UNIVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO

Y ECONOMÍA POLÍTICA

TESIS DOCTORAL

MACROECONOMÍA Y CICLOS ECONÓMICOS:

EL CICLO ECONÓMICO REAL

RAFAEL CABALLERO JIMÉNEZ

Sevilla, 2015

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO

Y ECONOMÍA POLÍTICA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TESIS DOCTORAL

MACROECONOMÍA Y CICLOS ECONÓMICOS:

EL CICLO ECONÓMICO REAL

Tesis Doctoral realizada por D. Rafael Caballero Jiménez para la colación del Grado de Doctor, bajo la dirección del Dr. D. Camilo Lebón Fernández.

Sevilla, 2015.

A mi madre.

MACROECONOMIA Y CICLOS ECONOMICOS:

EL CICLO ECONOMICO REAL.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo para la colación del grado de Doctor constituye una aproximación al desarrollo de la Macroeconomía moderna y su relación con la explicación de las fluctuaciones cíclicas a partir del modelo de Ciclo Económico Real. El influyente trabajo de Kydland y Prescott (1982) marca un punto de inflexión en el desarrollo del pensamiento económico en varios aspectos.

Tradicionalmente, la Macroeconomía se apoya en dos tipos de modelos muy distintos para explicar dos hechos fundamentales: el crecimiento del PIB “per cápita” a largo plazo y las fluctuaciones de la producción con respecto a su tendencia de crecimiento, esto es, los ciclos económicos; mientras que por una parte los hechos empíricos asociados al primero son explicados a partir del modelo de Solow (1956), la Macroeconomía del corto plazo pertenece al dominio del modelo IS-LM o del modelo OA-DA.

La revolución metodológica que ha supuesto la Teoría del Ciclo Económico Real se apoya en tres ideas: la primera considera que es posible estudiar el fenómeno cíclico a partir de la utilización de modelos de equilibrio general competitivo walrasianos; la segunda, que es posible unificar la explicación de la teoría del ciclo con la teoría del crecimiento económico; la tercera es que debemos ir más allá de realizar comparaciones de carácter cualitativo entre las distintas teorías y poder comprobar si el modelo es capaz de explicar cuantitativamente el comportamiento observado en las series económicas.

Estos tres desafíos marcan el desarrollo de la investigación sobre el ciclo económico.

Consideremos en primer lugar, lo que podemos entender por explicar el ciclo. El método empírico en el que se basa la teoría del Ciclo Económico Real tiene como fin último generar datos artificiales a partir de la simulación del modelo y comparar tanto la variabilidad relativa de dichas series como sus coeficientes de correlación con las mismas medidas calculadas a partir de los datos reales.

Dado que la simulación es de carácter estocástico, surge la cuestión de qué variable exógena es la encargada de provocar el comportamiento dinámico en las variables del modelo.

Y es en este aspecto, el origen de las fluctuaciones económicas, lo que ha provocado un encendido debate conforme el modelo ha sido sometido a un análisis más riguroso.

El modelo de Ciclo Económico Real explica los movimientos conjuntos en las series a partir de las fluctuaciones de carácter estocástico del progreso tecnológico medido éste a partir del residuo de Solow. Esta explicación basada en los cambios que experimenta la función de producción cuando se ve sometida a shocks tecnológicos contrasta de manera radical con la literatura vigente hasta los primeros años 80, que situaba al cambio en las magnitudes monetarias como el factor explicativo más probable de la causa y origen de los ciclos económicos.

El objetivo del presente trabajo es analizar el modelo de Ciclo Real desde un punto de vista metodológico, lo que implica adentrarse en su formulación y en los supuestos sobre los que descansa para llegar finalmente a su resolución. No obstante, el modelo básico ha ido incorporando sucesivamente nuevos elementos que han buscado mejorar su capacidad explicativa y convertir al modelo de Ciclo Real en el modelo de referencia para estudiar el impacto de otras perturbaciones distintas a los shocks tecnológicos.

En el presente trabajo desarrollamos algunas de estas aportaciones incidiendo en las implicaciones macroeconómicas de la modelización, en su desarrollo analítico y en sus principales resultados.

De esta forma, hemos dividido el trabajo en 6 capítulos a través de los cuales realizamos un recorrido por lo que consideramos constituyen el conjunto de aportaciones más relevantes en el campo de la macroeconomía y su relación con el modelo de Ciclo Económico Real.

El capítulo primero está dedicado a presentar tres cuestiones: definir el ciclo económico y las características cíclicas de una economía, realizar un recorrido que aunque somero ilustra en alguna medida la situación del Pensamiento Económico antes y después de la aparición de la Teoría General de Keynes y un tercer bloque en el que realizamos un mayor desarrollo de los modelos monetarista y keynesiano acerca de los efectos de la política monetaria sobre la producción y el nivel de precios.

El capítulo segundo desarrolla el efecto de los shocks tecnológicos dentro del modelo neoclásico de crecimiento con oferta de trabajo fija. En la solución de los modelos planteados podemos encontrar la metodología básica y los fundamentos del modelo de

Ciclo Económico Real. Dada su relativa sencillez analítica he realizado el cálculo de su solución.

En el capítulo tercero incorporamos la oferta de trabajo como variable de decisión de las economías domésticas y procedemos a plantear los supuestos y las características del modelo de Ciclo Económico Real. Comenzamos por el modelo que da origen al nombre del programa de investigación: el trabajo de Long y Plosser para ir resolviendo sucesivamente el modelo desde el caso más sencillo hasta el más general.

El modelo puede resolverse desde dos enfoques: a partir del equilibrio competitivo y a partir del denominado problema del planificador social.

En el capítulo cuarto introducimos el dinero o el papel de la política monetaria dentro del modelo de equilibrio general. En primer lugar, analizamos dos modelos clásicos en los que la política monetaria es totalmente irrelevante para determinar las variables reales. A continuación planteamos un modelo con rigidez salarial para seguidamente considerar el papel del dinero en las dos vertientes más utilizadas en la literatura: incluirlo dentro de la función de utilidad y en la denominada restricción de liquidez. Finalmente dentro de este marco es indispensable presentar el modelo New-Keynesian con rigidez de precios.

El capítulo quinto es el más extenso y en él se desarrollan aspectos cruciales en la literatura sobre Ciclo Económico Real. Sin entrar en cada uno de los epígrafes por separado, las cuestiones tratadas entre otras son, la modelización del mercado de trabajo, la utilización variable del capital, el papel del gasto público, los shocks específicos a la inversión o los shocks de demanda para terminar presentando las características del modelo original de Kydland y Prescott.

En el capítulo sexto exponemos en primer lugar la distinción entre tendencia estocástica y tendencia determinista y su correspondencia con la persistencia de las perturbaciones en tres sencillos modelos macroeconómicos para considerar a continuación tres aportaciones importantes sobre la medición empírica de dicha persistencia. El papel de la moderna metodología de Vectores Autorregresivos y su relación con los shocks tecnológicos ha sido analizada a partir del debate relacionado con el efecto de dichos shocks sobre las horas trabajadas. En relación a esta cuestión planteamos tres modelos que explican por qué una peturbación tecnológica no eleva las horas trabajadas, conclusión totalmente diferente a la obtenida en el modelo de Ciclo Económico Real.

Las críticas al modelo de Ciclo Económico Real han sido abundantes desde prácticamente sus inicios, por lo que hacemos una revisión de los aspectos en los que el modelo presenta sus puntos más débiles. Finalmente, exponemos las características de un modelo de equilibrio general ampliado en el que sobresalen tres características: la primera es que conserva los moldes originales del modelo de Ciclo Económico Real, la segunda es que introduce algunas de las ampliaciones discutidas en el capítulo 5, concretamente la utilización variable del capital y el shock específico a la inversión y en tercer lugar considera la rigidez de precios y salarios.

CAPITULO 1
CICLO ECONOMICO Y MACROECONOMIA
UNA PERSPECTIVA GENERAL HASTA 1982

1.1. ¿ Qué es el ciclo económico ? Una perspectiva histórica.

Cuando hablamos de ciclos, la imagen que nos viene rápidamente a la memoria es la de una onda o una senda similar a la que describe la función seno o coseno caracterizada por un comportamiento recurrente, regular y periódico. El uso general en el ámbito científico de la palabra ciclo hace referencia a la recurrencia de diferentes fases que son susceptibles de algún tipo de medición. Tal y como lo expresó Mitchell (1927, p. 377):

> "In general scientific use....the word (cycle) denotes a recurrence of different phases of plus and minus departures, which are often susceptible de exact measurement"

El concepto de ciclo económico es un legado del siglo XIX. Ya se advirtió que el sistema económico capitalista estaba sujeto a una serie de "movimientos ondulantes" caracterizados por una "secuencia definida de fases". Dicha secuencia aparecía de forma reiterada , pero con duraciones variables.

En 1837, Samuel Jones Lloyd (lord Overstone) empleó el término ciclo y se refirió a sus estados o fases en los siguientes términos:

> "la situación del comercio... la encontramos que sujeta a varias condiciones que reaparecen periódicamente, repitiéndose claramente en un ciclo definido. Primero la encontramos en un estado

> de tranquilidad, enseguida de progreso, confianza creciente, prosperidad, agitación, comercio desbordado, conmoción, presión, estancamiento, desolación, terminando nuevamente en tranquilidad" (citado en Hansen, 1951, pag 216).

En 1862, Clement Juglar publicó el primer tratado enteramente dedicado al estudio del ciclo económico, que le lleva a definir la existencia de un ciclo industrial de entre 7 y 11 años en el que es fundamental el comportamiento del crédito bancario en su explicación.

Junto a los ciclos de Juglar, aparecen en los años 20 las publicaciones de J. Kitchin que identifica ciclos menores de unos 40 meses y los ciclos de onda larga de Kondratieff de unos 50 a 60 años.

Desde el punto de vista metodológico encontramos dos puntos de vista diferentes.

En primer lugar, el enfoque empirista de W.C. Mitchell, plasmado en su obra Business cycles (1913) en la que presenta tanto una revisión de la investigación sobre el fenómeno como una descripción de los ciclos basada en el estudio de un conjunto de series económicas a través de sus características dinámicas y caracterizando cada ciclo en cuatro fases distintas. La idea era que cada ciclo consistía en cuatro fases que inevitablemente aparecen en orden consecutivo, y que se correspondía con el pensamiento de la época en el que cada fase del ciclo lleva el germen o la semilla para que termine una fase y comience la siguiente. Estas fases son las etapas de prosperidad, crisis, depresión y recuperación.

> Mitchell lo expresa claramente en 1923 cuando escribe:
>
> "Then in order will come a discussion of how prosperity produces condicions which lead to crisis, how crises run into depressions, and finally how depressions after a time produce conditions which lead to new revivals" (Mitchell, pag 46).

El enfoque empirista de Burns y Mitchell (1946, p 3) les lleva a acuñar una de las definiciones de ciclo económico más citadas en la literatura:

> “...los ciclos económicos son un tipo de fluctuaciones que se presentan en la actividad económica global de las naciones cuyo sistema productivo se basa fundamentalmente en la empresa privada: un ciclo consta de expansiones, que se producen, aproximadamente al mismo tiempo, en muchas ramas de la actividad económica, y que son seguidas de recesiones, contracciones y recuperaciones, también de carácter general, que conducen a la fase de expansión del ciclo siguiente; esta sucesion de cambios es recurrente pero no periódica; la duración de los ciclos varía desde algo más de un año hasta diez o doce; no son divisibles en ciclos más cortos de carácter semejante y con amplitudes aproximadamente iguales”.

El National Bureau of Economic Research sigue la estela del camino marcado por Mitchell al fijar la cronología de las expansiones y recesiones para la economía norteamericana.

Visto en retrospectiva, es claro que el campo de investigación se ha movido en una dirección completamente diferente de la que Mitchell presentó y con el desarrollo de la econometría su método de estudio fue tachado como “measurement without Theory” en la famosa crítica de Koopmans (1946).

Desde una visión teórica, en el enfoque de Frisch (1933), los ciclos económicos se asemejarían al movimiento de un péndulo. En los años 30, algunos economistas comenzaron a desarrollar modelos matemáticos dinámicos que generaban ciclos cuando se sometían a perturbaciones aleatorias. Las fluctuaciones cíclicas serían el resultado de la combinación de impulsos, shocks aleatorios que constantemente afectan a una economía, junto a los mecanismos de propagación internos del sistema económico. Frisch por tanto distinguió entre impulsos en forma de shocks aleatorios y su propagación en el tiempo. Desde este punto de vista, el propio modelo debería endógenamente generar un comportamiento oscilante dada una fuente de perturbación exógena.

La analogía del péndulo se ha utilizado a menudo para describir este punto de vista de los ciclos. Los shocks son necesarios para dar la energía que mantiene las oscilaciones y el propio modelo es el que genera trayectorias dinámicas oscilantes. Es, haciendo una analogía, similar a lo que observamos cuando tiramos una piedra a un lago, el shock es la piedra que impacta al agua y la respuesta es simplemente las ondas que describe aquélla.

Tendremos ocasión de revisar algunos modelos dinámicos que son capaces por su propia estructura interna de replicar un comportamiento similar.

Unos años antes, E. Slutzky (1927) fue el primero en demostrar que es posible generar ciclos análogos a las fluctuaciones que observamos en las series económicas a partir de la suma de causas o shocks aleatorios en una ecuación en diferencias estocástica, de orden bajo y con raíces reales positivas cercanas pero menores a la unidad. El ejemplo más sencillo para ilustrar cómo generar una serie con un comportamiento cíclico pero no determinista es considerar una ecuación en diferencias de primer orden, con un término estocástico que puede seguir cualquier distribución de probabilidad elegida.

La ecuación lineal de primer orden es:

$$y_t = 0.90 y_{t-1} + \epsilon_t$$

a partir de iteraciones sucesivas y dado un valor inicial de la serie.

$$y_t = y_0(0.90)^t + \sum_{i=0}^{t-1}(0.90)^i \epsilon_{t-i}$$

La serie de y_t viene explicada por todos los shocks pasados con la propiedad de que su importancia decrece en progresión geométrica conforme el shock sucede más lejos en el tiempo del momento actual.

Adelman I y Adelman F (1959) cuestionaron el enfoque de Frisch al someter al modelo de Klein-Goldberger (1952) a una serie de perturbaciones aleatorias y observaron que el modelo no generaba una dinámica semejante al movimiento de un péndulo (Chatterjee, 2000).

Tal y como señala Mullineux, el enfoque Frisch-Slutzky es el que se ha impuesto como método de abordar el estudio de los ciclos económicos:

> "the Frisch-Slutsky hypothesis, that the business cycle is the re-

sult of a series of shocks to a linear model, which imparts dampening effects, has formed the basis of post-war business cycle modelling. It is implicit in the keynesian approach, as demonstrated by the simulation analysis of the large scale econometric models in the 1970s, as well as the New Classical approach" (Mullineux, pag 23).

1.2. Las características cíclicas de una economía.

No es hasta los años 70 cuando la investigación sobre los ciclos económicos comienza de nuevo a recibir atención, fundamentalmente por el artículo de R. Lucas, Understanding Business Cycles (1977) en el que el ciclo económico es definido como desviaciones del output con respecto a su tendencia de crecimiento, caracterizado por movimientos conjuntos (comovements) en las desviaciones del conjunto de variables macroeconómicas con respecto al PIB.

Lucas además enfatiza el enfoque de Slutzky, y toma en consideración parte de la definición de Mitchell, aunque la cuestión de las distintas fases del ciclo es totalmente olvidada.

"movements about trend in gross national product in any country can be well described by a stochastically disturbed difference equation of very low order. These movements do not exhibit uniformity of either period or amplitude, which is to say, they do not resemble the deterministic wave motions which sometimes arise in the natural sciences. Those regularities which are observed are in the co-movements among different aggregative time series" (Lucas, 1977, pag 9).

Por otra parte, Lucas subraya la idea de que todos los ciclos económicos son iguales y por tanto podría ser teóricamente posible dar una respuesta unificada a sus causas, dado que en las economías de mercado las regularidades observadas son comunes a todas ellas.

"There is, as far as I know, no need to qualify these observa-

> tions by restricting them to particular countries or time periods: they appear to be regularities common to all decentralized market economies. Though there is absolutely no theoretical reason to anticipate it, one is led by the facts to conclude that, with respect to the qualitative behavior of co-movements amongseries, business cycles are all alike. To theoretically inclined economists, this conclusion should be attractive and challenging, for it suggests the possibility of a unified explanation of business cycles, grounded in the general laws governing market economies, rather than in political or institutional characteristics specific to particular countries or periods" (Lucas, 1977, pag 10).

A pesar de que Lucas no define la tendencia o "trend", su idea es el concepto de tendencia fundamentado en la teoría del crecimiento económico, esto es, el crecimiento del PIB per cápita se debe al progreso tecnológico de naturaleza exógena que crece a una tasa media constante y aumenta debido a la eficiencia del conjunto de los factores productivos. En términos medios, la senda de crecimiento de una economía viene caracterizada por los siguientes conocidos "hechos estilizados" de Kaldor (1961): crecimiento de la producción per cápita, crecimiento del capital per cápita, estabilidad del tipo de interés o de la tasa de rendimiento del capital y participaciones estables de las rentas de los factores productivos en la renta nacional.

Siguiendo[1] a Cooley y Prescott (1995, pag 32), los hechos característicos que deberían de poder ser explicados por una teoría del ciclo económico tendrían que ser los siguientes.

1. La magnitud de las fluctuaciones en el output y en el número total de horas trabajadas es prácticamente igual.

2. El empleo fluctúa tanto como el output y el número de horas de trabajo, mientras que las horas medias semanales fluctúan poco. Esto sugiere que la mayoría de las fluctuaciones en las horas trabajadas representan movimientos en el número de empleados-desempleados y no tanto en ajustes en las horas

[1] Un estudio sistemático de las series norteamericanas puede consultarse en Stock J. y Watson M. (1999). Business Cycle Fluctuations in US Macroeconomic Time Series. Handbook of Macroeconomics. Elsevier.Vol 1. Capítulo 1.

de trabajo por empleado.

3. El consumo de bienes no duraderos no presenta grandes fluctuaciones. Su volatilidad es mucho menor que la de la producción.

4. La inversión y el consumo de bienes duraderos fluctúa mucho más que el output.

5. El stock de capital fluctúa mucho menos que la producción y está en gran medida incorrelado con el output.

6. La productividad del factor trabajo es moderadamente procíclica pero varía considerablemente menos que la producción.

7. Los salarios varían menos que la productividad.

8. El gasto público está incorrelado con el output.

9. Las importaciones son mucho más procíclicas que las exportaciones.

En el caso de España, tal y como señalan entre otros Dolado, Sebastián y Vallés (1993), Ortega (1998) o Puch y Licandro (1997).

1. El consumo es más volátil que el output y fuertemente procíclico.

2. La inversión es cuatro veces más volátil que el output y muy correlacionada con él.

3. El gasto público es menos volátil que el output y ligeramente procíclico.

4. Las exportaciones netas tienen una volatilidad similar al PIB y son débilmente contracíclicas.

5. El empleo es fuertemente procíclico y casi tan volátil como el output.

6. La productividad media es menos volátil que el output y débilmente procíclica (Sebastián et alia) mientras que es contracíclica y más volátil que el output en Ortega.

La siguiente tabla, estimada por Dolado et al (1993, pag 452) refleja la volatilidad relativa de cada serie con respecto al PIB real, y las correlaciones

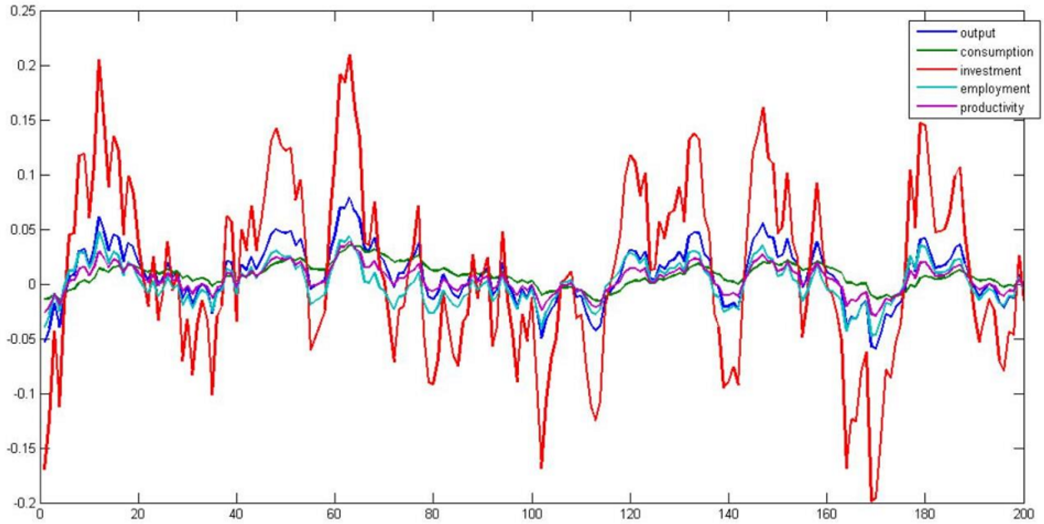

Gráfico 1.1.

ρ_x a dos retardos y adelantos con respecto al PIB.

Tabla 1.1						
	σ_x/σ_y	$\rho_{(x-2)}$	$\rho_{(x-1)}$	ρ_x	$\rho_{(x+1)}$	$\rho_{(x+2)}$
PIB	1	0.71	0.90	1		
Consumo	1.13	0.68	0.74	0.69	0.56	0.39
Gasto Público	0.96	0.15	0.29	0.36	0.35	0.29
Inversión	4.56	0.58	0.69	0.72	0.65	0.51
Exportaciones Netas	0.97	-0.37	-0.40	-0.37	-0.28	-0.17
Empleo	1.01	0.41	0.54	0.70	0.71	0.66
Productividad trabajo	0.76	0.24	0.34	0.41	0.37	0.24

La volatilidad relativa σ_x/σ_y, es el cociente entre las desviaciones estándar de cada serie con respecto al PIB; la persistencia en cada una de las series se observa a partir de los órdenes de autocorrelación, mientras que los movimientos conjuntos en las series se mide a partir del coeficiente de correlación entre cada serie y el PIB.

En el gráfico 1.1. se muestran los resultados de una simulación a partir de un modelo de Ciclo Real.

Con anterioridad hemos subrayado el hecho de que el ciclo económico se caracteriza principalmente por las desviaciones de la producción con respecto a su tendencia de crecimiento.

Esto es, las series macroeconómicas agregadas, PIB, consumo, e inversión suelen presentar una tendencia creciente, mientras que el número de horas y las participaciones relativas de las rentas de los factores en la renta nacional son estacionarias en media.

De esta forma, si el ciclo económico viene caracterizado por desviaciones de las series con respecto a una tendencia, es necesario estimar ésta y por tanto el componente cíclico de cada serie, cuestión que nos conduce a la problemática de la separación tendencia-ciclo. Cooley y Prescott (1995, pag 27) aseveran que el método de estimación de la tendencia no es único y no existe una forma única verdadera de representar el componente cíclico.

> "Every researcher who has studied growth and/or business cycle has faced the problem of how to represent those features of economic data that are associated with long-term growth and those that are associated with the business cycle -the deviation from the growth path. Kuznets, Mitchell and Burns and Mitchell [early papers on business cycles] all employed techniques (moving averages, piecewise trends etc.) that de one the growth component of the data in order to study the fluctuations of variables around the long-run growth path defined by the growth component. Whatever choice one makes about this is somewhat arbitrary. There is no single correct way to represent these components. They are simply different features of the same observed data".

Un método utilizado frecuentemente hasta los primeros años 80 era ajustar la tendencia a través de un polinomio de orden bajo (uno, generalmente) y obtener el componente cíclico por diferencias con la tendencia estimada. Esta forma de estimar el componente cíclico es muy rígida y conduce a errores considerables en la estimación debido a que estaríamos estimando una tasa constante de crecimiento para toda la muestra, con lo que nos podríamos encontrar largos periodos de tiempo donde la muestra, el PIB real, puede estar por debajo o por encima de la tendencia estimada.

Una forma alternativa sería calcular la tasa de variación de las series trimestre a trimestre, lo que nos daría una imagen temporal de la misma en forma de dientes de sierra, debido a que todas las observaciones anteriores quedan fuera del cálculo de dicha tasa, dando lugar a que las observaciones en sucesivos trimestres no estén correlacionadas.

