Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o*21(2002), 89–115*

Sistemas dinámicos estocásticos no autónomos y sistemas multivaluados

J. A. Langa Rosado

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico,
Universidad de Sevilla

langa@numer.us.es

Resumen

Uno de los conceptos más importantes para la descripción del comportamiento asintótico de ecuaciones en derivadas parciales de evolución disipativas es el de atractor global. Presentamos los trabajos realizados en esta línea para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas (presencia de ruidos en alguno de los términos), para inclusiones diferenciales (es decir, en donde la variación de la variable incógnita no verifica una determinada expresión, sino un conjunto de expresiones), para ecuaciones con retardo (modelos que tienen en cuenta en cada instante parte de la dinámica pasada) y para ecuaciones en derivadas parciales no autónomas (es decir, donde los términos que afectan a la incógnita son dependientes del tiempo). Esta diversidad de situaciones nos ha obligado a adentrarnos en disciplinas a veces muy distintas del Análisis Funcional, las funciones multivaluadas o los procesos estocásticos, o teorías como la de la medida o la de la dimensión de conjuntos. En una cantidad importante de los trabajos que resumimos hay una idea motor de fondo que recorre todos ellos: el hecho de poder describir la dinámica infinito dimensional propia de estos modelos con sólo una cantidad finita de grados de libertad.

Palabras clave: *Sistemas dinámicos estocásticos, atractores aleatorios, iclusiones diferenciales*
Clasificación por materias AMS: *60H15, 37L30, 37B55, 49K20*

1 Introducción

1.1 Teoría de atractores globales

No cabe duda de la fuerza y aptitud que las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) tienen a la hora de modelizar fenómenos de distintas disciplinas

Fecha de recepción: 9 de abril de 2002

científicas como la Física, la Química, la Biología, la Economía, la Ingeniería, etc.

Podemos expresar, de manera general, una ecuación en derivadas parciales de evolución autónoma como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & F(u), \quad t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n \\ u(0,x) & = & u_0(x), \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $u = u(t,x)$ es la función a determinar que representa cierta propiedad de determinado fenómeno natural y F indica el conjunto de transformaciones, en general no lineales, que manifiestan la manera en que u cambia cuando el tiempo evoluciona.

Cuando un comportamiento del mundo real puede ser descrito mediante un buen modelo a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales, en cierto modo hemos sabido desentrañar las propiedades que describen la dinámica del fenómeno estudiado a partir de un conjunto de ideas e instrumentos matemáticos. Pero el objeto del modelado no es sólo entender el fenómeno, sino mucho más importante, predecir el comportamiento futuro del mismo. En este sentido, una de las preguntas básicas para cualquier modelo en EDPs es aquélla acerca de su comportamiento asintótico, esto es, cuando el tiempo crece y tiende a infinito.

Es común por otra parte que, debido por ejemplo a la fricción, muchos de estos sistemas tengan la propiedad de "perder energía"; desde un punto de vista matemático esta propiedad conduce al concepto de *disipación*. Es decir, las soluciones del sistema permanencen en un acotado fijo para tiempos grandes. En este sentido, todo el comportamiento asintótico de las soluciones se da en un conjunto acotado del *espacio de fases* H ($L^2(\Omega)$, por ejemplo) en donde evolucionan las soluciones, lo que supone una simplificación interesante en la dinámica del modelo (ver Figura 1). Sin embargo, aún este conjunto puede ser significativamente grande.

Hace ya más de tres décadas el concepto de *atractor global* fue introducido para explicar con más precisión el comportamiento asintótico de los sistemas disipativos. Desde entonces, podemos contar por miles los trabajos de investigación que se han centrado en este concepto y variantes del mismo, dando lugar a verdaderas nuevas ramas de la teoría de Sistemas Dinámicos (ver los trabajos de Hale [41], Temam [62], Babin y Vishik [4], Vishik [64], Ladyzhenskaya [44], Robinson [57]).

Dada una solución de un sistema de EDPs autónomo para el cual suponemos existencia y unicidad de soluciones, definimos el correspondiente semigrupo $S(t) : H \to H$, mediante la igualdad $S(t)u_0 = u(t; u_0)$, donde $u(t; u_0)$ es la solución de (1) en el tiempo t que estaba en u_0 para $t = 0$. Un atractor global $\mathcal{A}$ es un conjunto compacto del espacio de fases H, invariante para el semigrupo, i.e. verificando $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y que atrae de manera uniforme a todos los acotados $D \subset H$, es decir,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(S(t)D, \mathcal{A}) = 0,$$

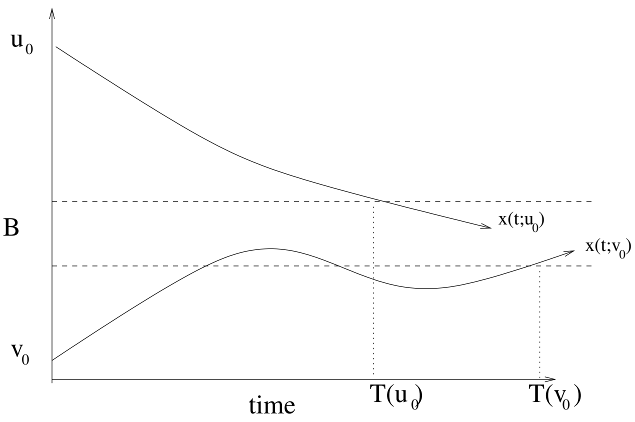

Figura 1: *Conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}$ que absorbe soluciones del sistema (1) que comienzan en u_0, v_0.*

con 'dist' la semidistancia de Hausdorff. Cuando determinamos un atractor global para un sistema, estamos precisando dónde se da la dinámica asintótica del mismo, prediciendo así el futuro de los fenómenos asociados.

1.2 Dimensión del atractor global

Sin duda, una de las propiedades más interesantes de los atractores globales para EDPs es que, en muchos casos interesantes (por ejemplo para las ecuaciones de Navier-Stokes), se trata de conjuntos de dimensión fractal (y, por tanto, de dimensión de Hausdorff) finita, es decir,

$$d_f(\mathcal{A}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{log(N_\varepsilon(\mathcal{A}))}{log(1/\varepsilon)} < +\infty.$$

Aquí, $N_\varepsilon(\mathcal{A})$ indica el mínimo número de bolas de radio ε necesarias para recubrir $\mathcal{A}$. Esto significa que, aunque el espacio de fases es un espacio infinito-dimensional, lo que determina el comportamiento asintótico es un conjunto, de extremada complejidad geométrica en algunas ocasiones, pero que puede ser descrito a partir de un número finito de variables. La pregunta que hace ya décadas importantes investigadores se hicieron fue la siguiente: ¿Es cierto que para tiempos grandes los sistemas dinámicos disipativos e infinito-dimensionales tienen únicamente una cantidad finita de grados de libertad? O, mucho mejor, ¿existirán ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que describan el comportamiento asintótico de las EDPs disipativas? Estas preguntas han conducido, bajo mi punto de vista, a los resultados más bellos e interesantes en la teoría de sistemas dinámicos en dimensión infinita (ver Foias et al. [38], Robinson [57], Eden et al. [32]). Por otra parte, han motivado buena parte de nuestra investigación hasta el momento.

El interés que posee la descripción con un número finito de grados de libertad la dinámica asintótica de un sistema dado tiene una clara motivación: la posibilidad de usar técnicas y razonamientos propios de las EDOs para el tratamiento de EDPs.

2 Atractores aleatorios

2.1 El concepto de sistema dinámico

Consideremos la siguiente EDPs estocástica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & F(u) + g(u)\dfrac{dW_t}{dt}, \quad t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) & = & u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

donde $\frac{dW_t}{dt}$ es la *derivada* temporal de un proceso de Wiener W_t definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $g(u) \equiv Cte.$ ó $g(u) \equiv u$ (es decir, estamos en los casos de ruido aditivo o ruido lineal multiplicativo).

Hasta hace pocos años no existían herramientas apropiadas para describir el comportamiento asintótico de EDPs estocásticas en el espacio de fases, es decir, en analogía a lo que ya era bien conocido en el caso determinista. Conceptos como medidas invariantes o atractores de probabilidad eran usados con más o menos éxito (Schmalfuss [60], Morimoto [54]). Por otro lado, en los años ochenta fue desarrollada la teoría de *flujos estocásticos* (Elworthy [33]), que dio lugar en los noventa a la de *sistemas dinámicos aleatorios* (Arnold [1]).

