudaros os propongo también un ejercicio que está en la página 286 del libro y es el número, las cuestiones teóricas, el número 80.<María pregunta si algún estudiante sabe qué es>

Cristina. A ver.

E: Es la pendiente en un intervalo.

María intenta explicitar el significado geométrico de la idea de pendiente de la recta secante con sus alumnos usando un ejemplo genérico.

P: A ver, a ver, serías capaz de hacer un dibujo, de hacer un dibujo y sobre el dibujo.

E: Yo he puesto, la pendiente del segmento que une los puntos del intervalo.

P: Vale, venga, utiliza este dibujo para que se vea mejor, Juan Miguel, escribe a y b a los puntos del intervalo. Bueno, eso es y ahora pon la abscisas del punto, la abscisas del punto a. Vamos a llamarla a pequeña, a la abscisas, a la x, a la x del punto A. Venga, vale ¿f(a) quién sería?¿dónde estaría f(a)? Ponlo y ahí f(b) <representando gráficamente f(x) y los puntos A y B> ¿vale? Ahora, ¿qué es la tasa de variación media?

En este momento intenta mostrar cómo quedaría reflejada la tasa de variación media en la gráfica y para ello intenta trasladar la expresiones genéricas usadas, f(b)-f(a) y b-a a la gráfica.

Pues pon la expresión que pusimos ayer: tasa de variación media en "ab", en el intervalo [a,b].

Pon en el dibujo quién es f(b) - f(a). ¿quién sería?, f(b)-f(a), sobre el dibujo.

E: Sería esto ¿no? <diferencia de ordenadas>.

P: Eso, eso es, perfecto.

Y lo que estamos viendo en el dibujo ¿ qué significa? Esto es f(b) - f(a) ¿vale? ¿ quién es b-a? Sobre el

dibujo <Diferencias de abscisa y ordenadas>. Ponlo, y ahora el cociente. La tasa de variación media es el cociente entre f(b) - f(a) y b-a. ¿no? y eso ¿qué es?
E: La tangente.

Finalmente vincula la expresión (f(b)-f(a))/(b-a) a su significado geométrico como la pendiente de la recta secante.

P: La pendiente que es la tangente del ángulo ¿no? Si yo esto <f(b) - f(a)> lo divido entre esto <b-a>, pues se ha formado ahí un triángulo rectángulo. Es la pendiente de la recta que une los puntos, que une los puntos, los puntos A y B. Lo que tú habías dicho. <Deja un tiempo y los estudiantes resuelvan el problema 80>.

María pasa a continuación a resolver el problema de la función particular vinculando el significado como pendiente de la recta secante con el valor de la tasa de variación media en esta función concreta (cuya gráfica es una recta).

P: A ver, Samuel, tú has dicho que has hecho el problema 80. ¿Qué te sale? ¿ Qué es la tasa de variación media en cada uno de los intervalos?
E: Tres.
P: ¿tres?
E: El del 80 es tres.
P: ¿en todos los intervalos? Está bien, te sale bien.
Dice el problema, justifica por qué obtienes el mismo resultado
E: Porque es una función lineal.
P: Porque es una función lineal .
E: Es una recta.
P: Es una recta. Bueno, ¿y qué?
E: Pues, que cada intervalo que pongas te va a salir lo mismo.
P: Porque a lo largo de toda la recta la pendiente es la misma.

En la entrevista de desarrollo María dice:

"La tasa de variación media como pendiente de la recta por esos dos puntos, se hace un trasvase entre el cociente y el concepto, es un aprendizaje más amplio."

Con esta idea María pone de manifiesto que para la tasa de variación media la integración de lo analítico y gráfico es importante para que los alumnos construyan el significado. Sin embargo hay que reseñar que mientras en la introducción de la idea de tasa de variación media con lo analítico la secuencia fue de lo particular a lo general, cuando realiza la integración de los significados geométrico y analítico de la tasa de variación media la secuencia seguida es de lo general a lo particular.

En las líneas 15 y ss. y 27 y ss. se da la modelación de la acción en forma analítica (calculo de la tasa de variación media en un intervalo) y en las líneas 24 y ss. identificamos la modelación de la acción en forma gráfica (recta secante a la curva y cálculo de su pendiente), que basamos en las caracterizaciones de las mismas dadas por Asiala et al. (1997) sobre la forma de conocer acción:

> *"**1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos.*
> ***1b. Analítico:** la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto."*
> (p. 407)

En las líneas 21-27 y en las líneas 27 hasta el final observamos la relación entre los dos significados y en los comentarios hechos en las entrevistas, de planificación (*qué representa la tasa de variación media en la gráfica*) y en la de desarrollo (*se hace un trasvase*).

Para la modelación de la forma de conocer acción de la derivada de una función en un punto, en forma analítica y gráfica relacionadas, que hace María utiliza los elementos matemáticos y modos de representación siguientes:

Tasa de variación media en un intervalo [a, b] viene dada por el cociente (f(b)-f(a))/(b-a) **Analítico**	Lin. 21-27 ⟷	Secante a una curva por dos puntos (a, f(a))(b, f(b)) tiene de pendiente (f(b)-f(a))/(b-a) **Gráfico**

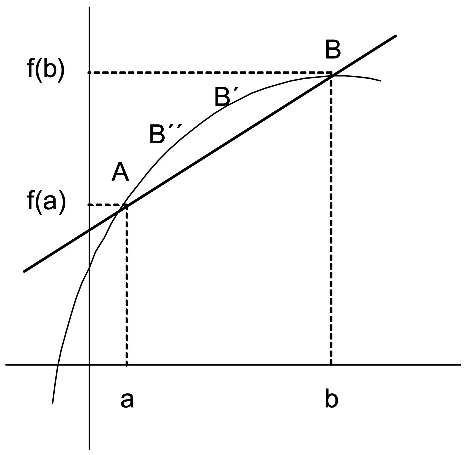
V3: Modelación del paso al límite de la tasa de variación media

La situación descrita en esta viñeta sucede en la segunda clase. En esta viñeta María va a obtener la velocidad instantánea en un punto a partir de la velocidad media (tasa de variación media). Retoma la gráfica de la viñeta 1, en la que se calcularon velocidades medias. Aunque utiliza la gráfica de la función se refiere siempre a significados matemáticos de carácter analítico en genérico y sólo usa la gráfica para mencionar cómo disminuir el intervalo en x.

En la entrevista de planificación María indica:

"Yo lo que quiero mover es el punto, el intervalo, lo que quiero decirles, es que bueno, si esa velocidad media de la que hablamos en intervalo, en vez de hacerla de aquí a Cádiz, la hacemos de aquí a Las Cabezas (pueblo de la provincia de Sevilla), después de aquí a Los Palacios (pueblo de la provincia de Sevilla), después de aquí a Dos Hermanas (pueblo de la provincia de Sevilla) y así vamos acercándonos sucesivamente, vamos acercándonos a un punto y cómo esos dos puntos se van acercando, uno se va acercando al otro. Entonces esa es mi idea."

María utiliza la situación tiempo-espacio de la viñeta 1 para contextualizar el paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea con el significado de la velocidad. María utiliza el siguiente gráfico.



El dialogo de clase:

P: Ayer empezamos la explicación diciendo: sea ésta < $y=x^2$ > la ecuación de un movimiento. Ésa es la trayectoria.

Dijimos, hallar la velocidad media entre los puntos a y b, en un intervalo. Hallar la velocidad media. La velocidad media entre a y b es igual, pues a f(b) - f(a)/ b - a . Que salían tantos kilómetros. ¿Eso qué significaba? Pues que el móvil al hacer esta trayectoria ha llevado de velocidad media, pues, en el primer problema nos salían 13 kilómetros ¿no? 13 kilómetros por hora vamos a suponer. ¿Eso qué significa? Que cada hora recorre 13 kilómetros.

Pero eso, no quiere decir, a lo mejor, que la primera hora haya tenido que recorrer 13km, la segunda otros 13, la tercera otros13 y la cuarta otros 13 ¿no? A lo mejor, ha recorrido en una hora, ha recorrido 26 km y la 2ª hora ha recorrido ninguno, y no quiere decir que todas las horas ha estado recorriendo 13 km.

El móvil al ir desde el punto a hasta el punto b, de velocidad media, la velocidad media ha sido ésta. El problema que se plantea ahora es ¿qué velocidad es la que llevaba el móvil en un instante concreto? en el punto a, concretamente. Lo que interesa ahora, el estudio que interesa ahora es ¿qué velocidad lleva un móvil en un instante, no en un intervalo, sino en un momento concreto. ¿vale? Bien ¿cómo se hace eso?

María utiliza una gráfica genérica para modelizar el paso al límite haciendo aproximarse un extremo del intervalo al otro. María usa el discurso hablado con el apoyo de la gráfica genérica para "mostrar" cómo el paso al límite de la expresión (f(b)-f(a))/(b-a) cuando b se aproxima a a se llama "velocidad instantánea".

Este punto b lo hago tender, lo hago acercarse al punto a, es decir, el intervalo cada vez lo hago más chico, en vez de cogerlo aquí, lo cojo aquí y ahora tengo este intervalo, ¡eh! esta recta secante ¿qué ocurre? Cuando en punto, en el límite, acordaros lo que era el concepto de límite, me aproximo tanto como yo quiera. El límite ¡eh! Cuando este intervalo se haga 0, cuando esto sea 0, ¿qué ocurre? Que el punto b estará sobre el punto a, luego si yo hago el límite de esta expresión, la velocidad media entre a y b se me convertirá en la velocidad instantánea en el punto a. ¿sí o no? Es decir, si yo hallo el límite cuando "b" tiende a "a", cuando la "b" tiende a "a", si yo hallo el límite de f(b) - f(a)/b -a ¿qué ocurrirá? Que será la velocidad que lleva en el punto a, será la velocidad instantánea, vamos a ponerle una i, en el punto a.

Luego vamos a estudiar las velocidades ahora, instantáneas, mediante un límite.

Entonces, vamos a estudiar este límite, este límite lo vamos a estudiar pero, no ya teniendo en cuenta que estamos viendo velocidades, sino en general. Este límite es el límite de la tasa de variación media. ¿sí o no? Límite de la tasa de variación media.

El límite de la tasa de variación media entre a y b cuando la "b" tiende a "a", o lo que es lo mismo, el límite cuando la "b" tiende a "a" de f(b) - f(a)/ b - a ¿eh? le vamos a llamar derivada, derivada de la función f en el punto a.

Aunque hay una gráfica genérica sobre la que María apoya su discurso, los significados que usa son siempre analíticos (el cociente incremental). En ningún momento usa la idea de recta secante que tiende a la recta tangente para apoyar su discurso. Debido a esta característica del discurso de María decimos que María intenta que sus alumnos construyan el significado de la tasa de variación instantánea como paso al límite de la tasa de variación media sólo en su significado analítico. Por tanto queda implícito el significado geométrico introducido con anterioridad.

En la entrevista de desarrollo María dice:

"Esto es novedoso, la aproximación, ya que la tasa de variación media es un cálculo"

La modelación por parte de María del mecanismo de interiorización se lleva a cabo cuando considera los intervalos que aparecen cada vez "más pequeños", modelando el paso al límite. Este paso al límite no se realiza de ninguna forma explícita numérica (no se llevan a cabo cálculos de ningún tipo). En concreto, en las líneas 3-5 María explicita el significado de la tasa de variación media a partir del cual organizará su discurso para modelar el paso al límite.

En la línea 17, menciona la recta secante, pero abandona el intento de seguir por esa línea. De las líneas 17-25, inferimos que María modela el paso al límite de acuerdo con la descripción dada por Asiala et al. (1997):

> ***2b. Analítico:*** *Interiorización de las acciones del punto 1b*[3] *cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños, es decir, la amplitud del intervalo tiempo se acerca cada vez más a cero.* " (p. 407)

[3]Cálculo de la tasa de variación media.

En las entrevistas, María plantea utilizar la idea de límite mediante la idea de acercar los puntos entre los que se calcula la velocidad ("acercarse sucesivamente"), creemos que se refiere a la idea de límite con infinitos cálculos (pero que no se realizan) y según Cottrill et al. (1996) al tratar el tema del límite, cuando es necesario realizar infinitos cálculos para obtenerlo, sólo puede ser comprendido a través de una forma de conocer proceso. Por tanto es posible pensar que María está intentando hacer explícito ese paso al límite, haciendolo "visible" en su discurso y con el apoyo de la gráfica genérica para facilitar el que sus alumnos construyan los significados de la tasa de variación instantánea como proceso (f ´ (a)).

La descripción de esta viñeta mediante los instrumentos de la práctica es la siguiente:

Tasa de variación media en un intervalo [a, b] viene dada por el cociente (f(b)-f(a))/(b-a) **Analítico**	Lin. 17-25 →	La derivada de una función f en el punto x=a viene dada por el límite de las tasas de variación media en los intervalos [a, a+h] cuando h tiende a 0. **Analítico**

V4: Modelación del paso al límite del cociente incremental en contexto gráfico (de la secante a la tangente)

La situación descrita en esta viñeta ocurre en la tercera clase. En esta viñeta María va a obtener la recta tangente a una curva en un punto como límite de rectas secantes a través del paso al límite.

Enunciado de la tarea. Una vez que se ha introducido la tasa de variación media, su interpretación geométrica y la tasa de variación instantánea, María pretende introducir la interpretación geométrica de ésta última.

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

Para resolver la tarea María se apoya inicialmente en la relación entre la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante.

El dialogo en el aula:

P: La interpretación geométrica de la tasa de variación media, ¿no?

E:Cuando b tiende a a (b -->a).

P: Cuando b -->a (b tiende a a). Entonces cuando b-->a , ¿qué le pasa a la recta, a la secante?

E: Que es la tangente a la curva en el punto.

P: A ver, dílo fuerte ,hijo.

E: La tangente a la curva en el punto a.

P: ¿Y por qué has llegado tú a esa conclusión?

E: Como es el límite, entonces, los puntos es como si estuvieran en uno; entonces la recta que pasa por la, por la curva nos da únicamente ese punto. <Los estudiantes no entienden la explicación y pasa a explicarlo Maria>

P:A ver, ¿qué era, qué era la tasa de variación media, la interpretación geométrica? La recta que unía los puntos a y b; la pendiente de esa recta ¿no? ¿os acordáis de aquello de ayer? Si el punto b tiende a acercarse a a, esa recta, ¿qué terminará siendo?. La recta que pasa por quién, por el punto a, porque tiende a confundirse con el a; el b y el a, tienden a ser el mismo punto, ¿no?; luego, será la recta que pasa por el punto a; y entonces, la derivada, que es el límite se, ese cuando el límite, cuando la b-->a; la derivada, ¿qué será?, la pendiente de esa recta, ¿de qué recta? de la tangente a la curva en ese punto.
Vamos a ver si haciendo el dibujo.
Si, si yo tengo el punto a y el punto b, la pendiente de esa recta era

E: La tasa de variación media.

P: La tasa de variación media. Vamos a ver, si yo, si este punto va corriéndose para aquí hasta que llega aquí; esa recta, vamos a ir dibujándola, ¿cómo va a ir siendo?. Esa recta será, ésta, ésta, ¿qué , qué recta será cuándo este punto b coincida con el a?, ¿quién será, qué será, qué recta será esa?

E: La tangente.

P: La tangente. Cuando este punto coincide con éste <los puntos a y b>, la recta ésta <una secante> que estamos dibujando será esta recta <la tangente>, la que pasa por este punto y, además, tangente a la curva en ese punto, esa será la recta. Entonces, y cuando la b coincide con la a, estamos en el límite, ¿no?, que es la derivada.
En el límite, es la derivada, si esta era recta, la pendiente de la recta tangente, la recta secante que pasa por estos dos puntos, ¿quién será entonces el límite?, la pendiente de esta recta, de la recta tangente a la curva en este punto.

En la entrevista de desarrollo, María indica la importancia de la interpretación geométrica:

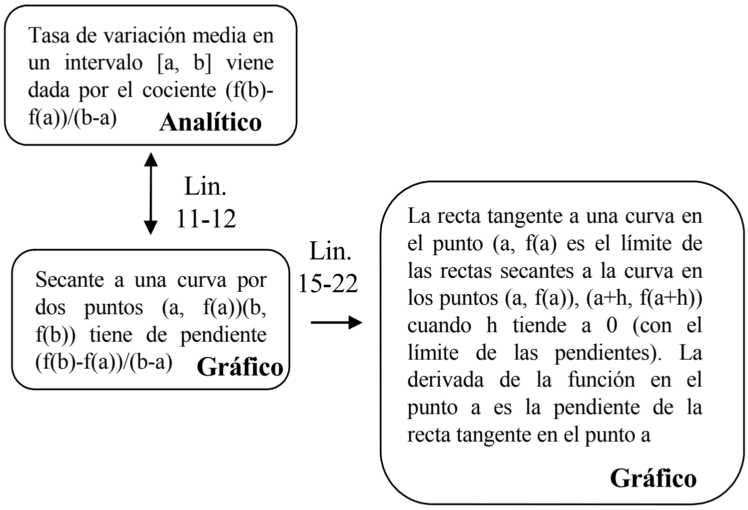
"La interpretación geométrica de la derivada siempre tiene que ser nuestro punto de referencia, siempre, siempre, cuando hablemos de derivada que sea algo tangible, no sea algo que se pierda, que no sea un límite o una regla, tiene que ser algo que nos representa lo que estamos haciendo"

María modela en su discurso, y apoyada en la representación gráfica, el paso al límite de las rectas secantes. Por lo que María dice en las líneas 12-17 y 20-30 y de acuerdo con las descripciones de Asiala et al. (1997), sobre las acciones y el mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto:

> *"**1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos.*
> ***1b. Analítico:** la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en el punto.*
> ***2a. Gráfico:** Interiorización de las acciones del punto 1a a un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están "cada vez más próximos"."* (p. 407)

Señalar que en las líneas 11-12 se consideran las dos acciones modeladas que aparecen descritas por Asiala et al. (1997), la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante.