El método que goza actualmente de más popularidad para estimar la tendencia es el filtro de Hodrick y Prescott (1980)[2]. El filtro se calcula a partir del siguiente problema de minimización:

$$\underset{\{\ln \bar{y}_t\}}{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} c_t^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(\ln \bar{y}_{t+1} - \ln \bar{y}_t) - (\ln \bar{y}_{t+1} - \ln \bar{y}_t) \right]^2$$

donde $c_t = \ln y_t - \ln \bar{y}_t$. El primer sumando es la suma de las desviaciones al cuadrado y es una medida del grado de aproximación entre la serie y la tendencia mientras que el segundo término es una medida del grado de suavización de la tendencia. El parámetro λ nos da el alisamiento de la tendencia. Si es igual a 0, entonces la serie es igual a la tendencia y no habría componente cíclico mientras que si tiende a infinito, entonces el segundo sumando tendría que ser cero con lo que tendríamos una tendencia lineal en el tiempo.

Hodrick y Prescott asumen que para datos trimestrales el valor de λ debe ser igual 1600.

Un filtro que ha sido también utilizado en estudios empíricos es el de Baxter y King (1995) basado en la teoría de filtros lineales de banda ancha.

---

[2]A pesar de las cautelas o de las posibles críticas. Puede consultarse a este efecto Canova, F (1998), Cogley, T y Nason J. (1995) o Marcet y Ravn (1997).

1.3. Teorías del ciclo hasta Keynes.

De acuerdo con Blanchard (2000), la historia de la Macroeconomía durante el siglo XX, y por extension a la evolución de las teorías sobre los ciclos económicos, puede ser dividida en tres etapas: el periodo antes de 1940 o antes de la publicación de La Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero de Keynes (1936), donde no podemos hablar de Macroeconomía como un cuerpo unificado de conocimientos, sino todo lo contrario, existe una desconexión entre lo que es la Teoría Monetaria y las teorías sobre el ciclo económico. Mientras que el centro de la Teoría Monetaría lo constituía la Teoría Cuantitativa del dinero y la discusión de sus efectos a corto plazo sobre el output no había ido mucho más allá desde los primeros escritos de Hume o Thornton, las diversas explicaciones del ciclo económico carecían de un cuerpo unificado dentro del cual debatir la interrelación entre las variables y cómo se transmitían los impulsos dentro del sistema. El común denominador era intentar explicar cómo las condiciones económicas en cada fase del ciclo conducen inevitablemente a que surja la siguiente. En suma, la no existencia de un modelo explícito sobre el que debatir cómo se determinan las variables endógenas, ni por tanto cuales serían los efectos de distintas políticas económicas sobre aquéllas da lugar a que encontremos en la literatura un conjunto más bien variado de explicaciones alternativas. El estado de la cuestión y la cierta complejidad de estas explicaciones está reflejada en el libro de texto de la época, Prosperity and Depression de Haberler (1937).

Sin pretender ser exhaustivo, una posible clasificación de las teorías del ciclo y los autores más relevantes en ponerlas de manifiesto podría ser la siguiente:

Tabla 1.2	
1. Teorías Unicausales	
Agricultura	S.Jevons, Moore
Psicología, Expectativas	Pigou
Puramente monetaristas	Hawtrey
2.Teorías monetarias o sobreinversión	Wicksell, Hayek
3.Teorías no monetarias	
Escasez de capital	Tugan-Baranowsky
Innovaciones	Schumpeter, Robertson
Subconsumo	Sismondi
4. Precios, costes y márgenes de beneficio	Mitchell

Como hemos comentado, esta literatura en general tenía en común que las explicaciones de los ciclos de expansión y recesión eran totalmente endógenos al sistema, esto es, las condiciones de la expansión creaban las condiciones para una recesión posterior y ésta a su vez los elementos para una expansión posterior.

Brevemente, podemos resaltar algunos de los conceptos o aportaciones más relevantes entre los que destacan el papel del crédito bancario elemento clave en el proceso de transmisión.

Wicksell, que aunque centra en el progreso técnico la fuerza externa y capaz de perpetuar el movimiento cíclico, describe el proceso acumulativo mediante el cual una expansión monetaria se traduce en un nivel de precios más alto. Distingue entre tipo de interés natural, básicamente la eficiencia marginal del capital keynesiana o el rendimiento del capital y el tipo de interés del dinero o tipo de interés bancario. Una bajada de éste en relación al natural debido a una expansión monetaria, provoca una expansión en la demanda de dinero, en la inversión y en la renta; el aumento del nivel de precios resultante y de la renta elevará la demanda de dinero; el sistema bancario actuará defensivamente ante la reducción de sus reservas, elevando los tipos nominales hasta llegar a un nuevo equilibrio, donde tipo natural y bancario se igualarán pero el nivel de precios será permanentemente más alto (Patinkin, 1972, pag 84).

El legado de Wicksell y su teoría monetaria encuentra eco en Hayek donde los factores monetarios esenciales para la expliación de ciclo económico. La expansión crediticia elevaría la inversión sin un correspondiente aumento en el ahorro voluntario por parte de los individuos, con lo que no tardará en llegar el "momento inevitable" en el que existirá una discrepancia fundamental entre los planes de consumidores y empresarios, percatándose éstos de haber cometido errores, (sobreinversión) ya que los tiempos de crédito abundante y tipos de interés bajos terminarán desvaneciéndose. Durante el proceso de expansión, la competencia entre empresas habrá elevado el precio de los factores productivos y entre ellos el tipo de interés bancario, con lo que la economía se encontraría simultáneamente con un exceso de oferta de bienes de capital y una reducción en la demanda de tales bienes.

"el meollo de la verdadera explicación de la crisis, a saber, el surgimiento de un fenómeno de escasez de capital que hace imposible la utilización del equipo de producción existente" (reproducido en Haberler, 1944, pag 371).

La inestabilidad del crédito bancario constituye la explicación de Hawtrey del Trade Cycle, inestabilidad que está ligada al estado de los negocios que depende de los tipos de interés, la psicología de los negocios y el volumen real de ventas.

Robertson, por otra parte se centra en las variaciones del stock de capital físico como principal determinante de las fluctuaciones industriales, destacando que tanto el progreso como los ciclos están ligados al impacto de las nuevas industrias.

J.M. Clark, el propio Robertson y Aftalion destacan el papel del acelerador de la inversión según el cual una variación dada en la demanda de consumo o en la renta aumenta la inversión, la renta y por tanto jugando un papel esencial en la expansión.

1.4. Keynes, keynesianos y el ciclo económico.

Sobre Keynes y el ciclo económico resaltaremos tres cuestiones.

En primer lugar, al amparo de la tradición intelectual de Cambridge, se ve influenciado tanto por el papel del ciclo del crédito de Hawtrey como de la psicología o las expectativas de los individuos de Pigou, así como del intercambio de ideas que mantuvo con Robertson. La influencia de Wicksell es patente en la obra de Keynes,Treatise on Money (1930). El desencadenante del ciclo se encontraría en algún evento de naturaleza no monetaria que estimule la inversión pero el proceso de transmisión está de nuevo en el papel del crédito.

En segundo lugar, en La Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero (1936) subraya que son los cambios cíclicos en la eficiencia marginal del capital el elemento clave a considerar.

> "el ciclo económico es mejor considerado, creo yo, como ocasionado por un cambio cíclico en la eficiencia marginal del capital, aunque complicado y con frecuencia agravado por cambios asociados en otras variables signficativas del sistema económico" (Keynes, 1936, pag 314).

La eficiencia marginal del capital depende no sólo de la abundancia o escasez de bienes de capital, y del coste de producir bienes de capital, sino de las expectativas corrientes acerca del rendimiento futuro de dichos bienes. La eficiencia marginal del capital depende de los cambios en las expectativas, porque fundamentalmente esta dependencia es la que provoca que aquélla esté sujeta a fluctuaciones que serían la explicación del ciclo económico.

Dado que las fluctuaciones en la eficiencia marginal del capital afectan sobre todo a la inversión privada, ésta experimentará mayor inestabilidad, provocando fluctuaciones en la demanda y en la producción final.

En tercer lugar, podemos señalar la contribución metodológica: Keynes piensa explícitamente en términos de tres mercados, bienes, dinero y de trabajo y cómo a partir de las implicaciones de equilibrio en cada uno, las políticas de demanda pueden afectar a las variables incluidas en el mismo.

Indudablemente las consecuencias sobre el papel que debería jugar la política fiscal y monetaria distaba años luz de lo que hasta entonces constituía el paradigma clásico basado tanto en la Teoría Cuantitativa como en el perfecto funcionamiento de los mercados.

Las palabras de Pigou, así atestigüan:

> "Nobody before him, so far as I know, had brought all the relevant factors, real and monetary at once, together in a single formal scheme, through which their interplay could be coherently investigated" (citado en Blanchard, 2000, pag 1378-1379).

La formalización del modelo keynesiano en el esquema IS-LM por parte de Hicks (1937) puede que no consiguiese atrapar la esencia de lo que Keynes pensaba, pero definir y clarificar la lista de mercados y resolver el equilibrio resultante dio como resultado el nacimiento de la Macroeconomía.

De forma paralela, el nacimiento y desarrollo de la Econometría condujo por una parte a intentar contrastar de forma cuantitativa las hipótesis keynesianas y por otra y siguiendo el enfoque de Frisch a construir modelos matemáticos lineales y dinámicos en los que lo importante era la capacidad de los mismos para generar un senda cíclica para el output a partir de perturbaciones generadas exógenamente.

Desde el punto de vista aplicado comienzan a desarrollarse los grandes modelos econométricos (el Brookings model constaba de casi 400 ecuaciones) que estaban basados en la estimación de ecuaciones derivadas del modelo keynesiano (véase Fair, C (1992) para una introducción a este enfoque).

Y es en este contexto en el que aparecen los modelos multiplicador-acelerador de Samuelson (1939), Metzler (1941) y Hicks (1950) donde el shock o la perturbación procede de cambios exógenos en la inversión privada y es la propia dinámica del modelo la que predice, para ciertos valores de los parámetros, el comportamiento cíclico del output. Son modelos en los que sólo tenemos el mercado de bienes y la producción agregada es determinada por la demanda efectiva.

Concretamente, la ecuación dinámica del modelo de Samuelson es:

$$Y_t = cY_{t-1} + \upsilon(C_t - C_{t-1}) + \epsilon_t$$

$$Y_t - c(1+\upsilon)Y_{t-1} + c\upsilon Y_{t-2} = \epsilon_t$$

La popularización del modelo de Samuelson entre los economistas es patente en la siguiente cita de Sargent (1979, p 184).

> "Maybe the most famous second-order difference equation in economics is the one associated with Samuelson's multiplier accelerator model".

1.5. El monetarismo.

Friedman no estaba en absoluto de acuerdo con el paradigma keynesiano por lo menos en dos cuestiones centrales. La primera es que el papel que puede jugar la política monetaria había quedado relegado a un segundo plano, y por tanto no era un elemento a considerar para explicar las fluctuaciones cíclicas y la segunda el excesivo intervencionismo del Estado que desprendía el pensamiento keynesiano y que le llevaba a impulsar o estabilizar la demanda efectiva con el fin de alcanzar los objetivos marcados por la política económica. Había caído en el olvido que las fuerzas del mercado pueden ser lo suficientemente fuertes y rápidas para corregir cualquier desequilibrio, dado que la información que suministran los precios en una economía de mercado es un elemento primordial para restablecer el equilibrio en los mercados.

En su influyente obra A Monetary History of the United States, 1867-1960, M. Friedman y A. Schwartz (1963) vienen a a corroborar empíricamente un hecho conocido ya desde los escritos de D. Hume y es que la cantidad de dinero y la producción real se mueven de forma conjunta en el tiempo y por tanto a lo largo de todos los ciclos[3] se observa que la política monetaria

[3] Y especialmente en las recesiones de 1920, 1931, 1937 y la desinflación de Volcker en 1981.

restrictiva es anterior a la caída del output real, esto es, existía una clara correlación entre variaciones en la cantidad de dinero y en el PIB nominal.

En general el comportamiento del ciclo americano y de otros países daba soporte al punto de vista de que las variaciones en la cantidad de dinero eran importantes para explicar las expansiones y las recesiones en la actividad económica, (en EEUU se acuñó la frase "recessions made the Fed").

La cuestión de la causalidad dinero-output, tema latente en Macroeconomía, fue contestada desde la posición keynesiana por Tobin en el trabajo Money and Income: Post Hoc Ergo Propter Hoc? (1970), en el que señala que la mera correlación no tiene porqué implicar causalidad y como veremos, más recientemente, los defensores del Ciclo Económico Real han defendido que las variaciones en la cantidad de dinero no son importantes para explicar las fluctuaciones cíclicas. Desde el punto de vista econométrico, Sims (1972) presenta evidencia que apoya el punto de vista monetarista, el dinero causa el output, aunque posteriormente al añadir el tipo de interés al sistema VAR estimado (con las siguientes variables, log Y, log P, log M) se reduce considerablemente la variación de la producción explicada por las innovaciones en la cantidad de dinero.

El problema desde el punto de vista clásico con precios flexibles en todos los mercados es que el dinero es neutral, esto es, es incapaz de afectar al output y sus variaciones se trasladan únicamente al nivel de precios, esto es, el output es independiente del nivel de precios y con la Teoría Cuantitativa del dinero como función de demanda agregada, la cantidad de dinero únicamente sirve para determinar el nivel de precios.

Friedman resuelve este problema modificando el modelo clásico utilizando el supuesto de información imperfecta entre los individuos, lo que genera a una curva de oferta agregada que combina el corto con el largo plazo. El modelo de Friedman conocido como " The Mispercepcions model" o modelo de percepciones erróneas, asume que la oferta de trabajo depende del salario real esperado. El nivel de precios esperado depende de los niveles de precios pasados en lo que se conoce como el supuesto de expectativas de tipo adaptativo.

A partir de las curvas de oferta y demanda de trabajo, función de producción, equilibrio en el mercado de trabajo y expectativas adaptativas para el nivel de precios, y expresadas en logaritmos, podemos determinar la curva de oferta agregada a corto plazo.

$$n^s = \beta(w_t - p_t^e)$$

$$w_t - p_t = \ln(1-\alpha) - \alpha n_t^d$$

$$y_t = \ln(1-\alpha) + (1-\alpha) n_t^d$$

$$n_t^d = n_t^s$$

$$p_t^e = p_{t-1}$$

donde w_t es el salario nominal, p_t es el nivel de precios, y_t es el nivel de producción, n_t^d es la demanda de trabajo, n_t^s es la oferta de trabajo, expresadas en logaritmos.

La función de oferta agregada viene dada por:

$$y_t = \ln(1-\alpha)\left[1 + \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\alpha\beta}\right] + \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\alpha\beta}(p_t - p_t^e) \qquad ((1.1))$$

El supuesto fundamental es que la demanda de trabajo depende del salario real efectivo mientras que la oferta de trabajo depende del salario real esperado.

Veamos la importancia del supuesto de información imperfecta entre los agentes económicos para comprender porqué el modelo genera este tipo de resultado. Una expansión monetaria eleva el nivel de precios, sin embargo, las diferencias de información sobre el nuevo nivel de precios provocan efectos reales sobre los niveles de empleo y producción. Mientras que las empresas sí conocen o tienen información perfecta sobre el nuevo nivel de precios, los trabajadores no, sólo revisan sus expectativas sobre el nivel de precios cuando ha pasado un periodo. El aumento en el nivel de precios disminuye el salario real pagado por las empresas, sin embargo los trabajadores creen erróneamente que el nivel de precios permanece constante y aunque sí ha subido su salario nominal, sobreestiman el salario real que realmente perciben porque están subestimando la subida real en el nivel de precios. La caída en el salario real es lo que provoca el aumento en los niveles de empleo y producción por encima de sus valores de equilibrio a largo plazo.

En suma, la demanda de trabajo por parte de las empresas depende del salario real que es conocido en cualquier momento, mientras que la oferta de trabajo por parte de las economías domésticas depende del salario real esperado y éste es función del nivel de precios que se ajusta con cierto retardo en el tiempo debido al supuesto de expectativas adaptativas.

Conforme las economías domésticas van ajustando sus expectativas sobre el nivel de precios se percatan de que su salario real no ha aumentado, sino todo lo contrario, con lo cual la curva de oferta de trabajo se desplaza en sentido ascendente. A largo plazo y en ausencia de perturbaciones monetarias adicionales, la economía vuelve a su nivel de equilibrio a largo plazo con un nivel de precios permanentemente más alto.

En el gráfico 1.2. vemos la cuestión anterior. La oferta de trabajo se desplazaría desde $S_0(W_0/P_0)$ a $S_0(W_1/P_0)$, porque los salarios nominales aumentan pero el nivel de precios percibido por los individuos no lo hace. Esto aumenta el empleo y la producción a corto plazo. Cuando las expectativas se ajusten, el equilibrio final estará en el punto E_1 donde el salario real permanece constante y la política monetaria expansiva sólo ha conseguido elevar el nivel de salario nominal y el nivel de precios.

Laidler (1976) presenta un modelo que resume las ideas monetaristas sobre el ciclo económico. Si a la curva de oferta agregada (1.1) le añadimos una curva de demanda agregada podremos determinar el nivel de precios y la producción. Demostraremos que un cambio en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria nominal conduce a corto plazo a un aumento en la tasa de crecimiento del output real, pero a largo plazo, dicha tasa de crecimiento es nula, esto es el output vuelve a su tendencia de crecimiento de largo plazo. Adicionalmente, el modelo es capaz de producir fluctuaciones cíclicas en la tasa de crecimiento del output.

La curva de demanda agregada viene dada por la Teoría Cuantitativa, en la que hemos supuesto que la velocidad de circulación es constante, el

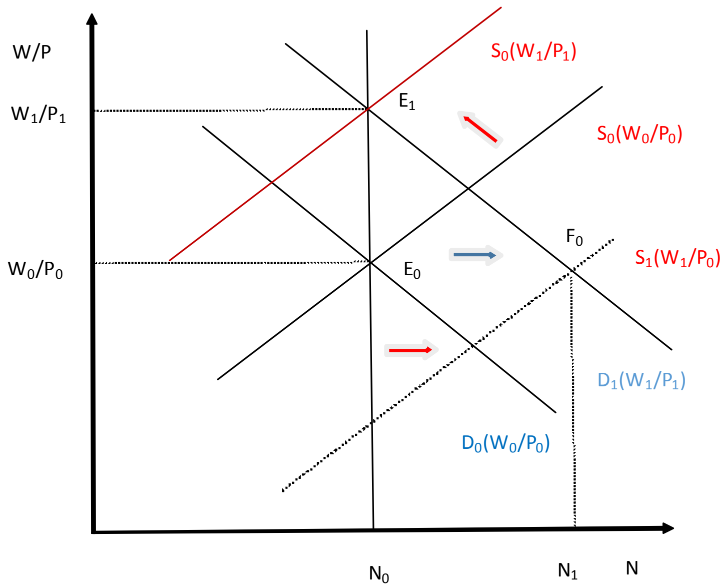

Gráfico 1.2

output potencial crece a una tasa media, g, exógenamente determinada por el progreso tecnológico y las expectativas son adaptativas sobre la tasa de inflación.

$$m_t = p_t + y_t \qquad ((1.2))$$

$$y_t - \bar{y}_t = \theta(p_t - p_t^e) \qquad \theta > 0 \qquad ((1.3))$$

$$\pi_t^e = \pi_{t-1}$$

$$\bar{y}_t = y_0 + gt$$

Diferenciando (1.2) y (1.3), el modelo en tasas de crecimiento viene expresado como:

$$\Delta m_t = \Delta p_t + \Delta y_t \Rightarrow \dot{m}_t = \pi_t + \dot{y}_t \qquad ((1.4))$$

$$\Delta\left(y_t - \bar{y}_t\right) = \theta\Delta(p_t - p_{t-1} - (p_t^e - p_{t-1})) \quad (\theta > 0)$$

Por tanto, la oferta agregada queda como:

$$\Delta y_t - \Delta\bar{y}_t = \theta(\Delta\pi_t - \Delta\pi_{t-1})$$

$$\dot{y}_t - g = \theta(\pi_t - 2\pi_{t-1} + \pi_{t-2}) \qquad ((1.5))$$

Del sistema de dos ecuaciones (1.4) y (1.5) podemos deducir la dinámica para la tasa de crecimiento del PIB y para la tasa de inflación. Despejando la tasa de inflación en la ecuación de DA e introduciéndola en la de oferta con sus retardos correspondientes.

$$\dot{y}_t - g = \theta(\dot{m}_t - \dot{y}_t - 2(\dot{m}_{t-1} - \dot{y}_{t-1}) + \dot{m}_{t-2} - \dot{y}_{t-2})$$

$$(1+\theta)\dot{y}_t - 2\theta\dot{y}_{t-1} + \theta\dot{y}_{t-2} = g + \theta(\dot{m}_t - 2\dot{m}_{t-1} + \dot{m}_{t-2})$$

$$\dot{y}_t - \frac{2\theta}{1+\theta}\dot{y}_{t-1} + \frac{\theta}{1+\theta}\dot{y}_{t-2} = \frac{1}{1+\theta}g + \frac{\theta}{1+\theta}(1 - 2L + L^2)\dot{m}_t$$

Haciendo $\phi = \frac{\theta}{1+\theta} < 1$ y por tanto $\frac{1}{1+\theta} = 1 - \phi$.

$$\dot{y}_t - 2\phi\dot{y}_{t-1} + \phi\dot{y}_{t-2} = (1-\phi)g + \phi(\dot{m}_t - 2\dot{m}_{t-1} + \dot{m}_{t-2})$$

De forma análoga podemos demostrar que la dinámica para la tasa de inflación viene dada por:

$$\pi_t - 2\phi\pi_{t-1} + \phi\pi_{t-2} = (1-\phi)(\dot{m}_t - g)$$

Las dos ecuaciones lineales de segundo orden son estables ya que verifican las condiciones de estacionariedad, por tanto, a largo plazo el modelo es convergente hacia sus valores de equilibrio a largo plazo; además, el modelo a corto plazo es oscilante, ya que el discriminante de la ecuación característica es negativo.

$$\Delta = 4\phi(\phi - 1) < 0$$

Si la tasa de crecimiento sigue el siguiente proceso dinámico de paseo aleatorio, una perturbación aleatoria tiene un efecto permanente en la tasa de crecimiento monetario.

$$\dot{m}_{t+i} = \dot{m}_{t+i-1} + \varepsilon_{t+i} : \forall i \geq 0$$

Esto es, una perturbación que eleve la tasa de crecimiento monetario, eleva la tasa de crecimiento del output y la tasa de inflación a corto plazo.

La solución para cada una de las variables viene dada por:

$$\dot{y}_t = K_1\lambda_1^t + K_2\lambda_2^t + \frac{\phi(1-2L+L^2)}{(1-2\phi L+\phi L^2)}\dot{m}_t$$

$$\pi_t = K_1\lambda_1^t + K_2\lambda_2^t + \frac{1-\phi}{(1-2\phi L+\phi L^2)}\dot{m}_t$$

Los dos primeros sumandos nos generan la dinámica para cada una de las variables, mientras que el tercero nos da la solución de largo plazo.

Los multiplicadores de impacto o a corto plazo de un aumento en la tasa de crecimiento monetario vienen dados por:

$$\frac{\partial \dot{y}_t}{\partial \varepsilon_t} = \phi > 0 : \frac{\partial \pi_t}{\partial \varepsilon_t} = 1-\phi > 0$$

Esto es, una perturbación que eleve la tasa de crecimiento monetario, eleva la tasa de crecimiento del output y la tasa de inflación a corto plazo.

Para calcular los resultados a largo plazo, podemos expresar la parte de la solución que nos genera el largo plazo en función de las raíces de la ecuación característica para cada una de las variables, de tal forma que:

$$\dot{y}_{t+j} = \frac{\phi(1-2L+L^2)}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\lambda_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i\dot{m}_{t+j-i} - \lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^i\dot{m}_{t+j-i}\right] : \forall j \geq i$$

$$\pi_{t+j} = \frac{1-\phi}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\lambda_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i\dot{m}_{t+j-i} - \lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^i\dot{m}_{t+j-i}\right] : \forall j \geq i$$

A largo plazo:

$$\underset{j\to\infty}{lím}\frac{\partial \dot{y}_{t+j}}{\partial \varepsilon_t} = 0 : \qquad \underset{j\to\infty}{lím}\frac{\partial \pi_{t+j}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

En suma, el output retorna a su senda tendencial de crecimiento y la perturbación monetaria sólo tiene efectos a corto plazo sobre la producción real, mientras que la tasa de inflación se eleva de forma permanente en la misma cuantía que la perturbación monetaria ocurrida en la oferta monetaria nominal.

1.6. El modelo de R.E. Lucas.

Los años 60 fueron una época de gran optimismo para los macroeconomistas. Asentado firmemente el modelo keynesiano, al que se le había añadido una curva de Phillips (1958) que expresaba la relación inversa y estable a corto y largo plazo entre la variación de los salarios nominales o inflación de salarios y la tasa de desempleo, el único dilema de política económica era determinar qué relación inflación-desempleo se deseaba alcanzar como objetivo de política económica. Las políticas de gestión de la demanda agregada parecía que habían hecho desaparecer los ciclos económicos tal y como muestra el título del volumen de Bronfenbrenner (1969), Is the Business Cycle obsolete?.