2.2 Nuevos conceptos para el análisis asintótico en tiempo

No fue hasta 1994 cuando se dispuso del marco necesario para poder introducir el concepto de *atractor aleatorio* para ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas (véase Crauel y Flandoli [28]; véase también un resumen sobre esta teoría en Caraballo y Langa [15]). Ni siquiera el marco conceptual estaba desarrollado; por otra parte, para generalizar a esta situación el concepto de atractor global determinista hay grandes dificultades. Por un lado, una ecuación diferencial estocástica puede, en ciertas circunstancias, ser interpretada como una ecuación perturbada con términos no autónomos (esto hace necesario definir, en vez de un semigrupo de operadores, una familia biparamétrica de operadores $S(t,s) : H \to H, t \geq s$). Por otro lado, la presencia de términos estocásticos (procesos de Wiener en sentido de Ito o de Stratonovich) hace necesario en realidad trabajar con procesos tri-paramétricos $S(t,s,\omega) : H \to H$, donde $\omega \in \Omega$ y $(\Omega, P, \mathcal{F})$, es el espacio de probabilidad asociado. De hecho, existe un grupo de transformaciones $\{\theta_t : \Omega \to \Omega,\ t \in \mathbb{R}\}$ tal que $(t,\omega) \mapsto \theta_t\omega$ es medible, $\theta_0 = \text{id}$, $\theta_{t+s} = \theta_t\theta_s$ y $S(t,s,\omega) = S(t-s, 0, \theta_s\omega)$, para $s,t \in \mathbb{R}$ (ver Crauel et al. [27]).

La familia de operadores $S(t,s,\omega)$ se denomina *sistema dinámico aleatorio* (SDA).

Una nueva dificultad se añade: los sistemas dejan de ser disipativos, en el sentido de que, debido a las fuertes fluctuaciones provocadas por los términos estocásticos, cabe esperar que la evolución de cualquier solución del sistema se salga de todo conjunto acotado del espacio de fases. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, el efecto disipativo ejercido por los términos de difusión permanece presente, aunque más débilmente, como se pone de manifiesto, por ejemplo, en Caraballo et al. [21]. En Crauel y Flandoli [28] se propone la siguiente definición del concepto de atractor global estocástico:

Definición 1 *Un conjunto aleatorio $\mathcal{A}(\omega)$ ($\mathcal{A} : \Omega \to \mathcal{P}(H)$, $\mathcal{P}(H)$ es el conjunto de las partes de H) es el atractor aleatorio asociado al SDA S si se tiene $P-$c.s. lo siguiente:*

i) $\mathcal{A}(\omega)$ *es un conjunto aleatorio compacto; es decir,* $\mathcal{A}(\omega)$ *es compacto y para todo* $x \in H$ *la aplicación* $\omega \mapsto dist(x, \mathcal{A}(\omega))$ *es medible,*

ii) $S(t,s,\omega)\mathcal{A}(\theta_s\omega) = \mathcal{A}(\theta_t\omega)\ \forall t \geq 0$ *(invarianza) y*

iii) para todo $B \subset X$ *acotado*

$$\lim_{s\to+\infty} dist(S(0,-s,\omega)B, \mathcal{A}(\omega)) = 0 \quad \text{(propiedad de atracción “pullback”).}$$

Nota: Para cada $x \in B$, $S(0,-s,\omega)x$ puede interpretarse como la posición en el tiempo final (el *presente*) $t = 0$ de la trayectoria que estaba en x en el instante inicial $-s$ (el *pasado*). Así, la propiedad de atracción se da en relación al comportamiento asintótico de los tiempos iniciales (en el pasado), fijando el tiempo final. Observemos que esta interpretación también es válida para atractores globales clásicos.

El resultado general sobre existencia de atractores aleatorios es el siguiente, debido a Crauel y Flandoli ([28], Teorema 3.11). Se trata de una generalización de los resultados clásicos de existencia de atractor global en el caso determinista autónomo:

“Supongamos que existe $D(\omega)$ absorbente y compacto, es decir, tal que para todo acotado $B \subset X$ existe un tiempo $T(B,\omega)$ verificando $S(0,-s,\omega)B \subset D(\omega)$ para todo $s \geq T(B,\omega)$. Entonces existe un único atractor aleatorio para el SDA $S(t,s,\omega)$.”

El mismo concepto de atractor es válido para EDPs no autónomas

$$\frac{\partial}{\partial t} = F(t,u),$$

donde F es, en general, no acotada (Kloeden y Schmalfuss [43]). En efecto, en este caso definimos una familia biparamétrica de *procesos* (Sell [61]) $S(t,s)$. Diremos que la familia de conjuntos compactos $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ es el *atractor (global) no autónomo* asociado a S si es invariante, es decir,

$$S(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t), \text{ para todo } t \geq s,$$

y atrae a todos los conjuntos acotados $B \subset H$, esto es

$$\lim_{s\to+\infty} \text{dist}(S(t,-s)B, \mathcal{A}(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observamos en las Figuras 2 y 3 que los conceptos de invarianza y atracción difieren bastante de los conceptos clásicos para atractores globales de EDPs deterministas y autónomas.

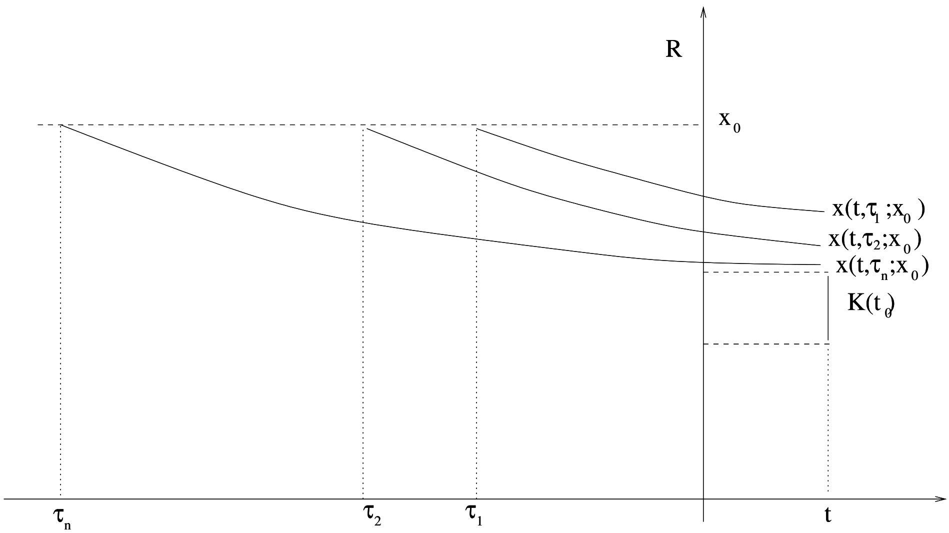

Figura 2: *Atracción "pullback" hacia el conjunto $K(t_0)$ de las trayectorias que comienzan en el punto x_0 en una sucesión de instantes iniciales $\{\tau_n\}$ que tiende a $-\infty$.*

Chepyzhov y Vishik [24] definieron, con otra terminología, un concepto similar de atractor para EDPs no autónomas disipativas.

Para una ecuación a la vez no autónoma -en términos deterministas- y estocástica, es posible definir el marco de sistema dinámico y el concepto de atractor no autónomo y aleatorio $\{A(t,\omega)\}_{t\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ tal y como aparece en Caraballo y Langa [14].

3 Los resultados sobre semicontinuidad superior

La primera observación que hemos indicado a partir de las definiciones anteriores es que el concepto de atractor difiere sustantivamente del de atractor global para EDPs deterministas y autónomas. En efecto, permitir que la ecuación posea una propiedad de disipatividad sólo si la analizamos asintóticamente respecto de los tiempos iniciales ha hecho que, por un lado, la propiedad de invarianza sea posible si consideramos una familia de compactos que, en general, no tiene por qué estar acotada; por otro lado, también ha hecho que la propiedad de atracción tenga que ser definida con referencia a tiempos iniciales y para tiempos finales fijos. Además, como mencionamos anteriormente, otros conceptos de conjuntos atrayentes para estas ecuaciones habían sido previamente introducidos en la

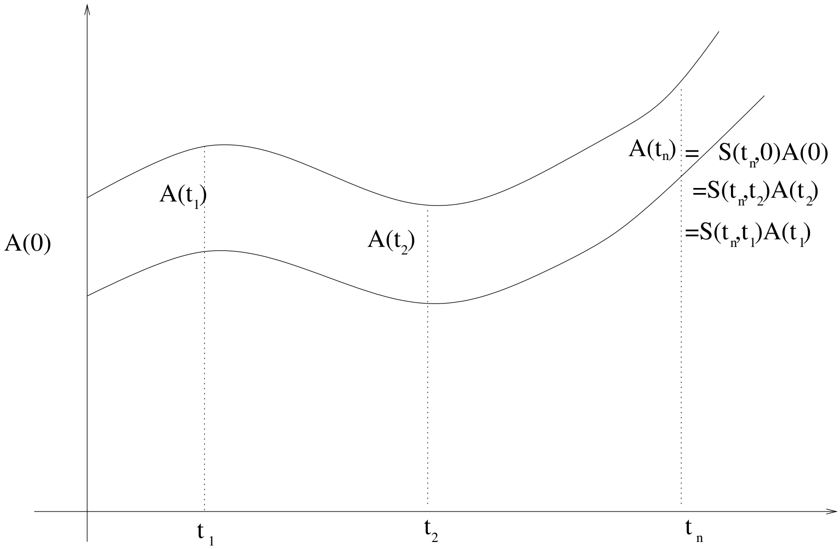

Figura 3: *Propiedad de invarianza del atractor no autónomo* $\mathcal{A}(t)$.

literatura.