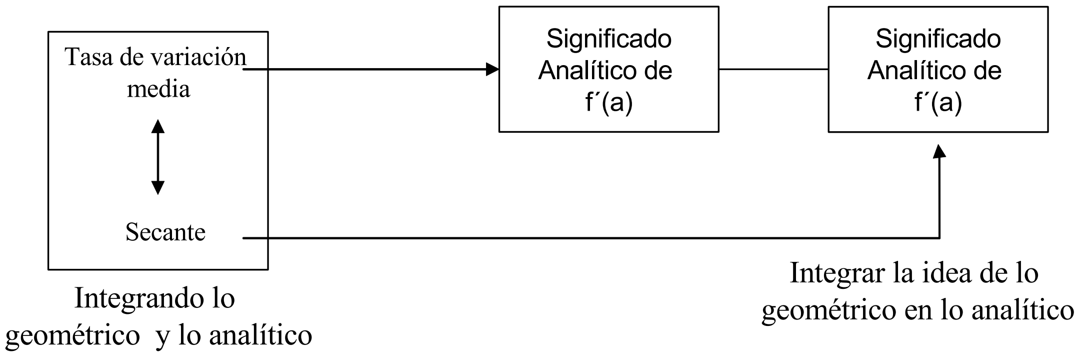
Para la modelación del mecanismo de interiorización gráfica de la derivada de una función en un punto (la recta tangente a la curva en un punto como límite de rectas secantes) María usa los elementos matemáticos y modos de representación siguientes:



Podemos hacer algunas reflexiones a partir de la consideración conjunta de las cuatro viñetas. Las dos viñetas primeras presentan las modelaciones del cálculo de la tasa de variación media en un intervalo y recta secante a la curva y cálculo de su pendiente. En la segunda viñeta en relación al uso de los sistemas de representación integra lo gráfico y lo analítico para la tasa de variación media como proceso. En las viñetas 3 y 4 María hace visible en su discurso el paso al límite (que no se aborda en forma numérica en ningún caso), de esta forma se modelan los mecanismos de interiorización de la derivada de una función en un punto (la tasa de variación instantánea en un punto como límite de las tasas de variación media y la recta tangente a la curva en un punto como límite de rectas secantes). Pero hay una separación entre lo gráfico y lo analítico.

Respecto a las formas de conocer potenciadas un aspecto característico de la práctica de María es que modela la derivada de una función en un punto para potenciar su comprensión como proceso con dos significados separados: la variación instantánea en un punto y la recta tangente a la curva en un punto. No hay modelación de otros mecanismos de construcción, como encapsulación y desencapsulación, para la derivada de una función en un punto. Y la forma de conocer que se ha potenciado, derivada de una función en un punto f´(a) como proceso, no vuelve a aparecer en ningún momento del desarrollo de la unidad didáctica.

De esta manera María apoya expresamente en su discurso todos sus intentos de que los alumnos logren llegar a conocer como proceso la noción f´(a) (derivada de una función en un punto). La secuencia en la que modela los diferentes "paso al límite" muestran que en primer lugar intenta que sus alumnos construyan el significado de f´(a) en un contexto analítico para con posterioridad comprobar el significado geométrico de la noción ya presentada. Gráficamente se describe del siguiente modo:



Lo característico de la práctica de María es que aunque aparecen los significados analíticos y geométrico para f´(a), estos significados no son usados de la misma manera en el "proceso de construcción". En este sentido aunque hay una declaración explícita de la importancia de los significados, la práctica desarrollada y la forma en que se ha organizado el contenido matemático para presentarlo a los estudiantes parece indicar que para María en el proceso de construcción del significado de f ´(a) prioriza lo analítico.

4.1.2.- La derivada de una función en un punto como acción: las reglas

En este apartado se detallan las viñetas en las que se calcula tanto en contexto analítico o gráfico la derivada de una función en un punto aplicando un algoritmo. En este sentido el énfasis de María está en que los alumnos asocien el significado de f´(a) a una serie de cálculos y a producir un número como respuesta.

V5: Modelación de acciones, contexto analítico

El segmento recogido en esta viñeta sucede en la segunda clase. María proporciona a los estudiantes una receta para calcular la derivada de una función en un punto, "la regla de los cuatro pasos". Las dos tareas se resuelven aplicando la regla de los 4 pasos.

En relación a esta viñeta, María indica en la entrevista de planificación:

"Además yo voy a insistir mucho en este curso por ser la primera vez en que los niños ven las derivadas, la derivada no de funciones...la función derivada, sino en la derivada en un punto, en un punto. Ahí es donde quiero que apliquen la definición eh? a través de la regla de los 4 pasos, es decir, que f(x+h), f(x+h)-f(x) etc, entonces pero en un punto concreto."

Enunciado de la tarea:

Hallar la derivada de $y=x^2$ en el punto x=2.

Halla la derivada de las siguientes funciones en x=1, utilizando la definición de derivada (tarea del libro de texto, página 282, tarea 7):

a) $f(x)=3x^2-1$ b) $f(x)=(2x+1)^2$

c) $f(x)=3/x$ d) $f(x)=1/(x+2)$

La profesora hace lo siguiente: para resolver la tarea da un algoritmo que permite obtener la derivada de una función en un punto utilizando la definición de límite. Primero da el algoritmo y luego lo aplica a la tarea propuesta.

El diálogo en el aula

P: Tenemos que hallar esto, este límite <límite de cocientes incrementales>. Bien, yo, para que no os perdáis os voy a dar 4 pasos a seguir, ¡eh! Para que en el cálculo no os perdáis. Como tengo que calcular este límite, y antes de este límite, tengo que calcular este fracción y antes de esta fracción tengo que calcular f(a + h) y f(a) ¿no? Vamos a hacerlo paso a paso ¿vale? 1º- vamos a calcular f(a + h), en este caso f(2 + h), 2º- vamos a calcular f (2 + h) - f(2) ¿no? 1º calculamos esto, después calculamos la resta, ¿después qué tenemos que calcular?

E: la h.

P: ¡ah! no, porque la h es un número que tiende a cero. Antes de calcular el límite, ¿qué tendremos que calcular? Todo esto, hacer el cociente este, ¿no? 3º- f (a + h) - f (2)/ h, en último lugar

E: El límite.

P: El límite, el límite cuando la h tiende a cero de f (a + h)…

E: ¿La a no sería 2?

P:Partido por h, que esto ya es la derivada. El límite, venga, paso a paso, ¿cuánto es? Siguiendo los 4 pasos, llegamos en el último a lo que es la derivada. ¿Cuánto es f(2 + h)?

E: $(2 + h)^2$.

P: y=f(x) es x^2, sí f(x) es x^2, ahora en vez de tener x ¿qué tengo? 2+h, donde tengo que poner la x, pongo 2+h. Luego sería $(2+h)^2$.

Ahora, a esto hay que restarle f(2), ¿de acuerdo?. Vamos a restárselo. A esto le tenemos que restar f(2), ¿qué quedaría?

E: h^2.

P:bueno, vamos a ponerlo todo, $4+h^2+4h$ le restamos f(2), f(2) ¿cuánto es?, ¿qué me quedaría entonces? h^2+4h.

¿el siguiente paso en qué consiste?. Esto, ¿qué hay que hacerle?

E: Dividirlo entre h.

P: Dividirlo entre h, pues venga. h^2+4h se divide entre h, y ahí ¿ qué se puede hacer?

E: Sacar factor común.

P: Sacar factor común arriba y abajo y simplificar, h factor común de h+4/h, ¿qué quedaría? E: h+4

h+4. ¿Este límite cuánto da?

E: 4.

P: ¿Cuánto es la derivada en el punto 2? 4.

<Se resuelve el apartado a> Cuando la "x" vale 1, lo primero es f(x+h), f(1+h)

E: hay que calcular primero f(-1), ¿no?

P: cuando la x vale 1, entonces la primero es f (x+h), f (1+h),

Eso es, sería 3 $(1+h)^2$ Esto está mal, cuando tú sustituyes la x por (1+h), si lo sustituyes por h te queda esto, pero por (1+h).

P: Tienes que poner cuánto es f(1+h). Entonces da $3(1+h)^2-1$, ¿no?

E: ¿qué se puede simplificar?

P:¿que si se puede simplificar?, claro.

E: $3h^2+6h$, ¿lo puedo simplificar?

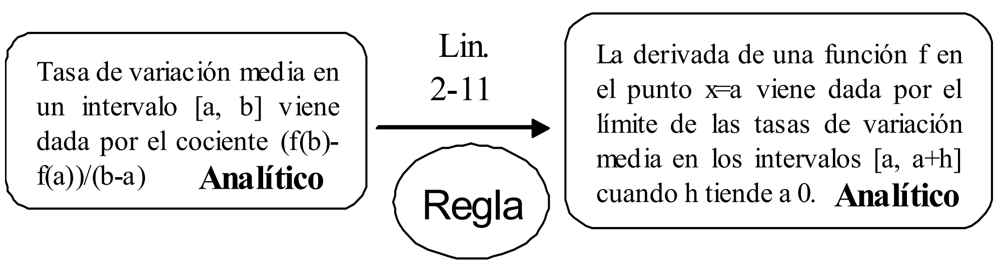
P:claro, tienes que sacar factor común 3h.

En las líneas 2-11 hay una modelación de la regla para calcular f´(a). Esta regla termina con el cálculo de un límite algebraico formalizado por María, se ajusta a la modelización de la forma de conocer acción. Dubinsky (1996) indica que en una acción sólo se puede realizar la transformación cuando hay detalles precisos sobre qué pasos dar (los pasos precisos vienen dados por los 4 pasos que se detallan); en segundo lugar Breidenbach et al.(1992) señalan las diferencias existentes entre las dos formas de conocer, como acciones y como procesos, que podemos utilizar en esta viñeta para realizar la inferencia:

> "*Tanto acciones como procesos transforman objetos. La principal diferencia (que nosotros vimos bastante explícitamente en las entrevistas) entre una acción y un proceso es la necesidad en la primera de una receta o fórmula explícita que describa la transformación. Es más, en una acción se tiende a pensar sobre la transformación en forma paso-a-paso con los pasos relacionados solamente por la receta.*" (p. 278)

Aquí la caracterización de Breidenbach et al. (1992) de disponer de la transformación paso-a-paso, está en los cuatro pasos de la regla para calcular la derivada de una función en un punto. De ahí que la práctica de María al proporcionar una "transformación" en forma paso-a-paso permite suponer que está modelando "acciones".

Para la modelación de la forma de conocer acción analítica a través de un límite de la derivada de una función en un punto (regla de los cuatro pasos) que hace María usa los elementos matemáticos y modos de representación siguientes:



V6 : Modelación de acciones, contexto gráfico (recta tangente a la curva)

Los segmentos descritos en esta viñeta suceden en la tercera clase. En estas tareas María a partir de una regla obtiene el valor de la derivada de una función en un punto. La regla viene dada por la receta: "El valor de la derivada de una función en un punto a es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en (a, f(a))".

En la entrevista de planificación María indica:

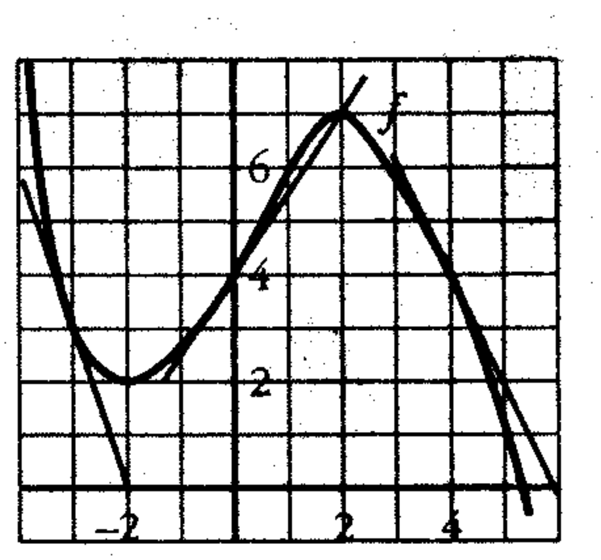
"Que te den la gráfica y te dicen, es decir, que los ejercicios vienen muy directos para que saquen ellos las preguntas que yo les hago, pero quiero que la enuncien, que ellos digan, la pendiente de la recta tangente a una curva, y que eso se lo graben bien porque es el caballo de batalla que nosotros vamos a ver"

Enunciado de la tarea

Libro de texto, página 284, tarea 54.

Halla f ´en los puntos de abscisas -3, 0 y 4.

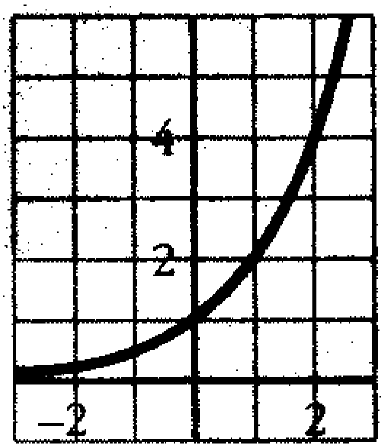
- Halla las pendientes de las rectas tangentes trazadas en esos puntos.



Enunciado de la tarea

Libro de texto, página 284, tarea 56.

¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa? Compara los valores f ´(-2), f ´(2) y f ´(0).



Para resolver las tareas: se utiliza una regla que da la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. Repiten la regla varias veces para que se recuerde. A partir de representaciones gráficas se obtiene la pendiente de la recta y ese valor es la derivada de una función en el punto.

El diálogo en el aula es el siguiente:

P: Lo tenéis hasta que memorizar, lo tenéis que saber, ¿qué es la derivada, en un punto?
E: La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto que es igual a a
P: Vale. Jorge, ¿qué es la derivada?
E: La pendiente de la curva a la recta, recta tangente igual.
P: A la curva. Venga, Noelia.
E: La pendiente a la recta tangente a la curva en el punto x igual a a.
P: Muy bien. Miriam
E: La pendiente de la recta tangente a la curva en x igual a a.
P: ¿Qué es, Eduardo, la derivada en el punto -3?
E: Pues la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto a = - 3.
P: Luego, fíjate en el dibujo, vamos a ver; vamos hallar la recta, la tangente en el punto - 3. Nos viene incluso dibujada la recta pendiente, la roja, nos viene en rojo; ¿Cuál es la pendiente de esta recta?, ¿cómo hallábamos la pendiente de esa recta?
Sería - 3, sería 3/1.
¿Cuál sería la derivada en el punto 0? La roja, en le punto 0, ¿estás viendo la recta que tiene dibujada, la tangente que tiene dibujada la curva? <en la gráfica de la tarea>.
¿Qué inclinación tiene?, es decir, tengo que fijarme en otro punto para ver la inclinación, para saber la pendiente, porque la pendiente, tiene que formar el triángulo; ese rectángulo que veíamos para hallar el cateto opuesto partido por el cateto contiguo que era la pendiente, ¿no? Por el punto que pasa por el

punto.

E: (2, 7).

P:¿Qué pendiente tiene, Ana?, ¿qué pendiente tiene esa recta?, ¿todavía no las visto?¿Cuánto? Es cateto opuesto.

Vamos a ver el triángulo es éste, ¿ves?, 1, 2 y 3, ¿no?, y 1 y 2; 3/2, tres medios, es la derivada, a la curva.

P: Roberto, f ‘ (4), ¿cuánto es?

E: - 2.

P: La recta esa, pasa por el punto, a ver, ¿por que, por qué punto pasa? ¿ es la tangente? dime un punto por el que pasa . Bien esta es la recta <en la gráfica de la tarea> vamos a ver esa recta ¿qué pendiente tiene?

¿No tienes el triángulo éste? cateto opuesto, éste es el ángulo que forma la recta con el horizontal, ¿cuál sería?, cateto opuesto partido por cateto contiguo; cuánto mide el cateto opuesto?

E: 4.

P: 4, y ¿el cateto contiguo?

E: 2.

P: 2, 4/2.

<Para la segunda tarea>.

P: Tú te vas a la gráfica, sí.

E: Pones, no puede ser 2 entre 1.

P: Hombre tú tienes que coger, ¿qué triángulo es el que coges?<María se refiere a un triángulo rectángulo que forma la tangente con el eje x>.

En esta viñeta María usa la idea de que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en el punto. Así para calcular la derivada de una función en un punto se recuerda esa idea y lo aplica en cada caso. En las líneas 1-10 María señala lo que hay que recordar. En las líneas siguientes María recuerda cómo calcular la pendiente de una recta. Estas descripciones vienen dadas en Dubinsky et al. (1994) para los que un tipo de acción en matemáticas puede ser calcular de acuerdo con una fórmula, en el mismo sentido también tiene la consideración de forma de conocer acción el acto de recordar un hecho de la memoria (Cottrill et al., 1996).

Para Asiala et al. (1997) la derivada de una función en un punto f´(a) como acción viene dada por:

"la recta tangente es identificada en un punto, y su pendiente es calculada. Hay (al menos) dos maneras para construir esta acción. El estudiante puede simplemente haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto." (p. 425)

La modelación realizada por María corresponde con la acción descrita por Asiala et el (1997). La modelación de la forma de conocer acción de la derivada de una función en un punto que hace María en esta viñeta puede ser descrita usando un sólo elemento matemático y un modo de representación.

La derivada de una función f en el punto x=a viene dada por la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto con la parte positiva del eje de abscisas. **Gráfico**

Podemos hacer algunas reflexiones a partir de la consideración conjunta de las dos viñetas (5 y 6): la separación que hace María, cuando trata la derivada de una función en un punto, de lo gráfico y lo analítico, y la importancia dada por María a que los estudiantes recuerden reglas, tanto basadas en lo analítico (regla de los cuatro pasos) como en lo gráfico (trazar la recta tangente y calcular su pendiente apoyado en el triángulo característico). Es decir, la modelación de acciones en la práctica de María es importante *per se*.

De la consideración conjunta de las seis viñetas podemos hacer las siguientes reflexiones.

En primer lugar y en relación a los sistemas de representación un aspecto de la práctica de María es el desarrollo separado de los significados gráfico y analítico, tanto con la derivada de una función en un punto como proceso, como con la derivada de una función en un punto como acción. Esta separación entre lo gráfico y lo analítico se apoya en el hecho de que no desencapsula los significados de la idea de límite que se hubiere podido hacer “visible” con el uso explícito de la idea se “aproximación”.