Sin embargo, desde el punto de vista metodológico el principal defecto del modelo keynesiano era la ausencia de consistentes fundamentos microeconómicos basados en el comportamiento optimizador de los agentes económicos. Por contra, la teoría del equilibrio competitivo sí hace posible estudiar el comportamiento de variables agregadas a partir del comportamiento optimizador de los individuos, y por tanto se deben rechazar aquellas teorías que aún pudiendo generar sendas cíclicas para las variables del modelo no están fundamentadas en los principios básicos de la Microeconomía. La crítica de Lucas al modelo keynesiano y a sus aplicaciones econométricas se plasma en su conocido trabajo "Econometric policy evaluation: A critique" (1976).

En concreto, comienzan a tenderse los puentes entre la Microeconomía y la Macroeconomía.

Las aportaciones de Friedman (1968) y Phelps (1968) demuestran la inconsistencia de la curva de Phillips, aseverando que a corto plazo existe dicha relación pero a largo plazo el desempleo es totalmente independiente de la tasa de inflación. Lucas (1976) refuerza este punto de vista desde un ángulo diferente, las ecuaciones de comportamiento keynesianas son incapaces de evaluar correctamente los cambios en la política económica, esto es, las expectativas sobre la política económica futura influyen en las decisiones que toman hoy los agentes económicos y por tanto alteran los parámetros de las ecuaciones de comportamiento del modelo keynesiano; el cambio en los parámetros estructurales del modelo cuando éste se somete a cambios en las variables exógenas o de política invalida los resultados de los modelos keynesianos estructurales que forjaron la macroeconometría a partir de los años 50.

El debate keynesiano-monetarista se extiende durante la década de los 70, pero con una gran diferencia, el supuesto de expectativas adaptativas es suplantado por el supuesto de expectativas racionales y el análisis de los shocks monetarios centra el debate a nivel académico.

Sin embargo, la denominada Revolución de las Expectativas Racionales[4] o el nacimiento de la Nueva Macroeconomia Clásica no supuso una derrota de los economistas keynesianos. Los debates en EEUU entre los denominados economistas de agua dulce, neoclásicos, y los economistas de agua salada, keynesianos[5], estaba basado sobre si los precios se ajustaban rápidamente o por contra la existencia de determinadas rigideces en los mercados de bienes o de trabajo era el marco apropiado para estudiar los efectos de la política monetaria.

La figura sobresaliente entre los nuevos economistas clásicos es R. E. Lucas[6], que recoge el testigo de Friedman y elabora un modelo similar al monetarista en el que la información imperfecta juega un papel predominante; como tendremos ocasión de comprobar, la introducción del supuesto de expectativas racionales genera conclusiones radicales sobre el efecto de las perturbaciones monetarias sobre las variables reales.

El denominado “modelo de islas” de Lucas (expresión acuñada por Phelps)

[4] Para una aproximación metodológica a la Nueva Macroeconomía Clásica puede consultarse Usabiaga Ibáñez y O'Kean Alonso (1994).

[5] Los términos saltwater economist (economistas de agua salada) y freshwater economist (economistas de agua dulce) para diferenciar las dos corrientes dominantes en el pensamiento macroeconómico aparecen por primera vez en un artículo de R.E. Hall (1976). Con estos términos se alude a que los economistas keynesianos se encuentran concentrados en el este y oeste costero de EEUU (Yale, Princeton, Berkeley, Harvard) mientras que los economistas de corte clásico se encuentran en la zona de los Grandes Lagos (Chicago, Rochester, Minnesota).

[6] Al igual que sucede con Keynes, las referencias bibliográficas sobre R.E. Lucas son extensas. Una selección de sus artículos más citados se encuentra en la obra Studies in Business-Cycle Theory (1981) y una valoración de sus aportaciones en el artículo de V.V. Chari (1998).

se basa en el supuesto de información imperfecta de tal forma que los agentes conocen el precio del bien que producen pero desconocen el nivel de precios agregado. A diferencia del modelo de Friedman, los individuos tienen expectativas racionales.

En el desarrollo de la explicación de la aportación de Lucas (1972) seguimos el enfoque de Romer (2002, cap 6) y Blanchard y Fischer (1989, cap 7), y que fue bautizada por Phelps (1990) como la versión "down-to-earth"[7].

El modelo supone n mercados competitivos, donde la demanda de cada bien puede verse afectada por dos tipos de perturbaciones: un shock monetario agregado que afecta al conjunto del sistema y un shock específico a cada mercado. La respuesta óptima de cada individuo es muy diferente ante cada tipo de perturbación, sin embargo, cada individuo no dispone de suficiente información para distinguir uno de otro, esto es, se conoce el precio del propio bien que cada "isla" produce pero tiene información imperfecta a priori sobre el nivel de precios, conocido sólo en el momento de su realización. Este es el conocido problema de extracción de señal.

En el modelo, la oferta de trabajo individual depende del precio relativo del bien en términos del nivel agregado de precios, expresión que se obtiene a partir del clásico problema de maximización de la utilidad de un individuo en el que se enfrenta a dos restricciones, la temporal y la presupuestaria. Lo importante es que la oferta de trabajo aumentará sólo si el aumento en el precio observado por el oferente i-ésimo es mayor que el nivel general de precios, esto es, el individuo sólo estará dispuesto a trabajar más, sustituir tiempo de ocio por horas de trabajo, si la retribución del bien que produce ha aumentado en términos relativos, en relación al aumento del nivel general de precios.

$$N_i = \bar{N} E \left(\frac{P_i}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

donde $\gamma - 1$ es la elasticidad de la desutilidad marginal de las horas trabajadas. Dado que no existe información perfecta, la oferta de cada uno de los bienes producidos en cada "isla" depende del valor esperado que tome el precio relativo, o lo que es lo mismo la forma de la función de oferta agregada

[7] Así lo cita Arnold, L (2002), pag 51.

viene dada en logaritmos por:

$$n_i = \bar{n} + \frac{1}{\gamma - 1} E(p_i - p) = \bar{n} + \frac{1}{\gamma - 1}(p_i - p^e)$$

$$y_i = \bar{y} + \frac{1}{\gamma - 1}(p_i - p^e)$$

donde r_i es el precio relativo del bien en logaritmos y p_i y p^e son el precio del bien ofrecido por cada "isla" y el nivel de precios esperado respectivamente. Este viene dado por la esperanza matemática para el nivel de precios, condicionado a la información que dispone cada individuo en el momento de realizar la predicción, esto es, $p_t^e = E(p\,|I)$.

$$p_i = p + r_i$$

Se asume que el nivel de precios y el precio relativo vienen dados por las siguientes características:

$$p \sim N(E(p), \sigma_p^2) : r_i \sim N(0, \sigma_r^2) : Cov(p, r_i) = 0$$

Los supuestos relativos a las distribuciones de p y r_i permiten deducir además:

$$Cov(p, p_i) = \sigma_p^2 : p_i \sim N(E(p), \sigma_p^2 + \sigma_r^2)$$

El problema al que se enfrenta cada "isla" es estimar el nivel de precios, utilizando la información que dispone sobre p_i. En primera instancia podría estimar el nivel de precios a partir de su media incondicional $E(p)$, sin embargo, puede mejorar la predicción sobre el nivel de precios utilizando la información que dispone sobre su propio precio; en suma, cada "isla" se enfrenta al problema de estimar $E(p\,|p_i)$. El conocimiento de las varianzas es importante para mejorar la estimación. Por ejemplo, supongamos que $\sigma_p^2 = 5\sigma_r^2$, entonces si observamos un precio para el bien i-ésimo alto, tenemos que:

$$Var(p_i) = \sigma_p^2 + \sigma_r^2 = 6\sigma_r^2 = \frac{6}{5}\sigma_p^2$$

Esto es, la variabilidad relativa del nivel de precios con respecto a la variabilidad del precio del bien es 5/6 mientra que la variabilidad del precio relativo es sólo 1/6 de la variabilidad del precio de cada bien, con lo cual sería razonable asumir que la mayor parte de la observación de un alto precio para p_i se debe a la realización de p y no del precio relativo. De esta forma, las varianzas relativas nos ofrecen una forma más precisa de ponderar la estimación del nivel de precios condicionado.

El supuesto de expectativas racionales implica en este contexto que:

$$p^e = E(p\,|I) = E(p\,|p_i)$$

donde el conjunto de información disponible I para cada individuo viene dada por el precio del bien que produce.

Dados los supuestos enunciados y el hecho de que si dos variables siguen una distribución normal entonces su distribución conjunta es normal también, la mejor predicción lineal que podemos realizar del nivel de precios viene dada por:

$$E(p\,|p_i) = \alpha + \beta p_i$$

La mejor estimación insesgada de los parámetros implica minimizar el error cuadrático medio con respecto a los parámetros α y β.

$$\min E\left[p - E(p\,|p_i)\right]^2$$

La estimación mínimo cuadrática de los parámetros viene dada por:

$$\widehat{\alpha} = E(p) - \widehat{\beta}E(p) : \widehat{\beta} = \frac{Cov(p, p_i)}{Var(p_i)} = \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_r^2}$$

$$p^e = E(p\,|p_i) = E(p) + \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_r^2}(p_i - E(p))$$

Sustituyendo en la función de oferta de trabajo o en la función de oferta obtenemos la conocida función de de oferta de Lucas en las que el output responde a diferencias entre el nivel de precios y el nivel esperado de precios.

$$y_i - \bar{y}_i = \frac{1}{\gamma - 1}(p_i - E(p) - \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_r^2}(p_i - E(p))$$

y agregando para el conjunto de todos los individuos:

$$y - \bar{y} = \theta(p - E(p)) : \theta = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\sigma_r^2}{\sigma_p^2 + \sigma_r^2}$$

Claramente, la producción se desvía de su nivel normal cuando existen sorpresas de precios, esto es, el nivel de precios efectivo en un periodo es distinto del nivel de precios esperado.

Si cerramos el modelo con una ecuación de demanda, por ejemplo, la ecuación derivada de la Teoría Cuantitativa, podemos ver que sólo las sorpresas monetarias tienen efectos a corto plazo en el output, esto es, cambios no anticipados por los individuos, que les hacen confundir cambios en el precio del bien que ofrece con cambios en el nivel general de precios. Por contra, cualquier cambio predecible, anticipado y anunciado que sea creible no tendrá efectos ni a corto ni a largo plazo sobre el nivel de output.

Dado que:

$$m = p + y$$

La solución para el nivel de producción es:

$$y - \bar{y} = \theta(m - y - E(m) - \bar{y})$$

$$y = \bar{y} + \frac{\theta}{1 + \theta}(m - E(m)) \qquad ((1.6))$$

Esto es, la producción fluctúa alrededor de su nivel potencial debido a los cambios no esperados en la oferta monetaria o sorpresas monetarias, definidas como la diferencia entre la oferta monetaria en un periodo y la estimación de la misma realizada por los agentes económicos. De esta forma, cambios anunciados y creíbles de la política monetaria no afectarían al PIB y sólo la inflación no anticipada, no esperada, puede provocar cambios en las horas trabajadas y en la producción al confundir a los individuos en su estimación sobre el precio relativo de los bienes.

Varias conclusiones pueden obtenerse del modelo.

En primer lugar, si deseamos minimizar la amplitud de las fluctuaciones del output los bancos centrales deben seguir una regla monetaria e intentar cumplirla por todos los medios; en segundo lugar, el proceso de ajuste del output hacia su nivel normal es rápido (dura un periodo) ya que cuando los individuos observan el nivel de precios realizado comprueban si se ha producido alguna discrepancia entre el nivel de precios y el estimado por ellos, ajustando rápidamente su oferta de horas al nuevo nivel de precios relativos; en tercer lugar, el banco central podría reducir la tasa de inflación con sólo anunciar y llevar a cabo una política monetaria de carácter restrictivo sin provocar una recesión, simplemente se produciría un ajuste en los precios pero no afectaría a la producción; en cuarto lugar, las políticas contracíclicas que hagan depender la oferta monetaria nominal de otros indicadores o variables económicas no tienen efecto sobre el output ya que los parámetros estructurales de dichas políticas son anticipados por los individuos, sólo componentes impredecibles o no anticipados provocarán sorpresas de precios (ésta es la conocida proposición de inefectividad de Sargent y Wallace, (1975)) y finalmente el efecto de la sorpresa monetaria sobre el output depende de las varianzas respectivas del precio relativo y del nivel general de precios lo que a su vez depende de la variabilidad en el pasado de la política monetaria y por ende de la credibilidad pasada del banco central. Si por ejemplo σ_p^2 ha sido tradicionalmente alta, la función de oferta agregada es vertical y los individuos no varían sus horas de trabajo ya que estiman que lo que de verdad está ocurriendo es que cuando observan una subida en cada precio individual p_i, interpretan que realmente están subiendo todos los precios de la economía. y por tanto el efecto de la política monetaria sobre la producción es prácticamente nulo.

Tanto el modelo monetarista como el modelo de Lucas, basados en la información asimétrica no son lo suficientemente convincentes para poder ser considerados explicaciones plausibles del ciclo económico. En primer lugar el supuesto de información asimétrica o imperfecta sobre el nivel agregado de precios es difícil de justificar en una economía moderna; en segundo lugar, el modelo con expectativas racionales no puede explicar la autocorrelación positiva en el nivel de producción que se observa en las series de PIB; en tercer lugar, sería fácil hacer descender la tasa de inflación desde cualquier nivel arbitrariamente alto sin provocar una recesión, esto es, la tasa de sacrificio implícita en el modelo es cero, lo cual también está en contra de la evidencia empírica.

Finalmente, podemos resaltar tres estudios econométricos que intentaron dilucidar si sólo las sorpresas monetarias pueden afectar a la producción.

El primer estudio econométrico sobre el papel que juega el componente no anticipado de la política monetaria se debe a Barro (1978) el cual predice que hay evidencia a favor del modelo. En primer lugar, estima una regresión para el crecimiento de M1 e identifica los residuos de la misma como el componente no anticipado de la política monetaria. Seguidamente explica el PNB real a partir del valor corriente y pasado de dichos residuos. El resultado es que los coeficientes son altamente significativos. Al realizar la misma regresión pero reemplazando el componente no observable por el observable los resultados no son tan claros.

Mishkin (1982) realiza una regresión similar pero uniendo los dos componentes en la estimación y sólo el componente no anticipado corriente es significativo mientras que los coeficientes para el componente anticipado son en general significativos estadísticamente y cuantitativamente mayores.

Finalmente, Boschen y Grossman (1982) se centran en la informaciones preliminar que suministra la Reserva Federal sobre los agregados monetarios, información que es posteriormente revisada. Si la hipótesis del modelo New Classical fuese cierta, el avance en la información no tendría ninguna importancia pero sí la revisión la misma. De nuevo, sus estimaciones estiman lo contrario, la información conocida antes de ser revisada tiene una influencia significativa en el PNB, mientras que las revisiones hechas a posteriori no son importantes.

1.7. Modelos keynesianos con rigideces nominales.

La insatisfacción para ofrecer una explicación plausible a partir del enfoque de equilibrio abanderado por los economistas de corte clásico condujo rápidamente al desarrollo de modelos dinámicos en los que el supuesto fundamental en el que estaban basados era la rigidez de precios y/o salarios, aunque participaban de dos elementos comunes: explicar las fluctuaciones del output a partir de cambios en la cantidad de dinero, en suma, a cambios en la demanda agregada y la utilización de expectativas racionales.

El mecanismo de transmisión de la política monetaria afecta al output debido a que mientras los salarios permanezcan constantes a un nivel prefijado, el aumento en el nivel de precios conduce a una disminución en el salario real que aumenta la demanda de trabajo. La lenta respuesta de salarios y/o precios ante cambios en la demanda da lugar a que en el proceso de ajuste o transición, el output se vea afectado por dichos cambios, con lo cual tampoco podemos esperar ningún tipo de variación conjunta entre salario real y empleo en respuesta a las perturbaciones de demanda.

Las implicaciones de la rigidez de salarios y precios en modelos de equilibrio general fue explorada en los años 70 en lo que se llegó a denominar Macroeconomía del desequilibrio o Macroeconomía con precios fijos. Este enfoque acabó paulatinamente siendo abandonado básicamente debido a la ausencia de microfundamentos y a las ambigüedades que surgían al computar los efectos de las perturbaciones de demanda sobre las variables relevantes ya que los resultados dependían críticamente de los supuestos realizados sobre las reglas de racionamiento que operaban en cada mercado.

El cambio de estrategia comenzó por especificar explícitamente las imperfecciones en los mercados e intentar derivar dichas rigideces a partir del comportamiento óptimo de los agentes económicos. El aspecto crucial es fijar la forma específica en que las reglas de fijación de precios son adoptadas por aquéllos que tienen capacidad para hacerlo, pudiendo distinguir dos tipos de enfoques: reglas de fijación de precios dependientes del tiempo (time dependent rules) o dependientes del estado de alguna variable específica (state dependent rules).

Dentro de las primeras podemos o bien suponer que los salarios y/o los precios son cambiados a intervalos fijos de tiempo, habitualmente cuando los contratos expiran o bien suponer que el precio es predeterminado para una intervalo de tiempo dado esto es, el precio es fijo y además constante durante varios periodos.

Como tendremos ocasión de observar repetidamente, el grado de persistencia de los shocks monetarios depende mucho de la sincronización en la revisión de los salarios y/o los precios.

1.7.1. Un modelo sencillo de referencia con fijación de salarios sincronizada.

El modelo más sencillo de fijación de precios supone que la fijación de salarios es simultánea, esto es, todos los individuos negocian su salario en el mismo periodo de tiempo y para un solo periodo futuro, de tal forma que su objetivo sea conseguir un salario real constante.

Las ecuaciones del modelo son la curva de demanda agregada, una curva de oferta agregada y el mecanismo que liga los salarios nominales con el nivel de precios esperado para el periodo en el cual se harán efectivos, esto es, los salarios se negocian al principio del periodo t y el nivel de precios no es observable para dicho periodo aún.

$$\begin{aligned} y_t &= m_t - p_t \\ y_t &= \frac{\alpha - 1}{\alpha}(w_t - p_t) \qquad ((1.7)) \\ w_t &= E_{t-1}p_t \end{aligned}$$

La oferta agregada, ecuación (1.7) se deriva a partir del comportamiento optimizador de una empresa representativa. Un modelo estático y sencillo que parta del supuesto convencional de que las empresas maximizan sus beneficios, y cuentan como restricciones, tanto la tecnología disponible como la demanda de bienes nos permite deducir la oferta agregada en función del salario real. La función de producción es del tipo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala y a corto plazo, $K = \overline{K} = 1$ mientras que la función de demanda tiene elasticidad precio de la demanda constante (σ) y mayor que la unidad.

$$Max \quad PY - WN$$

$$s.a. \quad P = f(Y) = Y^{-\sigma} : (\sigma > 1) : Y = N^{1-\alpha} : (0 < \alpha < 1)$$

$$\frac{d\pi}{dY} = \frac{\sigma - 1}{\sigma} Y^{-\frac{1}{\sigma}} - \frac{W}{1-\alpha} Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 \Rightarrow P = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \frac{W}{1-\alpha} Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Y en logs:

$$y_t = -\frac{1-\alpha}{\alpha}(w_t - p_t) - \ln \frac{\sigma}{\sigma - 1} + \ln(1-\alpha)$$

La ecuación de fijación de salarios o de negociación de los mismos se basa en el supuesto de que los individuos desean conseguir un salario real, en valor esperado, aproximadamente igual a 1[8].

$$\varpi = 1 = E_{t-1}\left(\frac{W_t}{P_t}\right) \Rightarrow \ln 1 = \ln W_t + \ln E_{t-1} P_t^{-1} \approx$$

$$\approx \ln W_t + E_{t-1} \ln P_t^{-1} = w_t - E_{t-1} p_t = 0$$

La perfecta sincronización en la fijación o negociación de todos los salarios, hace que la solución para el output venga dada por:

$$y_t = (1-\alpha)(m_t - E_{t-1} m_t) \qquad ((1.8))$$

Esto es, al igual que en el modelo con información asimétrica de Lucas sólo cambios no anticipados en la oferta monetaria afectan a la producción, aunque el mecanismo de transmisión es diferente. En este caso, una "sorpresa monetaria" positiva que suceda cuando los salarios han sido fijados, eleva el

[8]Dada la desigualdad de Jensen y la concavidad estrica de la función ln realmente se verifica:

$$\ln E_{t-1} P_t^{-1} > E_{t-1} \ln P_t^{-1}$$

nivel de precios, permitiendo que el salario real efectivo sea inferior al deseado y por tanto, la demanda de trabajo, la producción y el empleo sean mayores. Sin embargo, este efecto dura un solo periodo, ya que cuando al siguiente periodo los salarios se vuelven a fijar, los agentes tendrán en cuenta el nivel de precios más alto, los salarios nominales subirán y la producción retornará a su nivel normal.

Este tipo de modelización predice un comportamiento contracíclico de los salarios reales ante una expansión monetaria no anticipada si ésta es llevada a cabo en el intervalo temporal entre los ajustes de salarios. Dunlop (1938) y Tharsis (1939) ya hicieron esta observación a Keynes, que está en contra del hecho contrastado de que la correlación entre salarios reales y producción es positiva.

1.7.2. El modelo de Fischer (1977).

Ampliemos el modelo anterior e introduzcamos la siguiente variante con el fin de generar más persistencia en el output ante una perturbación monetaria. Ahora la negociación de salarios no es simultánea, es decir, no está sincronizada en el tiempo. Podemos dividir a los trabajadores en dos grupos de igual tamaño, en el que el primero negocia su salario al principio del periodo $t-1$ para los periodos $t-1$ y t, mientras que el segundo negocia su salario al comienzo del periodo t para los periodos t y $t+1$. Cada grupo negocia su salario con el objetivo de alcanzar un salario real esperado constante, exactamente igual que en el modelo anterior.

Con este esquema, los salarios tienen un perfil escalonado. Podemos suponer además que los trabajadores negocian un salario distinto para cada uno de los periodos.

En este caso, los salarios vienen predeterminados para dos periodos y como demostraremos las perturbaciones monetarias pueden afectar al output durante más de un periodo.

El modelo de oferta-demanda agregada, viene dado por las ecuaciones siguientes.

A partir de la demanda agregada, la oferta agregada y la fijación escalonada en los salarios, tenemos que:

$$y_t = m_t - p_t$$

$$y_t = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\left(\overline{w}_t^{ef} - p_t\right)$$

$$w_t^{(t-1)} = w_{t-1} = E_{t-2}p_t : w_t^{(t)} = w_t = E_{t-1}p_t$$

Donde $w_t^{(t-1)}$ es el salario negociado en $t-1$ y que estará en vigor hasta el periodo t para la mitad de los trabajadores y $\overline{w}_t^{ef}$ es el salario nominal medio efectivo en el momento t. Este puede determinarse como una media geométrica de los salarios de los dos grupos, esto es[9]:

$$\overline{w}_t^{ef} = \ln \overline{W}_t^{ef} = \ln\left[W_t^{(t-1)}W_t^{(t)}\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\left(w_t^{(t-1)} + w_t^{(t)}\right) = \frac{1}{2}(w_{t-1} + w_t)$$

En el momento t tendremos dos tipos vigentes de salarios, w_t que es el percibido por aquellos trabajadores que negociaron su salario al comienzo del periodo t y $w_{t-1}^{(t-1)}$ que fue el salario negociado por el resto al principio del periodo $t-1$.

Téngase en cuenta que cuando se negocian los salarios, al principio de cada periodo, el nivel de precios para dicho periodo no es observable; de esta forma, dado que el objetivo de la negociación es mantener un salario real en términos esperados, la relación entre salario negociado y nivel de precios (en logs) viene dada por:

$$w_t^{(t-1)} = E_{t-2}p_t : w_t^{(t)} = w_t = E_{t-1}p_t$$

Resolviendo para las expectativas en cada periodo, el nivel de precios viene dado por:

$$p_t = \frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha}m_t + \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}E_{t-1}m_t + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}E_{t-2}m_t$$

[9] Utilizamos esta expresión para la media de los salarios para mantener la estructura de la ecuación lineal en logaritmos.

Mientras que la solución para el output viene dada por:

$$y_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}(m_t - E_{t-1}m_t) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(m_t - E_{t-2}m_t)$$

La producción se desvía de su nivel normal si se producen "sorpresas monetarias" entre el instante en el que se fijan los salarios y el momento de la renegociación de los mismos.

Supongamos ahora que la oferta monetaria nominal viene dada por el siguiente proceso autorregresivo, en el que como sabemos un shock aleatorio eleva de forma permanente la oferta monetaria nominal. Deseamos calcular los efectos de una perturbación monetaria, ε_t sobre la producción

$$m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow m_t - E_{t-1}m_t = \varepsilon_t$$

La solución para el output en función de las perturbación monetaria no esperada es:

$$y_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}\varepsilon_t + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) \Rightarrow y_t = (1-\alpha)\varepsilon_t + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\varepsilon_{t-1}$$

En este caso sencillo, el efecto de la política monetaria sobre la producción dura exactamente dos periodos.