Por todo ello, lo primero que quisimos investigar era si las definiciones anteriores eran apropiadas en el sentido de, en el caso de interpretar las ecuaciones estocásticas y/o no autónomas como pequeñas perturbaciones de EDPs disipativas, deterministas y autónomas, era posible obtener resultados de perturbación y convergencia para los atractores asociados. En efecto, en Caraballo et al. [6] y Caraballo y Langa [14] pudimos establecer resultados generales que garantizaban lo siguiente:

Supongamos que tenemos un semigrupo de operadores asociado a una EDP determinista y autónoma $S_0 : \mathbb{R}_+ \times H \to H$ en las condiciones de existencia de atractor global $\mathcal{A}$. Perturbemos el sistema mediante términos no autónomos y estocásticos dependientes de un pequeño parámetro $\sigma \in (0, 1]$, de manera que obtengamos familias de procesos

$$S_\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times H \to H$$

para los que suponemos que existen conjuntos absorbentes compactos $K_\sigma(t, \omega)$ y, por consiguiente, atractores aleatorios $\mathcal{A}_\sigma(t, \omega)$. Supongamos que se verifica:

$(H1)$ Para todo $\omega \in \Omega$ y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{dist}(S_\sigma(t, 0, \omega)x, S_0(t)x) \to 0, \text{ cuando } \sigma \searrow 0$$

uniformemente en los acotados de H.

$(H2)$ Existe un compacto $K \subset H$ tal que

$$\lim_{\sigma \searrow 0} \operatorname{dist}(K_\sigma(t,\omega), K) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces se tiene el siguiente

Teorema 1 *Bajo las condiciones* $(H1)$ *y* $(H2)$

$$\lim_{\sigma \searrow 0} dist(\mathcal{A}_\sigma(t,\omega), \mathcal{A}) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, este resultado garantiza que el concepto de atractor no autónomo y aleatorio es la "buena"generalización para el estudio de propiedades asintóticas de este tipo de EDPs.

Este resultado es de carácter general, y pudo ser aplicado a distintos modelos, como las ecuaciones estocásticas bidimensionales de Navier-Stokes, ecuaciones de reacción-difusión (Caraballo et al. [6]), y ecuaciones diferenciales no autónomas y estocásticas del tipo $du = f(t,u)\,dt + u\,dW_t$ (Caraballo y Langa [14]).

4 Comportamiento asintótico finito-dimensional

4.1 El caso estocástico

Anteriormente nos referimos a que una de las propiedades más interesantes de la teoría de atractores globales era que, en muchos casos, se trataba de conjuntos compactos finito-dimensionales. En el caso estocástico, los mejores resultados acerca de la dimensión finita de atractores aleatorios aparecen en Debussche [31] (ver Flandoli y Langa [34] y Langa [52] para su aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes). En estos trabajos se muestra que, para cada $\omega \in \Omega$, el atractor $\mathcal{A}(\omega)$ posee dimensión fractal finita, siendo ésta uniforme para todos los $\omega \in \Omega$. Por otro lado, puede ocurrir que $\cup_{\omega\in\Omega}\mathcal{A}(\omega)$ sea un conjunto no acotado y, además, que $\dim(\cup_{\omega\in\Omega}\mathcal{A}(\omega)) = +\infty$, donde 'dim' señala la dimensión de Hausdorff o dimensión fractal del conjunto. Es decir, la descripción global del comportamiento asintótico del sistema se hace sobre un conjunto no acotado e infinito-dimensional.

Por otro lado, sí es posible dar resultados que relacionan de manera precisa la dinámica asintótica de los sistemas con la dinámica que podemos observar en los atractores. En efecto, tanto para atractores globales deterministas (Langa y Robinson [46], Langa [48]) como para atractores aleatorios (Caraballo y Langa [7]), es posible demostrar que, para cualquier trayectoria del sistema, existe una sucesión de trayectorias en el atractor que describen la dinámica de la misma con una precisión tan certera como deseemos:

Proposición 2 *Supongamos que el proceso* $S(t,s)$ *satisface, para* $L > 0$, $u_1, u_2 \in H$,

$$|S(t,s)u_1 - S(t,s)u_2| \leq \exp(L(t-s))|u_1 - u_2|. \tag{3}$$

Sean $u_0 \in H$ y $\{\varepsilon_n\}$, $\{T_n\}$ sucesiones positivas con $\varepsilon_n \searrow 0$ y $T_{n+1} - T_n \nearrow +\infty$. Entonces existen unos v_n con $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $v_n \in \mathcal{A}(T_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no creciente, tales que,

$$\sup_{s\leq\tau_n;\ 0\leq t\leq T_{n+1}-T_n} |S(T_n + t, s)u_0 - S(T_n + t, T_n)v_n| \leq \varepsilon_n.$$

Además, los "saltos" entre dos trayectorias consecutivas verifican

$$\lim_{n\to\infty} |S(T_{n+1}, T_n)v_n - v_{n+1}| = 0. \tag{4}$$

Por tanto, la pregunta que surge a partir de estos resultados y los de Debussche antes citados es ésta: ¿Pueden dar los atractores aleatorios alguna información sobre la dependencia de un número finito de parámetros del comportamiento asintótico de los sistemas estocásticos? El resultado principal en este contexto, con respuesta afirmativa, aparece en Flandoli y Langa [34] y ha influido en varios trabajos posteriores (Chueshov [25], Chueshov et al. [26], Flandoli y Berselli [5]).

Para ello tuvimos que generalizar al caso estocástico la *propiedad de aplastamiento* (la "squeezing property"), de gran utilidad en el caso determinista (ver Robinson [57]). Consideremos un proyector ortogonal $P_N \equiv P$ de H sobre el subespacio finito-dimensional PH (N denota la dimensión de P). Sea $Q : H \to QH$ el proyector asociado sobre su complemento ortogonal QH, i.e. $Q = I - P$. En las aplicaciones, P denota el proyector ortogonal sobre las N autofunciones de cierto operador lineal (el Laplaciano, por ejemplo). Supongamos (propiedad de aplastamiento) que, asociado al sistema dinámico aleatorio $S(t, s, \omega)$ y al par (P, Q), existen $\delta \in (0, 1)$ y una variable aleatoria $c(\omega)$ de esperanza finita tales que, o bien

$$|Q(S(1, 0, \omega)u - S(1, 0, \omega)v)| \leq |P(S(1, 0, \omega)u - S(1, 0, \omega)v)|,$$

o bien

$$|S(1, 0, \omega)u - S(1, 0, \omega)v| \leq \exp(\int_0^1 c(\theta_s\omega)\, ds)|u - v|,$$

para todo $u, v \in K(\omega)$, con $K(\omega)$ un conjunto absorbente y compacto arbitrario.

Teorema 3 *En estas condiciones, si para $k > 0$,*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{kt}|P(S(t, 0, \omega)u - S(t, 0, \omega)v)| = 0,$$

entonces

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(k-E(c(\omega)))t}|S(t, 0, \omega)u - S(t, 0, \omega)v| = 0.$$

Obsérvese que la propiedad sobre modos determinantes se da tomando límites cuando el tiempo crece hacia $+\infty$, que los datos iniciales han de estar en el conjunto absorbente $K(\omega)$ y que sólo se verifica si suponemos una convergencia exponencial a cero de los primeros modos asociados a las soluciones.

4.2 Modos determinantes para tiempos finales fijos

Como hemos indicado, el resultado precedente dio lugar a otros que han tratado de generalizarlo. En particular, los resultados sobre modos determinantes fueron ampliados al caso de proyecciones determinantes en Berselli y Flandoli [5], Chueshov [25], o Chueshov et al. [26], donde además se trataron de eliminar algunas de las hipótesis particulares que indicamos en el último párrafo de la sección anterior. Sin embargo, en todos estos trabajos quedó abierto el caso de la determinación finita del número de grados de libertad en el sentido “pullback”. En Langa [52] aparece este caso resuelto. También ha sido posible eliminar en [52] todas las restricciones que aparecen en trabajos precedentes, en particular la hipótesis acerca de la convergencia exponencial de los primeros modos o de la necesidad de tomar los datos iniciales en el conjunto absorbente. Las ecuaciones estocásticas bidimensionales de Navier-Stokes sirven de modelo para ilustrar estos resultados.