Un segundo aspecto de la práctica de María es el desarrollo aislado de las distintas formas de conocer el concepto derivada de una función en un punto. El desarrollo del concepto derivada de una función en un punto se hace por un lado potenciandolo como proceso, la variación instantánea en un punto y la recta tangente a la curva en un punto como límites (con lo gráfico y analítico por separado) y por otro potenciandolo como acción, mediante la regla de los cuatro pasos o bien trazar la recta tangente y calcular su pendiente (igualmente lo gráfico y lo analítico por separado), hay una diferenciación clara entre las dos. Podemos decir que en la práctica de María el desarrollo de la comprensión progresiva horizontal no se potencia, sino que se organiza a través de formas de conocer aisladas.

En la práctica de María las formas de conocer potenciadas para f´(a) no lo son de manera relacionada, por un lado potencia la interiorización de los significados y de forma separada se apoya en dar a los alumnos procedimientos algorítmicos para obtener el número f´(a). Parece que María se apoya para la construcción de f´(a) en las reglas de cálculo y no en los significados que se han interiorizado. De esta manera María no parece potenciar la comprensión de f´(a) como objeto durante el desarrollo de la unidad didáctica. La concepción del aprendizaje de las matemáticas que muestra María es que no es necesario un desarrollo progresivo (horizontal) en las formas de conocer para un concepto.

María gestiona el contenido matemático de manera parcelada sin establecer relaciones y cuando aparecen distintas reglas éstas no se vinculan. La relaciones que establece son limitadas y generalmente hay un predominio de la representación analítica.

4.2.- La función derivada como proceso

En este apartado vamos a describir como María modela los mecanismos para el concepto de función derivada generalizando la regla de los 4 pasos dada para la derivada de una función en un punto. En este caso María modela el mecanismo de interiorización para la función derivada en un contexto analítico.

Respecto al planteamiento de relaciones entre los distintos conceptos María durante la modelación de la interiorización de la función derivada no lo relaciona con los significados de la derivada de una función en un punto. Así, aunque María parece intentar que sus alumnos construyan el significado de f´(x) lo hace desvinculado de los significados dados a f´(a) y por tanto no tiene más alternativa que basarse en la aplicación de algoritmos.

Sin embargo, María establece relación entre la derivada de una función en un punto como límite del cociente incremental (regla de cálculo) y la función derivada. Así, la modelación de la interiorización presenta la idea de función derivada como una generalización de una regla, la regla que calcula la derivada de una función en un punto como límite en cuatro pasos[4], obteniéndose la regla para x general.

La derivada de una función en un punto no se utiliza en las modelaciones que siguen, por otra parte la función derivada tampoco se utiliza en las siguientes modelaciones.

En cierta medida, María introduce y gestiona el contenido matemático en

[4]Los cuatro pasos para calcular f ´(a) son: 1) calcular f(a+h) y f(a), 2) calcular f(a+h)-f(a), 3) calcular (f(a+h)-f(a))/h, y 4) calcular lim(h-->0)(f(a+h)-f(a))/h.

el aula como ideas que pueden tener alguna relación implícita pero dicha relación no se explicita. Además desde el punto de vista de los “procesos de construcción de la comprensión” que pueden estar potenciandose en los estudiantes se dificulta que los estudiantes puedan ir más allá del establecimiento de reglas y algoritmos. De esta manera en María la organización de las matemáticas escolares que desarrolla puede ser coherente con una concepción del aprendizaje que enfatiza el aprendizaje de reglas y la realización de cálculos. Es sobre estos dos pilares sobre los que se organiza la práctica de María.

4.2.1.- La interiorización de la función derivada: generalización de una regla

La función derivada es una función que a cada “x” le asigna el límite del cociente incremental o el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. Para María esta forma de asignar valores son “reglas” que ya ha introducido. La función derivada se construye a partir de la generalización a todos los puntos de la regla analítica dada por los cuatro pasos, primero construyendo la función derivada como una tabla de valores (cada vez fijándose en un punto concreto) y posteriormente pasando a considerar un valor genérico x (un punto arbitrario).

V7: De la derivada de una función en un punto como acción a la función derivada como proceso en contexto analítico

La situación descrita en esta viñeta sucede en las clases tercera y cuarta de la unidad didáctica. María modela la función derivada como acción construyendo una tabla de valores y centrandose en cada momento en un sólo punto. Los valores se obtienen en cada punto por medio de la regla de los cuatro pasos. Después María generaliza a todos los puntos la forma de obtener los valores. En la viñeta hace referencia al cálculo de la derivada en x=2 realizada en la viñeta 5.

En la entrevista de planificación, María indica:

"A través de la regla de los 4 pasos, es decir, que f(x+h), f(x+h)-f(x) etc... entonces...pero en un punto concreto, que lo haga muchas veces, que se habitúen a ese cálculo, y después haremos, no ya demasiadas veces, haremos para una función ya concreta, por ejemplo: dando un punto y la función x^2 ¿Cual sería su derivada? aplicando la propia definición eh? y a lo mejor hacemos algún ejemplo más pero no me quiero entretener ahí mucho.
Lo que es la función derivada, es decir, ya no vamos a determinar en un punto, sino vamos a hacerlo para cualquier valor de x, entonces le podemos hacer un ejemplo, Fíjate incluso cómo se la quiero decir. Le quiero decir por ejemplo, la derivada de x^2 ya la hemos hallado. Esta función la hemos hallado en el punto 2, en el punto 3, en varios puntos, no? incluso si quiero: venga! Vamos a hacer una lista, vamos a hacer una tabla de valores, no? cuando la x vale 2, ¿Cuánto vale la f ´(x)? Cuando la x vale 3, ¿Cuánto vale? Cuando la x vale...
Es una función, entonces si es una función incluso la podemos representar.
Pues entonces, a eso le podríamos llamar una función y además la función derivada, derivada, sale. ¿De dónde sale? De hecho la misma palabra "derivada" sale de ahí, que deriva de la función, entonces a esa función le vamos a llamar función derivada.
Bueno, en vez de hacer punto a punto… y ahora ¿Cuál va a ser su fórmula? A todo esto ¿Cuál va a ser la expresión algebráica de esa función? Incluso podrían sacar la derivada a través del doble y una vez que ellos sepan esto, pues mira, esto se puede hacer en vez de una de límites en un punto, lo vamos a hacer dándole cualquier valor a x. Pero no me quiero insistir mucho ahí."

En esta declaración de los objetivos pretendidos, María modela en su discurso la construcción de f´(x) como proceso al generar dicha función desde la "generalización" de un conjunto de casos particulares. En este momento María parece asumir que f´(a) es una regla que debe aplicarse en varios puntos y luego usando la tabla y "viendo" la sucesión de valores obtenidos intentar establecer la expresión de f ´(x). Para que el "paso a lo general" sea "visible" a los alumnos exige que el ejemplo sobre el que se construye la situación sea conocido. De ahí que use $f(x)=x^2$ y espere que la sucesión de valores que se obtiene con la aplicación de la regla a distintos valores de x le permita "mostrar" que corresponden a valores de la función f(x)=2x.

Enunciado de la tarea.

Obtener la función derivada de $f(x)=x^2$

Así María para obtener f ´(x) parte de la modelación de una acción para la derivada de una función en un punto. La acción viene dada por la "regla de los cuatro pasos" que obtiene la derivada de una función en un punto y construye una tabla de valores.

X	0	1	-1	2
f ´(x)				

Posteriormente construye la función derivada a partir de la regla de los cuatro pasos pero utilizando una variable x en lugar de un punto concreto. Esta forma de proceder le permite "mostrar" que lo que valía para cada x=a específico también sirve para x cualquiera.

El diálogo en el aula es el siguiente:

P: El otro día estuvimos viendo f' (2), la calculábamos utilizando la regla de los cuatro pasos esos ¿cuánto salió f ' (2)?
E: 4.
P: Igual lo podríamos haber hecho f '(0), en vez de haberlo hecho con f ' (2), lo podríamos haber hecho con el 0, ¿verdad?, de la mima manera, ¿y qué pensáis que hubiera salido?
E: 0.
P: 0, lo sabéis porque va, sabéis ya. Si hubiéramos hecho en el 1, ¿qué hubiera salido?
E: 1.
P: No, si lo hubiéramos hecho en el 1.
E: 2.
P: Hubiera salido 2; y si lo hubiéramos hecho en el -1; quién no sepa el porqué, bueno, no importa, es si lo hubiésemos hecho de la misma manera .
E: -2.
P: Hubiese salido -2, etcétera. Es decir <completa la tabla de valores x/f´(x)>, en el punto 3 me hubiera salido 6; en el...6, hubiese salido 12, etcétera, ¿eh?
Si yo hubiese hecho en cada uno de esos puntos, me hubiese ido saliendo eso <se refiere a esos valores>. Resulta que la, la derivada, la derivada, la derivada, se puede considerar como una función, la que a cada valor, a cada número les va a tomar un valor. La derivada, se puede considerar como una función que a cada punto de la curva, le asigna el valor de la pendiente.
E: Tangente.

P: De la tangente en ese punto.

Esa función ¿qué es una función?, la que a cada x le asigna una y, ¿no?, bueno, pues, repito otra vez, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, bien, pues esa función, esa función, es la función derivada, esa es una función, eh, que se llama función derivada.

Entonces, ¿cómo se obtiene? es decir, cómo se me dan a mí la función y cómo paso a lo que se llama su función derivada.

Le asigna su pendiente, su pendiente, es 2x, esta sería la función derivada de esta <la función $f(x)=x^2$>¿de dónde sale eso, de que estas 2x es la función derivada de esta x^2? pues sale de aplicarle la regla de los cuatro pasos que vimos ayer, pero en vez de a un punto, a la función; es decir, acordaros de la regla de los cuatro pasos.

María introduce en su discurso el significado de f ´(a) como pendiente de la recta tangente pero sólo en sentido nominal ya que sobre lo que se apoya en la construcción de f ´(x) es en suponer que lo mismo que se hace para valores concretos se puede hacer con un x genérico y la expresión que le sale se asume que es f ´(x).

Pues esto es una muletilla, que os he puesto para que os ayude un poco a calcular la derivada por la definición, espero que algún día no la tengáis que necesitar, sino que halléis la derivada poniendo un límite y la tasa de variación media y todo a continuación <se refiere a la regla de los cuatro pasos>.

Pero en vez de poner a que es un punto concreto, eh; que nosotros poníamos 1 + h, los problemas que hicisteis que no hemos terminado tampoco de corregir, pusisteis el 1, ponéis la x, en general, cualquier valor.

Este límite <se refiere al cociente incremental, $\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ > os va a dar en función de x, no como un número concreto, sino que os va a dar con x, y entonces lo que os va a salir ese límite es la función derivada. <Los estudiantes hacen la derivada en un punto x=-2>.

Hallar la función derivada $y=x^2$, ¿tú qué tienes hecho?

E: Ahora que yo he puesto $(2+x)^2$.

P: Pero por qué si no era eso, no era en ningún punto, era en general.

Decía hallar la derivada en un punto, lo que estábamos haciendo hallar la función derivada, en cualquier punto luego en lugar de darle a la x un punto concreto le dábamos a la x cualquier valor, f(x+h) ¿pues quién sería? $(x+h)^2$, f(x+h)-f(x), ¿quién va a ser? Pues el cuadrado de esto <de x+h> menos x^2, lo divido por h, divido esto por h. y aquí ya en esta expresión saco factor común la h, se van hallo el límite, lo que pasa es que ella no ha puesto los pasos, ¿no? bueno los tiene puestos más o menos, primero, el segundo, el tercero y éste sería f ´(x) ¿vale? venga, gracias.

En la entrevista de desarrollo:

"Pasar de la función a la función derivada lo hice con una tabla de valores, me refiero que a cada punto de la curva se le asigna su pendiente. Una función, una regla mediante la cual asignas valores, la función derivada que no le veo dificultad, es una regla más que tú haces."

Aunque María sigue mencionando el significado de f ´(a) como pendiente de la recta tangente a f(x) en x=a. Esto parece que lo hace asumiendo que los alumnos asocian a f ´(a) los dos significados que ella ha introducido:

- el límite del cociente incremental, y
- el límite de las secantes

parece que como el límite de las secantes tiene un "nombre" que es "tangente de f(x) en x=a" mientras que el límite de la tasa de variación media no tiene ningún nombre específico (tasa de variación instantánea), María aunque calcula los cocientes incrementales, estos los ve en su paso al límite como tangente. Sin embargo, el énfasis en la regla de los cuatro pasos hace que esta mención al significado geométrico siga siendo "testimonial". Una manifestación de este hecho es que María no modela mecanismos de desencapsulación durante su enseñanza.

María construye la función derivada del siguiente modo, para cada valor x asocia la regla de los cuatro pasos o la pendiente de la recta tangente a la curva, aunque a esta última pendiente no se hace más referencia. La construcción de la función derivada se realiza en las líneas 14 y siguientes en las que relaciona las modelaciones de la derivada de una función en un punto con la regla de los cuatro pasos para obtener f ´(a) (líneas 17-40) y después f ´(x).

Al usar la tabla de valores construida aplicando una regla potencia la construcción de la función derivada como acción al tomar puntos concretos

(Dubinsky, 1996), Asiala et al. (1997) señalan que para la función derivada:

> *"Un estudiante muestra esto* [la función derivada] *como una acción cuando se centra en un punto del dominio en cada momento."* (p. 425)

En este sentido la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada que hace María potencia en los estudiantes la función derivada como proceso en un contexto analítico. Zandieh (2000) caracteriza la función derivada como proceso al considerar el paso por infinitos valores de entrada (lo que denominamos "generalización a todos los puntos"), determinando para cada valor de entrada un valor de salida dado por el límite de los cocientes incrementales en cada punto. La generalización a todos los puntos en los que calcula el límite al tomar una variable genérica x (líneas 28 y siguientes) es un indicio de la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada.

Los elementos matemáticos y modos de representación usados por María en la modelación de la interiorización de la función derivada se pueden representar de la siguiente manera:

Tasa de variación media en un intervalo [a, b] viene dada por el cociente (f(b)-f(a))/(b-a) **Analítico**

$\xrightarrow{\text{Lin. 26-31}}$

La derivada de una función f en el punto x=a viene dada por el límite de las tasas de variación media en los intervalos [a, a+h] cuando h tiende a 0. **Analítico**

Regla de los cuatro pasos, se "menciona" como tangente en x=a

$\xrightarrow{\text{Lin. 32-48}}$

La derivada de una función f es una función que viene dada por los pares de puntos (X, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$) **Analítico**

Se aplica la regla de los cuatro pasos a un x cualquiera

El siguiente cuadro describe la situación que hemos comentado:

Modelación de interiorización de la función derivada

Regla de los 4 pasos en un punto a	Derivada de una función en un punto
↓ **Generalización a todos los puntos**	
Regla de los 4 pasos en x	Función derivada

Cuadro 4.9 Relación entre derivada de una función en un punto y función derivada

En las entrevista de desarrollo María pretende dar un procedimiento para obtener funciones derivadas dadas por una regla, la regla de los cuatro pasos utilizando un punto arbitrario x, a partir de la regla de los cuatro pasos en puntos concretos. La modelación del mecanismo de interiorización realizada por María produce la función derivada como generalización de una regla, la regla que calcula la derivada de una función en un punto en 4 pasos, obteniéndose la regla para x general. La interiorización de la acción dada por la regla para la derivada de una función en un punto, generalizar dicha regla para x genérica potencia la función derivada como proceso. En definitiva la función derivada como proceso viene de alguna forma dada "como una regla".

4.3.- Del operador derivada a la integración

En este apartado abordamos las modelaciones realizadas por María en relación al operador derivada (a cada función f se le asigna como imagen f ´). Se organiza en dos partes, en la primera parte describimos la modelación del mecanismo de interiorización del operador derivada a partir de las reglas de derivación y en la segunda parte describimos la modelación del mecanismo de inversión del operador derivada. Un aspecto característico es que en las modelaciones realizadas por María para el operador derivada no establece relaciones ni con la derivada de una función en un punto ni con la función derivada.

4.3.1.- El operador derivada como proceso

María presenta a sus alumnos algunas reglas de derivación de funciones típicas mediante una tabla. Luego se apoya en la combinación de dichas fórmulas (operaciones entre funciones o regla de la cadena) para calcular derivadas.

Esta manera de actuar se apoya en la importancia dada por María al uso de reglas por parte de los alumnos. Desde la perspectiva de la modelación de la descomposición genética esta forma de proceder sólo permite construir la forma de conocer como acción. Solo una mención explícita sobre lo que se hace durante una serie de ejercicios en los que se aplican las reglas podría llevar a que los estudiantes construyeran un significado como proceso del operador derivada.

V8: El operador derivada como proceso a partir de reglas de derivación

En esta viñeta se recoge un conjunto de segmentos sucedidos en distintas clases, cronológicamente los distintos segmentos que se consideran en los enunciados son aquellos en los que dada una función, María obtiene la función derivada a partir de las reglas de derivación. Los segmentos suceden a partir de la quinta clase. María entrega una tabla de reglas de derivación (aparece en el cuadro siguiente) y explica los significados de las "letras" de cada regla y hace un ejemplo aplicando la regla.

La columna de la derecha (regla de la cadena) permite obtener funciones derivadas de la composición de dos funciones. En un principio María pretende usar dichas reglas, pero la dinámica de aula hace que no se utilicen. Esta forma de proceder es un indicador que nos permiten hablar de que los alumnos lleguen a construir un significado como proceso del operador derivada.

En la entrevista de planificación María indica respecto a estas tareas:

"Las reglas de derivación las voy a utilizar para cualquiera de las funciones elementales que hemos estado viendo en otros temas, que los alumnos ya conocen la exponencial, la logarítmica y la trigonométrica,... la función arco y la función arcoseno, arcocoseno y arcotangente y vamos a ver las reglas, las reglas de derivación.