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1-\alpha : \frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} : \frac{\partial y_{t+i}}{\partial m_t} = 0 \quad \forall i \geq 2$$

De manera análoga podemos proceder para ver el efecto sobre el nivel de precios. El aumento en la oferta monetaria eleva de forma permanente el nivel de precios a largo plazo.

$$\frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_t} = \alpha : \frac{\partial p_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} : \frac{\partial p_{t+i}}{\partial m_t} = 1 \quad \forall i \geq 2$$

El salario real efectivo en el momento t, tiene la expresión siguiente:

$$\overline{w}_t^{ef} - p_t = \frac{\alpha}{\alpha-1}y_t = -\alpha\varepsilon_t - \frac{1}{1+\alpha}\varepsilon_{t-1} < 0$$

El resultado demuestra que la política monetaria expansiva provoca una caída en el salario real medio, y que recae sobre el grupo de trabajadores que aún no ha renegociado su salario.

Consideremos ahora el papel de la política de estabilización ante una perturbación de demanda. La curva de demanda agregada viene dada ahora por:

$$y_t = m_t - p_t + \delta_t$$

Si el banco central sigue una política pasiva con respecto al control de la oferta monetaria, entonces $m_t = m + \varepsilon_t^m$.

La solución para el nivel de producción es:

$$y_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}(m_t + \delta_t - E_{t-1}(m_t + \delta_t)) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(m_t + \delta_t - E_{t-2}(m_t + \delta_t))$$

Si la perturbación de demanda sigue un paseo aletario:

$$\delta_t = \delta_{t-1} + \varepsilon_t^u$$

$$y_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}(\delta_t - E_{t-1}\delta_t)) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\delta_t - E_{t-2}\delta_t) = (1-\alpha)\varepsilon_t^u + (1+\alpha)\varepsilon_{t-1}^u$$

La varianza de la producción en este caso es:

$$Var(y_t) = \left[(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2\right]\sigma_{\varepsilon^u}^2 \qquad ((1.9))$$

Supongamos ahora que el Banco Central sigue una política anticíclica, consistente en variar la oferta monetaria en sentido opuesto al nivel de producción, esto es, si observamos que éste cayó en el periodo anterior, el Banco Central aumentaría la oferta monetaria según la regla lineal:

$$m_t = -\beta y_{t-1} : \beta > 0$$

$$y_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}(-\beta y_{t-1} + \delta_t - E_{t-1}(-\beta y_{t-1} + \delta_t)) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(-\beta y_{t-1} + \delta_t - E_{t-2}(-\beta y_{t-1} + \delta_t))$$

$$\left(1 + \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\alpha}\right) y_t = (1-\alpha)\varepsilon_t^u + (1+\alpha)\varepsilon_{t-1}^u$$

De tal forma que la volatilidad de la producción es ahora:

$$Var(y_t) = \frac{\left[(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2\right]}{\left(1 + \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\alpha}\right)^2}\sigma^2_{\varepsilon^u} \qquad ((1.10))$$

comparando (1.9) y (1.10) observamos que ésta es es sustanticalmente inferior a la obtenida cuando el Banco Central seguía una política pasiva con respecto a la oferta monetaria, con lo cual ya no se verifica la proposición de inefectividad de Sargent y Wallace y la política monetaria contracíclica es eficaz para disminuir las fluctuaciones de la producción.

1.7.3. El modelo de Taylor.

J.B. Taylor (1979) amplía la modelización de Fischer al incorporar el hecho de que los salarios nominales son fijados y mantenidos constantes durante relativamente largos periodos de tiempo. Además el salario deseado no depende únicamente del nivel de precios sino que también se ve influido por el nivel de actividad económica. Cuando combinamos ambas características junto al hecho de que los contratos se negocian de manera escalonada, la persistencia en el output de una perturbación monetaria es mucho mayor y su efecto no sólo se circunscribe a los periodos entre negociaciones salariales.

De nuevo dividimos a la fuerza de trabajo en dos grupos. Uno de ellos fija el mismo nivel salarial al final del periodo $t-2$ para el periodo $t-1$ y para el periodo t, mientras el otro grupo lo fija al final del periodo $t-1$ para los periodos t y $t+1$. La demanda agregada, como es usual:

$$y_t = m_t - p_t$$

El bloque de oferta agregada viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$p_t = \overline{w}_t - u_t = \frac{1}{2}(w_t^{(t-2)} + w_t^{(t-1)}) - z_t = \frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}) - z_t \qquad ((1.11))$$

$$w_t = \frac{1}{2}\left[w_t^d + E_t w_{t+1}^d)\right] \qquad ((1.12))$$

$$w_t^d = p_t + ay_t : (0 < a < 1) \qquad ((1.13))$$

$$w_{t-1}^{(t-2)} = w_t^{(t-2)} = w_{t-1} : w_t^{(t-1)} = w_{t+1}^{(t-1)} = w_t \qquad ((1.14))$$

El salario medio $\overline{w}_t$ en (1.11) puede interpretarse como una media geométrica de los niveles salariales negociados en momentos anteriores y que por tanto están vigentes en el periodo t. El salario real medio permanece constante (en ausencia de shocks de productividad) ya que asumimos $p_t = \overline{w}_t$ o lo que es lo mismo la función de producción utilizada en el problema de optimización implícito es del tipo $Y = ZN$ y por tanto $P = \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{\overline{W}}{Z}$. La variable Z es por tanto una perturbación a la oferta agregada.

En segundo lugar, el salario negociado y fijado en cada momento, w_t en (1.12) es una media aritmética aritmética simple del salario deseado para ese momento y del nivel salarial deseado y esperado para el próximo periodo.

En tercer lugar, el salario deseado en un momento del tiempo w_t^d en (1.13) depende del nivel de precios en una relación 1 a 1 y del nivel de actividad económica en dicho periodo. El parámetro a puede interpretarse como la elasticidad del salario deseado con respecto al output como indicador del nivel de empleo en ese periodo, reflejando el hecho de que el poder de negociación de los trabajadores aumenta con el nivel de empleo.

Finalmente en cuarto lugar reflejamos que los salarios fijados en cada momento duran dos periodos.

Sustituyendo la expresión del salario deseado, (1.13) en (1.12), ecuación para el salario negociado en t, en obtenemos:

$$w_t = \frac{1}{2}(p_t + ay_t + E_t p_{t+1} + aE_t y_{t+1}) \qquad ((1.15))$$

De igual manera sustituyendo el nivel de precios de (1.11) en (1.15):

$$w_t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}) - u_t + \frac{1}{2}(E_t w_{t+1} + w_t) - E_t z_{t+1}\right) + \frac{a}{2}(y_t + E_t y_{t+1})$$

$$w_t = \frac{1}{2}(w_{t-1} + E_t w_{t+1}) + a(y_t + E_t y_{t+1}) - (z_t + E_t z_{t+1})$$

Esta expresión final para la fijación de salarios implica que los trabajadores que fijan su salario en $t-1$ tienen en cuenta el salario que fue fijado por el otro grupo de trabajadores en el periodo anterior, esto es, los trabajadores tienen en cuenta su salario relativo.

Finalmente, sustituyendo el nivel de output a partir de la demanda agregada y de nuevo el nivel de precios, de (1.11) obtenemos la ecuación dinámica en expectativas para los salarios nominales.

$$w_t = \frac{1}{2}(w_{t-1} + E_t w_{t+1}) + a\left(m_t - \frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}) + z_t + E_t m_{t+1}\right) -$$

$$-a\frac{1}{2}(E_t w_{t+1} + w_t) + E_t z_{t+1} - (z_t + E_t z_{t+1})$$

Reordenando:

$$w_t = \frac{1-a}{2(1+a)} w_{t-1} + \frac{1-a}{2(1+a)} E_t w_{t+1} + \frac{a}{1+a}(m_t + E_t m_{t+1}) - \frac{1-a}{1+a}(z_t + E_t z_{t+1})$$

$$w_t = \theta w_{t-1} + \theta E_t w_{t+1} + s_t^{[w]}$$

donde

$$\theta = \frac{1-a}{2(1+a)} \Rightarrow a = \frac{1-2\theta}{1+2\theta} : (\theta < 1/2)$$

$$s_t^{[w]} = \frac{1}{2}(1-2\theta)(m_t + E_t m_{t+1}) - 2\theta(z_t + E_t z_{t+1})$$

Resolución.

La ecuación dinámica puede ser resuelta utilizando el método de factorización. Aplicando el operador de retardos L y el operador forward F, obtenemos la ecuación de segundo grado en el operador forward, F.

$$(1 - \theta L - \theta F) w_t = s_t^{[w]}$$

$$-\theta F^{-1}(F^2 - \frac{1}{\theta}F + 1) = s_t^{[w]} \qquad ((1.16))$$

Las raíces características de dicha ecuación en F, vienen dadas por:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\theta^2}}{2\theta} : \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{\theta} \quad \text{y} \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

donde

$$0 < \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} < 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} > 1$$

y la raíz estable es decreciente en relación al parámetro a:

$$\frac{d\lambda_1}{da} = -\frac{1}{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})^2} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d\ln\lambda_1}{d\ln a} = -\frac{\sqrt{a}}{1-a}$$

La obtención de una raíz estable, $\lambda_1 < 1$ y otra inestable $\lambda_2 > 1$ permiten calcular la solución, expresando la ecuación factorizada como:

$$(F^2 - \frac{1}{\theta}F + 1)Lw_t = -\frac{1}{\theta}s_t^{[w]} \Rightarrow (F-\lambda_1)(F-\lambda_2)Lw_t = -\frac{1}{\theta}s_t^{[w]}$$

$$(1-\lambda_1 L)w_t = \frac{1}{\theta\lambda_2}\frac{1}{(1-\lambda_2^{-1}F)}s_t^{[w]}$$

$$(1-\lambda_1 L)w_t = \frac{1}{\theta\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t s_{t+i}^{[w]} \qquad ((1.17))$$

Efectos de una perturbación monetaria.

De nuevo podemos calcular los efectos de una política monetaria, haciendo $z_t = 0$ y asumiendo que la oferta monetaria sigue el proceso estocástico siguiente:

$$m_t = \rho m_{t-1} + \varepsilon_t : 0 \leq \rho \leq 1 : \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

donde ρ nos da la persistencia del shock monetario. Dado el proceso para la oferta monetaria, obtenemos valor esperado futuro que tiene por expresión:

$$E_t m_{t+i} = \rho^i m_t$$

La solución para el salario en (1.17) viene dada por:

$$w_t = \lambda_1 w_{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\theta\lambda_2}(1-2\theta)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}F^i(m_t + E_t m_{t+1})$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre los parámetros y las raíces del modelo:

$$w_t = \lambda_1 w_{t-1} + \frac{1}{2}(1-\lambda_1)^2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}\rho^i m_t + \rho^{i+1}m_t)$$

$$w_t = \lambda_1 w_{t-1} + \frac{(1-\lambda_1)^2}{2(1-\lambda_1\rho)}(1+\rho)m_t$$

Sustituyendo en (1.11) obtenemos la solución para el nivel de precios.

$$(1-\lambda_1 L)p_t = \frac{1}{4}\frac{(1-\lambda_1)^2}{(1-\lambda_1\rho)}(1+\rho)\left[m_t + m_{t-1}\right]$$

Y sustituida ésta en la ecuación de demanda agregada, obtenemos la solución para el nivel de producción.

$$(1-\lambda_1 L)y_t = \left[1 - \frac{1}{4}\frac{(1-\lambda_1)^2}{(1-\lambda_1\rho)}(1+\rho)\right]m_t + \left[\frac{1}{4}\frac{(1-\lambda_1)^2}{(1-\lambda_1\rho)}(1+\rho) - \lambda_1\right]m_{t-1}$$

A través del cálculo de los multiplicadores dinámicos podemos obtener cuánto varía cada una de las variables cuando en un momento t, se produce una perturbación a la oferta monetaria nominal. El comportamiento dinámico de cada una de las variables del modelo depende del parámetro autorregresivo del proceso que sigue la oferta monetaria y del parámetro λ_1 que a su vez depende de a.

Consideremos los dos casos límites para el parámetro autorregresivo. En primer lugar, si la perturbación monetaria es puramente aleatoria, esto es, $\rho = 0$, entonces $m_t = \varepsilon_t$ y $\varepsilon_t \neq 0$ $\varepsilon_{t+i} = 0$ $\forall i > 0$. En este caso, los efectos sobre la senda futura de las variables vienen dados por:

$$\frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k\geq 0)} = \lambda_1^k\frac{(1-\lambda_1)^2}{2} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{4}(1-\lambda_1)^2 : \left.\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = \frac{1}{4}\lambda_1^{k-1}(1+\lambda_1)(1-\lambda_1)^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1-\frac{1}{4}(1-\lambda_1)^2 : \left.\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = \frac{1}{4}\lambda_1^{k-1}(1-\lambda_1)^3 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por contra, si la perturbación eleva la oferta monetaria de forma permanente, esto es $\rho = 1$.

$$\left.\frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k\geq 0)} = 1-\lambda_1^{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{(1-\lambda_1)}{2} : \left.\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = (1-\lambda_1)\left[\frac{\lambda_1^k}{2}+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\right] = 1-\frac{1}{2}\lambda_1^k(1+\lambda_1) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{2}(1+\lambda_1) : \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{2}(1+\lambda_1)\left[\sum_{i=0}^{k}\lambda_1^i - \sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\right] = \frac{1}{2}(1+\lambda_1)\lambda_1^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comparando los multiplicadores dinámicos en los dos supuestos sobre la persistencia del shock, es claro que para cualquier horizonte temporal, la persistencia o duración de los efectos es mayor para $\rho = 1$ que para $\rho = 0$. En cualquier caso, el shock de demanda siempre tiene un efecto transitorio en el output.

Como hemos indicado con anterioridad el tiempo de ajuste de las variables desde el impacto inicial hasta su ajuste a largo plazo depende críticamente de λ_1 y por tanto de a. Es interesante estudiar cómo responden las variables del modelo para cualquier horizonte temporal ante la perturbación de demanda si el parámetro del modelo se acerca a sus dos valores extremos.

Para el caso en el que $\rho = 1$:

$$\underset{(\lambda_1\to 1)(a\to 0)}{lím} \left.\frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k\geq 0)} = 0 : \underset{(\lambda_1\to 0)(a\to 1)}{lím} \left.\frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k\geq 0)} = 1$$

$$\underset{(\lambda_1\to 1)(a\to 0)}{lím} \left.\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = 0 : \underset{(\lambda_1\to 0)(a\to 1)}{lím} \left.\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = 1$$

$$\underset{(\lambda_1\to 1)(a\to 0)}{lím} \left.\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = 1 : \underset{(\lambda_1\to 0)(a\to 1)}{lím} \left.\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right|_{(k>0)} = 0$$

La interpretación de estos multiplicadores es como sigue. El proceso de ajuste dinámico en los salarios negociados y en el nivel de precios ante la perturbación de demanda tendrá poca persistencia cuanto mayor sea la relación que exista entre nivel de actividad económica y los salarios que deseen fijar los individuos que los negocian ($a \rightarrow 1$). Si la situación en el nivel de actividad económica o en el mercado de trabajo es importante a la hora de negociar los salarios, la perturbación de demanda provoca que el ajuste hacia su equilibrio a largo plazo sea más rápido y el efecto de dicha perturbación sea mayor para cualquier horizonte temporal, excepto en el largo plazo que son iguales. Podemos interpretar de esta forma al parámetro a como un indicador de la rigidez o flexibilidad de los salarios.

Esto es, si dicho parámetro es igual a 1, la expansión monetaria eleva inmediatamente el nivel de precios y el nivel de salarios y el efecto sobre la producción es nulo.

El mecanismo de transmisión del shock monetario es como sigue: un aumento en m_t provoca una subida en el nivel de precios y en los salarios negociados en el mismo periodo t aunque no en los negociados en $t-1$. La caída en el salario real soportada por los trabajadores que fijaron sus salarios en $t-1$, aumenta la demanda de trabajo y por tanto el output. Las respuestas a corto plazo, que vienen dadas por los multiplicadores de impacto dependen críticamente de a.

Mientras mayor sea dicho parámetro mayores serán las demandas salariales cuando se negocian los salarios y conforme pasa el tiempo dichos aumentos salariales se van ajustando a los nuevos niveles de actividad económica y del nivel de precios, con lo que el output va descendiendo hacia el valor que tenía antes de la perturbación monetaria.

Efectos de una perturbación tecnológica.

Podemos proceder de igual manera y calcular los efectos a corto y largo plazo cuando se produce una perturbación de oferta.

Asumiendo que sigue el siguiente proceso:

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim iiid(0, \sigma^2)$$

DE igual manera que en el caso de la perturbación monetaria, las soluciones para nuestras variables vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$w_t = \lambda_1 w_{t-1} - \frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1} z_t$$

$$p_t = \lambda_1 p_{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1}(z_t + z_{t-1})$$

$$y_t = \lambda_1 p_{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{(1-\lambda_1}(z_t + z_{t-1})$$

A partir de éstas, los multiplicadores dinámicos son:

$$\frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k\geq 0)} = -\frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\sum_{i=0}^{k}\lambda_1^i \underset{k\to\infty}{\to} -\frac{1+\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial \varepsilon_t} = -\frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1} : \frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k>0)} = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\left(\lambda_1^k - 2\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\right) \underset{k\to\infty}{\to} -\frac{1+\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{(1-\lambda_1} : \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k>0)} = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{1-\lambda_1}\left(\lambda_1^k + 2\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\right) \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1+\lambda_1^2}{(1-\lambda_1)^2}$$

Una perturbación que aumente la productividad de forma permanente eleva el nivel de producción a largo plazo y reduce tanto los salarios nominales como el nivel de precios. Mientras menor sea el ajuste de salarios en función del nivel de actividad económica más caerán los salarios nominales y el nivel de precios y mayor será el aumento en el nivel de producción.

$$\underset{(\lambda_1\to 1)(a\to 0)}{lím} \frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k\geq 0)} \to -\infty : \underset{(\lambda_1\to 0)(a\to 1)}{lím} \frac{\partial w_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k\geq 0)} = -1$$

$$\underset{(\lambda_1\to 1)(a\to 0)}{lím} \frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k>0)} \to -\infty : \underset{(\lambda_1\to 0)(a\to 1)}{lím} \frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}_{(k>0)} = -1$$

$$\underset{(\lambda_1 \to 1)(a \to 0)}{l\acute{\imath}m} \left.\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right._{(k>0)} = \infty : \underset{(\lambda_1 \to 0)(a \to 1)}{l\acute{\imath}m} \left.\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right._{(k>0)} = 1$$

1.7.4. Un modelo con precios rígidos y competencia monopolística.

Consideremos en primer lugar los fundamentos de la fijación de precios bajo competencia monopolística. Dichos microfundamentos se derivan del trabajo de Blanchard y Kiyotaki (1987) que a su vez se apoya en la aportación de Dixit-Stiglitz (1977) los cuales contemplan un modelo con tecnología CES en tiempo contínuo y nos permitirán deducir el precio óptimo que fijará cada consumidor-productor.

La economía consta de un contínuo de individuos i en el intervalo $[0,1]$ donde cada uno de ellos produce un bien diferenciado, siendo σ la elasticidad de sustitución entre los bienes de tal forma que si $\sigma \to \infty$ los bienes son sustitutivos perfectos.

Cada uno de ellos resuelve el siguiente problema:

$$Max \quad u(C_j) = \left[\int_0^1 C_{ij}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \quad (\sigma > 1)$$

sujeto a la restricción presupuestaria, donde X_i es un nivel de gasto exógeno para el individuo i y C_j es el gasto agregado en los j bienes que componen dicha economía:

$$\int_0^1 P_j C_{ij} dj = X_i$$

La solución del problema nos da la demanda óptima (marshalliana) para cada individuo i y cada bien j (véase apéndice 1.1).

$$C_{ij} = \frac{X_i}{P} \left(\frac{P_j}{P} \right)^{-\sigma} = C_i \left(\frac{P_j}{P} \right)^{-\sigma}$$

En segundo lugar, cada individuo elige su nivel de consumo agregado, su tenencia de saldos reales y su oferta de horas de trabajo a partir de la solución del problema[10]:

$$Max \;\; u\left(C_i, \frac{M_i}{P}, N_i\right) = \left(\frac{C_i}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{M_i/P}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{\beta}N_i^{\beta} : 0 < \alpha < 1, \beta > 1 \tag{(1.18)}$$

sujeto a las restricciones presupuestaria y a la función de producción.

$$PC_i + M_i = P_iY_i : Y_i = N_i \tag{(1.19)}$$

La relación óptima entre consumo agregado y saldos reales es para cada individuo:

$$C_i = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M_i}{P} \tag{(1.20)}$$

Por tanto, la demanda de cada bien j, viene dada por:

$$Y_j = \int_0^1 C_{ij}di = \int_0^1 C_i\left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\sigma}di = \int_0^1 \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M_i}{P}\left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\sigma}di$$

$$Y_j = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M}{P}\left(\frac{P_j}{P}\right)^{-\sigma} : \int_0^1 M_idi = M \tag{(1.21)}$$

Sustituyendo (1.19) y (1.20) en (1.18) y (1.20) en (1.19) obtenemos:

$$u\left(C_i, \frac{M_i}{P}, N_i\right) = \frac{M_i/P}{1-\alpha} - \frac{1}{\beta}Y_i^{\beta}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}M_i = P_iY_i$$

finalmente, la función indirecta de utilidad expresada en función del precio que fije la cada individuo es:

$$u^*\left(P_i, Y_i\right) = \frac{P_i}{P}Y_i - \frac{1}{\beta}Y_i^{\beta}$$

Ahora el individuo maximiza su función indirecta de utilidad, sujeta a la

[10]Esta es una función de utilidad con saldos reales. En el capítulo 4 hacemos un uso más extendido de la misma.

demanda del bien que produce, dado por (1.21).

$$s.a.Y_i = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\sigma}$$

Sustituyendo la restricción y derivando con respecto a P_i, obtenemos la condición de máximo:

$$\frac{du^*}{dP_i} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M}{P^{2-\sigma}}\left(1-\sigma\right)P_i^{-\sigma} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{M}{P^{1-\sigma}}\right)^{\beta}\left(-\sigma\beta\right)\left(P_i\right)^{-\sigma\beta-1} = 0$$

Con lo que la ecuación de fijación de precios que maximiza su utilidad viene dada por:

$$P_i^{1-\sigma+\sigma\beta} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}M\right)^{\beta-1}P^{\beta(\sigma-1)+2-\sigma}$$

y en logs:

$$\left(1-\sigma+\sigma\beta\right)p_i = \left(\beta-1\right)m + \left(\beta(\sigma-1)+2-\sigma\right)p + k$$

$$(1+\sigma(\beta-1))p_i = \left(\beta-1\right)\left(m-p\right) + (1+\sigma(\beta-1))p$$

$$p_i - p = b(m-p)$$

donde

$$0 < b = \frac{\beta-1}{1+\sigma(\beta-1)} < 1$$

El modelo que presentamos es una adaptación del modelo con rigidez salarial, pero aplicado a la presencia de precios rígidos, en el cual cada productor en el momento t fija un precio para el periodo t y para el periodo $t+1$. Dividimos a los productores en dos grupos y suponemos que la mitad de ellos toma la decisión sobre sus precios en t y la otra mitad lo hace en $t+1$, de esta forma las decisiones sobre la fijación de precios están equitativamente solapadas en el tiempo.

Cada productor elige los precios según la ecuación:

$$p_i - p = b(m-p): \qquad 0 \leq b \leq 1$$

Sean p_A y p_A los precios asociados a cada grupo de productores. El nivel de precios puede aproximarse a partir de[11]:

$$p = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$$

Sustituyendo el nivel de precios en la ecuación óptima de fijación de precios para cada grupo de oferentes, obtenemos:

$$p_A = \frac{1-b}{1+b}p_B + \frac{2b}{1+b}m : p_B = \frac{1-b}{1+b}p_A + \frac{2b}{1+b}m$$

$$p_A = ap_B + (1-a)m : a = \frac{1-b}{1+b} : 0 < a < 1$$

El resultado anterior nos refleja el hecho de que el precio fijado por cada grupo de productores afecta al precio fijado por la otra mitad ya que cada precio afecta tanto a la demanda relativa de bienes como a la demanda agregada a través del nivel general de precios.