En el caso de una EDP no autónoma y determinista, el concepto de atractor que hemos introducido es más débil aún que el de atractor aleatorio. Esto se debe a que, para un proceso de Wiener, las propiedades de ergodicidad y crecimiento sublineal hacen posible cierto control y homogeneidad en el comportamiento asintótico de las trayectorias. Por ejemplo, la propiedad de atracción de los atractores aleatorios para tiempos iniciales implica una atracción (en probabilidad) “hacia adelante en el tiempo”, i.e. para $t \to +\infty$ en $S(t, s, \omega)$ (Crauel y Flandoli [28]). Sin embargo, términos no autónomos, que no procedan de otros estocásticos, pueden hacer que la ecuación tenga un comportamiento asintótico para los tiempos iniciales que no tenga relación alguna para el comportamiento para $t \to +\infty$. En Caraballo et al. [20] pudimos establecer, creemos que por primera vez en la literatura, un resultado de carácter general sobre la dimensión finita de atractores no autónomos para un caso donde la teoría de Chepyzhov y Vishik [24] no podía ser aplicada.

Más precisamente, supongamos que existen $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ compacto, absorbente y positivamente invariante, es decir, tal que $S(t, s)K(s) \subseteq K(t)$ para $t \geq s$, y existen $k_0, k_1, \theta > 0$ tales que

$$|K(t)|^+ \leq k_0 \, |t|^\theta + k_1, \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

donde $|K(t)|^+ = \sup_{y\in K(t)} |y|$.

Supongamos que para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $\delta(t) \in (0, 1)$ tal que para $u, v \in K(\tau), \tau \leq t - 1$,

$$|Q(S(\tau + 1, \tau)u - S(\tau + 1, \tau)v)| \leq \delta(t) \, |u - v|. \tag{6}$$

Teorema 4 *En estas condiciones, la dimensión fractal de $\mathcal{A}(t)$ es finita para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Resulta natural plantear a continuación la siguiente pregunta: ¿Podemos, a pesar de la débil propiedad de atracción debida a la escasa disipatividad del sistema, concluir resultados sobre modos determinantes en el sentido de Foias y Prodi en [36]? La respuesta, afirmativa, aparece en el siguiente resultado (cf. Langa [48]):

Teorema 5 *Consideremos* $\alpha^1, \alpha^2 : \mathbb{R} \to H$ *tales que* $\alpha^i(t)$ $(\equiv \alpha^i_t) \in K(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Entonces, si existe* $\beta \geq 0$ *para el cual*

$$\lim_{s\to-\infty} |P(S(t,s)\alpha^1_s - S(t,s)\alpha^2_s)| \leq \beta, \tag{7}$$

también se tiene

$$\lim_{s\to-\infty} |S(t,s)\alpha^1_s - S(t,s)\alpha^2_s| \leq \beta. \tag{8}$$

Fijémonos que este resultado muestra que el comportamiento asintótico (respecto a los tiempos iniciales) depende de un número finito de parámetros.

5 Sobre una conjetura de Foias y Temam

En 1984 Foias y Temam ([37]) enunciaron una conjetura en relación a la parametrización del atractor global para las ecuaciones de Navier-Stokes a partir de un número finito de elementos en el dominio espacial. La conjetura ha sido resuelta recientemente por Friz y Robinson [39] para el caso determinista autónomo. En Langa y Robinson [47] pudimos extender los resultados al caso de los atractores para las siguientes ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes no autónomas:

$$\begin{cases} dX = [\nu\Delta X - \langle X, \nabla\rangle X + f(t) + \nabla p]dt + g(t,X)dW(t) \\ divX \ = 0 \ \text{ en } \ [0,\infty) \times D, \\ X = 0 \ \text{ sobre } \ [0,\infty) \times \Gamma, \\ X(0,x) = X_0(x), \ \ x \in D, \end{cases}$$

donde $f \in C^0_b(\mathbb{R}^+, H)$, es decir, f es continua y acotada. El resultado es el siguiente:

Teorema 6 *Supongamos que las soluciones en el atractor no autónomo* $\mathcal{A}(t)$ *son uniformemente acotadas en el conjunto de funciones analíticas. Entonces, para* $k > 0$ *suficientemente grande, casi cualquier elección de* k *puntos* $(x_1, \ldots, x_k)$ *en el dominio* $D \subset \mathbb{R}^m$ *en el que toman valores las soluciones hace inyectiva a la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} E & : & H \to \mathbb{R}^{nk} \\ u & \mapsto & (u(x_1), \ldots, u(x_k)) \end{array}$$

en $\cup_{t\in\mathbb{R}} A(t)$. *Además, para cada* $I \subset R$ *compacto esta aplicación es un homeomorfismo (y, por tanto, proporciona una parametrización) de* $\cup_{t\in I} A(t)$ *en su imagen.*

A partir de este teorema, que también puede ser probado en el caso de atractores aleatorios (ver [47]), los resultados clásicos sobre nodos determinantes (Foias y Temam [37]) son ahora sólo un corolario.

Dicho resultado, para el caso de atractores aleatorios, ha sido también utilizado en Langa [52] para mejorar los resultados sobre modos determinantes "desde $-\infty$".

6 Ito versus Stratonovich en el análisis de la estabilidad de EDPs estocásticas

Existe un gran cantidad de trabajos en torno a la teoría de estabilidad de EDPs estocásticas. En ellos podemos hacer una clara clasificación entre aquellos resultados "en primera aproximación", es decir, aquéllos para los que, dada una EDP determinista, se caracterizan las perturbaciones con términos estocásticos que mantienen la estabilidad del sistema; y, por otro lado, resultados de estabilización mediante ruidos de EDPs deterministas.

En Caraballo y Langa [8] se hace un estudio acerca de la estabilización por ruidos de tipo Ito y Stratonovich para EDPs estocásticas.

Consideremos el problema de Cauchy asociado a una ecuación de evolución lineal

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \tag{9}$$

Consideremos a continuación las ecuaciones estocásticas asociadas a (9), con las dos posibles interpretaciones de la integral, de tipos Stratonovich e Ito respectivamente:

$$\begin{cases} du(t) = Au(t)dt + Bu(t) \circ dW_t \\ \qquad u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} du(t) = Au(t)dt + Bu(t)dW_t \\ \qquad u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{11}$$

donde de nuevo B es un operador lineal que conmuta con A.

La conclusión del análisis realizado en [8] es la siguiente: hay estabilización de EDPs deterministas cuando las ecuaciones se intrepretan en el sentido de la integral de Ito, pero no en general cuando la integral considerada es de tipo Stratonovich. Observemos que hay una amplia literatura, no sólo en Matemáticas, sino también, por ejemplo, en Física, acerca de la conveniencia de elección de una u otra integral estocástica. En el estudio antes citado intentamos escribir una serie de resultados que arrojaran cierta luz sobre esta cuestión. En realidad, a partir de la integral de Ito podemos escribir resultados de estabilización del correspondiente modelo determinista, de desestabilización, o simplemente de equivalencia respecto al comportamiento asintótico entre ambas.

Un siguiente paso en esta línea de la teoría de la estabilidad para EDPs estocásticas fue enfrentarnos a las ecuaciones de Navier-Stokes. En efecto, en Caraballo et al. [16] tratamos diversos aspectos en relación a la estabilidad de las siguientes ecuaciones bidimensionales de tipo Navier-Stokes

$$\begin{cases} dX = [\nu\Delta X - \langle X, \nabla\rangle X + f(X) + \nabla p]dt + g(t,X)dW(t) \\ divX \ = 0 \ \text{ en } \ [0,\infty) \times D, \\ X = 0 \ \text{ sobre } \ [0,\infty) \times \Gamma, \\ X(0,x) = X_0(x), \ \ x \in D, \end{cases}$$

con D dominio de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ y $g(t,x)dW(t)$ el término estocástico, con $W(t)$ un proceso de Wiener infinito-dimensional. Este modelo puede ser reescrito en versión abstracta, con una adecuada elección de espacios y operadores (cf. Caraballo et al. [16] para los detalles y notación) de la siguiente forma:

$$dX(t) = [-\nu AX(t) - B(X(t)) + f(X(t))]\,dt + g(t,X(t))dw(t), \qquad (12)$$

donde $f : V \to V'$, $g : [0,\infty) \times V \to \mathcal{L}(K,H)$ son funciones continuas que verifican condiciones adicionales, siendo H la adherencia de $\left\{u \in C_0^\infty(D,\mathbb{R}^2) : div\ u = 0\right\}$ en $L^2(D,\mathbb{R}^2)$ con la norma L^2 habitual y V la adherencia de $\left\{u \in C_0^\infty(D,\mathbb{R}^2) : div\ u = 0\right\}$ en $H^1(D,\mathbb{R}^2)$ con la norma H^1 habitual. V' es el dual de V. También consideramos la versión determinista de este problema,

$$dX(t) = [-\nu AX(t) - B(X(t)) + f(X(t))]\,dt. \qquad (13)$$

Tras dar la definición de solución variacional, efectuamos un estudio sobre la estabilidad exponencial de las soluciones de (12). Por ejemplo, probamos el siguiente resultado:

Teorema 7 *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

Condición A: *Existe $\eta > 0$ tal que*

$$\| f(u) - f(v) \|_{V'} \leq \eta \| u - v \|, u, v \in V;$$

Condición B: *La función g satisface $\| g(t,u) \|_2^2 \leq \gamma(t) + (\xi + \delta(t)) \mid u - u_\infty \mid^2$, donde $\xi > 0$ es una constante y γ* y *δ son funciones integrables no negativas tales que existen $\theta > 0$,y M_γ, $M_\delta \geq 1$, con*

$$\gamma(t) \leq M_\gamma e^{-\theta t}, \quad \delta(t) \leq M_\delta e^{-\theta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

y $u_\infty \in V$ es la única solución estacionaria de la ecuación (13) (lo cual es cierto para valores grandes de la viscosidad ν). Supongamos además que

$$2\nu > \lambda_1^{-1}\xi + 2\eta + \frac{2c_1}{\sqrt{\lambda_1}} \| u_\infty \| .$$

Entonces cualquier solución X de (12) converge a la solución estacionaria u_∞ exponencialmente en media cuadrática. Es decir, existen $a \in (0,\theta)$ y *$M_0 = M_0(X(0)) > 0$ tales que*

$$E \mid X(t) - u_\infty \mid^2 \leq M_0 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

De hecho, también se puede probar que la convergencia se verifica $P - c.s.$

A continuación, abordamos el problema de la estabilización mediante ruidos, así como una amplia discusión acerca de la estabilización en sentido Ito y Stratonovich.

7 Sistemas dinámicos aleatorios multivaluados

7.1 Flujo estocástico multivaluado

Hace unos años pudimos contribuir al desarrollo de una teoría en la que aún hoy continuamos trabajando con asiduidad. La cuestión que nos planteamos inicialmente fue la siguiente: ¿cuál es el concepto de atractor global apropiado para modelos estocásticos con funciones multivaluadas? Consideremos la siguiente inclusión diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} \in Au(t) + F(u(t)) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \phi_i \frac{dW_i(t)}{dt}, \; t \in (0,T), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{14}$$

con $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal m-disipativo de dominio $D(A)$, los $\phi_i \in D(A)$ y los $W_i(t)$ procesos de Wiener independientes.

Se supone que $F : H \to C_v(H)$ es multivaluada, con $C_v(H)$ la familia de subconjuntos de H no vacíos, convexos, cerrados y acotados, con

$$\mathrm{dist}_H(F(y_1), F(y_2)) \leq C \|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in H,$$

donde $dist_H(\cdot,\cdot)$ denota la métrica de Hausdorff sobre conjuntos acotados, i.e.

$$\mathrm{dist}_H(A,B) = \mathrm{máx}\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(B,A)\}.$$

El problema, sin embargo, requería de un paso previo para el que no existían resultados conocidos en la literatura: ¿cómo definir un flujo, i.e., un sistema dinámico, estocástico multivaluado? Partiendo de la teoría de sistemas dinámicos aleatorios en Arnold [1] y de la de flujos (deterministas) multivaluados en Melnik y Valero [53], pudimos dar la siguiente definición:

Definición 2 *Una aplicación multivaluada $G : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to C(H)$ ($C(H)$ denota la familia de los conjuntos cerrados de H) se denomina sistema dinámico aleatorio multivaluado si es medible (en el sentido de Aubin y Frankowska [3]) y satisface*

i) $G(0,\omega) = Id$ *en* H;

ii) $G(t+s,\omega)x = G(t,\theta_s\omega)G(s,\omega)x \quad \forall\ t,s \in \mathbb{R}^+, x \in X,\ \mathbb{P} - c.s.$ (propiedad del cociclo)

En las aplicaciones, es concretamente la medibilidad de esta aplicación lo que resulta difícil de probar. En efecto, no es en absoluto inmediato que diversos modelos estocásticos multivaluados definan un sistema dinámico con estas propiedades. No obstante, pudimos probar en Caraballo et al. [9] que la inclusión diferencial (14) genera un flujo estocástico multivaluado, y que lo mismo le ocurre cuando el ruido es de tipo multiplicativo (Caraballo et al. [10]). Además, quedó probada la equivalencia entre los flujos estocásticos multivaluados así definidos y las correspondientes soluciones para este tipo de modelos que ya eran previamente conocidas en la literatura (ver Caraballo et al. [22]).

7.2 Atractores globales aleatorios

De esta manera, es posible describir el marco donde la teoría de atractores para este tipo de problemas va a ser desarrollada. En efecto, en los trabajos anteriormente citados, basados en la definición de atractor aleatorio para el caso univaluado, desarrollamos la teoría análoga para EDP, ahora en el caso de la inclusiones diferenciales en dimensión infinita. En particular, ilustramos los resultados a partir de diferentes inclusiones diferenciales del tipo (14). Las dificultades técnicas y conceptos distintos a los que hay que hacer frente en este contexto hacen que los trabajos anteriores requieran una cierta complicación técnica.

Finalmente, en Caraballo et al. [12] demostramos diversos resultados de semicontinuidad superior de los atractores para inclusiones estocásticas al atractor proveniente de inclusiones deterministas, tal y como se define en Melnik y Valero [53] (lo cual parece indicar que éste es el concepto apropiado de atractor) . De nuevo, merece la pena destacar las muchas dificultades técnicas a superar para la obtención de los resultados anteriores.

7.3 Inclusiones diferenciales no autónomas y estocásticas

Una etapa más se da en Caraballo et al. [19], donde pudimos escribir con máxima generalidad resultados sobre atractores globales válidos al mismo tiempo para inclusiones diferenciales con términos deterministas no autónomos y términos estocásticos. En concreto, probamos la existencia de atractor global para la siguiente inclusión diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in f\left(t, u\right) + g_1\left(t\right) + g_2\left(t\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \phi_i \frac{dw_i\left(t\right)}{dt}, \text{ en } D \times \left(\tau, T\right), \\ u\mid_{\partial D} = 0, \\ u\mid_{t=\tau} = u_\tau, \end{array} \right. \tag{15}$$

con $\tau \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de frontera suficientemente regular, las ∂D, $\phi_i \in D(\Delta) = H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to C_v(\mathbb{R})$, $g_1 \in L^\infty\left(\mathbb{R}, L^2\left(D\right)\right)$ y $g_2 \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}, L^2\left(D\right)\right)$. Bajo ciertas condiciones de Lipschitz-continuidad para f y de crecimiento polinomial en t para g_2, se puede definir el marco apropiado (denominado *proceso dinámico multivaluado*) en el que probar la existencia de atractor global para este problema. Este contexto engloba las teorías anteriormente desarrolladas.

8 Atractores para ecuaciones con retardo

Los principales trabajos de existencia de atractores para ecuaciones diferenciales con retardo son debidos a Hale (ver [41] para una lista de las principales referencias). En todos estos trabajos, cuando se trata del caso no autónomo, sólo se permiten condiciones de periodicidad o quasi-periodicidad a los téminos dependientes del tiempo. En Caraballo et al. [17] pudimos generalizar este concepto al caso de ecuaciones diferenciales con términos no autónomos de carácter general. En concreto, definimos y probamos la existencia de atractores para

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t) \\ x_s &= \psi, \quad \psi \in C^0([-h, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

con

$$| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) | \leq \gamma_1(t) \|\psi_1 - \psi_2\|_{C^0([-h,0];\mathbb{R}^n)},$$

$$\langle f(t, \psi), \psi(0) \rangle \leq (-\alpha + \gamma_1(t)) \mid \psi(0) \mid^2 + \gamma_2(t),$$

bajo la hipótesis de que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{t} \gamma_1(s) ds < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon s} \gamma_2(s) ds < \infty.$$

Para ello, nos basamos en el concepto de atractor no autónomo previamente introducido y, a partir de él, pudimos avanzar en la teoría de atractores para ecuaciones con retardo que, como hemos comentado, llevaba muchos años sin poder ser tratada. Los resultados que también probamos de semicontinuidad superior para este atractor hacia el definido por Hale en [41] parecen confirmar que la generalización propuesta en [17] es acertada.