En la composición de funciones, tanto componer funciones como dadas funciones decir de cuales están compuestas, que es el paso que a mí me interesa, que dada una función, vean de que funciones tengo que componer para obtener esa función porque es la manera que después a la hora de explicar la regla de la cadena ellos vean de qué funciones... les doy la regla de la cadena no se las demostramos, las reglas yo no se las demuestro, entonces, una vez que le doy la regla de la cadena, les hago ver primero la composición, ¿esta función de quién está compuesta? y además ¿quién es la primera? ¿en qué orden? y después para que sea un poquito más mecánico les digo siempre: la primera que se deriva es la última que se hace... funciones compuestas y cuáles son y en qué orden están hechas; sino saben eso es imposible entrar en la regla de la cadena."

El énfasis está colocado en la aplicación de reglas conocidos los pasos. Así en la regla de la cadena se apoya en el conocimiento de los pasos intermedios.

Sigue en la entrevista de planificación sobre estas tareas:

"Y lo que quiero es que sepan derivar para que el año que viene cuando los alumnos salgan de este curso, ellos sepan derivar... Quiero rápidamente meterme en el cuadro de derivadas.

Me limito a leer el cuadro y manejar el cuadro, ya les tengo un cuadro seleccionado, viene muy bien, muy grandota, muy claritas y entonces: venga! Por supuesto les doy una serie de ejercicios que vienen aquí a final de capítulo y en cada uno de ellos me tienen que decir qué tipo de función es y que propiedades es la que utiliza, si es una suma, si es un producto, si es la función logarítmica, si es la exponencial, si es la potencial, etc. Que ellos me digan en cada caso, que me lo escriban explícitamente: sí...cuando el alumno te explica es cuando realmente sabe sus conceptos y lo que piensa y muchas veces a lo mejor tiene un error de cálculo pero no de concepto."

El uso de una tabla con las cabeceras de las columnas como f(x) y f ´(x) establece los elementos necesarios para poder hablar del operador derivada e intentar generar las condiciones para que los alumnos construyan su significado como proceso. Sin embargo para darse este paso es necesario según señala Dubinsky (1996) que haya una "reflexión" explícita sobre lo realizado que permita "concebir" el operador derivada como proceso. Esta reflexión explícita sobre la vinculación entre f(x) y f′(x) aparece en el discurso y la práctica de María cuando se considera que es posible combinar reglas para obtener la f′(x) de cualquier f(x).

TABLA RESUMEN DE LAS REGLAS DE DERIVACION

Derivadas de funciones elementales	Regla de la cadena
$D x^r = r x^{r-1}$, $(r \in R)$	$D f(x)^r = r f(x)^{r-1} \cdot f'(x)$
$D a^x = a^x \ln a$	$D a^{f(x)} = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$D \ln x = \frac{1}{x}$ $\quad D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$	$D \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\quad D \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
$D \operatorname{sen} x = \cos x$	$D \operatorname{sen} f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$
$D \cos x = -\operatorname{sen} x$	$D \cos f(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$D \operatorname{tg} f(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
$D \operatorname{cotg} x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$	$D \operatorname{cotg} f(x) = \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = -[1 + \operatorname{cotg}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
$D \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D \operatorname{arc\,sen} f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
$D \operatorname{arc\,cos} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D \operatorname{arc\,cos} f(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
$D \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1 + x^2}$	$D \operatorname{arc\,tg} f(x) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$
$D \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{-1}{1 + x^2}$	$D \operatorname{arc\,cotg} f(x) = \frac{-f'(x)}{1 + f^2(x)}$

Derivada de una suma: $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$.
Derivada de un producto: $D(f(x) \cdot g(x)) = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$.
Derivada de un cociente: $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Df(x)\,g(x) - f(x)\,Dg(x)}{g(x)^2}$.
Derivada de una función constante: $D(k) = 0$.
Derivada de la función identidad: $D(x) = 1$.

Se resuelven diversas tareas, la primera tarea (libro de texto[5], página 271, tarea 1):

Calcula la función derivada de la siguiente función: $f(x)=3x^2-6x+5$.

Se calculan las siguientes funciones derivadas, $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$,

[5]Bachillerato Matemáticas I, Andalucía,

$f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, f(x)=sen(x)cos(x), $f(x)=xe^{x}$, $f(x)=x2^{x}$, $f(x)=(x^2+1)\log_2(x)$,

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-5x+3}{x}$, $f(x)=\dfrac{\log(x)}{x}$, todas ellas se obtienen aplicando reglas de derivación

La regla de la cadena la aplica a las siguientes funciones: y=sen(2x+1), $f(x)=(3x^2-2x)^3$, f(x)=sen(3x+1)cos(3x+1) y otras más combinando las reglas de los diferentes tipos de funciones con la regla de la cadena, aunque la tabla de reglas de derivación aparecen fórmulas para la regla de la cadena no se utilizan, sino que se aplica la regla de la cadena identificando las funciones que se componen. Para terminar esta viñeta indicamos que propone $y=tg^3(x^2)$, en la que se componen tres funciones, para la que no hay fórmula. Este tipo de tareas son las que de alguna forma parecen apoyar la idea de María en el sentido de que se reflexione sobre la aplicación de las reglas y cómo se aplican.

El diálogo de clase:

P: Sino que la vamos a utilizar, yo os doy ya las derivadas, las funciones derivadas de las funciones elementales.

Y nosotros las vamos a utilizar esas funciones derivadas, bien, leemos, de la tabla que os he dado leemos la columna de la izquierda ¿de acuerdo? La columna de la izquierda, tenemos dos columnas, la que pone derivada de funciones elementales ¿estamos ahí? Esa es la que vamos a ver, pone D x^r , ¿si o no?

E: Sí.

P: Igual a r por x^{r-1} , la derivada de una potencia, de x^r , ¿a quién va a ser igual? Al exponente que es r por la base que es x elevado a una unidad menos, a r-1, ¿vale? Por ejemplo, David ¿cuál sería la derivada de x a la sexta?

E: 6 por x elevado a 5.

P: Muy bien.

Pasamos al segundo, a la derivada de a^x, a^x es un número, es una exponencial, un número elevado a x, la x está en el exponente, ¿Cuál es la derivada? a^x . ln a.

Por ejemplo, Cristina, ¿cuál es la derivada de 2^x?

E: 2^x por el ln de 2.

P: Jorge, ¿cuál es la derivada, por ejemplo, de e^x?

E:e^x por el ln de e.

P: Pasamos a la tercera, la derivada de un ln. Esta tabla la vais a tener delante siempre a la hora de, siempre no.

La derivada del ln de x ¿es? 1/x. <se leen las distintas reglas>.

Bueno, ya vamos a dejarnos de comentar más, como véis, continúa, por ejemplo, la derivada del sen de x que sería el cos de x,la derivada del cos de x sería el -sen de x, la derivada de la tang = 1/ $\cos^2$ x que es lo mismo que 1+ tag^2 x, etc, la del arcsen, la del arcos y la de la arctang, las tenéis ahí, repito, la columna de la izquierda, cuando os aparezcan pues os váis aquí y lo miráis, ¿de acuerdo? Bien

Me falta comentaros el cuadro que viene abajo, que son operaciones, ¿cómo se hace la derivada de una suma? Es decir, si tengo por ejemplo, el sen x+ x^6 . Tengo una función que es la suma de otras dos. ¿Qué es lo que dice la primera regla de derivación? ¿Qué aparece aquí en la hoja? Derivada de una suma

E: La derivada de sen x + derivada de x^6 .

P: La derivada de la primera función + la derivada de la segunda, la derivada de una suma es la suma de las derivadas, es decir, ¿cómo se haría esta? ¿Cuál sería la derivada?

E: Derivada del sen x.

P: cos x + …

E: $6x^5$

P: Aquí.

Bien, ¿si en vez de una suma tuviese un producto? <María continua explicando la tabla de derivadas, cada regla con un ejemplo>.

E: ¿Y si hubiese sido derivada de una resta?

P: También, es lo mismo, si en vez de una suma hay una resta, se resta. Cuando hay un producto, cuando hay un producto, si nos fijamos aquí, en la regla de derivación... <María explica la regla de la cadena y la aplica a distintos ejemplos>.

E: Pero la de la cadena ¿hay que aprendersela toda? <en la tabla de reglas de derivación, la columna de la regla de la cadena>.

P: ¿Cuál? no, sólo, pero es que la de la izquierda, la de la derecha al final no la hemos utilizado, es la regla de la cadena. La primera columna, pues ésa es la que te tienes que aprender, la primera columna.

<Después de varios ejemplos María propone>.

P:¿Cuál era más complicado? <obtener la función derivada de y= $tg^3(x^2)$> El cubo ¿de quién es? sería lo mismo que poner tangente(x^2), todo ello elevado al cubo.

E: Sale 1+ tangente(x^2).

P: ¿Ya está? Ésa es una función potencial, la derivada primero y después la base de la potencia, luego ahí hay un producto.

Pero tienes que hacerla al cubo, derivas el cubo, que es una potencia y después deriva la tangente <que

es la base en la composición de funciones>. Arriba pones la tangente(x^2) entre paréntesis todo al cubo, y así se ve mejor. Sería, el exponente por la base elevada a una unidad menos y por la derivada de la base. Sería para derivar esto <la función>, quedaría, primero tienes que derivar el cubo ¿no? que es lo último que se hace y ¿cómo se deriva un cubo? La primera, la primera, una función potencial, el exponente por la base elevada a una unidad menos ¿sí o no? Luego sería 3 por la base, por la base, que es ésta <tangente(x^2)>.

P: Porque la derivada de la base, la derivada de la tangente. Aquí mira, aquí hay 3 funciones, 3, una sería elevado al cubo, otra sería hallar la tangente y otra sería elevar al cuadrado ¿sí o no?
La derivada de la tag(x^2) es, ¿cuál es la derivada de la tangente? Búscala en las listas.

E: $1/\cos^2(x)$.

P:En este caso en vez de poner x tiene que poner de la función a la que se aplica ¿no? de x^2 ¿vale? ¿de acuerdo? Y ahora por, tienes que multiplicar a la otra. Ya que has derivado la tangente, tienes que derivar ahora la x^2, por eso le pone 2x, por 2x, entonces te da 6x, muy bien, muy bien.

El objetivo explícito de María para este tipo de actividades es subrayar el que los alumnos usen y combinen reglas memorizadas, para producir en cada caso la función derivada.

En las entrevistas de desarrollo, María señala:

"Las reglas de derivación les ha resultado fáciles de adquirir porque es pura mecánica. El objetivo es hacer muchas derivadas, ya que adquieren manejo en las reglas, para después a la hora de hacer la derivada de cualquier función tengan soltura. Un alumno recuerda algo que ha repetido muchas veces."

De las líneas 1-36 inferimos que María aplica reglas por lo que modela acciones analíticas para el operador derivada. Dichas acciones vienen dadas por las reglas de derivación para las funciones elementales y para las operaciones entre funciones. Dubinsky et al. (1994) indican en relación a la forma de conocer acción que:

> *"Un sencillo tipo de acción en matemáticas es calcular de acuerdo con una fórmula, frecuentemente, un estudiante puede tener éxito con cálculos antes de que el concepto esté totalmente comprendido."*(p. 286)

DeVries (2001) describe cuando se conoce sólo la forma acción:

"1.- Dada la regla general para encontrar la derivada de una función polinómica, y dada una función polinómica concreta una acción podría ser encontrar la derivada por sustitución de los números en la formula general. Uno está a nivel de concepción acción para la diferenciación[6] *si sólo es capaz de encontrar la derivada de una función cuando cada paso es externamente proporcionado (por la memoria, por ejemplo, o mirando en una lista de reglas) por una regla que es aplicada y sólo se tiene que introducir los números concretos."* (On-line).

En esta viñeta las "fórmulas" son las reglas de derivación que se aplican (en las líneas 1-41) para cada tipo de función u operación. Como se ha señalado anteriormente, Dubinsky (1996):

"Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso" (p. 34)

El aspecto fundamental es la reflexión sobre la acción, de manera que la transformación que describe la acción llega a estar bajo control del individuo (Cottril et al., 1996). En este sentido el profesor repite varias veces las modelaciones de la forma de conocer acción.

En esta situación en la que se dispone de una "tabla" de entradas (función) y salidas (su derivada), María hace explícita la relación entre cada función y su derivada mediante dicha tabla. Este hecho (usar una tabla para hacer más o menos visible la idea de entrada-salida) es la que nos permite decir que María intenta que sus alumnos:

- repitan una acción (que es calcular diferentes derivadas), y

[6]Diferenciación es una forma de referirse al operador derivada.

- mostrarles que eso se puede hacer para funciones diferentes.

Esto puede ser interpretado como que María coloca las condiciones para que el estudiante reflexione sobre la acción repetida de calcular derivadas pudiendo así interiorizar esta acción en un proceso (el operador derivada como proceso).

Para los casos en los que aparece la regla de la cadena María aplica la regla varias veces a casos particulares. Podemos describir con los instrumentos de la siguiente forma:

Regla de la cadena, derivada de la composición de funciones: D(f(g(x)))=D(f)(g(x))D(g(x)).
Analítico

→

Regla de las funciones trigonométrica seno: D(sen(x))=cos(x)

Operador derivada aplicado a funciones polinómicas

Regla de la función potencial $D(x^n)=nx^{n-1}$.

Regla de la cadena, derivada de la composición de funciones: D(f(g(x)))=D(f)(g(x))D(g(x)).

Analítico

El énfasis sobre el manejo de reglas que propone María parece apoyarse en un objetivo explícito en su práctica que es que los alumnos memoricen el cálculo de derivadas, sin ninguna vinculación con el significado de la función derivada. La concepción sobre las matemáticas escolares con la derivada como contenido escolar se concreta en este apartado en la explicitación de un conjunto de reglas que hay que conocer, combinar y aplicar.

En este sentido la práctica de María es coherente con su concepción del aprendizaje y su manera de ver esta parte del contenido matemático. En la práctica de María el aprendizaje del concepto operador derivada está desconectado del concepto función derivada antes construido, por tanto María organiza los conceptos sin necesidad de establecer relaciones de significado entre ellas, apoyándose en el uso de reglas que se interiorizan.

La práctica de María potencia en los alumnos el operador derivada como proceso a partir de la reflexión sobre las reglas de derivación y no sobre el significado de la función derivada ni de la derivada de una función en un punto. De esta manera, la construcción del operador derivada que realiza María está desvinculada del contenido matemático anteriormente construido.

4.3.2.- La inversión del operador derivada en modo analítico

María modela este mecanismo de inversión del operador derivada colocando el énfasis en la "regla" de "reducir un grado el exponente" en las funciones polinómicas. Las funciones aparecen representadas en el modo gráfico y se trasladan al modo analítico. La modelación de la inversión que realiza María se basa en las reglas de derivación, pero al utilizar representaciones gráficas y analíticas para las funciones únicamente aparecen las funciones que son fáciles de reconocer (polinómicas de grado inferior a 4, pues su función derivada es de grado 2, y su gráfica es una parábola).

V9: La inversión del operador derivada

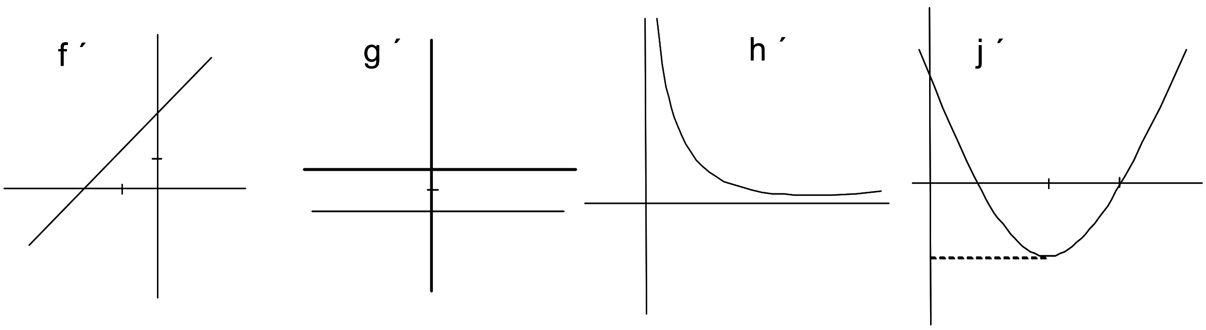
El segmento recogido en esta viñeta se organiza alrededor de la realización de una tarea en la última clase de la unidad didáctica. Con la primera cuestión planteada parece que puede aparecer la función derivada y sus significados, sin embargo María no responde a esa pregunta, y pasa a relacionar la función derivada con la función original, con una discusión sobre los grados de la expresiones polinómicas que corresponden a cada gráfica. Este énfasis sobre aspectos memorísticos se justifica por la necesidad de María de fijar "reglas" para realizar tipos de tareas.

En la entrevista de planificación, María dice:

"Pero si no me queda tiempo aquí para hacer este tipo de problemas, ves, dadas las gráficas de las derivadas ¿cuál de estas funciones tiene un punto de tangente horizontal? ¿cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica?¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado? Si no entrase en la evaluación, pero es que quiero que lo vean, porque quiero que lo adelanten, ten en cuenta que yo la semana siguiente les voy a empezar a hablar, o bien se las doy en la semana de después con las integrales, les doy ese tipo de problemas se lo meto un día con las integrales."

La necesidad de gestionar el tiempo hace que María condicione su práctica. En este momento María explicita como objetivo desarrollar los significados de la inversión del operador derivada en contexto gráfico, aunque los significados gráficos no aparecen.

Enuciado de la tarea.



Estas gráficas representan las funciones derivadas.

a) ¿Cuáles de estas funciones, de las f, g, h, j, tienen puntos de tangente horizontal?

b)¿Cuál de estas gráficas es la derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a la derivada de una función polinómica de segundo grado?

María hace lo siguiente: discute la relación entre los grados de una función y su función derivada cuando se trata de funciones polinómicas, clasifica las gráficas según correspondan o no a polinomios, y a las que corresponden a polinomios les asigna el grado del mismo.

El diálogo en el aula:

1 P: Primero tenéis que pensar qué son puntos de tangente horizontal

E: Es cero, ¿no?
P: Es cero, entonces, ¿cómo afecta la tangente horizontal a la derivada? <María abandona esta cuestión>.

El trabajar con significados resulta complicado cuando el énfasis ha sido colocado en las reglas. Las dificultades identificadas por María en usar los significados geométricos hace que se centre en fijar la regla de la relación entre los grados de los polinomios.