Introduzcamos ahora la siguiente notación. Consideremos que el grupo A de productores fija el precio en t y el grupo B en $t+1$ y sea $p_{t+i}^{(t)}$ el precio elegido en t para el periodo $t+i$ y $E(\bullet \mid t-i)$ la expectativa de una variable basada en la información disponible en $t-i$, excluyendo tal periodo. Si el grupo A fija precios en t entonces el grupo B fijó los precios en $t-1$ y los volverá a revisar en $t+1$, de tal forma que aplicando la ecuación de fijación de precios para cada grupo:

$$p_t^{(t)} = ap_t^{(t-1)} + (1-a)E_t m_t \tag{(1.22)}$$

$$p_{t+1}^{(t)} = aE_t p_{t+1}^{(t+1)} + (1-a)E_t m_{t+1} \tag{(1.23)}$$

[11]Realmente, el nivel de precios viene dado por $\ln P = \frac{1}{1-\sigma} \ln \left[\frac{1}{2}(P_A^{1-\sigma} + P_B^{1-\sigma} \right]$ .Sin embargo, con el fin de preservar la estructura log-lineal, suponemos que $\sigma \to 1$.Calculando por L'Hôpital

$$\underset{\sigma \to 1}{lím} \ln P = \frac{1}{2}\left(P_A + P_B\right)$$

El nivel de precios en este caso viene dado por:

$$p_t = \frac{p_t^{(t)} + p_t^{(t-1)}}{2}$$

El modelo se cierra con la curva de demanda agregada clásica y puede resolverse calculando los precios que fijan los dos grupos de empresas, y de esta manera, el nivel de precios y el nivel de output. Dado que los precios que fija cada grupo permanecen fijos durante dos periodos, el de fijación del mismo y el siguiente, podemos definir:

$$p_t^{(t)} = p_{t+1}^{(t)} \equiv x_t : p_{t-1}^{(t-1)} = p_t^{(t-1)} \equiv x_{t-1}$$

Por tanto, (1.22) y (1.23) vienen dados por:

$$x_t = ax_{t-1} + (1-a)E_t m_t$$

$$x_t = aE_t x_{t+1} + (1-a)E_t m_{t+1}$$

Las expresiones anteriores nos dicen que el precio óptimo elegido en el momento t por el grupo A es una media ponderada del precio fijado por el otro grupo en $t-1$, x_{t-1}, y de la oferta nominal esperada para el periodo t; y por otra, dado que se fija también para el siguiente periodo, es una media ponderada del precio que se espera que elijan en $t+1$, $E_t x_{t+1}$ y de la oferta monetaria esperada para dicho periodo.

Sumando ambas expresiones obtenemos la ecuación dinámica para el precio fijado para los dos periodos por el grupo A:

$$x_t = \frac{1}{2}(ax_{t-1} + (1-a)E_t m_t) + \frac{1}{2}(aE_t x_{t+1} + (1-a)E_t m_{t+1}) \qquad ((1.24))$$

Por definición el nivel de precios para el periodo t es la media de los precios fijados por la otra mitad de productores en el periodo anterior y el precio fijado por la otra mitad para este periodo.

$$p_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1})$$

Obtenida la solución para x_t es inmediato obtener el nivel de precios y a partir de la ecuación de demanda agregada $y_t = m_t - p_t$, la solución para el output.

Reorganizando la expresión para el precio óptimo que se fijará en t, ecuación (1.24):

$$x_t = \frac{a}{2}x_{t-1} + \frac{a}{2}E_t x_{t+1} + \frac{1}{2}(1-a)E_t m_t + \frac{1}{2}(1-a)E_t m_{t+1} \qquad ((1.25))$$

Solución.

Para la resolución de la ecuación (1.25) podemos aplicar el método de coeficientes indeterminados, probando como solución con la expresión siguiente[12] :

$$x_t = \lambda x_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i} \qquad ((1.26))$$

donde λ y ϕ_i son parámetros a determinar en función del parámetro del modelo, a. Calculamos en nuestra conjetura:

$$E_t x_{t+1} = \lambda x_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i+1} \qquad ((1.27))$$

Y sustituyendo (1.26) en (1.27):

$$E_t x_{t+1} = \lambda^2 x_{t-1} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i+1}$$

Finalmente podemos identificar los coeficientes sustituyendo (1.26) y (1.27) en (1.25) :

$$\lambda x_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i} = \frac{a}{2}x_{t-1} + \frac{a}{2}\left[\lambda^2 x_{t-1} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E_t m_{t+i+1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(1-a)E_t m_t + \frac{1}{2}(1-a)E_t m_{t+1}$$

[12]Puede consultarse Blanchard y Fisher (1989), pag 261-266.

La identificación es como sigue:

$$Para\ x_{t-1} : \lambda = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\lambda^2 \quad ó \quad a\lambda^2 - 2\lambda + a = 0$$

$$Para\ E_t m_t : \phi_0 = \frac{a}{2}\lambda\phi_0 + \frac{1-a}{2}$$

$$Para\ E_t m_{t+1} : \phi_1 = \frac{a}{2}\lambda\phi_1 + \frac{a}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}(1-a)$$

$$Para\ E_t m_{t+i} : \phi_i = \frac{a}{2}\lambda\phi_i + \frac{a}{2}\phi_{i-1} \quad \forall i \geq 2$$

A partir de la primera identificación podemos obtener el valor de λ, que viene dado por una ecuación de segundo grado y por lo tanto tenemos dos posibles soluciones:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a^2}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

Escogeremos como solución la raíz inferior a la unidad que nos genera la solución estable:

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

De la segunda podemos calcular ϕ_0 que vendrá dado por:

$$\phi_0 = \frac{1-a}{2 - a\lambda_1} = \frac{1-a}{a}\lambda_1$$

donde hemos aplicado

$$a\lambda^2 - 2\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda_1(2 - a\lambda_1) = a$$

De forma análoga, ϕ_1y los sucesivos ϕ_i restantes tienen las siguientes expresiones:

$$\phi_1 = \frac{1-a}{2 - a\lambda_1}(1 + \lambda_1) = \frac{(1-a)}{a}\lambda_1(1 + \lambda_1) = \phi_0(1 + \lambda_1)$$

$$\phi_i = \frac{a}{2 - a\lambda_1}\phi_1 \quad ó \quad \phi_i = \lambda_1 \phi_{i-1} \quad \forall i \geq 2$$

$$\phi_i = \lambda_1^{i-1}\phi_1 \quad \phi_i = \lambda_1^{i-1}(1+\lambda_1)\phi_0 \quad \forall i \geq 2$$

Por tanto, la solución para (1.25) vendrá dada por:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \frac{1-a}{a}\lambda_1 \left[E_t m_t + (1+\lambda_1) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} E_t m_{t+i} \right]$$

O bien[13]:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \frac{1-a}{a}\lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^{i}(E_t m_{t+i} + E_t m_{t+i+1}) \qquad ((1.28))$$

Por tanto, el precio óptimo elegido en t para t y $t+1$ depende del precio fijado o elegido en $t-1$ para $t-1$ y t así como de las expectativas sobre la oferta monetaria futura, desde t hasta el futuro indefinido.

Efectos de un shock monetario permanente.

Consideremos los efectos de un shock aleatorio que eleva de forma permanente la oferta monetaria nominal. Para ello, modelizamos el proceso de oferta monetaria como un paseo aleatorio:

$$m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde consideraremos que la innovación ε_t sólo es distinta de cero en dicho momento, esto es, $\varepsilon_t > 0$ y $\varepsilon_{t+i} = 0 \ \forall i \neq 0$ y $\frac{\partial m_t}{\partial \varepsilon_t} = 1$.

En este caso, $E_t m_{t+i} = E_t m_{t+i+1} = m_{t-1}, \forall i$.

[13] $E_t m_t + (1+\lambda_1)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} E_t m_{t+i} =$

$$E_t m_t + E_t m_{t+1} + \lambda_1 E_t m_{t+1} + \lambda_1 E_t m_{t+2} + \lambda_1^2 E_t m_{t+2} + ... =$$

$$= E_t m_t + \lambda_1 E_t m_{t+1} + \lambda_1^2 E_t m_{t+2} + ... + E_t m_{t+1} + \lambda_1 E_t m_{t+2} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i E_t m_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i E_t m_{t+i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i (E_t m_{t+i} + E_t m_{t+i+1})$$

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \frac{1-a}{a}\lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i (m_{t-1} + m_{t-1})$$

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \frac{1-a}{a}\lambda_1 \frac{2m_{t-1}}{1-\lambda_1}$$

Teniendo en cuenta que $a\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + a = 0$, entonces $a = \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2}$ y $1-a = \frac{(1-\lambda_1)^2}{1+\lambda_1^2}$.

$$\frac{1-a}{a}\lambda_1 \frac{2}{1-\lambda_1} = \frac{(1-\lambda_1)^2}{1-\lambda_1} = 1 - \lambda_1$$

Por tanto, la solución en este caso concreto de (1.28) viene dada por:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + (1-\lambda_1) m_{t-1} \qquad ((1.29))$$

Para calcular los efectos dinámicos de la perturbación aleatoria sobre el precio fijado por el grupo A de productores obtenemos los multiplicadores dinámicos a partir de la solución de la anterior ecuación en diferencias para x_t.

$$x_{t+k} = A\lambda_1^{t+k} + (1-\lambda_1) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i m_{t+k-1-i}$$

Sin embargo, la innovación se produce en t, aunque se incorpora de forma permanente a todos los valores de la oferta monetaria a partir de ese momento, y por tanto hasta $j = k - 1$.

$$m_{t+k-1-i} = \sum_{j=0}^{k-i-1} \varepsilon_{t+k-1-i-j}$$

Por tanto, a efectos del cálculo de los multiplicadores, la solución puede acotarse hasta que aparece ε_t, esto es, hasta $j = k + i - 1$.

$$x_{t+k} = (1-\lambda_1) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^i \left(\sum_{j=0}^{k-i-1} \varepsilon_{t+k--1-i-j} \right)$$

Desarrollando dicha solución:

$$x_{t+k} = (1 - \lambda_1) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^i \left(\varepsilon_{t+k-1-i} + \varepsilon_{t+k-2-i} + ... + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_t\right)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial x_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - \lambda_1) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_1^i = (1 - \lambda_1) \frac{1 - \lambda_1^{k-1} \lambda_1}{1 - \lambda_1} = 1 - \lambda_1^k \qquad ((1.30))$$

Para $k \to \infty$

$$\underset{k \to \infty}{lím} \frac{\partial x_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

Por tanto, un shock transitorio a la oferta monetaria que implique un cambio permanente en ésta, eleva el precio óptimo elegido por las empresas a largo plazo en la misma cuantía.

En segundo lugar podemos ver que le ocurre al nivel de precios, aunque intuitivamente la solución es fácil, si las empresas aumentan sus precios progresivamente ante la perturbación monetaria, el nivel de precios experimentará la misma subida.

$$p_t = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} \quad y \quad x_t = \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1 L} m_{t-1}$$

$$p_t = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1 L} m_{t-1} + \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1 L} m_{t-2} \right)$$

$$p_t (1 - \lambda_1 L) = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1)(m_{t-1} + m_{t-2}) \qquad ((1.31))$$

De forma análoga podemos calcular la dinámica del precio ante una perturbación.

El resultado viene dado a partir de la ecuación (1.31).

$$p_t = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i m_{t-i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i m_{t-i-2} \right]$$

$$p_{t+k} = \frac{1}{2}(1-\lambda_1)\left[\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i m_{t+k-1-i} + \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i m_{t+k-2-i}\right]$$

$$p_{t+k} = \frac{1}{2}(1-\lambda_1)\left[\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\left(\sum_{j=0}^{k-i-1}\varepsilon_{t+k-1-i-j}\right) + \sum_{i=0}^{k-2}\lambda_1^i\left(\sum_{j=0}^{k-i-1}\varepsilon_{t+k-2-i-j}\right)\right]$$

$$p_{t+k} = \frac{1}{2}(1-\lambda_1)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i\left(\varepsilon_{t+k-1-i} + \varepsilon_{t+k-2-i} + ... + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_t\right) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\lambda_1)\sum_{i=0}^{k-2}\lambda_1^i\left(\varepsilon_{t+k-2-i} + \varepsilon_{t+k-3-i} + ... + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_t\right)$$

A partir de aquí, los sucesivos multiplicadores dinámicos vienen dados por:

$$\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{2}(1-\lambda_1)\left[\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_1^i + \sum_{i=0}^{k-2}\lambda_1^i\right] = \frac{1}{2}\left[2-\lambda_1^k-\lambda_1^{k-1}\right] = 1-\frac{1}{2}\lambda_1^k(1+\lambda_1)$$

Conforme k tiende a infinito:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial p_{t+i}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

Finalmente, el efecto sobre el output puede calcularse a partir de la introducción de la ecuación de demanda agregada:

$$y_t = m_t - p_t$$

Retardando un periodo la demanda agregada, multiplicándola por λ_1 y restando ambas:

$$y_t - \lambda_1 y_{t-1} = m_t - \lambda_1 m_{t-1} - (p_t - \lambda_1 p_{t-1})$$

Sustituyendo la ecuación (1.31), solución para el precio:

$$y_t - \lambda_1 y_{t-1} = m_t - \lambda_1 m_{t-1} - \frac{1}{2}(1-\lambda_1)(m_{t-1} + m_{t-2})$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + m_t - \frac{1}{2}(1+\lambda_1)m_{t-1} - \frac{1}{2}(1-\lambda_1)m_{t-2}$$

Aplicando la regla de la cadena de la derivación, calculamos los multiplicadores dinámicos:

$$\frac{\partial y_t}{\partial m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t}\frac{\partial y_t}{\partial m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+1}}{\partial m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \varepsilon_t} = \lambda_1 + 1 - \frac{1}{2}(1+\lambda_1) = \frac{1}{2}(1+\lambda_1)$$

$$\frac{\partial y_{t+2}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{\partial y_{t+2}}{\partial y_{t+1}}\frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+2}}{\partial m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} + \frac{\partial y_{t+2}}{\partial m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \varepsilon_t} =$$

$$= \lambda_1\frac{1}{2}(1+\lambda_1) + 1 - \frac{1}{2}(1+\lambda_1) - \frac{1}{2}(1-\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{2}(1+\lambda_1)$$

En general, para cualquier $k = 1, 2.....$ se verifica:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1+\lambda_1}{2}\lambda_1^{k-1}$$

Conforme el lapso temporal que media entre el momento en el que se produce el shock y la variación que deseamos calcular aumenta, el efecto en el output se desvanece, esto es, una perturbación monetaria no tiene efecto a largo plazo en el output si $\lambda_1 < 1$.

$$\underset{k\to\infty}{lím}\frac{\partial y_{t+k}}{\partial m_t} = 0$$

En suma, un shock monetario eleva a largo plazo el nivel de precios y el precio óptimo fijado por las empresas en la misma cuantía del shock; sin embargo, aunque la perturbación monetaria no afecta a largo plazo al nivel de output sí predice una dinámica temporal de ajuste que puede durar varios periodos. Hemos visto que a partir del cálculo de los multiplicadores dinámicos, el efecto de la política monetaria sobre precios, nivel de precios y producción depende críticamente del valor de λ_1, parámetro que puede ser interpretado como un indicador del grado de inercia de los precios.

Consideremos dos cuestiones: en primer lugar discutimos cómo es el ajuste dinámico de las variables ante distintos valores posibles del parámetro λ_1 y en segundo lugar, estudiemos detenidamente qué hay detrás de dicho parámetro, que no es otra cosa que el parámetro a y por tanto el parámetro b, que a su vez depende de los parámetros subyacentes incluidos en el modelo de optimización.

A partir de los multiplicadores dinámicos hemos obtenido:

$$\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 - \frac{1}{2}\lambda_1^k(1+\lambda_1) : \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1+\lambda_1}{2}\lambda_1^{k-1}$$

¿Cómo varían dichos multiplicadores ante cambios en el parámetro λ_1? Calculando para $k \geq 1$:

$$\frac{d\left(\frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right)}{d\lambda_1} = -\frac{1}{2}k\lambda_1^{k-1}(1+2\lambda_1) < 0$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}\right)}{d\lambda_1} = \lambda_1^{k-1}\left[\frac{1}{2} + (k-1)\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\right] > 0$$

Para un horizonte temporal k, después de la perturbación, el cambio en el nivel de precios es una función decreciente de λ_1, o dicho de otra forma, mientras mayor sea éste, menor será el efecto en los precios de la innovación monetaria. Y al contrario, el cambio en el nivel de output es una función creciente del parámetro λ_1, de tal manera que si éste es alto, el efecto de la innovación monetaria es alto también, es decir, el efecto de la política monetaria es muy persistente.

De manera alternativa y quizá más ilustrativa, podemos considerar los límites de los dos valores extremos que puede tomar el parámetro λ_1:

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 : \lim_{\lambda_1 \to 1} \frac{\partial p_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 0 : \lim_{\lambda_1 \to 0} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 0 : \lim_{\lambda_1 \to 1} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

Con respecto a la segunda cuestión, recordando la relación entre λ_1 y a, teníamos:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} : a = \frac{1-b}{1+b} : b = \frac{\beta - 1}{1+\sigma(\beta-1)}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2}}{\frac{1-b}{1+b}} = \frac{1+b-2\sqrt{b}}{1-b} = \frac{(1-\sqrt{b})^2}{1-b} = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{\beta-1}{1+\sigma(\beta-1)}}\right)^2}{1+\frac{\beta-1}{1+\sigma(\beta-1)}}$$

Nuestro grado de inercia en los precios depende de la desutilidad de las horas trabajadas, β, y de la elasticidad de sustitución entre bienes σ. De nuevo, podemos ver los casos límites para estos parámetros y relacionarlos con los valores límite del parámetro λ_1.

$$\underset{\beta\to 1}{lím}\lambda_1 = 1: \qquad \underset{\beta\to 0}{lím}\lambda_1 = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{1}{\sigma-1}}\right)^2}{1+\frac{1}{\sigma-1}} < 1: \qquad \underset{\sigma\to\infty}{lím}\,\lambda_1 = 1$$

Si $\beta = 1$, la desutilidad del trabajo es constante, el grado de inercia en este caso tendería a la unidad, esto es, sería máximo. La fijación de precios sería es $p_i = p$ esto es, el precio relativo de cada bien permanecería constante e independiente del nivel de demanda agregada y el efecto de la política monetaria sobre la producción sería permanente.

Este caso extremo implica que la política monetaria elevaría de forma permanente el nivel de producción mientras que no afectaría al nivel de precios.

Si el grado de inercia es inferior a la unidad, los resultados serían los que hemos obtenido a partir de los multiplicadores dinámicos.

Por otra parte, λ_1 es creciente con σ. Mientras más competitivo es el mercado de bienes menor disposición tendrán las empresas para cambiar sus precios y más lento será el ajuste de los precios nominales y el efecto de la política monetaria será mayor a corto plazo sobre la producción.

En suma, decisiones de fijación de precios escalonadas en un entorno de competencia monopolística pueden dar lugar a que cambios permanentes en el nivel de oferta monetaria nominal puedan tener efectos duraderos sobre el nivel de producción.

1.8. Apéndice 1.1.

La formulación del problema es la siguiente:

Supongamos que cada economía doméstica tiene asignado un nivel dado de gasto X_t y desea maximizar el valor de un índice de consumo sujeto a la restricción presupuestaria, donde z es el conjunto de bienes de la economía.

$$\max_{\{C_t)\}} C_t = \left[\int_0^1 c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$s.a. \int_0^1 p_t(z)c_t(z)dz = X_t$$

$$\mathcal{L}(c(z),\lambda) = \left[\int_0^1 c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \lambda\left[X_t - \int_0^1 p_t(z)c_t(z)dz\right]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_t(z)} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\int_0^1 c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \frac{\sigma-1}{\sigma} c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} + \lambda p_t(z) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = X_t - \int_0^1 p_t(z)c_t(z)dz = 0$$

Reorganizando, elevando la igualdad a $1-\sigma$ y sumando para todos los bienes:

$$\left[\int_0^1 c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz\right]^{-1} \int_0^1 c_t(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dz = \lambda^{1-\sigma} \int_0^1 p_t(z)^{1-\sigma}$$

$$1 = \lambda^{1-\sigma} P_t^{1-\sigma} \Rightarrow \lambda = P_t^{-1} > 0$$

Por tanto, la condición de primer orden nos da la decisión de consumo óptimo para cada bien.

$$c_t(z) = \left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t$$

donde σ es la elasticidad de cada demanda individual.

Finalmente sustituyendo en la restricción:

$$X_t = \int_0^1 p_t(z)c_t(z)dz = \int_0^1 p_t(z)\left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t dz$$

$$X_t = C_t P_t^{-\sigma} \int_0^1 p_t(z)dz = C_t P_t^{-\sigma} P_t^{1-\sigma} = P_t C_t$$

que valida la siguiente expresión para el nivel de precios, P_t.

$$P_t C_t = \int_0^1 p_t(z)c_t(z)dz$$

$$P_t C_t = \int_0^1 p_t(z)\left(\frac{p_t(z)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t dz$$

$$P_t = \left[\int_0^1 (p_t(z))^{1-\sigma} dz\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

CAPITULO 2
MODELOS DE CRECIMIENTO
Y SHOCKS
DE PRODUCTIVIDAD

El objetivo básico del programa de investigación del Ciclo Económico Real es el uso del modelo de crecimiento neoclásico para interpretar los patrones de las fluctuaciones observadas en la actividad económica. El modelo de Ciclo Real es una extensión de los modelos de crecimiento neoclásicos y por tanto, un punto de partida lógico es empezar considerando los efectos de perturbaciones tecnológicas en modelos con oferta de trabajo fija y en los que no existen rigideces o fricciones de ningún tipo, esto es, en un entorno de mercados perfectamente competitivos.

Desde el conocido trabajo pionero de Solow (1957) dedicado a estimar la tasa de variación a largo plazo en la producción a partir de las variaciones de los inputs, capital y trabajo, el ejercicio de "growth accountig" reveló que el orígen del crecimiento secular en la producción per cápita se encontraba fundamentalmente en la tasa de variación de la productividad total de los factores, y una parte relativamente pequeña se debía al crecimiento de los inputs de producción. Concretamente, para EEUU y durante el periodo 1909-1949, el 87.5 % de cada punto de crecimiento en la producción per cápita venía explicado por el crecimiento de la denominada Productividad Total de los Factores o residuo de Solow, mientras que un modesto 12.5 % era explicado por el crecimiento del stock de capital per cápita.

Cooley y Prescott (1995, pag 11) actualizan este ejercicio de contabilidad del crecimiento, obteniendo aproximadamente los valores de la siguiente tabla:

Tabla 2.1		
$\frac{\Delta y}{y}$	Crecimiento a largo plazo	Ciclo Económico
Explicado por $\frac{\Delta k}{k}$	1/3	0
Explicado por $\frac{\Delta N}{N}$	0	2/3
Explicado por $\frac{\Delta Z}{Z}$	2/3	1/3

donde $\frac{\Delta y}{y}$, $\frac{\Delta k}{k}$,$\frac{\Delta N}{N}$, $\frac{\Delta Z}{Z}$ son las variaciones de la producción per cápita, del stock de capital per cápita, del número de horas trabajadas y de la productividad.

Sin embargo, a corto plazo, el stock de capita per cápita apenas fluctúa, mientras que sí se observan variaciones importantes en el número de horas trabajadas, y por tanto el resto del crecimiento en la producción per cápita debe de venir explicado por cambios en la productividad.

La cuestión importante es si el modelo de crecimiento neoclásico modificado es capaz de generar el comportamiento cíclico que observamos en las series macroeconómicas.

La idea por tanto sería poder integrar la explicación del ciclos económico y el crecimiento a largo plazo en un solo modelo. Esto requiere introducir algún mecanismo que provoque cambios en la productividad a corto plazo e introducir oferta de trabajo de tal forma que sea consistente con los amplios cambios que observamos en el factor trabajo a lo largo del ciclo.

En este capítulo introducimos el problema de la elección consumo-ahorro, teniendo en cuenta que los individuos se enfrentan a incertidumbre sobre el futuro y que la única fuente de perturbación es la provocada por un shock tecnológico analizando si las perturbaciones de productividad pueden explicar los comovimientos en el ouput y en el consumo.

En los modelos de crecimiento, los orígenes de la persistencia podemos encontrarlo en dos fuentes: una endógena, debido a que los modelos son consistentes con el denominado "consumption smoothing", esto es, los individuos prefieren mantener niveles de consumo estables a lo largo del tiempo, lo que explica la baja volatilidad del consumo a lo largo del tiempo y otra exógena en la que la persistencia de las series se debe a la persistencia del shock tecnológico.

2.1. Un modelo de crecimiento básico con dos periodos (Diamond).

La cuestión de la elección óptima entre consumo y ahorro bajo condiciones de incertidumbre en el marco del modelo neoclásico de crecimiento fue analizada por Samuelson (1969) y Merton (1969), y con un enfoque basado en el modelo de generaciones sucesivas por Diamond (1965) y Samuelson (1958).

Consideremos un modelo sencillo de dos periodos, con agentes homogéneos, en el que la población es constante y cada individuo ofrece inelásticamente una unidad de trabajo en el momento t, recibiendo a cambio un salario real W_t.