9 Estudio de fenómenos de bifurcación

Recientemente, hemos comenzado a trabajar en una nueva línea de investigación cuyo campo de trabajo permanece en la actualidad prácticamente abierto en casi todas sus vertientes.

Es conocido que, en general, un atractor global puede tener subconjuntos, suficientemente grandes, que no sólo no atraen, sino que repelen las soluciones de una cierta ecuación diferencial. En este sentido, el atractor global es un conjunto "demasiado grande" si queremos "afinar" la dinámica asintótica de ciertos sistemas. Esto justifica resultados de seguimiento de trayectorias sobre otras en el atractor tal y como aparecen en Langa y Robinson [46] y Caraballo y Langa [7], que indican cómo la dinámica en los atractores está relacionada con la dinámica asintótica global de los sistemas diferenciales. Pero aún podemos dar un paso más: si somos capaces de describir la estructura geométrica de los atractores e interpretar en estos términos el comportamiento asintótico de las trayectorias, probablemente sabremos más sobre cómo es realmente el comportamiento asintótico de las ecuaciones. En el caso de EDOs, este problema ha dado lugar a centenares de trabajos que en muchas ocasiones están relacionados con el análisis de fenómenos de bifurcación. Menos numerosos son estos resultados acerca de la estructura de atractores globales deterministas en el caso de EDPs. En el marco estocástico, no existe todavía una teoría general para describir la estructura de los atractores aleatorios, ni siquiera en el caso finito-dimensional. En lo que a bifurcación se refiere lo único que puede hallarse en la literatura son ejemplos que apuntan a conceptos que empiezan a ser concretados (ver Arnold [1], Capítulo 9, para una discusión amplia sobre estos problemas para EDOs estocásticas).

En el caso de dimensión infinita no conocíamos resultados, ni siquiera en ejemplos concretos, acerca de bifurcación estocástica. Por todo ello es por lo que encontramos especialmente sugerente adentrarnos en este campo de investigación.

9.1 Bifurcación estocástica de tipo "pitchfork"

En Caraballo et al. [18] describimos la bifurcación de tipo "pitchfork" (o de tipo *tenedor*) que se produce en la siguiente EDP estocástica con ruido multiplicativo

$$du = (\Delta u + \beta u - u^3)\, dt + \sigma u \circ dW_t,$$

es decir, estamos ante la ecuación de Chafee-Infante con ruido lineal multiplicativo.

En efecto, en Caraballo et al. [13] pudimos expresar cotas superiores precisas (generalizando las mejores cotas que se conocen en el caso determinista $\sigma = 0$) para la dimensión de los atractores aleatorios $\mathcal{A}(\omega)$ asociados a esta ecuación. En [18] dimos un resultado sobre acotación inferior para la dimensión de estos mismos atractores, probando que existían variedades inestables aleatorias contenidas en el atractor. Además, puesto que el cono de soluciones positivas y negativas son conjuntos invariantes, gracias al principio del máximo estocástico, demostramos que, en el caso unidimensional, estas variedades se movían, en un entorno del origen, precisamente en estos conos.

De esta manera, pudimos dar una información precisa de la estructura interna de los conjuntos $\mathcal{A}(\omega)$. A continuación, estudiamos cómo esta estructura cambiaba drásticamente cuando el parámetro β pasaba de ser menor a ser mayor que el primer autovalor del problema de Dirichlet asociado al operador $A = -\Delta$, mostrando que lo que se tiene es, como en el caso determinista, una bifurcación de dos nuevas ramas de conjuntos invariantes y globalmente asintóticamente estables, mientras que el cero pasa a convertirse en un punto inestable (hubo que definir apropiadamente los conceptos de estabilidad e inestabilidad para conjuntos aleatorios invariantes. Además, los resultados son independientes de la intensidad del parámetro σ en el término del ruido. A partir de la teoría de sistemas dinámicos aleatorios que conservan el orden (Arnold y Chueshov [2]), se puede probar además que, en el caso unidimensional, existen puntos fijos aleatorios que bifurcan desde la solución nula. Es decir, la situación es totalmente análoga a la observada en el caso determinista (ver Hale [41]) y que se describe como una bifurcación de tipo "pitchfork". Hasta el momento no conocemos un resultado general de estas características, pues ni siquiera el concepto de variedad invariante asociada a una solución estacionaria está claramente definido y, por tanto, no existen métodos para probar su existencia. En efecto, para la prueba de este resultado tuvimos que generalizar al caso estocástico una de las pruebas clásicas en el campo determinista para la existencia de *variedades inerciales* (Foias et al. [38]).

9.2 Conceptos de bifurcación para ecuaciones diferenciales no autónomas

De la misma manera que el problema de la estructura de atractores aleatorios está abierto, el problema análogo para atractores no autónomos estaba también prácticamente intacto en el caso de términos dependientes del tiempo generales. Por ejemplo, nada se sabía sobre los fenómenos de bifurcación para ecuaciones del tipo

$$\dot{u} = \lambda u - b(t)u^3,$$

con $b(t) > 0$ y $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$. En Caraballo y Langa [14] escribimos, para el caso estocástico, un ejemplo de bifurcación de tipo "pitchfork", muy relacionado con la ecuación anterior.

En Langa et al. [49] introdujimos los conceptos básicos que, en nuestra opinión, deben servir de base para una teoría de bifurcación para ecuaciones diferenciales no autónomas del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(\lambda, t, x(t)) \\ x(s) = x_0, \end{cases} \tag{16}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in H$.

Para ello se define el concepto de trajectoria completa $x(\cdot)$, con $S(t,s)x(s) = x(t)$, para todo $t \geq s$, que no es más que una concreción de la idea de invarianza de un conjunto dependiente del tiempo. La idea central de un fenómeno de bifurcación en este caso será investigar los valores del parámetro λ para los que se da un cambio cualitativo en la estructura de los conjuntos con propiedades asintóticas relevantes. Sin embargo, del concepto de atractor no autónomo sólo podemos deducir lo que significa la estabilidad asintótica en el sentido "pullback", es decir, una trayectoria completa se dice asintóticamente estable si satisface una propiedad de atracción como la del atractor no autónomo. Es por ello que se introducen las definiciones sobre atracción, estabilidad e inestabilidad local, global y asintótica relativa a conjuntos invariantes.

Todos estos nuevos conceptos son a continuación ilustrados en diversos ejemplos, de manera que podamos, como mínimo, generalizar los ejemplos clásicos de bifurcación:

a) Bifurcación de tipo "pitchfork", para la ecuación

$$\dot{u} = \lambda u - b(t)u^3,$$

con $b(t) > 0$ y $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$.

b) Bifurcación de Hopf, para

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y - h(t)(x^2+y^2)x \\ y' = \beta x + \alpha y - h(t)(x^2+y^2)y \\ x(s) = x_0; \quad y(s) = y_0, \end{cases}$$

con $h(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$, $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)e^{2\alpha\tau}d\tau < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) Bifurcación de atractores a partir de la solución nula, para $u \in \mathbb{R}^m$ y

$$\dot{u} = \hat{A}u + F(u,t),$$

donde

- $\hat{A}$ es una matriz real de orden $m \times m$ y del tipo

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix},$$

con A de orden $(m-1) \times (m-1)$ verificando

$$y^T Ay \geq \mu|y|^2 \quad y \in \mathbb{R}^{m-1},$$

- $F(0,t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y, para $p > 0$,

$$|F(u,t) - F(v,t)| \leq a(t)[|u|^{2p} + |v|^{2p}]|u - v|,$$

donde, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\sup_{s\in(-\infty,t]} a(s) = \alpha(t) < \infty.$$

d) Bifurcación de tipo punto de silla (cf. Glendinning [40]), para la ecuación

$$\dot{x} = a - b(t)x^2$$

con $0 < b(t) \leq B$, $b(t) \to 0$ cuando $|t| \to \infty$, y $\int_{-\infty}^{0} b(s)ds = \int_{0}^{\infty} b(s)ds = \infty$.

9.3 El sistema de Lotka-Volterra

Para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales también quisimos aplicar estos nuevos conceptos de bifurcación. De esta manera, estudiamos el caso del sistema de Lotka-Volterra (Langa et al. [51]):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{u} & = & u(\lambda - a(t)u - bv) \\ \dot{v} & = & v(\mu - cv - du) \end{array} \right. \tag{17}$$

con λ, μ como indicadores de la tasa de crecimiento y $a(t), c, b, d > 0$, midiendo, respectivamente, los dos primeros la limitación del medio y los dos últimos el nivel de competición frente a los recursos naturales. Suponemos $0 < a(t) < A$; $u = u(t), v = v(t)$ representan el número relativo de individuos de las poblaciones u, v, que en este caso están en competición en un mismo "hábitat". Al imponer que $a(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, todos los resultados anteriores sobre comportamiento asintótico (hoy clásicos) para este modelo de poblaciones no daban información sobre nuestro caso.