E: La derivada de una recta es igual a una recta.
P: ¡Ah! no sé, tú a ver la derivada de una recta, ¿es otra recta? a ver, la derivada de una recta, ¿qué sería ? otra recta. Pero una recta particular o cualquier
E: Horizontal.
P: ¿Por qué?
E: Porque cuando deriva una de primer grado, sale una constante.
P: Venga! pues a ver si los demás habéis visto ya una lucecita encenderse o no. ¡Venga! ya estoy, hay dos o tres ideas que hay que enlazarlas.
E: j es de tercer grado.
P: Pero él dice que la j tiene que ser una función de tercer grado ¿Estáis de acuerdo?
E: Si.
P: Si su derivada es una parábola, es una función de segundo grado por tanto la j tiene que ser una función de tercer grado porque la derivada es un grado menos. Bien, ésta < se refiere a la gráfica de g ´> por ejemplo según decía Rocío, tendría que ser la derivada de ¿quién? ¿quién sería la g?
E: Una recta.
P: Una recta, ¿no? ¿por qué? porque la derivada de una recta es un número, ¿no? Por ejemplo si la g, fuese, la g (x) fuese -2 x+1, ¿cómo derivo esto? ¿quién sería g'(x)? -2, por tanto sería ésta <se refiere a g ´>, que es una recta.
Y ésta <se refiere a f ´> dice Ana que sería, ésta sería de segundo grado <se refiere a la función f>, ¿por qué? porque la gráfica de la derivada sería una función de primer grado ¿no? ¡Vale! Otro de este tipo, a ver, bueno la otra pregunta era sobre si hay alguna de la de la derivada de alguna ¿cómo era? De una función de primer grado.
E: Y de segundo.
P: Ésa si la habíamos ¿no? ésta sería la de segundo grado <se refiere a f, usando la gráfica de f ´>, ésta <se refiere a g, usando la gráfica de g ´> sería la de primer grado, incluso ésta <se refiere a j, usando la gráfica de j ´> ¿de quién sería?
E: De tercer.

32 P: De tercer grado.

Sin embargo este discurso no resulta coherente con el énfasis en la regla y la “relación entre los grados de los polinomios”. En cierto sentido la tarea implica la posibilidad de realizar un cierto trabajo con los alumnos pero la forma en que están redactadas las cuestiones y la idea de María de fijar reglas hace que el discurso generado en el aula se centre en la potenciación de reglas y no de significados.

En la entrevista de desarrollo María sigue insistiendo en la riqueza de los significados geométricos para hablar de la inversión de la derivada en contexto gráfico:

“Esto es la culminación, es el proceso inverso. Volver a insistir, sólo que la derivada es la pendiente de la recta tangente pero desde otro punto de vista, para volver a insistir sobre el mismo concepto, pero con otro tipo de preguntas, para que un concepto quede fijado tú tienes que preguntar desde muchos puntos, ángulos. Además estos problemas te dan la derivada como una función, es decir, que tiene su gráfica, a la vez es mucho más rico, estás utilizando la función derivada como una función, que tiene su gráfica igual que cualquier función. La recta es tal, de f´, y dar f, para ellos es más fácil volver a la ecuación pero no lo pretendo.”

De la línea 18-21 identificamos la modelación del mecanismo de construcción de la inversión o reversibilidad de un proceso. Para esta inferencia tenemos en consideración que cuando una acción ha sido interiorizada a un proceso es posible invertir los pasos del mismo, por ejemplo la “regla” de derivación de funciones polinómicas usada: si f(x) es de grado n, su derivada es de grado n-1, de la siguiente forma:

“$f(x)=a_nx^n+a^{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a$, $f´(x)=na_nx^{n-1}+.. a_1$”.

En esta viñeta en las líneas 5-8, 13-17 y 17-21 se observa que se están invirtiendo los pasos de la regla dados para obtener funciones derivadas, que es una característica del mecanismo de inversión. Además en la entrevista de planificación María señala que estas tareas están ya relacionadas con la integración de funciones. En la entrevista de desarrollo María indica que estamos ante el "proceso inverso" (ella no piensa en la terminología APOS) sino que pone de manifiesto la relación entre las tareas anteriores de calcular funciones derivadas y la que ahora les plantea.

El énfasis de María en las reglas limita las posibilidades de modelar la inversión del operador derivada. Serían necesarias más tareas para poder afirmar de manera categórica la inversión como mecanismo modelado. El hecho de invertir pasos (invertir pasos del operador derivada como regla) con la regla de los polinomios pone la base para la modelación del mecanismo de inversión del operador derivada.

De acuerdo con la teoría APOS, la inversión de un proceso permite obtener un nuevo proceso, por tanto, en la viñeta María modela el proceso inverso del operador derivada que es la integración indefinida o anti-diferenciación. De este modo se introduce la integral indefinida como proceso, sin necesidad de modelar la interiorización de acciones para la misma.

Considerando de manera global las viñetas 8 y 9 debemos resaltar el predominio de lo procedimental al tratar las funciones tanto cuando actúa el operador derivada como cuando lo hace el operador integral (anti-diferenciación). Esta es una manifestación de la concepción de las matemáticas que caracteriza la práctica de María.

Al considerar todas las viñetas en su conjunto, podemos señalar que hay predominio de lo analítico y que generalmente si aparecen los dos sistemas de representación, analítico y gráfico no hay integración entre ellos, sino que aparecen separados. Esta forma de proceder de María condiciona la organización del contenido matemático, ya que se pueden desarrollar los significados (gráfico y analítico) de forma autónoma. María no considera necesario establecer explícitamente relaciones entre los significados, y cuando lo hace tiende a "pegar" los significados geométricos a los analíticos, que son los prioritarios.

María tiene una visión de las matemáticas escolares como "algorítmicas", los conceptos matemáticos se caracterizan por reglas que aplicadas dan un resultado, lo mismo para f´(a), que para f´(x). Esta visión se caracteriza en la práctica por la potenciación de reglas y procedimientos de cálculo, María pone el énfasis en calcular siguiendo recetas paso-a-paso.

La manera de actuar de María se caracteriza por la ausencia de relaciones entre determinados conceptos. María gestiona el contenido matemático en el aula de forma que las relaciones entre los conceptos no aparecen ni se consideran necesarias. Esto manifiesta que María concibe el aprendizaje de los conceptos de forma autónoma sin relaciones, decimos que es una construcción no progresiva vertical.

En cuanto al desarrollo de cada concepto, la práctica de María se caracteriza por desarrollar las distintas formas de conocer sin relaciones entre sí. María potencia la derivada de una función en un punto como proceso y como acción sin vinculaciones entre ellas de ningún tipo. La práctica de María al apoyarse en reglas le permite no vincular las formas de conocer. Esta manera de proceder de María está indicando una concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas en el que no hay un desarrollo progresivo (horizontal). De ninguno de los conceptos que conforman la noción de derivada se potencia su construcción como objeto. En la práctica de María no aparece de forma explícita la descomposición genética de un concepto.

De forma genérica las relaciones no parecen ser un objetivo en la práctica de María:

- la derivada de una función en un punto como acción (mediante una regla) y como proceso aparecen sin vinculación,
- la derivada de una función en un punto como proceso no se vincula a ningún concepto,
- la función derivada se apoya en la “regla” de la derivada de una función en un punto y no en los significados interiorizados,
- el operador derivada no se apoya en el significado de la función derivada, la relación es “nominal”, y
- la función derivada construida mediante una regla y la derivada de una función en un punto no guardan relación con el operador derivada.

5.- LA PERSPECTIVA DE LA PRÁCTICA DE MARÍA: PERSPECTIVA TRADICIONAL

Como hemos señalado la perspectiva de la práctica del profesor hace referencia a “lo que subyace” en dicha práctica, a los aspectos caracterizadores de la misma desde la consideración de la potenciación de la construcción de conceptos en los estudiantes. Caracterizamos la perspectiva de la práctica del profesor a partir de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada que pone de manifiesto dos dimensiones:

- cómo concibe el desarrollo de la comprensión: concepción sobre el aprendizaje de los conceptos visto a través de los mecanismos de construcción del conocimiento que se potencia, secuencia y relaciones y su justificación.
- su visión de las matemáticas: concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Para obtener las inferencias sobre las dos dimensiones anteriores hemos utilizado las variables siguientes:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.

- Cómo organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

El análisis de la práctica de María realizado nos permite identificar "las ideas" que definen las dos dimensiones que delimitan la perspectiva de la práctica. Con este objetivo describimos los valores de estas variables.

Respecto al uso de los sistemas de representación en algunas situaciones el uso de los sistemas de representación se reduce al uso de significados analíticos, estando ausentes los significados del modo gráfico. En otras ocasiones para María los significados vinculados a algunos conceptos pueden venir dados en contexto gráfico y contexto analítico y puede ocurrir:

- que no haya integración de lo gráfico y lo analítico,
- que pueda parecer que haya integración de los significados gráficos y analíticos, pero lo que sucede es que no los usa de la misma manera: i) en la construcción prioriza el significado analítico y "pega" a él el significado geométrico, y ii) aunque "aparentemente" se usa y apoya en significados geométricos, éste uso es testimonial, pues lo importante son los significados analíticos.

Esta manera de actuar de María es coherente con una concepción de las matemáticas en la que los significados de los conceptos son esencialmente analíticos, y cuando se asocian significados en varias representaciones no son importantes las relaciones entre los significados.

La ausencia de relaciones significativas explícitas entre los significados de los conceptos en distintas representaciones es una manifestación de que María concibe la construcción de los conceptos en itinerarios separados sin relaciones entre ambos. Los "procesos" de construcción gráfica y los "procesos" de construcción analítica del mismo concepto no es necesario que guarden relaciones.

Respecto a los distintos conceptos que conforman la noción de derivada (derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada) en la práctica de María, estos conceptos no necesitan estar relacionados entre sí. María considera que pueden construirse conceptos sin que guarden relación. Un aspecto característico de la práctica de María es que en las modelaciones realizadas para el operador derivada no establecen relaciones con los significados de la derivada de una función en un punto ni de la función derivada.

Esta desvinculación de significados entre distintos conceptos en la práctica de María puede ser una manifestación de la importancia dada por María al uso de "reglas" o procedimientos de cálculo. La forma de actuar de María pone de manifiesto su interés en que los estudiantes asocien el uso de reglas a los conceptos. La importancia de las reglas en la práctica de María se manifiesta en que en los casos en que se establece relación entre dos conceptos, derivada de una función en un punto y función derivada, la relación viene dada mediante la "generalización de una regla".

La manera de proceder de María pone de manifiesto una concepción de las matemáticas escolares en la que no es necesario establecer relaciones entre los distintos conceptos ya que lo esencial es que los estudiantes utilicen "reglas" o procedimientos del tipo paso-a-paso para calcular los números o expresiones que representan a los conceptos. María organiza el contenido matemático apoyándose en dos bloques temáticos sin establecer relaciones explícitas: $f'(a)$, $f'(x)$ por un lado y el operador derivada por otro. Por tanto, de la práctica de María se infiere que las matemáticas escolares se organizan mediante "métodos de cálculo" alrededor de los conceptos independientes entre sí, y están caracterizadas por el carácter “algorítmico” del contenido.

Estas características de la práctica de María pueden relacionarse con una caracterización de una filosofía de las matemáticas, que Ernest (1996) denomina “absolutista”, en la que se priorizan las reglas y que tiende a ser atomista. Esta visión se puede transmitir en las escuelas dando a los estudiantes “rutinas” sin relaciones y tareas matemáticas que implican aplicar los procedimientos aprendidos con una única respuesta. Ernest (1989 a) considera que existe una visión instrumentalista en la que las matemáticas son una acumulación de hechos, reglas y estrategias para ser usadas, es decir, un conjunto de reglas útiles y hechos. Lerman (2002) identifica un profesor tradicional que se caracteriza a través del modelo de “perfomance” tradicional, apoyado en una psicología conductista.

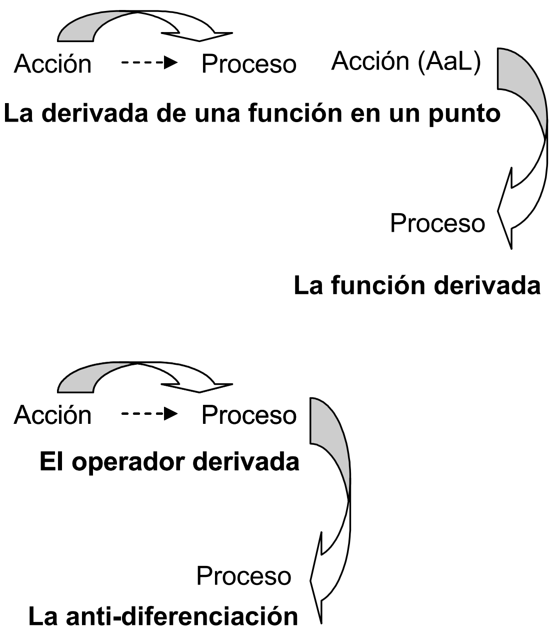
Por otra parte, la manera de actuar de María refleja una concepción del aprendizaje en la que no se consideran relevantes las relaciones entre conceptos, ya que los distintos conceptos pueden relacionarse o no. Por tanto, en la práctica de María aparece una concepción del aprendizaje en el que el desarrollo de la comprensión no es progresiva en sentido vertical (relaciones entre conceptos).

En el cuadro 4.7 las flechas en sentido vertical nos muestran las relaciones que se establecen entre los distintos conceptos. Cuando aparece una relación, ésta viene dada por una “regla”. Cómo se observa además hay conceptos aislados de otros. Este cuadro señala que de la práctica de María se infiere unas características del aprendizaje como poco progresivo entre los conceptos que conforman la noción de derivada.

Respecto a las formas de conocer que la práctica de María potencia para cada concepto podemos indicar que en ningún caso se construyen objetos, potenciándose a los sumo la concepción proceso. En estos casos los significados geométricos y analíticos interiorizados lo son de forma independiente.

María en la construcción de la derivada modela por separado el mecanismo de interiorización de la derivada de una función en un punto y la derivada de una función en un punto como acción Y de los dos, los significados interiorizados no son usados en la unidad didáctica. Las acciones modeladas permiten a María dar a los alumnos procedimientos algorítmicos para obtener el número f´(a), aspecto sobre el que se apoya para construir la función derivada mediante generalizando de la regla de los cuatro pasos. En este caso, los significados geométricos no juegan un papel relevante. La construcción del operador derivada hecha por María gira alrededor de las “reglas de derivación” de naturaleza analítica, con ausencia de aspectos geométricos en su construcción.

En el cuadro 4.7 las flechas en sentido horizontal indican las relaciones que se establecen entre las distintas formas de conocer para cada concepto.



Cuadro 4.7 Relaciones entre conceptos y formas de conocerlos

Desde estas características, Ernest (1989 a) indica que en la visión instrumentalista, las matemáticas se consideran como una acumulación de hechos, reglas y estrategias para ser usadas, es decir, un conjunto de reglas útiles y hechos; los hechos, reglas y métodos matemáticos aparecen como entidades independientes.

En resumen las dimensiones que caracterizan la perspectiva de la práctica de María vienen dadas por:

a) Las concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas, o la construcción de los conceptos. Para María la construcción de un concepto no tiene necesariamente que ser progresiva, las formas de conocer de un concepto pueden construirse de forma aislada y sin vinculaciones entre los significados en las diferentes representaciones. El desarrollo entre los conceptos no tiene por qué ser de forma relacionada, pueden aparecer conceptos de la noción aislados entre sí. Por tanto, no es necesario construir la noción de manera progresiva.

b) Las Matemáticas son un conjunto de hechos y procedimientos, para recordar y usar procedimentalmente. Un concepto puede tener asociados significados distintos; y éstos pueden estar relacionados, o no. Esencialmente las matemáticas escolares son reglas analíticas a memorizar. Los distintos conceptos pueden estar, o no, conectados. Los conceptos que forman una noción no tienen porque formar una red conectada.

6.- DISCUSIÓN INTERCASOS

Terminamos este capítulo de resultados haciendo una reflexión final considerando los resultados de las perspectivas de los dos casos de manera conjunta. Contrastaremos las dos perspectivas de la práctica identificadas para Juan y María. Nuestra conceptualización de la perspectiva de la práctica permite considerar que el análisis de la misma se ha llevado a cabo bajo la consideración de la "enseñanza para la comprensión".

Como indica Simon (2003) los esfuerzos en la reforma de las matemáticas que "pretenden promover el aprendizaje de las matemáticas con comprensión" requieren una reconceptualización de la naturaleza de las matemáticas, qué significa hacer matemáticas en la escuela, cómo los conceptos matemáticos son aprendidos y cómo los conceptos matemáticos pueden se enseñados. Propone para ello que:

> "*La distinción entre actividad empírica y actividad lógico-matemática se centra en la naturaleza de los conceptos matemáticos y cómo esos conceptos se desarrollan, cuestión principal en la demanda de enseñar matemáticas para la comprensión.*" (vol 4- p. 183)

Por lo tanto en el mismo sentido la distinción entre las perspectivas de Juan y de María es plausible centrarla en cómo se conciben las matemáticas y cómo se concibe el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos dos aspectos son las dimensiones que definen cada perspectiva. Para ellos tendremos en cuenta la forma en que hemos realizado las inferencias sobre las dimensiones basada en el uso de tres variables:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticos y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

Mediante los valores asignados a cada una de estas variables hemos posicionado a cada uno de los profesores en las dos dimensiones.

La perspectiva de la práctica de Juan, sus dos dimensiones, se manifiesta mediante la construcción explícita de la idea de “relación”. Esta idea de relación está presente de manera sistemática en la práctica de Juan. Las relaciones que se establecen permiten el uso de los significados construidos. Los niveles de relación establecidos por Juan en su práctica son varios:

- relación entre los significados vinculados a un concepto en los distintos sistemas de representación,
- construcción de relaciones entre las distintas formas de conocer un concepto, construcción que implícitamente se describe en la descomposición genética del concepto, y
- construcción de relaciones entre los distintos conceptos que conforman la noción de derivada.