El objetivo de cada agente es maximizar su utilidad esperada, con la restricción presupuestaria a la que se enfrenta.

El agente representativo maximiza una función de utilidad que depende del consumo presente y del consumo en el periodo próximo:

$$u(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta E_t u(C_{t+1})$$

donde $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ es el factor de descuento subjetivo de la utilidad futura y mide de la impaciencia del individuo.

La función de utilidad propuesta es aditiva y separable, esto es, la utilidad que genera el consumo en cada periodo depende del consumo en dicho periodo y verifica las condiciones habituales, es creciente y cóncava y la utilidad marginal del consumo es positiva y decreciente.

En cada uno de los periodos nuestro agente se enfrenta a cada una de las siguientes restricciones:

$$C_t = W_t - S_t \qquad ((2.1))$$

$$C_{t+1} = (1 + r_t)S_t + S_{t+1} \qquad ((2.2))$$

donde S_t es el ahorro. La renta salarial se dedica bien a consumir bien a ahorrar en t. En el siguiente periodo, se supone que el individuo no ofrece trabajo y por tanto sólo puede financiar su consumo a partir del ahorro y del rendimiento de ese ahorro generado en el periodo anterior.

Finalmente, la condición de transversalidad del problema es:

$$S_{t+1} = 0$$

esto es, no es óptimo dejar un ahorro positivo ya que no incluimos aquí la posibilidad de dejar herencias (no incluimos en la función de utilidad de nuestro agente representativo el consumo de otros individuos) y debido al supuesto de no saturación en el consumo (más consumo es mejor que menos), sólo podría optimizar su función de utilidad no dejando ahorro al final de su vida. Por otra parte, el ahorro del segundo periodo tampoco puede ser negativo dado que entonces el individuo dejaría una deuda impagada, esto es, si existise esta posibilidad podríamos elevar nuestro nivel de consumo sin tener que devolver la financiación del mismo. Indudablemente nadie estaría dispuesto a financiar el consumo sabiendo que no íbamos a devolver el préstamo.

Podemos resumir las dos restricciones presupuestarias en una sola, la denominada restricción presupuestaria intertemporal, que simplemente constata el hecho de que el valor actual del consumo debe ser igual al valor actual de las rentas del individuo. De esta forma, (2.1) y (2.2) vienen dadas por:

$$C_{t+1} = (1 + r_t)(W_t - C_t)$$

$$C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + r_t} = W_t$$

En segundo lugar, el ahorro financia la inversión bruta:

$$S_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

Supondremos además que la tasa de depreciación es del 100% en cada periodo, es decir, $\delta = 1$, con lo cual además de ser más simple, aseguramos que el modelo tenga solución cerrada.

$$S_t = K_{t+1}$$

El problema de maximización restringida para el individuo puede resolverse planteando el lagrangiano:

$$\mathcal{L}(C_t, C_{t+1}, \lambda) = u(C_t) + \beta E_t u(C_{t+1}) + \lambda \left[W_t - C_t - \frac{C_{t+1}}{1 + r_t} \right]$$

en el que las variables de decisión son el consumo presente y futuro.

Las condiciones de optimización de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{\partial u}{\partial C_t} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}} = \beta E_t \frac{\partial u}{\partial C_{t+1}} - \frac{\lambda}{1 + r_t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + r_t} - W_t = 0$$

Eliminando el multiplicador auxiliar de Lagrange de las dos primeras, obtenemos la ecuación de Euler del problema:

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = \beta(1 + r_t) E_t \frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}$$

Esta expresión, junto a la restricción presupuestaria nos permitirá calcular el consumo óptimo en los dos periodos.

Como puede observarse el modelo analizado es una simplificación de los modelos en los que se fundamentan las hipótesis modernas sobre la función de consumo: la hipótesis del ciclo vital y de la renta permanente.

Si parametrizamos la función de preferencias del agente y por ejemplo utilizamos una función de utilidad sencilla como la siguiente que presenta elasticidad de sustitución constante

$$u(C) = \ln C$$

podemos resolver explícitamente para el consumo óptimo y el ahorro.

La ecuación de Euler queda como:

$$E_tC_{t+1} = \beta(1 + r_t)C_t$$

Aplicando expectativas a la restricción presupuestaria e introduciendo en la misma E_tC_{t+1}.

$$(1 + \beta)C_t = W_t \Rightarrow C_t = \frac{W_t}{1 + \beta} \quad \text{y} \quad E_tC_{t+1} = \frac{\beta(1 + r_t)}{1 + \beta}W_t$$

El ahorro y la inversión por tanto vienen dados por:

$$K_{t+1} = S_t = W_t - C_t = \frac{\beta}{1 + \beta}W_t \tag{(2.3)}$$

El consumo en ambos periodos depende de la renta salarial, mientras que el ahorro depende positivamente de la renta del periodo t.

No podemos ir más allá si no introducimos algún supuesto adicional y dejamos de considerar el salario como variable exógena.

Ampliemos el modelo y añadamos el problema al que se enfrentan las empresas asumiendo que éstas operan en mercados competitivos y la tecnología viene descrita por una función del tipo Cobb-Douglas. Este modelo de equilibrio general nos permitirá calcular las ecuaciones dinámicas para el stock de capital y para la producción.

De forma análoga a los consumidores, las empresas maximizan beneficios sujetos a la restricción tecnológica y $N = 1$:

$$Max\ Y_t - W_t - r_tK_t$$

sujeto a:

$$Y_t = Z_tK_t^{\alpha} : 0 < \alpha < 1$$

Las condiciones de primer orden son:

$$r_t = \alpha Z_tK_t^{\alpha-1} = \alpha\frac{Y_t}{K_t} : W_t = (1 - \alpha)Z_tK_t^{\alpha}$$

Esto es, los factores se remuneran en equilibrio según su productividad marginal física.

Sustituyendo la expresión del salario en la inversión dada por (2.3) obtendremos la ecuación dinámica del stock de capital:

$$K_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} Z_t K_t^{\alpha}$$

De esta forma, la ecuación que conecta el stock de capital futuro con el stock de capital presente es una ecuación en diferencias no lineal y estocástica debido al término Z_t.

Dicha ecuación es estable, ya que partiendo de cualquier nivel de capital, éste converge hacia el estado estacionario no estocástico, ya que $0 < \alpha < 1$.

El estado estacionario viene dado por:

$$K = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} Z\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \ln K = \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} Z$$

Efectos de un shock de oferta.

La forma de analizar el efecto del shock de productividad a partir de las solución para el stock de capital es comenzar linealizando la ecuación dinámica para el stock de capital, lo cual es inmediato si aplicamos logaritmos directamente a los dos miembros de la misma.

$$\ln K_{t+1} = b + \alpha \ln K_t + \ln Z_t : \left(b = \ln \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta}\right)$$

Denotando en minúscula el logaritmo de las variables en mayúscula, las solución viene dada, tras aplicar el operador de retardos,.por:

$$k_{t+1}(1-\alpha L) = b + z_t$$

$$k_{t+1} = \frac{b}{1-\alpha L} + \frac{z_t}{1-\alpha L} \Rightarrow k_{t+1} = \frac{b}{1-\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z_{t-i}$$

De forma análoga, el output, el crecimiento del output, el consumo y el salario tienen las siguientes soluciones:

$$k_{t+1} = b + \alpha k_t + z_t \Rightarrow \frac{b + z_t}{1 - \alpha L} = b + y_t \Rightarrow y_t = \alpha b + \alpha y_{t-1} + z_t$$

$$\Delta y_t = \alpha \Delta y_{t-1} + \Delta z_t$$

$$w_t = k_{t+1} + \ln\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) \Rightarrow w_t = \frac{b}{1-\alpha} + \frac{z_t}{1-\alpha L} + \ln\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)$$

$$c_t = w_t - \ln(1+\beta) \Rightarrow c_t = \frac{b}{1-\alpha} + \frac{z_t}{1-\alpha L} - \ln\beta$$

De manera clara las soluciones anteriores nos indican que un shock a la función de producción eleva a corto plazo, el consumo, la producción, la inversión y el salario real.

El mecanismo de transmisión supone que el shock tecnológico eleva la producción a corto plazo y la productividad del trabajo; dado que la oferta del mismo es fija, todo el ajuste se traduce en un aumento en el salario real. El aumento de la productividad marginal del capital implicaría un aumento en el tipo de interés que daría lugar a que el individuo sustituyese consumo presente por consumo futuro, sin embargo, el efecto renta provocado por la subida salarial supera a este efecto sustitución en el consumo y por tanto éste aumenta.

Finalmente el ahorro o la inversión aumentan.

La transmisión dinámica del shock de productividad recae ahora en el stock de capital, k_{t+1}, que ejerce un efecto positivo sobre la producción, y_t, a través de la función de producción.

La perturbación tecnológica, al influir en el stock de capital genera una respuesta serialmente correlacionada en el output.

Si deseamos obtener los efectos dinámicos de un shock a la productividad sobre las variables del modelo, debemos modelizar el proceso que sigue dicho shock tecnológico.

Supongamos que el shock tecnológico sigue el siguiente proceso:

$$\ln Z_t = (1-\rho)\ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \backsim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde ε_t es ruido blanco y $0 \leq \rho < 1$ y $\ln Z$ es el nivel de estado estacionario de la tecnología, en ausencia de perturbaciones.

$$z_t = z + \frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

La expresión dinámica para el output en función de dicha perturbación viene dada por:

$$y_t = \alpha b + \alpha y_{t-1} + z + \frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{\alpha b + z}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha L}\frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t \tag{(2.4)}$$

Desarrollando esta expresión:

$$y_t = \frac{\alpha b + z}{1-\alpha} + \varepsilon_t + (\alpha + \rho)\varepsilon_{t-1} + (\alpha^2 + \alpha\rho + \rho^2)\varepsilon_{t-2} + ... + \sum_{j=0}^{i} \rho^j \alpha^{i-j} \varepsilon_{t-i} + ...$$

El cálculo de los multiplicadores dinámicos nos da la cuantía en la que shock de productividad afecta al output para cualquier horizonte temporal k.

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-k}} = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \sum_{j=0}^{i} \rho^j \alpha^{k-j} \varepsilon_{t+k-i}$$

Podemos calcular cómo se ve afectado el output ante una perturbación aleatoria que eleva el nivel de productividad en un momento t, esto es, supongamos que $\varepsilon_t \neq 0$, $\varepsilon_{t+i} = 0 \ \forall i \neq 0$.

En el caso más sencillo, en el que el parámetro autorregresivo de la perturbación es cero, la perturbación es meramente transitoria y sus efectos en la producción de limitado alcance en el tiempo, ya que:

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-k}} = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \alpha^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \lim_{k\to\infty} \alpha^k \to 0$$

En este caso, el coeficiente de autocorrelación serial en las variables es igual a α, y una perturbación transitoria no eleva de forma permanente ninguna de las variables del modelo. En otras palabras, el efecto a largo plazo de un shock que siga un proceso ruido blanco es nulo.

Si la perturbación es más persistente, $\rho > 0$ pero inferior a la unidad, los multiplicadores dinámicos tendrían las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1 : \frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \alpha + \rho : \frac{\partial y_{t+2}}{\partial \varepsilon_t} = \alpha^2 + \alpha\rho + \rho^2$$

La evolución dinámica del output tiene forma de joroba, aumenta hasta el periodo 2 y comienza a decaer a partir de ese momento hasta alcanzar su estado estacionario inicial. La correlación serial en la producción depende del parámetro de la función de producción y de la persistencia del shock de productividad.

Más interesante es observar lo que sucede si suponemos que la productividad sigue un paseo aletario con deriva, esto es:

$$\ln Z_t = g_Z + \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \backsim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde g_Z es la tasa de crecimiento de la tecnología en ausencia de perturbaciones. En este caso, una innovación en la productivdad, ε_t, tiene un efecto permanente sobre la misma, o lo que es lo mismo, el proceso estocástico que sigue la productividad tiene una raíz unitaria.

A efectos del cálculo de los multiplicadores, las expresiones anteriores continúan siendo válidas y como podemos observar, los efectos a corto y largo plazo de la perturbación son muy diferentes a los anteriormente calculados. La única diferencia es que la producción ahora no es estacionaria, sino que crece en el tiempo a la tasa g_Z.

Para cualquier horizonte temporal, tendremos que:

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-k}} = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \sum_{k=0}^{k} \alpha^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{k} \alpha^k \to \frac{1}{1-\alpha}$$

El nivel de output se ha elevado a largo plazo en una cuantía $\frac{1}{1-\alpha}$.

La ecuación dinámica para la producción, (2.4) viene dada ahora por la siguiente expresión donde por simplicidad hemos supuesto $\frac{\alpha b+z}{1-\alpha}=0$

$$y_t = \alpha y_{t-1} + g_Z t + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

y resolviendo por sustitución recursiva hacia atrás, la ecuación para el shock tecnológico puede expresarse como:

$$\Delta z_t = g_Z + \varepsilon_t \Rightarrow z_t = g_Z t + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

Sustituyendo la expresión en la ecuación dinámica del output y aplicando el operador de retardos, la solución para la producción es:

$$y_t = \frac{g_Z}{1-\alpha L} t + \frac{1}{1-\alpha L} \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

$$y_t = g_Z \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i (t-i) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j L^j \left(\sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} \right)$$

$$y_t = -\frac{\alpha g}{(1-\alpha)^2} + \frac{g}{1-\alpha} t + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} + \alpha \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_{t-i} + \alpha^2 \sum_{i=2}^{t+1} \varepsilon_{t-i} + ... + \alpha^i \sum_{i=i}^{t+i-1} \varepsilon_{t-i} + ...$$

Para cualquier ε_{t-k} la expresión anterior en términos de desviaciones respecto su senda de crecimiento viene dada por:

$$\hat{y}_t = \sum_{j=0}^{i} \alpha^j \varepsilon_{t-i} \qquad (0 < j \leq i)$$

$$\hat{y}_{t+k} = \sum_{j=0}^{i} \alpha^j \varepsilon_{t+k-i}$$

Una perturbación transitoria en t, tal como $\varepsilon_t \neq 0$, $\varepsilon_{t+i} = 0$ $\forall i \neq 0$, eleva de forma permanente el nivel de producción en la siguiente cuantía.

$$\underset{k\to\infty}{lím}\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t}=\frac{1}{1-\alpha}$$

Aunque el nivel de output ha aumentado de nivel de forma permanente, por contra su tasa de crecimiento a largo plazo no se ve afectada.

La ecuación dinámica para la tasa de crecimiento de la producción sabemos que viene dada por:

$$\Delta y_t=\alpha\Delta y_t+\Delta z_t$$

$$\Delta y_t=g_Z+\alpha\Delta y_t+\varepsilon_t$$

Ecuación cuya solución es

$$\Delta y_t=\frac{g_Z}{1-\alpha}+\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\varepsilon_{t-i}$$

La tasa de crecimiento a largo plazo del output viene dada por:

$$\Delta y=\frac{g_Z}{1-\alpha}$$

que es independiente del shock y sí depende de la tasa de crecimiento medio del progreso tecnológico. Los multiplicadores dinámicos son

$$\frac{\partial\left(\Delta y_{t+k}\right)}{\partial \varepsilon_t}=\alpha^k$$

Por tanto, un shock aleatorio que eleve de forma permanente la productividad tiene un efecto nivel sobre el output, esto es, lo eleva de forma permanente. Dicho de otra forma, la perturbación eleva la tasa de crecimiento del output a corto plazo pero no a largo plazo.

En suma, como resultado de la acumulación de capital, el crecimiento de la producción está correlacionado con un coeficiente de correlación igual a α.

Por otra parte, el proceso concreto que sigue el output viene determinado por el proceso estocástico que siga el shock de productividad, de tal manera que sólo perturbaciones muy persistentes pueden generar un efecto autocorrelacionado en el tiempo.

2.1.1. Generalización a infinitos periodos.

El análisis anterior puede fácilmente generalizarse a infinitos periodos y obtener las mismas conclusiones.

La estructura es prácticamente la misma, sólo que el consumidor representativo maximiza la función de utilidad.

$$u(C) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t$$

La restricción de recursos es:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{(2.5)}$$

y la ley dinámica del stock de capital viene dada por:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{(2.6)}$$

Finalmente, nuestro consumidor tiene un stock de capital inicial dado, K_0 y la tecnología que nos resume la función de producción viene dada por:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} \tag{(2.7)}$$

El problema puede resolverse secuencialmente utilizando el enfoque de programación dinámica, dada la estructura recursiva del mismo. Al comienzo de cualquier periodo, la utilidad que el planificador social puede ofrecer al individuo depende sólo de K_t, y del estado de la tecnología dado por Z_t; esto es, tanto la cantidad de capital disponible al comienzo del periodo, como el shock son las variables de estado del problema; por contra las variables de elección son C_t y K_{t+1}, el individuo elige cuánto consumir y cuánto capital desea llevar al periodo siguiente, es decir, cuanto ahorrar.

El enfoque que seguiremos para su resolución es el denominado del planificador social (social planner) y la técnica de programación dinámica basada en la ecuación funcional de Bellman.

Por tanto, nuestro agente representativo maximiza:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{\{C_t, K_{t+1}\}} [u(C_t) + \beta V(K_{t+1}, Z_{t+1})]$$

sujeto al conjunto de restricciones anteriores, (2.5), (2.6) y (2.7) que pueden resumirse en una:

$$C_t + K_{t+1} = F(K_t, Z_t) + (1 - \delta)K_t$$

Con este planteamiento podemos caracterizar las reglas de decisión óptimas en casos muy particulares. Dichas reglas óptimas o "policy functions" nos dan la solución para las variables de decisión en función de las variables de estado:

$$K_{t+1} = K(K_t, Z_t) : C_t = C(K_t, Z_t)$$

Encontrar una solución cerrada del problema implica suponer que la tasa de depreciación debe ser igual a la unidad, $\delta = 1$ y la función de utilidad debe ser logarítmica.

Un método de solución muy utilizado es el de prueba y verificación (guess and verify). Dada la función de utilidad logarítmica, podemos probar que

$$V(K_t, Z_t) = a + \gamma_1 \ln K_t + \gamma_2 \ln Z_t$$

satisface la solución, y donde a, γ_1 y γ_2 son parámetros indeterminados.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Bellman.

$$V(K_t, Z_t) = \max_{\{C_t, K_{t+1}\}} [u(C_t) + \beta E_t (a + \gamma_1 \ln K_{t+1} + \gamma_2 \ln Z_{t+1})]$$

sujeto a:

$$K_{t+1} = Z_t K_t^{\alpha} - C_t$$

restricción que sustituida en la ecuación funcional, nos permite derivar la condición de optimización de primer orden:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{\{C_t\}} [u(C_t) + \beta (a + \gamma_1 \ln (Z_t K_t^\alpha - C_t) + \gamma_2 \ln Z_{t+1})]$$

que viene dada por:

$$\frac{dV}{dC_t} = \frac{1}{C_t} - \beta\gamma_1 \frac{1}{Z_t K_t^\alpha - C_t} = 0 \Rightarrow C_t = \frac{Z_t K_t^\alpha}{1+\beta\gamma_1} = \frac{Y_t}{1+\beta\gamma_1}$$

Por tanto:

$$K_{t+1} = Y_t - C_t = \frac{\beta\gamma_1}{1+\beta\gamma_1} Y_t = \frac{\beta\gamma_1}{1+\beta\gamma_1} Z_t K_t^\alpha$$

Las reglas de decisión nos generan una solución tal que el stock de capital futuro y el consumo son funciones lineales del output.

Una vez calculadas dichas reglas debemos verificar si las mismas verifican la ecuación de Bellman con la forma funcional probada como solución y calcular los coeficientes indeterminados.

$$V(K_{t+1}, Z_{t+1}) = a + \gamma_1 \ln K_{t+1} + \gamma_2 \ln Z_{t+1}$$

$$V(K_{t+1}, Z_{t+1}) = a + \gamma_1 \ln \left(\frac{\beta\gamma_1}{1+\beta\gamma_1} Z_t K_t^\alpha \right) + \gamma_2 \ln Z_{t+1}$$

Identificando en la ecuación de Bellman.

$$a + \gamma_1 \ln K_t + \gamma_1 \ln Z_t = \ln \left(\frac{Z_t K_t^\alpha}{1+\beta\gamma_1} \right) + \beta E_t \left[a + \gamma_1 \ln \left(\frac{\beta\gamma_1}{1+\beta\gamma_1} Z_t K_t^\alpha \right) + \gamma_2 \ln Z_{t+1} \right]$$

El parámetro indeterminado importante es γ_1 ya que es el único que aparece en nuestras reglas óptimas[14]. De la igualdad anterior deducimos:

$$\gamma_1 = \alpha + \alpha\beta\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

Finalmente las reglas de decisión óptimas son:

$$C_t = (1-\alpha\beta) Z_t K_t^\alpha \Rightarrow c_t = \ln(1-\alpha\beta) + \alpha k_t + z_t$$

[14] Note que para el cálculo de γ_2 debemos suponer que la tecnología sigue un determinado proceso estocástico que nos permita el cálculo de $E_t \ln z_{t+1}$.

$$K_{t+1} = \alpha\beta Z_t K_t^{\alpha} \Rightarrow k_{t+1} = \ln(\alpha\beta) + \alpha k_t + z_t \qquad ((2.8))$$

A partir de anteriores podemos calcular rápidamente el proceso dinámico que sigue la producción.

$$y_t = z_t + \alpha k_t$$

aplicando el operador de retardos a la dinámica del stock de capital.

$$(1 - \alpha L)k_{t+1} = \ln(\alpha\beta) + z_t$$

$$y_t = z_t + \alpha\left(\frac{\ln(\alpha\beta) + z_{t-1}}{1 - \alpha L}\right)$$

$$y_{t+1} = \alpha \ln(\alpha\beta) + \alpha y_t + z_t$$

Supongamos dos casos extremos para modelizar el shock tecnológico.

En primer lugar, el shock no tiene persistencia alguna.

$$z_t = \varepsilon_t \Rightarrow E_t z_{t+1} = 0$$

La solución para el output y los multiplicadores dinámicos vienen dados por:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i} : \frac{\partial \ln y_{t+i}}{\partial \varepsilon_t} = \alpha^i$$

Esto es, dada una perturbación transitoria, el output aumenta a corto plazo, pero el efecto de la perturbación va desapareciendo conforme pasa el tiempo.

Por contra, si:

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow E_t z_{t+i} = z_t$$

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z_{t-i}$$

y la secuencia de multiplicadores es:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_{t+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$$

esto es, dada una perturbación, el output se eleva de forma permanente a largo plazo.

Como vemos la generalización a infinitos periodos presenta las mismas características que el modelo con dos periodos.

2.2. El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans con shocks de productividad aditivos.

El modelo básico de equilibrio general dinámico se suele conocer con el nombre de Ramsey-Cass-Koopmans[15] y forma la base de la moderna teoría del crecimiento económico mientras que el trabajo pionero en el análisis del modelo de crecimiento estocástico se encuentra en el artículo de Brock y Mirman (1972).

En este caso consideraremos un horizonte de optimización para infinitos periodos y donde supondremos que los shocks de productividad son aditivos y por tanto no afectan a la productividad marginal del capital, que supondremos constante. De nuevo asumiremos una tasa de depreciación del 100 % y obtendremos una solución cerrada para las variables del modelo.

Nuestro agente representativo resuelve el siguiente problema:

$$Max \;\; E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(C_t - \frac{b}{2} C_t^2 \right) : C < \frac{1}{b} : b < 0$$

La utilización de esta función cuadrática obedece a que con la misma se obtiene el resultado conocido como equivalencia cierta, esto es, se obtiene el mismo resultado bajo condiciones de certidumbre que de incertidumbre.

[15] Frank Ramsey, matemático inglés, escribió el primer modelo con optimización dinámica en 1928. Su objetivo era cuanto podría ahorrar como máximo una economía dada la restricción de recursos. Su modelo es el prototipo para estudiar asignación óptima intertemporal de recursos.

Las restricciones del problema son:

$$K_{t+1} + C_t = Y_t$$

$$Y_t = F(K_t, Z_t) = (1 + r)K_t + Z_t$$

junto a la condición de transversalidad que se deduce a partir de la ecuación de Euler y significa que el valor actual del capital en el infinito debe ser cero.

$$\underset{t\to\infty}{lím}(\beta^t \frac{\lambda_t}{\lambda_0} K_{t+1}) = 0$$

Planteando el lagrangiano del problema:

$$\mathcal{L}(C_t, K_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ E_t \left(C_t - \frac{b}{2} C_t^2 \right) - \lambda_t \left(K_{t+1} + C_t - (1 + r)K_t - Z_t \right) \right\}$$

Las condiciones de optimización de primer orden, para todo $i = 0, 1, 2..t.$,vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t E_t(1 - bC_t) - \beta^t \lambda_t = 0 \Rightarrow 1 - bC_t = \lambda_t \qquad ((2.9))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = E_t \left[-\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1}((1 + r) \right] = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta(1+r)E_t \lambda_{t+1} \quad ((2.10))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = K_{t+1} + C_t - ((1 + r)K_t + Z_t) = 0 \Rightarrow K_{t+1} + C_t = (1 + r)K_t + Z_t \qquad ((2.11))$$

Podemos eliminar el multiplicador de Lagrange y obtener un sistema en las dos variables de decisión, C_t y K_{t+1}.