Observemos que tenemos ahora dos parámetros λ, μ cuyos valores pueden producir fenómenos de cambio de estabilidad y estructura de los conjuntos invariantes. Pudimos probar que, con los nuevos conceptos introducidos, existe una analogía completa con el caso autónomo; ver, por ejemplo, la Figura 4, donde, en el caso $db < cA$, $U(t), V(t)$ y $\alpha(t;a)$ representan soluciones de (17) que generalizan a las correspondientes soluciones estacionarias globalmente asintóticamente estables del caso estacionario (ver Murray [55]). Para el caso

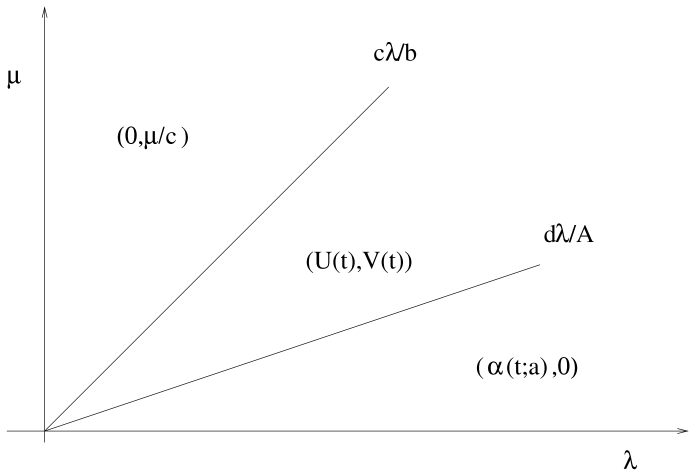

Figura 4: *Comportamiento asintótico global del problema (17) dependiente de los parámetros λ y μ, con $Ac > bd$. Para $\lambda, \mu > 0$ obtenemos tres regiones diferentes para este comportamiento; hemos escrito las trayectorias completas globalmente asintóticamente atrayentes en cada una de estas regiones.*

$db > cA$, y a partir de la teoría de ecuaciones asintóticamente autónomas en Thieme [63], generalizamos el concepto de *curva separatriz* para el caso no autónomo. De nuevo conseguimos de esta manera un comportamiento comparable al que se da en el caso determinista autónomo.

10 Sobre el concepto de permanencia para EDPs no autónomas

En el contexto de las Ecuaciones Diferenciales, el concepto de *permanencia* aparece normalmente asociado a modelos procedentes de la dinámica de poblaciones. Básicamente, indica si, en el futuro, determinada especie o conjuntos de especies, continúa existiendo. En términos matemáticos, esto significa que existe un conjunto absorbente acotado para todos los datos iniciales positivos estrictamente alejado de la solución nula para todo tiempo suficientemente grande. La cota para este conjunto que define la permanecia del sistema es por tanto, inferior y superior. Sin embargo, sabemos que, para una ecuación no autónoma, no es esperable encontrar cotas superiores uniformes para los conjuntos absorbentes.

10.1 Permanencia en sentido *pullback*

El primer problema que nos planteamos fue, por tanto, analizar si existía alguna manera de desarrollar el concepto de permanencia en EDPs no autónomas. Para ello, en Langa y Suárez [45] investigamos una de las EDPs más simples:

$$u_t - \Delta u = \lambda u - b(t)u^3,$$

con $b(t) > 0$ y $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$, pero imponiendo condiciones de manera que los numerosos resultados conocidos acerca del comportamiento asintótico de esta ecuación no pudieran ser utilizados. En efecto, probamos que cualquier solución es no acotada cuando $t \to +\infty$. Es decir, no es posible dar resultados de permanencia para esta ecuación. Sin embargo, e inspirados por la teoría de atractores no autónomos, propusimos en [45] la siguiente definición:

Definición 3 *Diremos que un sistema tiene la propiedad de permanencia en sentido "pullback" si existe una familia de conjuntos dependientes del tiempo* $U : \mathbb{R} \longmapsto H$, *verificando que*

1. $U(t)$ *es un conjunto absorbente (en el sentido "pullback"),*
2. $d(U(t), \{0\}) > 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$,

donde $d(A, b) = \inf_{a\in A} d(a, b)$.

A continuación, probamos que para la ecuación anterior existe un conjunto con estas características. Este resultado puede ser visto también desde la teoría de bifurcación para ecuaciones no autónomas. En efecto, quizás el punto más importante en este trabajo consiste en demostrar que la solución nula, a partir del primer autovalor λ_1 del Laplaciano, pasa a ser inestable, transfiriendo la estabilidad asintótica que gozaba hasta ese valor a dos nuevas trayectorias completas que se mueven en el cono de soluciones positivas y negativas respectivamente. De esta forma, en λ_1 se produce una bifurcación desde la solución nula hacia nuevos conjuntos invariantes. Para probar que éste es el fenómeno que se observa, tuvimos que generalizar a este caso de EDPs no autónomas la teoría de sistemas estocásticos *que preservan el orden* en Arnold y Chueshov [2].

10.2 El caso de un sistema de EDPs

Para el caso de un sistema de EDPs el problema de la permanencia se complica en varios aspectos. En Langa et al. [50], estudiamos el problema de la permanencia para el siguiente sistema de tipo Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u(\lambda - a(t)u - bv) & \text{en } D \times (s, +\infty), \\ v_t - \Delta v = v(\mu - cv - du) & \text{en } D \times (s, +\infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial D \times (s, +\infty), \\ u(s,x) = u_0(x), \quad v(s,x) = v_0(x) & \text{en } D, \end{cases} \tag{18}$$

donde D es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera regular $\partial\Omega$, b, c, d son constantes positivas, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $0 < a(t) \leq A$. De nuevo la pregunta que nos hacemos es determinar si las dos especies sobrevivirán en el futuro.

Si imponemos que $a(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, una vez más no es posible aplicar los resultados conocidos sobre permanencia para este sistema. En efecto, probamos en primer lugar que, para ciertos valores de los parámetros λ, μ, una de las especies se va a infinito, lo que produce extinción en la otra. Por ello, usamos el concepto de la permanencia en sentido "pullback" para dar nueva información acerca del comportamiento asintótico del sistema. En este sentido, de nuevo encontramos una situación análoga a la del caso autónomo, es decir, existen curvas $\lambda = \phi(\mu)$ y $\mu = \varphi(\lambda)$ tales que delimitan regiones de permanencia y extinción para las especies (ver Figura 5). El estudio de la ecuación logística

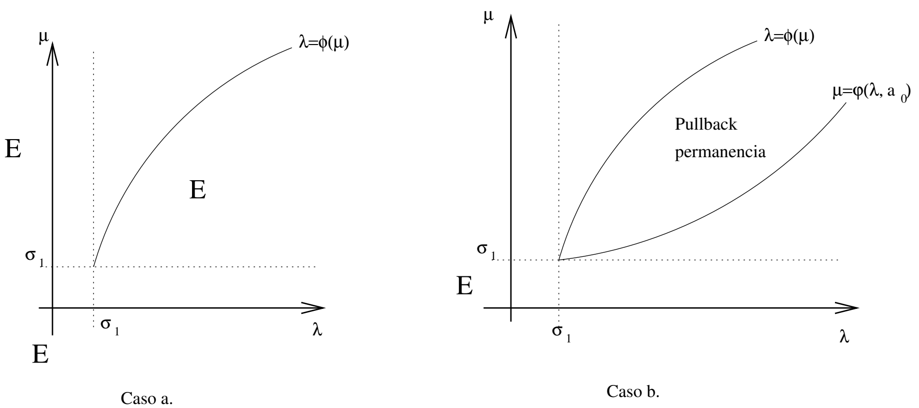

Figura 5: *Caso a. Extinción de una de las especies cuando $t \to +\infty$. Caso b. E: Regiones de permanencia en el sentido pullback y extinción para tiempos iniciales tendiendo a $-\infty$.*

que desarrollamos en [45] juega un papel fundamental. Igualmente, fue necesario concretar para esta situación la teoría de sistemas *que preservan el orden* y la de sub y supersoluciones para EDPs no autónomas.

Referencias

[1] L. Arnold, "Random dynamical systems", Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin 1998.

[2] L. Arnold, I. Chueshov, *Order-preserving random dynamical systems*, Dynam. Stability Sys. 13 (1998), 265-280.

[3] J.P. Aubin, H. Frankowska, "Set-Valued Analysis", Birkhäuser, Boston (1990).

[4] A.B. Babin and M.I. Vishik, "Attractors of evolution equations", North Holland 1992.