La perspectiva de la práctica de María se manifiesta a través del énfasis puesto en la necesidad de “reglas” para determinar los significados de los conceptos. La práctica de María al apoyarse en reglas hace que no sea necesario construir relaciones, ya que la idea de relación juega un papel poco relevante al no explicitarlas:

- los significados en los distintos modos de representación no se relacionan entre sí. En el caso en que aparecen ambos, el significado geométrico se pega al analítico o su presencia es poco relevante,
- las relaciones en la construcción de un concepto matemático no son necesarias, y
- los diferentes conceptos que conforman la noción de derivada pueden construirse sin vinculaciones significativas entre ellos.

De esta forma la discusión entre las dos perspectivas de la práctica identificadas en Juan y María se puede establecer a partir de la idea de “relación” y el papel desempeñado por las “reglas”.

La perspectiva de la práctica en la que el énfasis está puesto en la necesidad de reglas y procedimientos algorítmicos paso-a-paso, no hay necesidad de establecer relaciones entre los "elementos" de las variables definidas: uso de sistemas de representación, organización de conceptos matemáticos y formas de conocer potenciadas. En los casos en que se relacionan, éstas se pueden construir mediante reglas. En esta perspectiva lo relevante es recordar y aplicar las reglas sin vinculaciones. Esta forma de proceder manifiesta una determinada concepción de las matemáticas y una concepción del aprendizaje matemático. Esta perspectiva de la práctica esencialmente "algorítmica" en la enseñanza de las matemáticas la denominamos "tradicional". El caso de María es un ejemplo empírico que nos ha permitido caracterizarla desde un punto de vista teórico.

La perspectiva de la práctica apoyada en la necesidad de establecer relaciones explícitas entre todos los "elementos" involucrados en las tres variables: uso de los sistemas de representación, organización de los conceptos matemáticos y formas de conocer potenciadas, ponen de manifiesto una determinada forma de concebir las matemáticas escolares y de concebir el aprendizaje de las matemáticas. Para esta situación tenemos una perspectiva de la práctica del profesor en la que son relevantes no sólo los modos de representación, los conceptos matemáticos y las formas de conocer presentes en la práctica desarrollada, sino que son esenciales las relaciones entre dichos elementos. En este sentido, hay un "plus" al considerarlos en conjunto en la práctica, que va más allá de la "suma" de las partes involucradas, ese plus viene dado por las relaciones. Por ello esta perspectiva de la práctica del profesor la hemos denominado "holística"[7]. Y el caso de la perspectiva de la práctica de Juan es un ejemplo empírico de la misma, que nos ha ayudado a caracterizarla desde

[7]El diccionario de la Real Academia de la Lengua (disponible on-line) define holístico como "perteneciente o relativo al holismo" y define holismo como "Doctrina que propugna la concepción de cada realidad como un todo distinto de la suma de las partes que lo componen".
Asiala et al. (1996) denominan "holistica" la aproximación a la enseñanza desarrollada por el grupo RUMEC, debido a que el estudiante desarrolla la comprensión resumiendo y considerando ideas juntas relacionadas.

un punto de vista teórico.

La importancia de las creencias de los profesores en su práctica es destacada por distintos autores. Lerman (1994) señala que lo que ocurre en la clase está fuertemente influenciado, si no determinado por ellas. En su revisión, Lerman (2002) indica que las investigaciones señalan una fuerte conexión entre las creencias y las prácticas de los profesores y sugieren que el cambio en las prácticas de éstos depende de cambios en sus creencias. Otros investigadores (Ernest, 1989 a, b; Wilson y Cooney 2002; Golafshani, 2004) también destacan la importancia de las creencias en la práctica de los profesores, no sólo de las creencias sobre las matemáticas, sino que consideran también las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La identificación y caracterización de distintos "modelos" de profesor es una preocupación y realidad en las investigaciones en Educación Matemática. Lerman (2002) identifica esencialmente dos modelos, un profesor tradicional que se caracteriza por un modelo "perfomance tradicional", y que viene a reflejar la posición de partida de los profesores desde la que se cambia. El modelo de "reforma" es un modelo de competencia (competence model), en el que los profesores necesitan una preparación distinta. Wilson y Cooney (2002) abordan dos orientaciones, una orientación "dualística" hacia la enseñanza y la visión relativista de la enseñanza que se basa en la búsqueda de la comprensión del estudiante.

En relación a las concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje Golafshani (2004) nos habla de dos concepciones, tradicional-absolutista y no-tradicional constructivista. Los profesores que tienen una visión "absolutista" sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje crean un entorno más centrado en el profesor, enseñan matemáticas como reglas para ser memorizadas, y describen las matemáticas como una disciplina infalible. Estos profesores tienden a presentar las matemáticas como una materia lineal, hechos y reglas referidas a números generalmente ofrecidas como actividad con lápiz y papel. El principal objetivo del profesor es que los aprendices dominen las estrategias matemáticas, la clara presentación de los paso-a-paso de cualquier procedimiento matemático. Los profesores con una visión "constructivista" tienden a permitir que los estudiantes exploren y comprendan las nociones.

CAPÍTULO V

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN E IMPLICACIONES

1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a realizar una discusión de los resultados y obtener algunas implicaciones. La discusión e implicaciones que vamos a realizar se centran en distintos aspectos que aparecen en nuestro trabajo. En primer lugar vamos a centrarnos en aspectos teóricos que permiten relacionar y situar nuestros resultados en las líneas en desarrollo en Educación Matemática. Los resultados obtenidos han permitido caracterizar las perspectivas de la práctica del profesor desde la modelación de los mecanismos de construcción de conocimiento conjeturados en una descomposición genética de la noción de derivada generada desde la perspectiva APOS. La caracterización de distintas perspectivas de la práctica la llevamos a cabo desde un punto de vista teórico. En segundo lugar analizamos la adecuación de nuestra investigación a criterios que deben cumplir las investigaciones en el campo de la Educación Matemática, basados principalmente en los trabajos de Schoenfeld (2000). Finalizaremos con indicaciones sobre el desarrollo de futuros trabajos en esta línea de investigación.

2.- ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

Nuestra propuesta para el análisis de la práctica tiene en cuenta que la enseñanza de las matemáticas pretende que los estudiantes comprendan las nociones matemáticas involucradas (Hiebert y Carpenter,1992). Hiebert y Carpenter (1992) relacionan el aprendizaje con la enseñanza para la comprensión. Otros autores (Artzt y Armour -Thomas, 1999) consideran "la enseñanza para la comprensión" base para el análisis de la práctica. En el mismo sentido se dirige el grupo de investigadores Simon, Tzur y colegas:

> *"Centramos nuestros informes de la práctica... en cómo el profesor se conduce para promover cambios en el conocimiento matemático de los estudiantes."* (Simon et al., 2000, p. 583)

Nuestra investigación aporta nueva información a esta línea de trabajo centrada en el análisis de la práctica del profesor que tiene como referente la enseñanza para la comprensión. Nosotros hacemos un análisis de la práctica del profesor relacionada con el aprendizaje que potencialmente pueden llegar a conseguir los estudiantes. Por ello realizamos un análisis de la práctica adaptando elementos de un marco teórico de comprensión. Para dar sentido a estas declaraciones tenemos que precisar qué entendemos por comprensión de las matemáticas. En nuestra investigación hemos considerado la comprensión de las matemáticas en términos del marco teórico APOS. Pensamos que el profesor a través de su práctica potencia una determinada forma de conocer los conceptos matemáticos en sus estudiantes. Esta idea la concretamos en que el profesor en su práctica modela una serie de mecanismos de construcción que ayudan a sus estudiantes a construir unas determinadas formas de conocer del concepto (acción, proceso, objeto). A partir de la idea de descomposición genética de un concepto como "el camino para construir conocimiento que deben realizar los estudiantes", consideramos modelación de la descomposición genética de la noción, "modelaciones realizadas por el profesor de los mecanismos de construcción". Para nosotros la modelación de un mecanismo de construcción es visible mediante los instrumentos de la práctica que usa el profesor.

Nuestros datos confirman que es posible hacer un análisis de la práctica del profesor que enseña matemáticas para que sus estudiantes lleguen a la comprensión de los conceptos. Por este motivo hablamos de aprendizaje potencial que pueden llegar a construir los estudiantes, pero no decimos que éste sea el aprendizaje que efectivamente realicen los estudiantes. La hipótesis de trabajo es que de alguna forma lo que el profesor modela en su práctica, tiene reflejo en el aprendizaje que alcanzarán los estudiantes.

Algunas de las investigaciones en Educación Matemática (Koirala, 1997; Artzt y Armour-Thomas, 1999; Tzur et al., 2001) incluyen entre sus resultados la caracterización de diferentes "perspectivas" de práctica del profesor. Consideran estos investigadores que es posible identificar y caracterizar distintos tipos de práctica.

Koirala (1997) plantea la enseñanza del cálculo para la comprensión conceptual por los estudiantes, se apoya en las ideas de comprensión de Skemp (1976) que distingue entre comprensión instrumental y comprensión relacional:

> *"En sentido amplio, hay dos maneras de enseñar el cálculo. Primero, hay una manera tradicional, con profesores que dan reglas y estudiantes que las aplican, ... sin llegar a comprender lo que hacen... La segunda manera se basa en aproximaciones exploratorias e intuitivas al desarrollo de los significados de los diferentes conceptos del cálculo*" (Koirala, 1997, comunicación personal)

La primera de las formas de enseñanza del cálculo es instrumental o tradicional, y una diferencia entre ambas maneras de enseñar el cálculo es el papel del profesor. En la enseñanza tradicional su papel es el de "decir" las reglas mientras que en la otra forma de enseñanza más informal el papel del profesor es el de facilitar el aprendizaje.

Para Simon (1995) son necesarios modelos de enseñanza de las matemáticas basados en el constructivismo como teoría de aprendizaje. Este investigador considera que el papel del profesor es promover el aprendizaje de los estudiantes y el análisis de la práctica le lleva a identificar la perspectiva que subyace en la práctica de los mismos[1] desde el punto de vista de los investigadores (Simon et al., 2000). Para Tzur et al. (2001):

> *"Resaltamos que tradicional[2], basada en la percepción y basada en la concepción[3] son nuestras caracterizaciones de las prácticas de los profesores, y no cómo los profesores podrían describir sus prácticas."* (p. 246).

Estos investigadores (Simon y colegas) describen tres perspectivas que han sido caracterizadas más detalladamente en el Capítulo II. La perspectiva tradicional se caracteriza por una enseñanza en la que el profesor transmite las ideas a los estudiantes (Simon et al., 2000). Una diferencia entre la perspectiva tradicional y la basada en la percepción viene dada por la idea de que en la tradicional el estudiante recibe el conocimiento, mientras que en la perspectiva basada en la percepción el estudiante debe "percibir" el conocimiento personalmente, ambas perspectivas asumen que las matemáticas existen independientes de la experiencia (lo que es una visión platónica de las matemáticas) (Simon et al., 2000). La "perspectiva basada en la concepción" se

[1]En un primer momento identifican dos aproximaciones a la enseñanza, tradicional y de reforma, y que los profesores que buscan nuevas formas de enseñar presentan en su práctica aspectos de las dos aproximaciones (Simon y Tzur, 1999).

[2]Aproximación tradicional, perspectiva basadas en la percepción y perspectiva basada en la concepción. En Heinz et al. (2000) se denomina "perspectiva tradicional" a la aproximación tradicional.

[3]Resaltadas en el original.

basa en la idea de que sólo se puede llegar a conocer algo a partir del conocimiento previo, las matemáticas son una red de concepciones que se abstraen a través de la reflexión, y el aprendizaje en esta perspectiva es la construcción y transformación de las concepciones (Tzur et al., 2001).

Las tres perspectivas pueden dibujar un "continuo" para el desarrollo del profesor, en un extremo (izquierda) tendríamos la perspectiva tradicional, y en el otro extremo (derecha) la perspectiva basada en la concepción, como punto intermedio se situaría la perspectiva basada en la percepción.

Desde el punto de vista del desarrollo del profesor, éste podría comenzar en la izquierda y se "movería" hacia la derecha, hasta alcanzar la perspectiva basada en la concepción. La idea de continuo subyace en que las perspectivas no aparecen en "estado puro". Los profesores en "transición" serían los que desarrollan prácticas que están cambiando como resultado de participar en las reformas de educación matemática. Tzur et al. (2001) señala:

> *"una perspectiva basada en la percepción puede ser un paso hacia la basada en la concepción,... El cambio de una perspectiva tradicional a una basada en la percepción no requiere un gran cambio de paradigma... las perspectivas tradicionales pueden evolucionar hacia las basadas en la percepción."* (p. 248)

Otro grupo de investigadores que también plantean una situación similar a la descrita por Simon y sus colegas, en lo referente a distintos estilos que pueden llegar a formar un continuo en el desarrollo del profesor son Artzt y Armour-Thomas (Artzt 1999; Artzt y Armour-Thomas, 1999). Artzt (1999) indica que:

> *"Investigadores que han descritos cambios en las creencias y prácticas de profesores, están de acuerdo en que puede haber varios estados de desarrollo de la enseñanza."* (p. 143)

Tanto las nociones y resultados del grupo de Simon y colegas como el de estas dos investigadoras tienen posibles repercusiones en la formación y desarrollo del profesor, según aseguran los distintos investigadores. Simon et al. (2000) señalan que los profesores pueden ser considerados en evolución desde perspectivas basadas en la percepción a perspectivas basadas en la concepción y que ello permite ayudar a los formadores de profesores en el diseño de programas.

Los resultados de nuestra investigación aportan información sobre estas perspectivas de la práctica del profesor al identificar dos perspectivas: holística y tradicional ("basada en reglas"). Estas perspectivas han sido caracterizadas considerando las siguientes variables:

- La forma en que usa los sistemas de representación como instrumentos de la práctica.
- Cómo el profesor organiza los distintos conceptos matemáticas y cómo establece relaciones entre ellos.
- Formas de conocer que parece potenciar mediante las modelaciones de los mecanismos de construcción.

A través de estas variables en la práctica del profesor, inferimos lo que fundamenta su práctica en relación a las dos dimensiones:

- cómo concibe el desarrollo de la comprensión (la concepción sobre el aprendizaje de los conceptos), y
- su visión de las matemáticas como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Esta manera de explicar lo que subyace en y justifica la práctica del profesor viene justificada por los resultados de Escudero (2003) que apunta a que la forma en que los profesores organizan y gestionan el contenido matemático en el aula se relaciona con sus concepciones sobre las matemáticas escolares y por la manera en la que los profesores conocían dichos contenidos. Afirmando que es necesario apoyarse en los resultados de los análisis epistemológicos de los conceptos matemáticos que el profesor enseña para identificar las concepciones que sobre las matemáticas subyacen en su práctica. En esta misma línea nosotros nos apoyamos en los análisis epistemológicos sobre la noción de derivada realizada en otros estudios (Azcárate, 1990; Azcárate y Deulofeu, 1990; Font, 1999; Badillo, 2003) en las que se señala la relevancia del papel que desempeñan los sistemas de símbolos en el proceso de construcción del significado de derivada a través de la historia.

La segunda idea usada en la caracterización de la perspectiva de la práctica ha sido la que procede de la manera en que históricamente se ha ido reificando los significados de la noción de derivada desde la idea del paso al infinito de las aproximaciones sucesivas como una manera de medir la velocidad de cambio. Estas dos ideas han sido usadas para intentar identificar las concepciones sobre el aprendizaje y las matemáticas y sus relaciones que subyacen a la práctica del profesor.

De esta manera, la caracterización del uso de los modos de representación y la manera en la que el profesor modelaba los diferentes mecanismos de desarrollo del concepto nos han proporcionado los medios para identificar las diferentes perspectivas de la práctica. Desde nuestro punto de vista y de acuerdo con Simon et al. (2000), las perspectivas de la práctica son construcciones teóricas derivadas de los datos empíricos, pero no son monolíticas.

La *"Perspectiva tradicional"* que hemos identificado en nuestra investigación podemos caracterizarla de la siguiente forma:

- La visión que el profesor tiene del desarrollo-construcción de los conceptos es que no hay relaciones entre las distintas formas de conocer un concepto. Se considera la forma de conocer acción y alguna forma de conocer proceso. Los sistemas de representación son usados sin relaciones entre ellos y sin vinculación de los significados. Por otra parte los distintos conceptos matemáticos son presentados sin conexiones entre sí, abordandose por separado. No hay un desarrollo progresivo de la construcción de los conceptos, ni verticalmente (entre diferentes conceptos) ni horizontalmente (en cada concepto).

- Esta caracterización de la comprensión de los conceptos matemáticos es compatible con una concepción de la matemáticas en la que se consideran como un conjunto de hechos y procedimientos sin relaciones entre ellos que deben ser aprendidos memorísticamente. Así las matemáticas tienen reglas que se memorizan, sin necesidad de significado y sin vinculación de los significados de unas con otras.

La denominación de "perspectiva tradicional" nos parece adecuado ya que es muy similar a lo que lo que Simón y sus colegas (Tzur et al., 2001) llaman aproximación tradicional, o a la caracterización realizada por Artz y Armour-Thomas (Artz, 1999; Artz y Armour-Thomas, 1999) al poner el acento en reglas, hechos y procedimientos a recordar sin vinculaciones, el profesor da instrucciones detalladas de las "recetas" para que los estudiantes las memoricen. Por tanto se ajusta a la idea de que el papel del profesor es "transmitir" el conocimiento.

La otra perspectiva de la práctica identificada viene caracterizada por la presencia de relaciones entre distintas formas de conocer, existiendo más significados vinculados a los conceptos y estos significados podrán estar relacionados. El uso de los sistemas de representación se caracteriza por el establecimiento de relaciones. La práctica irán aumentando en grado de complejidad al aumentar las modelaciones del profesor de mecanismos de construcción y relaciones, lo que se refleja en la modelación de la descomposición genética del concepto.

La perspectiva identificada es la que denominamos *"Perspectiva holística"* caracterizada por:

- La visión que el profesor tiene del desarrollo de los conceptos es que éste se realiza de forma progresiva. En sentido horizontal ya que se desarrollan diferentes formas de conocer el concepto (acción, proceso, objeto) y estas formas se relacionan entre sí, conectando los significados y con la síntesis de los modos de representación. En sentido vertical, ya que se establecen conexiones entre los distintos conceptos que se abordan.