A partir de (2.9) y (2.10) obtenemos la conocida ecuación de Euler para el consumo. Su interpretación es como sigue: a lo largo de la senda óptima, las variaciones en los niveles de utilidad entre los dos periodos deben ser iguales, por tanto, la disminución de utilidad derivada de consumir hoy menos debe ser igual al incremento de utilidad derivado de consumir más en términos de valor actual.

$$1 - bC_t = \beta E_t \left((1 - bC_{t+1})(1 + r) \right)$$

Dado que los individuos desean obtener niveles constantes en el consumo presente y futuro, supondremos que $\beta(1+r) = 1$ o lo que es lo mismo, la tasa de rendimiento neta del capital es igual a la tasa de descuento subjetivo del individuo[16].

El sistema (2.9), (2.10) y (2.11) viene dado por:

$$E_t C_{t+1} = E_t C_{t+i} = C_t$$

$$K_{t+1} + C_t = (1+r)K_t + Z_t = Y_t \qquad ((2.12))$$

Las soluciones para el consumo y el ahorro nos permitirán poder calcular el efecto de los shocks a la función de producción.

La restricción de recursos (2.11) es en sí una ecuación dinámica de primer orden que puede resolverse mediante iteraciones sucesivas hacia delante.

$$K_t = \frac{1}{1+r}K_{t+1} + \frac{1}{1+r}(C_t - Z_t)$$

$$K_{t+1} = \frac{1}{1+r}K_{t+2} + \frac{1}{1+r}E_t(C_{t+1} - Z_{t+1})$$

Y sustituyendo en la anterior:

$$K_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 K_{t+2} + \frac{1}{1+r}(C_t - Z_t) + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 E_t(C_{t+1} - Z_{t+1})$$

En general para $T+1$ periodos hacia delante:

$$K_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1} K_{t+T+1} + \frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{i} E_t(C_{t+i} - Z_{t+i})$$

Dado que la serie para el stock de capital está acotada superiormente, $\{k_{t+T+1}\} <$

[16] Si la tasa de descuento subjetiva es distinta del tipo de interés real, las utilidades marginales para el consumo serían distintas y por tanto, el consumo o bien aumentaría o bien disminuiría sin límite. Por tanto, para obtener un estado estacionario no estocástico debemos asumir que $\rho = r$ o $\beta(1+r) = 1$. En este caso, los individuos desean suavizar el consumo, lo cual es consistente con los datos.

∞ y además $\underset{T\to\infty}{lím}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T+1} \to 0$, podemos escribir la solución como:

$$K_t = \frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_t(C_{t+i} - Z_{t+i}) \qquad ((2.13))$$

Dada la senda para el consumo, $E_tC_{t+i} = C_t$, podemos despejar éste y por tanto:

$$C_t = rK_t + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_tZ_{t+i} \qquad ((2.14))$$

El consumo depende del stock de capital y de los valores futuros que pueda tomar la perturbación tecnológica.

Sustituyendo la expresión (2.13) en (2.12) obtenemos la inversión:

$$K_{t+1} = (1+r)K_t + Z_t - rK_t - \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_tZ_{t+i}$$

Por tanto:

$$K_{t+1} - K_t = Z_t - \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_tZ_{t+i}$$

$$K_{t+1} - K_t = \frac{1}{1+r}\left(Z_t - r\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i E_tZ_{t+i}\right) \qquad ((2.15))$$

El aumento en el stock de stock de capital depende de la diferencia entre la tecnología hoy y de los valores descontados esperados para los niveles tecnológicos futuros.

Un proceso estocástico sencillo que nos permite simultanear efectos permanentes y transitorios de las perturbaciones es el siguiente:

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} : |\theta| < 1$$

Si $\theta \to 0$, el proceso se convierte en un paseo aleatorio mientras que si $\theta \to 1$ el proceso se convierte en un ruido blanco. Para $0 < \theta < 1$, la perturbación ejerce un efecto permanente en la tecnología, pero inferior a su efecto inicial, y al contrario, si $-1 < \theta < 0$, el efecto de la perturbación sobre el nivel tecnológico es mayor que su efecto inicial.

Esto es fácil de comprobar, calculando el efecto a largo plazo de la perturbación aleatoria ε_t sobre el nivel tecnológico Z_t:

$$\frac{\partial Z_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 - \theta$$

Calculando su expectativa para cualquier periodo futuro:

$$E_t Z_{t+i} = Z_t - \theta \varepsilon_t$$

Sustituyendo en el consumo, (2.14) y en la inversión, (2.15):

$$C_t = rK_t + Z_t - \theta \varepsilon_t$$

$$K_{t+1} - K_t = \frac{\theta}{1+r}\varepsilon_t \Rightarrow K_{t+k+1} = K_t + \frac{\theta}{1+r}\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_{t+k-i}$$

La variación en el consumo y del output en función de las perturbaciones puede deducirse de la siguiente manera:

$$C_{t+1} - C_t = \frac{r\theta}{1+r}\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t \Rightarrow \Delta C_{t+1} = \frac{r\theta}{1+r}\varepsilon_t + (1-\theta)\varepsilon_{t+1}$$

$$Y_{t+1} - Y_t = (1+r)K_{t+1} + Z_{t+1} - (1+r)K_t - Z_t$$

$$Y_{t+1} - Y_t = (1+\theta)\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

En el caso de que la tecnología siguiese un paseo aleatorio, $\theta = 0$, un shock tecnológico transitorio, que eleva de forma permanente el nivel tecnológico, tendría el efecto de elevar el consumo y el output de forma permanente y en la misma cuantía, dejando inalterado el stock de capital.

$$C_{t+1} - C_t = \varepsilon_{t+1} : Y_{t+1} - Y_t = \varepsilon_t : K_t = K_{t-1}$$

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta \varepsilon_t} = \frac{\Delta C_t}{\Delta \varepsilon_t} = 1 : \frac{\Delta K_{t+1}}{\Delta \varepsilon_t} = 0$$

El consumo y la producción tendrían una raíz unitaria.

Para valores de θ positivos e inferiores a la unidad, el incremento en el stock de capital sería permanente y tendría una raíz unitaria. En este caso, el consumo y la producción también aumentarían.

En el caso límite de $\theta = 1$, la acumulación de capital sería máxima y el consumo sólo aumentaría de forma inducida por los aumentos de capital.

$$C_{t+1} - C_t = \frac{r}{1+r}\varepsilon_t : Y_t = Y_{t-1} + 2\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} : K_{t+1} - K_t = \frac{1}{1+r}\varepsilon_t$$

Curiosamente, perturbaciones modelizadas de forma aditiva, además de asumir que el tipo de interés es constante e independiente del nivel de capital conducen a unos resultados contrarios a los del modelo anterior. Esto es, perturbaciones transitorias que elevan el nivel de la tecnología de forma permanente conducen a una nula acumulación de capital, mientras que perturbaciones meramente transitorias lo elevan de forma permanente.

En este ejemplo vemos un caso extremo donde la forma de modelizar la perturbación de oferta incide de manera radical en los valores de equilibrio a corto y largo plazo de las variables endógenas.

El caso $\theta = 0$ supone que el consumo sigue un paseo aleatorio, resultado que demostró Hall (1978) precisamente con el tipo de función de utilidad que hemos utilizado en este ejemplo y que implica el deseo de los individuos de mantener unos niveles muy estables de consumo.

2.3. Un modelo de crecimiento neoclásico estocástico general.

Los modelos anteriores pueden ser modificados en dos aspectos: en primer lugar, vamos a suponer ahora que la tasa de depreciación es igual a 0 y los shocks tecnológicos entran en la función de producción de forma algo distinta. En este caso no es posible obtener una solucion general cerrada pero es posible resolver el modelo analíticamente log-linealizando las condiciones de primer orden en un entorno del estado estacionario estocástico.[17]

De nuevo, el agente representativo maximiza una función de utilidad logarítmica y separable en el tiempo.

$$u(C_t) = E_t \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t \right]$$

sujeto a las restricciones habituales:

La función de producción del tipo Cobb-Douglas.

$$Y_t = Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

La restricción de recursos:

$$Y_t = C_t + I_t$$

y la ecuación de acumulación del stock de capital donde K_t es condición inicial del problema.

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \Rightarrow K_{t+1} - K_t = I_t : (\delta = 0)$$

De nuevo para su resolución planteamos la ecuación de Bellman.

$$V(K_t, Z_t) = \underset{\{C_t, K_{t+1}\}}{Max} \left[\ln C_t + \beta E_t V(K_{t+1}, Z_{t+1}) \right]$$

[17] Esta técnica es con diferencia la más utilizada en cualquier artículo que implique la solución de un modelo de equilibrio general dinámico.

sujeto a la restricción:

$$K_{t+1} = K_t + Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t$$

La condición de primer orden:

$$\frac{\partial V}{\partial C_t} = u'(C_t) + \beta E_t \left[\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t} \right] = 0 \qquad ((2.16))$$

junto a la condición de envolvente o condición de Benveniste-Scheinkman:

$$\frac{\partial V}{\partial K_t} = \beta \frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t} \qquad ((2.17))$$

Teniendo en cuenta:

$$u'(C_t) = \frac{1}{C_t} : \frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t} = -1 : \frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t} = 1 + \alpha Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1}$$

podemos expresar la condición de primer orden (2.16) como:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} = \lambda_t$$

Y adelantando un periodo la condición que nos da la envolvente:

$$\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} = \beta \frac{\partial V}{\partial K_{t+2}} (1 + \alpha Z_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1})$$

$$\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1} (1 + \alpha Z_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1})$$

Por tanto, el sistema no lineal solución del modelo finalmente viene dado por:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t \qquad ((2.18))$$

$$\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1} \left(1 + \alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \qquad ((2.19))$$

$$Y_t = Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \qquad ((2.20))$$

$$K_{t+1} = K_t + Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t \qquad ((2.21))$$

en el que las variables endógenas son el consumo, el stock de capital K_{t+1}, el multiplicador de Lagrange y la producción, mientras que las variables de estado son el stock de capital existente en el periodo t y el shock a la función de producción.

Cálculo del estado estacionario no estocástico.

Denotando a las variables sin subíndice temporal el correspondiente valor de equilibrio a largo plazo o estado estacionario, obtenemos:

$$Y = C = \frac{1}{\lambda} : \frac{C}{K} = \frac{Y}{K} = \frac{1-\beta}{\alpha\beta}$$

$$R = 1 + \alpha\frac{Y}{K} = \frac{1}{\beta}$$

donde R es el rendimiento bruto del capital.

Log-linealización y solución del sistema.

El sistema original es no lineal, pero puede transformarse en lineal a través de la log-linealización en un entorno de su estado estacionario.

Cada variable ahora vendrá definida por su desviación logarítmica respecto su estado estacionario.

$$\hat{X}_t = \ln X_t - \ln X = \Delta \ln X_t \simeq \frac{dX}{X}$$

En (2.18) aplicamos logaritmos y diferenciamos:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t \Rightarrow -d\ln C_t = d\ln\lambda_t \Rightarrow \hat{C}_t = -\hat{\lambda}_t \qquad ((2.22))$$

En segundo lugar, (2.19), la ecuación de Euler para el consumo.

$$\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1} R_{t+1} \Rightarrow \frac{1}{C_t} = \beta E_t \left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)$$

donde $R_{t+1} = 1 + \alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}$. En condiciones de incertidumbre, habría que suponer que $\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}$sigue una distribución log-normal[18], de tal forma que:

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \exp\left\{ \ln\left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{C_t} = \beta \exp\left[E_t \ln R_{t+1} - E_t \ln C_{t+1} + \frac{1}{2} E_t Var \ln\left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)\right]$$

Tomando logaritmos:

$$-\ln C_t = \ln \beta + E_t \ln R_{t+1} - E_t \ln C_{t+1} + \frac{1}{2} E_t Var \ln\left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)$$

En estado estacionario,$\frac{1}{2} E_t Var \ln\left(\frac{R_{t+1}}{C_{t+1}}\right)$ es constante. Diferenciando, obtenemos la relación entre el crecimiento esperado en el consumo y el rendimiento bruto del capital:

$$E_t \hat{C}_{t+1} - \hat{C}_t = E_t \hat{R}_{t+1} \Rightarrow E_t \hat{\lambda}_{t+1} = \hat{\lambda}_t + E_t \hat{R}_{t+1} \qquad ((2.23))$$

En la función de producción procedemos de igual forma:

$$d \ln Y_t = (1-\alpha) d \ln Z_t + \alpha d \ln K_t$$

$$\hat{Y}_t = (1-\alpha)\hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t \qquad ((2.24))$$

La restricción de recursos, diferenciada:

$$K_{t+1} = K_t + Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - C_t$$

$$dK_{t+1} = dK_t + d(Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}) - dC_t$$

$$\frac{dK_{t+1}}{K} K = \frac{dK_t}{K} K + d((1-\alpha)\frac{K^{\alpha} Z_t^{1-\alpha}}{K}\frac{dZ_t}{Z} + \frac{\alpha}{K} Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \frac{dK_t}{K}) - \frac{C}{K}\frac{dC_t}{C}$$

[18] Para poder utilizar el siguiente resultado: si una variable aleatoria $Y_t \sim \log N \Rightarrow Y_t = \exp(\ln Y_t)$
Y: $E(\exp(\ln Y_t)) = \exp\left[(E(Y) + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right]$.
La deducción puede verse en Obstfeld y Rogoff (1999, pag 504).

$$\hat{K}_{t+1} = \left(1 + \alpha\frac{Y}{K}\right)\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t + (1-\alpha)\frac{Y}{K}\hat{Z}_t$$

En estado estacionario $\frac{Y}{K} = \frac{1-\beta}{\alpha\beta}$.

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\hat{K}_t - \frac{1-\beta}{\alpha\beta}\hat{C}_t + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\hat{Z}_t \qquad ((2.25))$$

Finalmente:

$$R_{t+1} = 1 + \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}$$

$$d\ln R_{t+1} = \frac{d\left(1+\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}\right)}{1+\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}} = \beta\alpha\frac{KdY_{t+1} - YdK_{t+1}}{K^2}$$

$$\hat{R}_{t+1} = \alpha\beta\frac{Y}{K}\left[\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1}\right] = (1-\beta)\left[\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1}\right] \qquad ((2.26))$$

El sistema de cinco ecuaciones, (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) y (2.26) puede ser reducido a uno dinámico de dimensión dos para las variables de coestado λ_t y para $\hat{K}_{t+1}$.

Sustituyendo (2.26) y (2.24) en (2.23) obtenemos:

$$E_t\hat{\lambda}_{t+1} - (1-\alpha)(1-\beta)\hat{K}_{t+1} = \hat{\lambda}_t - (1-\alpha)(1-\beta)E_t\hat{Z}_{t+1} \qquad ((2.27))$$

Y sustituyendo (2.22) en (2.25):

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\hat{K}_t + \frac{1-\beta}{\alpha\beta}\hat{\lambda}_t + \left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\right)\hat{Z}_t \qquad ((2.28))$$

El sistema en forma matricial puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -(1-\alpha)(1-\beta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_t\hat{\lambda}_{t+1} \\ \hat{K}_{t+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_t \\ \hat{K}_t \end{bmatrix} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\begin{bmatrix} -\alpha\beta E_t\hat{Z}_{t+1} \\ \hat{Z}_t \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} E_t\hat{\lambda}_{t+1} \\ \hat{K}_{t+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1+\mu a_{21} & \mu a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\lambda}_t \\ \hat{K}_t \end{array}\right] +$$

$$+\frac{\mu}{\alpha\beta}\left[\begin{array}{c} -\alpha\beta E_t\hat{Z}_{t+1} + (1-\alpha)(1-\beta)\hat{Z}_t \\ \hat{Z}_t \end{array}\right]$$

donde:

$$a_{11} = 1 + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\alpha\beta} : a_{12} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$a_{21} = \frac{1-\beta}{\alpha\beta} : a_{22} = \frac{1}{\beta} : \mu = (1-\alpha)(1-\beta)$$

Las raíces de la matriz de coeficientes del sistema verifican:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\alpha\beta} > 2 : \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{\beta} > 1$$

y por tanto:

$$\lambda_1 < 1 \quad \lambda_2 > 1$$

El sistema tiene solución porque verifica las condiciones de Blanchard y Kahn (1980) tiene una raíz mayor que uno y otra inferior a uno, y nuestro sistema presenta una variable predeterminada, $\hat{K}_{t+1}$ y otra variable forward.

Utilizando el operador de retardos, el sistema viene dado por:

$$(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)\left[\begin{array}{c} E_t\hat{\lambda}_{t+1} \\ \hat{K}_{t+1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 1-a_{22}L & \mu a_{22}L \\ a_{21}L & 1-(1+\mu a_{21})L \end{array}\right] \left\{\frac{\mu}{\alpha\beta}\left[\begin{array}{c} -\alpha\beta E_t\hat{Z}_{t+1} + \mu\hat{Z}_t \\ \hat{Z}_t \end{array}\right]\right\}$$

Finalmente, invertimos la matriz de coeficientes y podemos calcular las soluciones para $E_t\hat{\lambda}_{t+1}$ y $\hat{K}_{t+1}$ y donde la perturbación de oferta sigue el siguiente proceso:

$$\ln Z_{t+1} = (1-\rho)\ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_{t+1} : 0 \leq \rho < 1$$

$$\hat{Z}_{t+1} = \rho\hat{Z}_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$(1-\lambda_1 L)E_t\hat{\lambda}_{t+1} = \frac{-\lambda_2^{-1}F}{1-\lambda_2^{-i}F}\frac{\mu}{\alpha\beta}\left[(1-a_{22}L)(-\alpha\beta E_t\hat{Z}_{t+1}+\mu\hat{Z}_t)+\mu a_{22}L\hat{Z}_t\right]$$

$$(1-\lambda_1 L)\hat{K}_{t+1} = \frac{-\lambda_2^{-1}F}{1-\lambda_2^{-i}F}\frac{\mu}{\alpha\beta}\left[a_{21}L(-\alpha\beta E_t\hat{Z}_{t+1}+\mu\hat{Z}_t)+(1-(1+\mu a_{21})L)\,\hat{Z}_t\right]$$

Operando las dos expresiones, el resultado final viene dado por:

$$(1-\lambda_1 L)E_t\hat{\lambda}_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\frac{\rho}{\lambda_2-\rho}\left[\alpha\beta\left(\rho-1\right)-(1-\beta)\right]\hat{Z}_t$$

$$(1-\lambda_1 L)\hat{K}_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\frac{1}{\lambda_2-\rho}\left[1-\beta\rho\right]\hat{Z}_t$$

Con estas soluciones para los valores esperados de las variables sustituimos en el sistema original linealizado. Consideramos los dos casos extremos para la persistencia de la perturbación.

En primer lugar, si la perturbación aleatoria tiene un efecto permanente en el shock de oferta, entonces $\rho = 1$.En segundo lugar, si la perturbación ejerce un efecto transitorio en el shock de oferta, entonces $\rho = 0$.

Para $\rho = 1$, las soluciones del sistema vienen dadas por:

$$(1-\lambda_1 L)E_t\hat{\lambda}_{t+1} = -\frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\alpha\beta}\frac{1}{\lambda_2-1}\hat{Z}_t \Rightarrow E_t\hat{\lambda}_{t+1} = \lambda_1\hat{\lambda}_t-(1-\lambda_1)\,\hat{Z}_t$$

$$(1-\lambda_1 L)\hat{K}_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\alpha\beta}\frac{1}{\lambda_2-1}\hat{Z}_t \Rightarrow \hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t+(1-\lambda_1)\,\hat{Z}_t$$

Sustituyendo dichas soluciones en las ecuaciones dinámicas (2.27) y (2.28) obtenemos tanto la senda óptima como la senda de equilibrio de punto de silla (saddle-path).

La senda de equilibrio viene dada por:

$$E_t\hat{\lambda}_{t+1}-(1-\alpha)(1-\beta)\hat{K}_{t+1} = \hat{\lambda}_t-(1-\alpha)(1-\beta)E_t\hat{Z}_{t+1}$$

$$(\lambda_1-1)\,\hat{\lambda}_t+(\lambda_1-1)\hat{Z}_t = (1-\alpha)(1-\beta)(\lambda_1\hat{K}_t+(1-\lambda_1)\hat{Z}_t)-(1-\alpha)(1-\beta)\hat{Z}_t$$

$$\hat{\lambda}_t = -\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1 \hat{K}_t + \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1 - 1\right]\hat{Z}_t$$

La solución óptima para el capital es:

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\hat{K}_t + \frac{1-\beta}{\alpha\beta}\hat{\lambda}_t + \left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\right)\hat{Z}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\alpha\beta\,(1-\lambda_1)}\lambda_1\right)\hat{K}_t +$$

$$+\left(-\frac{1-\beta}{\alpha\beta} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1 + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}\right)\hat{Z}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t + (1-\lambda_1)\,\hat{Z}_t$$

Con lo que las soluciones para consumo y output son:

$$\hat{C}_t = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1 \hat{K}_t + \left[1 - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1\right]\hat{Z}_t$$

$$\hat{Y}_t = \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{Z}_t$$

Los efectos a corto y largo plazo de una perturbación a la función de producción pueden calcularse a partir de las ecuaciones dinámicas para cada una de las variables.

Dado que cada una depende de $\hat{K}_t$ y el capital sigue la siguiente ley dinámica es inmediato obtener las siguientes expresiones:

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1 L}\hat{Z}_t$$

$$\hat{C}_{t+1} = \lambda_1 \hat{C}_t + \left(1 + \mu\lambda_1 - \frac{\mu\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)\hat{Z}_t - \lambda_1\left(1 - \frac{\mu\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)\hat{Z}_{t-1}$$

$$\hat{Y}_{t+1} = \lambda_1 \hat{Y}_t + (\alpha - \lambda_1)\hat{Z}_t + (1-\alpha)\hat{Z}_{t+1}$$

De esta forma, el efecto, para cualquier horizonte temporal de las perturbaciones vienen dados por:

$$\frac{\partial \hat{C}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\lambda_1}\lambda_1^{k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\partial \hat{C}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

$$\frac{\partial \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 - \alpha\lambda_1^k \Rightarrow \underset{k\to\infty}{lím} \frac{\partial \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 \qquad ((2.29))$$

$$\frac{\partial \hat{K}_{t+1+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 - \lambda_1^{k+1} \Rightarrow \underset{k\to\infty}{lím} \frac{\partial \hat{K}_{t+1+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 \qquad ((2.30))$$

El mecanismo de transmisión de la perturbación es análogo a los que hemos visto anteriormente. El shock de productividad afecta de forma positiva al output, al consumo y a la inversión pero la persistencia o la transmisión del impacto en el tiempo viene guiado por la acumulación de capital, esto es, el aumento en $\hat{K}_{t+1}$ aumenta la producción $\hat{Y}_{t+1}$. A largo plazo, el aumento de todas las variables es permanente si la perturbación aleatoria ejerce un efecto permanente sobre la función de producción.

El impacto del shock tecnológico sobre el rendimiento bruto del capital es positivo, dado que:

$$R_t = 1 + \alpha\frac{Y_t}{K_t}$$

Al siguiente periodo, $R_{t+1} = 1 + \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}$ el rendimiento bruto del capital baja ligeramente debido a la ley de los rendimientos decrecientes, esto es, la producción aumenta menos de lo que lo hace el capital como puede observarse en (2.29) y (2.30).

Si $\rho = 0$ los resultados son los siguientes:

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{\mu\lambda_1}{\alpha}\frac{1}{1-\lambda_1 L}\varepsilon_t$$

$$\hat{Y}_t = \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\varepsilon_t : \hat{Y}_{t+1} = \lambda_1\hat{Y}_t - (\lambda_1(1-\alpha) - -\mu\lambda_1)\,\varepsilon_t$$

$$\hat{C}_t = \frac{\mu\lambda_1}{1-\lambda_1}\hat{K}_t + \frac{\mu^2}{\alpha\,(1-\lambda_1)}\lambda_1\varepsilon_t : \hat{C}_{t+1} = \lambda_1\hat{C}_t + \frac{\mu\lambda_1}{\alpha}\left(1 + \frac{\mu}{1-\lambda_1}\right)\varepsilon_t$$

Los respectivos multiplicadores reflejan que la perturbación sólo tiene un efecto limitado en el tiempo, a largo plazo, las variables vuelven a sus valores de estado estacionario inicial.

$$\frac{\partial \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \mu\lambda_1^k \Rightarrow \underset{k\to\infty}{lím} \frac{\partial \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 0$$

2.4. El papel de la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo.

En este epígrafe vamos a resolver analíticamente el modelo de crecimiento con el método de coeficientes indeterminados propuesto por Campbell (1994) el cual permite derivar de forma directa la respuesta de las variables endógenas a los shocks en las variables exógenas.