[5] L. Berselli and F. Flandoli, *Remarks on determining projections for stochastic dissipative equations*, Discrete and Cont. Dyn. Systems vol. 5, n^{o}1 (1999), 197-214.

[6] T. Caraballo, J.A. Langa and J.C. Robinson, *Upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems.* Commun. Part. Diff. Eq. 23 (1998), 1557-1581.

[7] T. Caraballo and J.A. Langa, *Tracking properties of trajectories on random attracting sets,* Stochastic Anal. and Appl. 17 (3) (1999), 339-358.

[8] T. Caraballo and J.A. Langa, *Comparison of the long-time behaviour of linear Ito and Stratonovich partial differential equations*, Stoch. Anal. and Appl. 19(2) (2001), 183-195.

[9] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Random atractors for multivalued random dynamical systems*, Nonlinear Anal. TMA 48(6) (2002), 805-829.

[10] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Global attractors for multivalued random dynamical systems generated by random differential inclusions with multiplicative noise*, J. Math. Anal. and Appl. 260 (2001), 602-622.

[11] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Global attractors for multivalued random semiflows generated by random differential inclusions with additive noise*, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, t. 332 (2001), 131-136.

[12] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Approximations of attractors for multivalued random dynamical systems*, Int. J. of Math. Game Th. and Algebra 11(4) (2001), 67-92.

[13] T. Caraballo, J.A. Langa and J.C. Robinson, *Stability and random attractors for a reaction-difussion equation with multiplicative noise*, Discrete and Cont. Dyn. Systems 6, n^{o}4 (2000), 875-892.

[14] T. Caraballo, J.A. Langa, *On the upper semicontinuity of non autonomous and random dynamical systems*, Dynamics of Cont. Discrete and Impulsive Systems, por aparecer.

[15] T. Caraballo and J.A. Langa, *On the theory of random attractors and some open problems*, en Stochastic Partial Differential Equations and Applications, Da Prato and Tubaro (Eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 2002.

[16] T. Caraballo, J.A. Langa, T. Taniguchi, *The exponential behaviour and stabilizability of stochastic 2D-Navier-Stokes equations*, J. Diff. Equs, por aparecer.

[17] T. Caraballo, J.A. Langa and J.C. Robinson, *Attractors for differential equations with variable delays*, J. Math. Anal. and Appl. 260 (2001), 421-438.

[18] T. Caraballo, J.A. Langa and J.C. Robinson, *A stochastic pitchfork bifurcation in a reaction-diffusion equation*, Proc. Royal Soc. London A 457 (2001), 2041-2061.

[19] T. Caraballo, J.A. Langa, V. Melnik, J. Valero, *Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems*, Set Valued Analysis, por aparecer.

[20] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Dimension of attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations*, ANZIAM Journal (formerly Journal of the Australian Mathematical Society, Series B - Applied Mathematics), por aparecer.

[21] T. Caraballo, P.E. Kloeden, J.A. Langa, *Atractores globales para ecuaciones diferenciales no autónomas*, CUBO, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, en prensa.

[22] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *On the relationship between solutions of stochastic and random differential inclusions*, prepublicación.

[23] C. Castaing and M. Valadier, "Convex Analysis and Measurable Multifunctions", LNM 580, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[24] V. Chepyzhov and M. Vishik, *A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolution equations*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), 1057-1076.

[25] I.D. Chueshov, *On determining functionals for stochastic Navier-Stokes equations*, Stoch. and Stoch. Reports 68 (1999), 45-64.

[26] I.D. Chueshov, J. Duan, B. Schmalfuss, *Determining functionals for random partial differential equations*, prepublicación.

[27] H. Crauel, A. Debussche and F. Flandoli, *Random attractors*. J. Dyn. Diff. Eq. 9 (1995), 307-341.

[28] H. Crauel and F. Flandoli, *Attractors for random dynamical systems*. Prob. Theory Rel. Fields 100 (1994), 365-393.

[29] G. Da Prato, A. Debussche, *Construction of stochastic inertial manifold using backward integration*, Stoch. Stoch. Rep. 59 (1997), 305-324.

[30] A. Debussche, *On the finite dimensionality of random attractors*, Stoch. Anal. and Appl. 15 (1997), 473-492.

[31] A. Debussche, *Hausdorf dimension of a random invariant set*, J. Math. Pures Appl. 77 (1998), 10, 967-988.

[32] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, “Exponential attractors for dissipative evolution equations”, RAM, Wiley, Chichester, 1994.

[33] K.D. Elworthy, “Stochastic differential equations on manifolds”, Cambridge University Press, Cambridge 1982.

[34] F. Flandoli and J.A. Langa, *Determining modes for dissipative random dynamical systems.* Stoch. Stoch. Rep. 66 (1999), 1-25.

[35] F. Flandoli and B. Schmalfuss, *Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative white noise*, Stoch. Stoch. Rep. 59 (1996), 21-45.

[36] C. Foias and G. Prodi, *Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier-Stokes en dimension 2*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39 (1967), 1-34.

[37] C. Foias, R. Temam, *Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values,* Mathematics of Computation **43** (1984), 117–133.

[38] C. Foias, G. Sell, R. Temam, *Inertial manifolds for dissipative evolution equations*, J. Diff. Equs. 73 (1988), 311-353.

[39] P. Friz, J.C. Robinson, *Parametrising the attractor of the two-dimensional Navier-Stokes equations with a finite set of nodal values*, Physica D148 (2001) 201-220

[40] P. Glendinning, “Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations”, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge 1994.

[41] J. Hale, “Asymptotic Behavior of Dissipative Systems”, Math. Surveys and Monographs, AMS, Providence 1988.

[42] H. Keller and B. Schmalfuss, *Attractors for stochastic differential equations via transformation into random differential equations*, prepublicación.

[43] P. Kloeden, B. Schmalfuss, *Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization*, Numer. Algorithms 14 (1997), 141-152.

[44] O. Ladyzhenskaya, “Attractors for Semigroups and Evolution Equations”, Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

[45] J.A. Langa, A. Suárez, *Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations*, prepublicación

[46] J.A. Langa and J.C. Robinson, *Determining asymptotic behaviour from the dynamics on attracting sets*, J. Dyn. and Diff. Eqs. vol 11, n^{o}2 (1999), 319-331.

[47] J.A. Langa and J.C. Robinson, *A finite number of points observations which determine a non-autonomous flow*, Nonlinearity 14 (2001), 673-682.

[48] J.A. Langa, *Asymptotically finite dimensional pullback behaviour of non autonomous PDEs*, Archiv der Mathematic, por aparecer.

[49] J.A. Langa, J.C. Robinson and A. Suárez, *Stability, instability and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations*, Nonlinearity, por aparecer.

[50] J.A. Langa, J.C. Robinson and A. Suárez, *Permanence in the non-autonomous Lotka-Volterra competition model*, prepublicación.

[51] J.A. Langa, J.C. Robinson and A. Suárez, *Forwards and pullback behaviour of a non-autonomous Lotka-Volterra system*, prepublicación.

[52] J.A. Langa, *Finite dimensional pullback asymptotic behaviour of stochastic partial differential equations*, prepublicación.

[53] V. Melnik, J. Valero, *On Attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set-Valued Anal. 6 (1998), 83-111.

[54] H. Morimoto, *Attractors of probability measures for semilinear stochastic evolution equations*, Stochastic Anal. Appl. 10(2) (1992), 205-212.

[55] J.D. Murray, "Mathematical Biology", Springer-Verlag, New York 1993.

[56] J.C. Robinson, *Some approaches to finite-dimensional behaviour in the Navier-Stokes equations*, Curso impartido en el Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico (1997), Universidad de Sevilla.

[57] J.C. Robinson, "Infinite-dimensional Dynamical Systems", Cambridge University Press 2001.

[58] J.C. Robinson, *A rigorous treatment of experimental observations for the two-dimensional Navier-Stokes equations*, Proc. Royal Soc. London A 457, 107-1020.

[59] B. Schmalfuss, *Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations*, In "V. Reitmann, T. Riedrich and N Koksch, editors, International Seminar on Applied Mathematics-Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behaviour," 185-192, 1992.

[60] B. Schmalfuss, *Measure attractor and random attractors for stochastic partial differential equations*, Stochastic Anal. Appl. 17 (6) (1999), 1075-1101.

[61] G. Sell, *Nonautonomous differential equations and topological dynamics I, II*, Amer. Math. Soc. 127 (1967), 241-262, 263-283.

[62] R. Temam, "Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", Springer-Verlag, New York 1988 (and 2nd edition 1996).

[63] H. Thieme, *Asymptotically autonomous differential equations in the plane*, Rocky Mountain J. Math 24 (1994), 351-380.

[64] M.I. Vishik, "Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations", Cambridge University Press