- Las matemáticas son un conjunto de conceptos con significados vinculados y con diferentes representaciones, e interconectados entre sí, donde un concepto está relacionado con otros conceptos.

Por tanto en este sentido creemos que se crea un continuo en las distintas perspectivas de la práctica desde una *"Perspectiva tradicional"* y a medida que aumentan los mecanismos modelados por el profesor, sistemas de representación y relaciones vamos generando una práctica más completa en cuanto a la formas de conocer que pueden alcanzar los estudiantes llegándose al otro extremo del continuo donde situamos la *"Perspectiva holística"*.

Por este motivo podemos decir que la perspectiva de la práctica del profesor "holística" de manera teórica así construida posibilita el objetivo de una "enseñanza para la comprensión" objetivo a largo plazo de las investigaciones en educación matemática.

Desde el punto de vista del desarrollo profesional, la tendencia debería ser alcanzar la perspectiva holística. Esta idea es similar a lo que proponen Simon y colaboradores (Simon et al., 2000; Heinz et al., 2000):

"Una meta superior que hemos identificado es promover el cambio en la perspectiva de los profesores, de perspectiva basada en la

percepción a basada en la concepción... Promover cambios en las perspectivas de los profesores desde la perspectiva basada en la percepción a la basada en la concepción es un significativo desafío." (Heinz et al., 2000, p. 104)

La formación del profesorado puede ayudar a este desarrollo, siendo de interés para ello la idea que señala Chevallard (1999) sobre la "zona de desarrollo próximo" respecto al desarrollo de praxeologías con un costo aceptable, ya que el profesor tiende a introducir modificaciones al desarrollar una praxeología. Por tanto, la evolución y desarrollo de la práctica puede tender a realizarse con modificaciones pequeñas en la misma, que se identifican con nuestro análisis a través de la modelación de la descomposición genética de la noción.

Nuestra idea de "perspectiva de la práctica" vista de esta manera nos permite "complementar" con la aproximación de la TAD (Espinoza, 1998; Chevallard, 1999; Bolea et al., 2001), ejemplificada en la investigación de Espinoza (1998), en la que se defiende que es la organización del contenido en el currículo la que determina la práctica del profesor. Desde nuestra investigación podemos decir que las "concepciones" del profesor pueden ser lo suficientemente potentes como para modificar la estructura del currículo y por tanto definir la práctica del profesor.

En este sentido, en la revisión de investigaciones de Golafshani (2004) se pone de manifiesto que el uso de "textos" basados en la reforma no produce cambios en las prácticas de los profesores. En dichas investigaciones partiendo de una visión absolutista se pretendía un cambio a posiciones más acordes con la reforma a partir de utilizar determinados textos, las creencias de los profesores adaptaban el "nuevo texto" a su propias creencias absolutistas primando la realización de algoritmos.

Nuestra investigación está en consonancia con los resultados obtenidos por otros investigadores en relación al papel jugado por las creencias en la práctica del profesor (Ernest, 1989 a, 1996; Lerman,1994, 2002; Wilson, y Cooney, 2002; Golafshani, 2004). Ernest (1989 a) considera que el conocimiento que poseen los profesores es importante, pero no suficiente, para explicar las diferencias entre ellos en relación a la práctica; son los sistemas de creencias los que permiten explicar dichas diferencias. Respecto a los cambios de los profesores hacia posiciones más acordes con la reforma de las matemáticas, Ernest (1989 a) comenta:

> *"Un cambio hacia una aproximación de resolución de problemas en la enseñanza requiere profundos cambios. Depende fundamentalmente de los sistemas de creencias de los profesores, y en particular, de la concepción del profesor de la naturaleza de las matemáticas y su modelo mental de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las reformas de la enseñanza no pueden llevarse a cabo a menos las creencias mantenidas por los profesores sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje cambien."* (p. 249)

Coincide nuestra investigación con la idea de Lerman (2002) en relación a que caben diversos posicionamientos de los profesores, desde un modelo tradicional hacia un modelo más acorde con las reformas emprendidas en la enseñanza de las matemáticas. Los movimientos o desplazamientos de los profesores por el continuo desde una "perspectiva tradicional" hacia una perspectiva más "holística" se basan, fundamentalmente, en cambios en las creencias.

3.- ADECUACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN PRESENTADA

Even y Schwarz (2003) plantean la cuestión de que diferentes perspectivas teóricas aplicadas a una misma situación (análisis de la práctica) dan lugar a diferentes interpretaciones y por tanto se preguntan cómo integrar las diferentes perspectivas, socioculturales y cognitivas, ya que estamos ante una problemática de investigación demasiado compleja:

> *"Podemos concluir de nuestra discusión anterior que una comprensión más completa de la complicada práctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere el uso tanto de las perspectiva cognitiva como de la perspectiva sociocultural"* (p.309)

Para estos autores esta integración no es fácil de resolver y no se dispone todavía de una respuesta para conseguirla, ya que aunque ambas perspectivas responden al mismo problema general, en cada una de ellas las preguntas de investigación que se plantean son distintas y las interpretaciones también. Creen que por esa senda de integración de ambas perspectivas están nuevos desarrollos en el campo de la investigación en Educación Matemática.

Schoenfeld (1999) identifica varios ámbitos de investigación en educación matemática dentro de tres grandes áreas que son: el desarrollo teórico (pendiente de la práctica), teoría y práctica integrados y desarrollo práctico (pendiente de la teoría). En el área de desarrollo teórico, incluye el ámbito relativo la unificación de "lo Cognitivo y Social", en este caso indica:

> *"Queda un largo camino hasta que dispongamos de una perspectiva teórica integrada que suministre una visión adecuada y unificada de las maneras en que pensamos y actuamos"* (p. 5)

En nuestro estudio al plantear nuestro problema de investigación en términos de práctica del profesor la perspectiva sociocultural nos proporciona los elementos teóricos para hacerla "visible" mediante la noción de instrumento de la práctica. Llinares (2000 a) nos dice que podemos intentar describir la práctica analizando qué instrumentos usa el profesor, cómo los utiliza y con qué propósito. Nosotros seleccionamos como instrumentos de la práctica, los elementos matemáticos y los modos de representación y hemos dado significado al uso de los instrumentos, entendiéndolo cómo establecer las relaciones. En cuanto al propósito del uso de los mismos hacemos una asignación, de que el propósito es la construcción de conocimiento matemático mediante la modelación de un mecanismo de construcción. En este sentido, es en el que hacemos uso de la perspectiva sociocultural.

En cuanto a respuestas que podemos dar desde la perspectiva sociocultural en nuestra investigación, podemos responder a "la naturaleza" y propósito del uso: uso de los instrumentos de la práctica hecho por el profesor y con el propósito "determinado". Pero no respondemos a preguntas de tipo sociocultural en relación a la cultura de clase, naturaleza de las interacciones en el aula, etc.

La perspectiva cognitiva aparece cuando atendemos al propósito del uso de los instrumentos, el propósito es que los estudiantes construyan conocimiento matemático, pero el sujeto de nuestra investigación es el profesor ¿cómo resolver este problema? Introducimos y utilizamos la idea de que el profesor "modela" los mecanismos de construcción que permitirán al estudiante la construcción de conocimiento, es decir, llegamos a las formas de conocer que potencialmente pueden construir los estudiantes. ¿Cómo hace el profesor esta modelación? A través de los instrumentos de la práctica y su uso.

En la investigación usamos la idea de la "modelación de la descomposición genética del concepto" por el profesor (que nos informa de los mecanismos modelados por el profesor). Es a través de las modelaciones que realiza el profesor desde donde inferimos lo que parece justificar la práctica. El uso que se hace de los instrumentos y cómo determinados usos permiten la modelación de los mecanismos de construcción por el profesor posibilita identificar la perspectiva que subyace a la práctica del profesor.

En cuanto a la validez de la investigación (adecuación a los criterios de calidad de una investigación), Cobb (2000) plantea que se están produciendo cambios en la forma de enfocar los problemas y resultados en Educación Matemática, la teoría ha pasado a considerarse emergiendo a partir de la práctica y guiándola. Considera que se pueden considerar dos "características" en las metodologías de investigación, generabilidad, ajustabilidad[4] (carácter fidedigno) refiriéndose a los análisis teóricos en los experimentos de enseñanza. Creemos que son criterios válidos de manera general.

La característica de generabilidad para Coob (2000):

"no es generalización en sentido tradicional de que las características de casos particulares son o ignoradas o tratadas como elementos intercambiables de un conjunto a los que se pretenden aplicar afirmaciones... lo que es generalizable es la forma de interpretar y actuar que preserva las características específicas de los casos individuales" (p. 327)

En relación a la otra característica, Coob (2000) señala que:

"La ajustabilidad se refiere a lo razonable y justificado de las inferencias y afirmaciones. La noción de ajustabilidad reconoce que un rango de análisis plausibles pueden hacerse a un conjunto de datos con una variedad de propósitos distintos" (p. 328)

Nuestra investigación pensamos que se puede considerar acorde con ambas características. Respecto a la generalidad, los dos casos analizados dan lugar a dos caracterizaciones de la práctica a través de la modelación que hace el profesor de la descomposición genética bastante distintas y ambas nos permiten pensar que la forma de interpretar que hemos utilizado es suficientemente general

[4] En el original "trustworthiness".

al poderse relacionar con los resultados de otros estudios. Respecto a la ajustabilidad, hemos tenido en consideración la propuesta metodológica para el análisis de Coob y Whitenack (1996). Además en los diferentes análisis hemos hecho indicación expresa de la inferencia realizada, y hemos tenido en consideración que las explicaciones que hemos dado formaran un todo coherente para la descripción de la modelación de la descomposición genética realizada por el profesor y de la perspectiva de la práctica.

Por otro lado, Schoenfeld (2000) indica algunos criterios para evaluar las teorías, modelos e investigaciones en Educación Matemática, nuestro trabajo se ajusta a dichos criterios de la siguiente manera.

<u>Poder descriptivo</u>, creemos que nuestra propuesta de uso de la modelación de la descomposición genética realizada por el profesor a través de los instrumentos de la práctica nos permiten describir la práctica del profesor. Esta aproximación no necesita dar cuenta de todo, pero si de aquellos aspectos que queremos destacar, como el propio Schoenfeld (2000) señala “los modelos son aproximaciones”.

<u>Poder explicativo</u>, en el sentido de que puede explicar en términos de “comprensión potencial” lo que los profesores “hacen” en su práctica, es lo que hemos señalado anteriormente sobre los propósitos del profesor con los instrumentos y su uso, enseñanza para la comprensión.

<u>Alcance</u>, en el sentido de que es aplicable a diferentes perspectivas de la práctica del profesor. Creemos que tiene un potencial amplio, como queda de manifiesto con los dos casos empíricos recogidos en la memoria. Ambos casos dan como resultado perspectivas bastante diferentes, y la caracterizaciones teóricas nos permiten concluir que el rango de casos a los que cabe aplicar nuestro análisis es amplio. La generabilidad descrita por Coob (2000) como

característica de las interpretaciones permite concluir el alcance amplio de la teoría. Schoenfeld (2002), considera el examen de diferentes casos es una buena forma de "evaluar" el alcance de una teoría que está emergiendo.

Poder predictivo, nuestro trabajo permite hacer predicciones, en dos sentidos, por un lado nos permite hablar del aprendizaje potencial que pueden llegar a realizar los estudiantes, y por otro lado puede permitir hacer predicciones de la evolución o desarrollo del profesor. Respecto al desarrollo del profesor de forma hipotética podemos admitir que su práctica puede variar respecto a la analizada en un momento dado, pero el desarrollo del profesor será hacia modelación de la descomposición genética (y por tanto de la perspectiva inferida) que no será "muy diferente" de la identificada, es decir, a "cambios pequeños"del profesor le siguen pequeñas perturbaciones en la modelación de la descomposición genética, y es posible que descomposiciones genéticas de diferentes conceptos tengan rasgos y aspectos comunes, que dan lugar a una perspectiva de la práctica "global" independiente del concepto matemático concreto.

Rigor y especificidad, nosotros hemos indicado expresamente las elecciones realizadas desde el punto de vista teórico, desde la práctica del profesor (los instrumentos de la práctica), desde la construcción de conocimiento (modelo de comprensión APOS), cómo conjugamos ambos "chequeando" las acciones del profesor. Hemos definido los términos que usamos, por ejemplo, cómo entendemos la modelación de la descomposición genética de la noción, realizada por el profesor, y los instrumentos de la práctica junto con su uso que hacen visible dicha modelación. En cuanto al rigor, es similar a lo que Coob (2000) plantea como ajustabilidad, que ya hemos comentado anteriormente.

Falsabilidad[5], relativo a no hacer afirmaciones tautológicas y predicciones no verificables, este criterio está ligado a los dos criterios anteriores. Replicabilidad, pensamos que con la forma de realizar las inferencias, justificadas en todos los casos y la explicitación de los elementos teóricos, nuestra investigación es replicable, este criterio está conectado con el criterio de rigor y especificidad.

Múltiple fuentes de evidencia (triangulación) hemos utilizado distintas fuentes de datos, entrevista previa, entrevistas de desarrollo, grabaciones de las clases, unidades didácticas, que nos han permitido elaborar viñetas detalladas, la fase de planificación que se puede considerar una fase de la práctica, la hemos considerado como fuente de datos. Además hemos utilizado como triángulación, una idea procedente de la triangulación que utilizan los investigadores del marco APOS, y es el consenso de los investigadores para realizar las inferencias.

Autores como Borko y Peressini (1998) consideran algunos de estos criterios[6], poder explicativo, poder predictivo y alcance, apropiados para juzgar la calidad de teorías en Educación Matemática. Borko y Peressini (1998) incluyen un nuevo criterio sobre la viabilidad de realizar estas investigaciones, pero este criterio ya no se refiere a la calidad propiamente de la investigación sino a la posibilidades reales de llevar a cabo estos análisis en el marco de programas de formación del profesorado, referido a la propuesta de Schoenfeld y colegas ("Enseñanza-en-Contexto"). Coob (2000) considera que el criterio de replicabilidad[7] es un criterio que carece de sentido cuando se están haciendo tentativas de construir teoría a partir de un conjunto de datos, situación esta

[5]En el original falsifiability.

[6]En el borrador disponible en internet Schoenfeld (1998 a) sobre la enseñanza en contexto únicamente hace referencia a estos tres criterios.

[7]Feasibility en el original.

última en la que nos encontramos.

4.- PERSPECTIVAS DE FUTURO

Nuestra investigación nos deja una serie de cuestiones que pensamos pueden ser motivo de estudio en futuras investigaciones:

-- ¿Cómo evoluciona la modelación de la descomposición genética realizada por el profesor cuando se analizan dos periodos cercanos del mismo profesor y del mismo concepto? Centrarnos en el desarrollo de la perspectiva de la práctica.

-- ¿Podríamos aislar las características de la práctica que están más allá del concepto matemático concreto?

-- ¿Qué papel desempeña el software como instrumento de la práctica?

-- En un futuro podemos ir ampliando este tipo de trabajos con un análisis de la comprensión que llegan a obtener los estudiantes, incluyendo investigaciones con datos que nos hablen de su comprensión de los estudiantes. Algunas investigaciones en relación a ¿cómo se refleja la práctica de lo profesores en los que los estudiantes comprenden? ya se están realizando tal y como las hemos comentado anteriormente (Kendal y Stacey, 2001a, b; Weber, 2004).

Por otro lado creemos que nuestra investigación de la práctica del profesor puede aportar información para los formadores de profesores de matemáticas. Así en el diseño de programas de formación de profesores de matemáticas existe la posibilidad de utilizar las caracterizaciones de las diferentes perspectivas de la práctica.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Adler, J. (1999). The Dilemma of Transparency: Seeing and Seeing Through Talk in the Mathematics Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1), pp. 47-64.

Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, pp. 205-224.

Alesandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y Laurentiev, M. A. (1988). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad, Madrid.

Apostol, T. M. (1979). *Análisis Matemático (segunda edición)*. Reverté S.A., Barcelona.

Artaud, M. y Chevallard, Y. (2001). Le processus de regulation dans la constitution de routines professorales. En Dorier, J. L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. y Floris, R. (Eds.) *Actes de la 11e ecole déte de didactique des mathematiques* (pp. 241-247). Le Pensée Sauvage éditions, París.

Artigue, M. (2001). What Can We Learn from Educational Research at the University Level? En Holton, D. (Ed.) *The Teaching and Learning of*

Mathematics at University Level (An ICMI Study) (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Artzt, A. F. (1999). A structure to enable preservice teachers of mathematics to reflect on their teaching. *Journal Mathematics Teacher Education*, 2, pp. 143-166.

Artzt, A. F. y Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers´ instruccional practice in mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 211-235.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K.(1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En Kaput, J., Schoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mahematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education,* vol. 6 (pp. 1-32). American Mathematical Society y Mathematical Association of America, Washintong DC.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K.(1997). The Development of Students´Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), pp 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 301-317.

Aspinwall, L. y Miller, L. D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings. One teacher's reflection. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, pp. 89–107.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, Madrid.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. y Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 19(3), pp. 246-259.

Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia (La derivada, un concepto a caballo entre la Matemática y la Física)*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals. Universidad Autónoma de Barcelona.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 35, nº 5, pp. 557-578.

Barnard, T. y Tall, D. (1997). Cognitive Units, connections and mathematical proof. En Pehkonen E. (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Finland, vol 2 (pp. 41-48).
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997d-barnard-cog-units.pdf]

Berry, J. S., y Nymanb, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, pp. 481–497

Bolea, P., Bosh, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21/3, pp. 247-304.

Borko, H. y Peressini, D. (1998). Commentary on "Toward a Theory of Teaching-in-Context". *Issues in Education*, vol 4, nº 1, pp. 95-104.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 247-285.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En Rico, L. (coordinador) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.

95-124). ICE (Universidad de Barcelona)/Editorial Horsori, Barcelona.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp 221-266.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule?. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), pp. 345-364.

Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Fernández S. (2000). *Bachillerato, Matemáticas I (Andalucía)*. Anaya, Madrid.

Confrey, J. y Costa, SH. (1996). A critique of the selection of "mathematical objects" as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, pp. 139-168.

Contreras, A., Luque, L., Ordóñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (2000). Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de Bachillerato-LOGSE. En Gámez, A., Macías, C. y Suárez, C. O. (Eds.) *Actas del IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Thales" (Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio: De la abstracción a la realidad)* (pp. 113-116). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz. Cádiz.

Coob, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration With Teachers. En Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-333). Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.

Coob, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of clasroom videorecording and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, pp. 213-218.

Coriat, M. y Martínez, P. S. (1998). *Colección de Materiales Curriculares para el Bachillerato nº 22 "Matemáticas"*. Dirección General de Evaluación Educativa y Formación del Profesorado. Consejería de Educación y

Ciencia. Junta de Andalucía. [Disponible en internet: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/55341/libbac22.pdf]

Cottrill, J. (1999). *Students`Understanding of the Concept of Chain Rule in First Year Calculus and the Relation to Their Understanding of Composition of Functions*. Tesis Doctoral, Purdue University. [Disponible en internet: http://www.math.ilstu.edu/~jfcottr/thesis.pdf]

Cottril, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K, Thomas K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 pp 167-192.

Crowley, L. y Tall, D. (1999). The Roles of Cognitives Units, Connections and Procedures in Achieving Goalds in College Algebra. En Zaslavky, O. (Ed.) *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 225-232), Haifa, Israel. [Diponible en internet: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999d-crowley-pme.pdf]

DeVries, D. (2001). *Rumec/Apos Glossary.*(febrary 2001). Disponible en internet http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html

Dörfler, W. (2002). Formation of Mathematical Objects as Decision Making. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), pp. 337-350.

Dörfler, W. (2003). Mathematics and Mathematics Education: Content and People, Relation and Difference. *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 147-170.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra enviorement. En Chick H., Stacey K. Vincent J. y Vincent J (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of algebra, Proceeding of the 12th ICMI Study Conference* , Vol. 1 (pp. 221-227). University of Melbourne, Australia.

Duval, R. (1996). Quel cognif tretenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), pp. 349-380.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking* (pp 95-123). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), pp. 24-41.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Descomposition of Induction and Compactness. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, pp. 55-92.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Mathematical Association of America, Notes Series (Vol. 25), Washington, DC.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. y Zazkis R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 267-305.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza Universidad, Madrid

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of Calculus.* Springer-Verlag, New York.

Ernest, P. (1989 a). The impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En Ennest, P. (Ed.) *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249-254). Falmer Press, London.[Disponible en internet: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/impact.htm].

Ernest, P. (1989 b). The Knowledge, beliefs and attitudes of tha mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15, pp. 13-34.

Ernest, P. (1996). The Nature of Mathematics and Teaching. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, 9, *POME*, pp. 1-7. Universidad de Exeter, UK. [Disponible en internet:

http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome/pompart7.htm]

Escudero, I. (2003). *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemática. Universidad de Sevilla.

Escudero, I., y Sánchez, V. (1999 a). Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. *Quadrante. Revista teórica e de Investigaçao*, 8, pp. 85-110.

Escudero, I., y Sánchez, V. (1999 b). The relationship between profesional knowledge and teaching practice: the case of similarity. En Zaslavky O. (Ed) *Procedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 2 (pp. 305-312). Haifa, Israel.

Escudero, I., y Sánchez, V. (2002). Integration of domains of knowledge in mathematics techers´practice. En Cockburn, A. D., y Nardi, E. (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 2 (pp. 177-184). Norwich, UK.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función". Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de les Mateàtiques i de les Ciències Experimentals.Universidad Autónoma de Barcelona.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), pp. 355-368.

Even, R. y Schwarz, B. B. (2003). Implications of Competing Interpretations of Practice for Research and Theory in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, vol (54), pp. 283-313.

Fennema, E. y Loef, M. (1992). Teachers` Knowledge and Its Impact. En Grows, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and*

Learning (pp. 147-164). Macmillan Publishing, New York.

Fernández, J. A. (1981). *Lecciones de Análisis Matemático*. Editorial Tecnos, Madrid.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives, and Integrals. En Kaput, J. J., y Dubinsky, E. (Eds.) *Research Isuues in Undergraduate Mathematics Learning, preliminatry analyses and results* (pp. 31-45). Mathematical Association of America, Notes number 33,Washntong DC.

Fonseca, C., y Gascón, J. (2000). Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria. *Boletin SI-IDM*, Huelva. [Disponible en internet: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huelva/Fonseca_Gascon.doc].

Fonseca, C., y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la enseñanza secundaria. En Murillo, J., Arnal, P. M., Escolano, R., Gairín, J. M. y Blanco, L. (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 205-223). La Rioja. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràphiques. Aplicatcions a les derivades*. Tesis Doctoral, Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica.Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000 a). Representaciones Ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria. Departamento de Didáctica de la Ciencias experimentales y la Matemática de la Universidad de Barcelona. *La lettre de le preuve*, nov/dic 2000. [Disponible en internet: http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Font/Font00.pdf]

Font, V. (2000 b). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f ´(x). El caso de la función seno. *UNO, Revista de Didáctica* *de las Matemáticas*, nº 25, pp. 21-40.

Foster, P. A., y Taylor, P. C. (2003). An Investigation of Communicative Competence in an Upper-Secondary Class Where Using Graphics Calculators was Routine. *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp. 57-77.

Franzblau, D. S. y Warner, L. B. (2001). From Fibonacci Numbers to Fractals: Recursive Patterns and Subscript Notation. En Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (Eds.) *The Roles of Representation in School Mathematics*, Yearbook 2001(pp. 186-200). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Friedlander, A., y Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. En Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (Eds.) *The Roles of Representation in School Mathematics,* Yearbook 2001 (pp. 173-185). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Ganter, S. L., y Jiroutek, M. R. (2000). The Need for Evaluation in the Calculus Reform Movement. A Comparison of Two Calculus Teaching Metods. En Dubinsky E., Schoenfeld A. H., Kaput J. (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education,* vol. 8 (pp. 42-61). American Mathematical Society and Mathematical Association of America, Washntong DC.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. GIEM. Universidad de Sevilla (Ed). KRONOS S.A., Sevilla.

García, M. (1999). *El sentido numérico en Primaria: el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal*. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

García, M., y Llinares, S. (1999). Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. *Quadrante. Revista teórica e de*

Investigaçao, vol. 8, pp. 61-83.

García, M., Sánchez-Matamoros, G., y Llinares, S. (prepublicación). *La tematización del esquema derivada.*

Gascón, J. (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria (I). *Suma*, nº 44, pp. 25-34.

Giraldo, V., Carvalho, L. M. y Tall, D. (2003). Description and definition in the teaching of elementary calculus). En Pateman, N. A., Dougherty, B. J. y Zilliox, J. (Eds.), *Procedings of the 27th Conference of the Intenarional Group for te Psychology of Mathematics Education*, vol 2 (pp. 445-452). Honolulu, USA. [Disponible en internet: http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_giraldo.pdf].

Godino, J. D. (2004). *Teoría de las funciones semióticas en Didáctica de las Matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. [Disponible en internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/].

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp 325-355.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thoughy, language and context in mathematics education. En Olivier, A. y Newstead, K. (Eds.) *Procedings of the 22nd Conference of the Intenarional Group for te Psychology of Mathematics Education*, vol 3 (pp. 1-8). University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Recio, A. M., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2003). Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. Análisis didáctico mediante la Teoría de las Funciones Semióticas. *XVIII reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SIIDM, Grupo DMDC-SEIEM), Córdoba, Abril 2003. Disponible en internet, setiembre 2004, http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/.

Goldin, G. (1997). Observing Mathematical Problem Solving Through Task-based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education*, Qualitative Research Methods in Mathematics Education, Monograph Number 9, pp. 40-62.

González, P. M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Universidad. Madrid.

Golafshani, N. (2004). Teachers`Conceptions of Mathematics and their Instruccional Practices. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, 18, *POME*, pp. 1-10. Univerisdad de Exeter, UK. [Disponible en internet: http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome18/teachers_conception_nahid_golafshani.htm]

Gray, E. M. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibylity: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol 25, nº 2, pp. 116-140.
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf].

Gray, E. M., Pinto, M., Pitta, D. y Tall, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 38, pp. 111-133.
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999k-ed-dem-marcia-esm.pdf].

Grossman, P., Wilson, S., y Shulman, L. (1989). Teachers of Substance: subject Matter Knowledge for Teaching. En Reynolds M. (Ed) *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 23-36). Pergamon Press, New York.

Heinz, K., Kinzel, M., Simon, M. y Tzur R. (2000). Moving students through steps of mathematical knowing an account of the practice of an elementary mathematics teacher in transition. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, pp. 83-107.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grows, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching* *and Learning*.(pp. 65-97). Mac millan Publishing, New York.

Hillel, J. (1993). Computers Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. En Keitel, C. y Ruthven, K. (Eds.) *Learnig from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 18-47). Springer-Verlag, Berlin.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. En Janvier C. (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale:N. J.

Junta de Andalucía (1994). *Decreto 126/94 de 7 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía*. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, nº 115 de 26 de julio. [Disponible en intenet: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/55341/libbac22.pdf].

Junta de Andalucía (2002). *Decreto 208/2002 de 23 de julio, por el que se modifica el Decreto 126/1994, de 7 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía*. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, nº 97 de 2002 de 22 de julio. [Disponible en internet: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/bachillerato/nuevo_decreto.pdf].

Katz, V. (1993). *A History of Mathematics, an Introduction*. HarperCollins College Publishers, New York.

Kendal, M. y Stacey, K. (2001 a). Influences on and factors changing technology privileging. En Chick H., Stacey K. Vincent J. y Vincent J (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of algebra, Proceeding of the 12th ICMI Study Conference* , Vol. 2 (pp.360-367). University of Melbourne, Australia.

Kendal, M. y Stacey, K. (2001 b). The Impact of Teacher Privileging on Learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, nº 2, pp. 143-165.

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 137-174.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought: From ancient to modern times*. Oxford University Press, New York. [Disponible traducción al castellano: Martínez M., Tarrés J. Y Casal A. (1992).El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Universidad. Madrid].

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator*, 2(1), pp. 52–62. [Suministrado por el autor]

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones (la lógica del descubrimiento matemático)*. Alianza Universidad, Madrid.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press, New York.

Leinhardt, G. (1989). Math Lessons: a Contrast of Novice and Expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), pp. 52-57.

Leinhardt, G. y Smith, D. A. (1985). Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge. *Journal of Educational Psychology*, vol 77, nº 3, pp. 247-271.

Leinhardt, G. y Greeno, J. G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching. *Journal of Educational Psychology*, vol 78, nº 2, pp. 75-95.

Leinhardt, G, Putnam, R. T., Stein, M. K. y Baxter, J. (1991). Where subject Knowledge matters. En Brophy, J. (Ed.) *Advances in research on teaching: Teachers´ knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice*, vol 2 (pp. 87-113). JAI Press: Greenwich, CT.

Lerman, S. (1994). Changing Focus in the Mathematics Classrooom. En Lerman, S. (Ed.) *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp. 191-

213). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46, pp. 87-113.

Lerman, S. (2002). Situating Research on Mathematics Teachers`Beliefs and on Change. En Leder, G. C., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.) *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 233-243). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula, Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, vol 10, pp. 153-179 [publicado en octubre de 2001].

Llinares, S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. Características de una agenda de investigación. *Zetetike-Cempem-Fe/Unicamp*, 7(12), pp. 9-36.

Llinares, S. (2000 a). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En Ponte, J. P. y Sarrazina, L. (Eds.) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia*, *Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/ Sociedad de Educación y Matemática, Lisboa.

Llinares, S. (2000 b). Secondary School Mathematics Teacher´s Profesional Knowledge: a case from the teaching of the concept function. *Teachers and teaching: theory and practice*. Vol 6, nº 1, pp. 41- 62.

Llinares, S. (2002). La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria,* nº 19, pp. 115-124.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp 67-116). Alfar, Sevilla.

McClain, K. (2003). Supporting Preservice Teachers` Understanding of Place Value and Multidigit Arithmetic. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), pp. 281-306.

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnight M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

Meira, L. (1998). Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (29), pp. 121-142.

Monk, S. (1992). Students´ Understanding of a Function Given by a Phisical Model. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 175-194). Mathematical Association of America, Notes Series (Vol. 25), Washington, DC.

NCTM (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Virginia. [National Council of Teachers of Mathematics]

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*. Reston, Virginia. [National Council of Teachers of Mathematics]

Orton, A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 235-250.

Penglase, M. y Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematicas education: A Critical Review of Recent Research. *Mathematicas Education Research Journal*, vol 8, nº 1, pp. 58-90.

Piaget, J. (1963). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En la colección Psicología y Educación, *La enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-28). Editorial Aguilar, Madrid.

Piaget, J. y García, R. (1983/1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI editores. México.

Powell, A. B., Francisco, J. M. y Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners`mathematicals ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, pp. 405-435.

Recio, A. M. (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En Moreno, M. F., Gil, F., Socas, M y Godino J. D. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) (pp. 29-43). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería, Almería.

Rico, L. (2001). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Adenda, pp. 219-231). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, Huelva.

Sajka, M. (2003). A Secondary School Student`s Understanding of the Concept Function-A Case Study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, pp.229-254.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción de derivada (desarrollo del concepto)*.Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S.(prepublicación). *El desarrollo del esquema derivada*.

Schoenfeld, A. (1998 a). *Toward a Theory of Teaching-in-Context*. [Versión disponible en Internet: http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/TeachInContext/teaching-in-context.html].

Schoenfeld, A. (1998 b). On Modelling Teaching. *Issues in Education,* vol 4, nº 1, pp 149-162.

Schoenfeld, A. (1999). *Looking Toward the 21st Century: Challenges of Educational Theory and Practice*. [Versión disponible en Internet: http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/AERA_final.pdf]

Schoenfeld, A. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*. Borrador final, versión disponible en Internet:

http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/AHS_Notices_Purposes.pdf.. Propuesta para publicar en *Notices* of the Amarican Mathematical society.

Schoenfeld, A. (2002). A Highly Interactive Discourse Structure. *Social Constructivist Teaching*, vol. 9, pp. 131-169.Elsevier Science Ltd.

Schoenfeld, A., Minstrell, J. y Van Zee, E. (1999). The Detailed Analysis of an Established Teacher`s Non-Traditional Lesson. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), pp. 281-325.

Schwalbach, E. M., y Dosemagen, D. M. (2000). Developing Student Understanding: Contextualizing Calculus Concepts. *School Science and Mathematics,* 100(2), pp. 90–98.

Sean, M. (1994). *The mathematical career of Pierre de Fermat 1601-1665.* Princenton University Press. Princenton, New Jersey.

Selden, A. y Selden, J. (2001). Tertiary Mathematics Education Research and Its Future. En Holton D. (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level (An ICMI Study)* (pp. 237-254). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections of Processes and Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification- the case of function. En En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America, Notes Series (Vol. 25), Washington, DC.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The Gains and the pitfalls of reification- The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 191-228.

Sfard, A. (2000). Symbolizing Mathematical Reality Into Being-Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Creat Each Other. En Coob, P., Yackel, E. y McClain, K. (Eds.), *Symbolizing and*

Communicating in Mayhematics Classrooms (Perspectives On Discourse, Tools, And Instructional Design) (pp. 37-98). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: knowledge Growth in teaching. *Educational Research*, 15 (7), pp. 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a constructivist perspective *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, nº 2, pp. 114-145.

Simon, M. A. (2000). Research on the Development of Mathematics Teachers: The Teacher Development Experiment. En Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335-359). Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.

Simon, M. A. (2003). Logico-Mathematical Activity Versus Empirical Activity: Examining a Pedagogical Distintion. En Pateman, N. A., Dougherty, B. J. y Zilliox, J. (Eds.), *Procedings of the 27th Conference of the Intenarional Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 4 (pp. 183-190). Honolulu, USA,. [Disponible en internet: http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_simon.pdf]

Simon, M. A. y Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers´ Perspective From the Researchers´ Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers´ Practice. *Journal for Research in Mathematics Education* vol 30, nº 3, pp. 252-264.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. y Smith, M. S. (2000). Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 31, nº 5, pp. 579-601.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20-26.

Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers`pedagogical content Knoledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior* 20, pp. 207-227.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Grows, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). Macmillan Publishing, New York.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus, en International Handbook of Mathematics Education. En Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf].

Tall, D. (2000). *Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning)*.
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf/].

Tall, D. y Barnard, T. (2002). *Cognitive Units, Connections and Compression in Mathematical Thinking*. [Disponible en internet, http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/].

Tall, D., Thomas, M. , Davis, G.,Gray E. y Simpson, A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior* 18(2), pp. 223-241.
[Disponible en internet:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000a-objec-encap-jmb.pdf].

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. y Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between procedural and Conceptual thinking. Canadian *Journal of Science, mathematics and Technology Education*, 1, pp. 80-104. [Disponible en Internet: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation.pdf].

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos.* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Thompson, A. G. (1992). Teachers´ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grows, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Macmillan Publishing, New York.

Teppo, A. R. (1997). Diverse Ways of Knowing. *Journal for Research in Mathematics Education*, Qualitative Research Methods in Mathematics Education, Monograph Number 9, pp. 1-16.

Tzur, R, Simon, M. A., Heinz, K. y Kinzel, M. (2001). An account of a teacher´s perspective on learning and teaching mathematics: implications for teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, pp. 227-254.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case of one professor`s lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, pp. 115-133.

Wilson, M. S. y Cooney, T. J. (2002). Mathematics Teacher Change and Development. The Role of Beliefs. En Leder, G. C., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.) *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 127-147). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers`understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), pp. 540-563.

Zandieh, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student

Understanding of the Concept Derivative. En Dubinsky E., Schoenfeld A. H., Kaput J. (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education,* vol. 8 (pp. 103-127). American Mathematical Society and Mathematical Association of America, Washintong DC.

Sevilla, 2009