La especificación del modelo es la standard, con tres diferencias: en primer lugar, las variables endógenas siguen una senda de crecimiento equilibrado en la cual la tecnología, el stock de capital, la producción y el consumo crecen a la misma tasa común determinada por el crecimiento del progreso tecnológico. Sólo en estado estacionario el rendimiento bruto del stock de capital, y por tanto, el tipo de interés real son constantes; en segundo lugar, la tasa de depreciación del stock de capital es positiva e inferior a la unidad y en tercer lugar, la función de utilidad no es logarítmica, sino una función con elasticidad de sustitución constante.

El agente representativo maximiza una función objetivo sujeta a las restricciones pertinentes.

Por tanto, el problema viene planteado por:

$$MaxE_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$Y_t = Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

$$N_t = 1$$

$$Z_{t+1} = g_Z Z_t \Rightarrow \Delta \ln Z_{t+1} = g_Z - 1$$

La tasa de crecimiento del progreso tecnológico viene dada por $g_Z - 1$.

La función de utilidad es frecuentemente utilizada en los modelos de optimización intertemporal. Es una función CRRA (Constant Relative Risk Aversión) o función isoelástica o de constante elasticidad de sustitución. Cuando el parámetro de la función, $\theta \to 1$, la función de utilidad es $u(C_t) = \ln C_t$. La elasticidad de sustitución en el consumo entre dos momentos del tiempo es constante e igual a $\sigma_c = \frac{1}{\theta}$. El parámetro θ es también el coeficiente de aversión relativa al riesgo definido como $-u''(C_t)C_t/u'(C_t)$ que es además la elasticidad de la utilidad marginal del consumo con respecto a él mismo.

Sustituyendo la restricción de recursos y la función de producción en la ley dinámica del capital, obtenemos la única restricción del problema.

Planteando de nuevo el lagrangiano, obtenemos las condiciones de primer orden del problema.

$$\mathcal{L}(C_t, K_{t+1}, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta} - \lambda_t (K_{t+1} - (1-\delta)K_t - Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} + C_t) \right\}$$

La resolución del problema anterior implica las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = C_t^{-\theta} - \lambda_t = 0 \qquad ((2.32))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} E_t[\lambda_{t+1}((1-\delta) + \alpha Z_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1})] = 0 \qquad ((2.33))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = K_{t+1} - (1-\delta)K_t - Z_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} + C_t = 0 \qquad ((2.34))$$

De nuevo definimos el rendimiento bruto del capital, R_{t+1} como $1 + r_{t+1}$. Dado que el tipo de interés real más la tasa de depreciación es igual a la productividad marginal del capital, R_{t+1} vendrá dado por:

$$R_{t+1} = 1 + r_{t+1} = 1 + F_{K(t+1)} - \delta \qquad ((2.35))$$

Para la función C Cobb-Douglas, R_{t+1} viene dado por:

$$R_{t+1} = (1 - \delta) + \alpha Z_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1}$$

Sustituyendo el multiplicador de Lagrange de (2.32) en (2.33) y utilizando (2.35), obtenemos la ecuación de Euler del modelo.

$$C_t^{-\theta} = \beta E_t[C_{t+1}^{-\theta} R_{t+1}]$$

Cálculo del crecimiento de estado estacionario.

Al haber supuesto que la tecnología crece a la tasa bruta $g_Z = \frac{Z_{t+1}}{Z_t}$,el estado estacionario no estocástico sigue una senda de crecimiento equilibrado (balanced growth path) e implica que en ella, el stock de capital, la producción y el consumo crecen a la misma tasa constante, mientras que el tipo de interés real y la tasa bruta de rendimiento del capital son estacionarias.

Esto es, a lo largo de la senda de estado estacionario.

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = g_Z$$

Dada la condición de primer orden y las restricciones del modelo podemos obtener los valores de estado estacionario para los denominados grandes ratios, como son la relación producción-capital y consumo-producción. Las variables sin subíndice temporal indican el valor de estado estacionario.

A partir de la ecuación de Euler obtenemos:

$$g_Z^{\theta} = \beta R \Rightarrow \theta \ln g_Z = \ln \beta + \ln R$$

$$g_Z = \sigma_c \ln \beta + \sigma_c r : \ln R = \ln(1 + r) \simeq r$$

Expresada en logaritmos esta condición nos relaciona la tasa de crecimiento de equilibrio en el consumo con la elasticidad intertemporal de sustitución y el tipo de interés real con la función de utilidad utilizada.

A partir de la definición de R:

$$R = 1 - \delta + \alpha \left(\frac{Z}{K}\right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{Z}{K} = \left(\frac{R - (1-\delta)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{r+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

A partir de la función de producción:

$$\frac{Y}{K} = \left(\frac{Z}{K}\right)^{1-\alpha} = \frac{r+\delta}{\alpha}$$

A partir de la ecuación de acumulación del stock de capital:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = g_Z = (1-\delta) + \left(\frac{Z}{K}\right)^{1-\alpha} - \frac{C}{K}$$

$$\frac{C}{K} = 1 - \delta - g_Z + \frac{r+\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha(\delta+g) - (r+\delta)}{\alpha} : g_Z = 1 + g$$

Expresión que nos es útil para calcular el ratio consumo-producción:

$$\frac{C}{Y} = \frac{\frac{C}{K}}{\frac{Y}{K}} = \frac{1 - g_Z - \delta + \frac{Y}{K}}{\frac{Y}{K}} = 1 - \alpha\frac{g+\delta}{r+\delta}$$

Log-Linealización.

El modelo de crecimiento es no lineal en logaritmos. Como hemos visto, si $\delta = 1$ el sistema tendría solución cerrada, sin embargo si asumimos una tasa de depreciación positiva e inferior a la unidad debemos proceder a log-linealizarlo.

Por simplicidad suprimiremos los términos constantes en las ecuaciones que aproximaremos y denotaremos con letras minúsculas las variables en logaritmos y que son interpretadas como desviaciones de media cero con respecto a su senda de crecimiento equilibrado.

La función de producción Cobb-Douglas no necesita ser aproximada puesto que directamente puede expresarse en forma log-lineal.

$$y_t = (1-\alpha)z_t + \alpha k_t$$

La ecuación de acumulación del capital puede log-linealizarse de la siguiente manera:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1-\delta) + \frac{Y_t}{K_t} - \frac{C_t}{K_t}$$

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} - (1-\delta) = \frac{Y_t}{K_t}\left(1 - \frac{C_t}{Y_t}\right)$$

Expresando $\frac{K_{t+1}}{K_t} = \exp(\ln \frac{K_{t+1}}{K_t})$ y $\frac{C_t}{Y_t} = \exp(\ln \frac{C_t}{Y_t})$ y aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación:

$$\ln[\exp\{k_{t+1} - k_t\} - (1-\delta)] = (y_t - k_t) + \ln[1 - \exp\{c_t - y_t\}]$$

Tomemos en primer lugar la expresión del lado izquierdo, expresión cuya aproximación viene dada por:

$$f(\Delta k_{t+1}) \simeq f(g) + f'(g)(\Delta k_{t+1} - g)$$

donde $f(\cdot) = \ln[\exp\{k_{t+1} - k_t\} - (1-\delta)]$ y donde el estado estacionario de $\ln K_{t+1} - \ln K_t = \ln g_Z = \ln(1+g) \simeq g$.

$$f'(g) = \frac{\exp\{g\}}{\exp\{g\} - (1-\delta)} \simeq \frac{1+g}{g+\delta}$$

De manera análoga, el segundo sumando de la parte de la derecha vendrá dado por:

$$h(c_t - y_t) \simeq h(g) + h'(c-y)(c_t - y_t - (c-y))$$

donde $h(c-y) = \log[1 - \exp\{c_t - y_t\}]$ y el estado estacionario de $\exp\{\ln C_t - \ln Y_t\} = \frac{C}{Y}$ ha sido calculado anteriormente. Su derivada en el estado estacionario es:

$$h'(c-y) = \frac{-\exp\{c-y\}}{1 - \exp\{c-y\}} \simeq 1 - \frac{r+\delta}{\alpha(\delta+g)}$$

La acumulación del stock de capital log-linealizada viene dada por:

$$\frac{1+g}{g+\delta}(k_{t+1}-k_t) \simeq y_t - k_t + \left(1 - \frac{r+\delta}{\alpha(\delta+g)}\right)(c_t - y_t)$$

$$k_{t+1} \simeq \frac{1-\delta}{1+g}k_t + \frac{r+\delta}{\alpha\,(1+g)}y_t + \left(\frac{\alpha(\delta+g)-(r+\delta)}{\alpha(1+g)}\right)c_t$$

Para loglinealizar la ecuación de Euler debemos suponer que las variables de la parte derecha de la ecuación son conjuntamente log-normales y homocedásticas para poder aplicar la fórmula para la expectativa de una variable aleatoria log-normal: $\log E_t x_{t+1} = E_t \log x_{t+1} + \frac{1}{2} Var_t \log(x_{t+1})$.

Por tanto, aplicando logaritmos y haciendo uso de la fórmula anterior, la ecuación de Euler queda como:

$$-\theta c_t = \theta E_t c_{t+1} + E_t \ln R_{t+1}$$

$$E_t \Delta c_{t+1} = \sigma_c E_t r_{t+1}$$

En último lugar tenemos la expresión para la tasa de rendimiento bruta del capital, que es una función creciente del ratio tecnología-capital.

$$\ln R_{t+1} = r_{t+1} = \ln[(1-\delta) + \alpha \exp\{(1-\alpha)(z_{t+1} - k_{t+1})\}]$$

El miembro de la derecha de la ecuación es una función no lineal que aproximamos de forma análoga a las anteriores. Sea

$$g(z-k) = \ln[(1-\delta) + \alpha \exp\{(1-\alpha)(z_{t+1} - k_{t+1})\}]$$

$$g(z-k) \simeq g(z-k) + g'(z-k)(z_{t+1} - k_{t+1} - (z-k))$$

donde:

$$g'(z-k) = \frac{\alpha(1-\alpha)\exp\{(1-\alpha)(z-k)\}}{1-\delta+\alpha\exp\{(1-\alpha)(z-k)\}}$$

Aplicando el resultado $\frac{Z}{K} = \left(\frac{r+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ y como $\exp\{(1-\alpha)(z-k)\} =$

$\left(\frac{A}{K}\right)^{1-\alpha} = \frac{r+\delta}{\alpha}$, entonces

$$g'(z-k) = \frac{\alpha(1-\alpha)\frac{r+\delta}{\alpha}}{1-\delta+\alpha\frac{r+\delta}{\alpha}} = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}$$

Por tanto

$$r_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}(z_{t+1}-k_{t+1})$$

Resumiendo resultados.

La función de producción, la ecuación dinámica de acumulación del capital, la ecuación de Euler y el tipo de interés real vienen dadas por:

$$y_t = (1-\alpha)z_t + \alpha k_t \tag{(2.36)}$$

$$k_{t+1} \simeq \frac{1-\delta}{1+g}k_t + \frac{r+\delta}{\alpha\,(1+g)}y_t + \left(\frac{\alpha(\delta+g)-(r+\delta)}{\alpha(1+g)}\right)c_t \tag{(2.37)}$$

$$E_t\Delta c_{t+1} = \sigma_c E_t r_{t+1} \tag{(2.38)}$$

$$r_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}(z_{t+1}-k_{t+1}) \tag{(2.39)}$$

Por último y para cerrar el modelo sólo nos queda especificar un proceso específico para el shock tecnológico z_t. Asumiremos que dicho shock, en desviaciones, sigue un proceso AR(1).

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t$$

El sistema consta de cuatro variables endógenas y_t, c_t, k_{t+1} y r_t más dos variables de estado, una predeterminada k_t y la otra exógena z_t.

Las cuatro ecuaciones serán reducidas a dos, donde las variables que directamente calcularemos son c_t y k_{t+1}.

Sustituyendo la función de producción (2.36) en la dinámica del capital, (2.37).

$$k_{t+1} \simeq \frac{1-\delta}{1+g}k_t + \frac{r+\delta}{\alpha\,(1+g)}\left[(1-\alpha)z_t + \alpha k_t\right] + \left(\frac{\alpha(\delta+g)-(r+\delta)}{\alpha(1+g)}\right)c_t$$

Agrupando las variables y operando nos queda

$$k_{t+1} = \frac{1+r}{1+g}k_t + \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{\alpha(1+g)}z_t + \frac{\alpha(\delta+g)-(r+\delta)}{\alpha(1+g)}c_t \tag{(2.40)}$$

Podemos demostrar que existe una relación simple entre el coeficiente del consumo y los otros dos. Si denotamos como a_1, a_2 y a_3 los coeficientes de k_t, z_t y c_t respectivamente, de su suma, obtenemos:

$$\frac{\alpha(1+r)}{\alpha(1+g)} + \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{\alpha(1+g)} - \frac{\delta(1-\alpha)+\alpha(r-g)}{\alpha(1+g)} = 1$$

Por tanto, (2.40) puede expresarse como:

$$k_{t+1} = a_1 k_t + a_2 z_t + (1-a_1-a_2)c_t \tag{(2.41)}$$

donde:

$$a_1 = \frac{1+r}{1+g} : a_2 = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{\alpha(1+g)} : 1-a_1-a_2 = \frac{\alpha(\delta+g)-(r+\delta)}{\alpha(1+g)}$$

Finalmente, sustituyendo (2.39) en (2.38), obtenemos la variación esperada en el consumo.

$$E_t\Delta c_{t+1} = \sigma_c\frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}E_t(z_{t+1}-k_{t+1})$$

$$E_t\Delta c_{t+1} = \sigma_c a_3 E_t(z_{t+1}-k_{t+1}) \tag{(2.42)}$$

donde

$$a_3 = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}$$

Finalmente las ecuaciones dinámicas (2.41) y (2.42) son las que deben resolverse para determinar la solución del sistema.

El método de los coeficientes indeterminados.

La resolución por el método de coeficientes indeterminados supone que probamos como solución una expresión lineal para las variables endógenas de decisión, c_t y k_{t+1} que son funciones de la variable endógena de estado k_t y de la variable exógena z_t.

Denotando como η_{yx} las elasticidades parciales de la variable y con respecto a la variable x, éstas vendrán determinadas en función de los parámetros del modelo.

Las soluciones con las que probamos para obtener la solución tienen por tanto las siguientes expresiones:

$$c_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t \tag{(2.43)}$$

$$k_{t+1} = \eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t \tag{(2.44)}$$

Sustituyendo la expresión en (2.43) en (2.41) y (2.42):

$$k_{t+1} = a_1 k_t + a_2 z_t + (1 - a_1 - a_2)(\eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t)$$

$$k_{t+1} = [a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}]k_t + [a_2 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{cz}]z_t \tag{(2.45)}$$

Y:

$$\eta_{ck} \Delta k_{t+1} + \eta_{cz} E_t \Delta z_{t+1} = \sigma_c a_3 E_t z_{t+1} - \sigma_c a_3 k_{t+1} \tag{(2.46)}$$

Sustituyendo (2.44) en (2.45) e identificando coeficientes podremos calcular las elasticidades η_{ck} y η_{cz}.

$$\eta_{ck} \left\{[a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck} - 1]k_t + [a_2 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{cz}]z_t\right\} + \eta_{cz}(\rho - 1)z_t =$$

$$= \sigma_c a_3 \rho z_t - \sigma_c a_3 \left\{[a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}]k_t - \sigma_c a_3 [a_2 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{cz}]z_t\right\}$$

La identificación de ambos miembros de la ecuación, nos permite obtener la elasticidad η_{cz} y la elasticidad η_{ck} en función de los coeficientes del sistema.

Para k_t :

$$(1-a_1-a_2)\eta_{ck}^2+[a_1-1+\sigma_c a_3(1-a_1-a_2)]\eta_{ck}+\sigma_c a_3 a_1=0$$

Para z_t :

$$[(1-a_1-a_2)\eta_{ck}+(\rho-1)+\sigma_c a_3(1-a_1-a_2)]\,\eta_{cz}=-\eta_{ck}a_2+\sigma_c a_3\rho-\sigma_c a_3 a_2$$

El cálculo de la elasticidad del consumo respecto al capital implica resolver una ecuación de segundo grado y por tanto tenemos dos soluciones potenciales entre las cuales debemos elegir aquella que nos permite obtener un estado estacionario localmente estable.

Esto es, debemos resolver:

$$A\eta_{ck}^2+B\eta_{ck}+C=0$$

Las soluciones de esta ecuación serán comentadas posteriormente. aunque η_{ck} debe ser positivo ya que nos mide la elasticidad del consumo ante cambios en el capital y ambas variables están correlacionadas positivamente. Conocido η_{ck} podemos calcular η_{cz} que viene dado por la expresión siguiente:

$$\eta_{cz}=\frac{-\eta_{ck}a_2+\sigma_c a_3(\rho-a_2)}{(1-a_1-a_2)(\eta_{ck}+\sigma_c a_3)+(\rho-1)}$$

Finalmente, conocidas estas elasticidades obtenemos a partir de (2.44) y (2.45).

$$\eta_{kk}=a_1+(1-a_1-a_2)\eta_{ck}:\eta_{kz}=a_2+(1-a_1-a_2)\eta_{cz}$$

Las elasticidades calculadas y los parámetros restantes determinan el comportamiento dinámico de nuestra economía. Ahora podemos introducir el proceso de serie temporal que hemos supuesto que sigue la tecnología y por tanto calcular los modelos de serie temporal que siguen nuestras variables endógenas.

Series temporales para las variables.

Aplicando el operador de retardos, el proceso de tecnología viene dado por:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L}$$

La solución para el stock de capital, (2.45), aplicado el operador de retardos, viene dada por:

$$k_{t+1} = \frac{[a_2 + (1-a_1-a_2)\eta_{cz}]z_t}{1-[a_1+(1-a_1-a_2)\eta_{ck}]L} \Rightarrow k_{t+1} = \frac{\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}L}z_t \qquad ((2.47))$$

$$k_{t+1} = \frac{a_2 + (1-a_1-a_2)\eta_{cz}}{1-[a_1+(1-a_1-a_2)\eta_{ck}]\,L}\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)} \Rightarrow k_{t+1} = \frac{\eta_{kz}}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)}$$

La última ecuación implica que el stock de capital sigue un proceso AR(2). Además, las raíces del polinomio autorregresivo son números reales, por lo que el stock de capital no exhibe un comportamiento dinámico oscilante como otros modelos de ciclo económico.

El proceso que sigue el output se deduce inmediatamente a partir de la función de producción, (2.36) al haber sustituido (2.47) retardada un periodo:

$$y_t = \alpha\frac{[a_2 + (1-a_1-a_2)\eta_{cz}]L}{1-[a_1+(1-a_1-a_2)\eta_{ck}]L}\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)} + (1-\alpha)\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)}$$

$$y_t = \alpha\frac{\eta_{kz}L}{(1-\eta_{kk}L)}\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)} + (1-\alpha)\frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)}$$

Los shocks tecnológicos afectan a la producción a través de dos vías: una directa a través del shock tecnológico y otra indirecta a través del efecto que tiene la acumulación del capital. El output sigue un proceso ARMA (2,1).

$$y_t = \frac{(1-\alpha) + [\alpha\eta_{kz} - (1-\alpha)\eta_{kk}]\,L}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_t$$

El consumo viene dado a partir de (2.43) y por (2.47):

$$c_t = \eta_{ck} \frac{[a_2 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{cz}]L}{(1 - [a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}]L)} \frac{\varepsilon_t}{(1 - \rho L)} + \frac{\eta_{cz}}{1 - \rho L}\varepsilon_t$$

$$c_t = \frac{\eta_{cz} + [\eta_{ck}\eta_{kz} - \eta_{cz}\eta_{kk}]\, L}{(1 - \eta_{kk} L)(1 - \rho L)}\varepsilon_t$$

También el consumo sigue un proceso ARMA(2,1)[19].

Finalmente, la ecuación dinámica para el tipo de interés o rentabilidad neta de depreciación del stock de capital, (2.39) viene dada por:

$$r_{t+1} = a_3 \frac{(\rho - \eta_{kz})z_t - \rho\eta_{kk}z_{t-1}}{1 - \eta_{kk}L} = a_3 \frac{(\rho - \eta_{kz}) - \rho\eta_{kk}L}{(1 - \eta_{kk}L)\,(1 - \rho L)}\varepsilon_t$$

que de forma análoga a consumo y producción sigue un proces ARMA(2,1).

La característica común a todos los procesos de las variables endógenas es que el polinomio autorregresivo de todas ellas tiene las mismas raíces, η_{kk} y ρ.

Cálculo de multiplicadores dinámicos.

Para las expresiones dinámicas anteriores podemos calcular el efecto de una perturbación aleatoria.

La expresión concreta para el stock de capital para cualquier horizonte temporal futuro viene dada por:

$$k_{t+s+1} = \eta_{kz} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} \eta_{kk}^{i} \rho^{j-i} L^{j} \right) \varepsilon_{t+s}$$

$$\frac{\partial k_{t+s+1}}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{kz} \sum_{j=0}^{s} \eta_{kk}^{j} \rho^{s-j} = \eta_{kz} \frac{\rho^{s+1} - \eta_{kk}^{s+1}}{\rho - \eta_{kk}}$$

Las soluciones y sus correspondientes multiplicadores para el resto de las

[19] Indudablemente estos procesos son ARMA(2,1) porque hemos supuesto que el shock tecnológico sigue un AR(1). Si éste siguiese un AR(p), los procesos de serie temporal del stock de capital sería un ARMA $(p+1, p-1)$ mientras que consumo, output y tipo de interés real seguirían un ARMA$(p+1, p)$

variables vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$y_{t+s} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t+s}+$$

$$+\left[\alpha\eta_{kz}-(1-\alpha)\eta_{kk}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t-1+s}$$

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial\varepsilon_t} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{s}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j}+\left[\alpha\eta_{kz}-(1-\alpha)\eta_{kk}\right]\sum_{j=0}^{s-1}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-1-j}$$

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial\varepsilon_t} = (1-\alpha)\frac{\rho^{s+1}-\eta_{kk}^{s+1}}{\rho-\eta_{kk}}+\left[\alpha\eta_{kz}-(1-\alpha)\eta_{kk}\right]\frac{\rho^{s}-\eta_{kk}^{s}}{\rho-\eta_{kk}}$$

$$c_{t+s} = \eta_{cz}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t+s}+\left[\eta_{ck}\eta_{kz}-\eta_{cz}\eta_{kk}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t-1+s}$$

$$\frac{\partial c_{t+s}}{\partial\varepsilon_t} = \eta_{cz}\frac{\rho^{s+1}-\eta_{kk}^{s+1}}{\rho-\eta_{kk}}+\left[\eta_{ck}\eta_{kz}-\eta_{cz}\eta_{kk}\right]\frac{\rho^{s}-\eta_{kk}^{s}}{\rho-\eta_{kk}} =$$

$$= \eta_{cz}\sum_{j=0}^{s}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j}+\left[\eta_{ck}\eta_{kz}-\eta_{cz}\eta_{kk}\right]\sum_{j=0}^{s-1}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j}$$

$$r_{t+s+1} = a_3(\rho-\eta_{kz})\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t+s}-a_3\rho\eta_{kk}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t-1+s}$$

$$\frac{\partial r_{t+s+1}}{\partial\varepsilon_t} = a_3(\rho-\eta_{kz})\frac{\rho^{s+1}-\eta_{kk}^{s+1}}{\rho-\eta_{kk}}-a_3\rho\eta_{kk}\frac{\rho^{s}-\eta_{kk}^{s}}{\rho-\eta_{kk}}$$

$$\frac{\partial r_{t+s+1}}{\partial\varepsilon_t} = a_3(\rho-\eta_{kz})\sum_{j=0}^{s}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j}-a_3\rho\eta_{kk}\sum_{j=0}^{s-1}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j}$$

Interpretación de las elasticidades.

Para valores de calibración usuales, el valor de a_1[20] será superior a la

[20] Para $r > g$ se verifica $a_1 > 1$ y por tanto $1 - a_1 - a_2 < 0$. Para $r < g$ si $\alpha g <$

unidad, esto es, supondremos que $r > g$. En este caso, los signos de los coeficientes de la ecuación de segundo grado que nos permiten calcular η_{ck} son los siguientes: $a_1 > 1, a_2 > 0$ y $a_3 > 0$, y por tanto, $A < 0$, y $C > 0$. El signo del parámetro B depende de la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo, σ_c, para cualesquiera valores calibrados de los otros parámetros.

Denotando $B = B(\sigma_c) = a_1 - 1 + a_3(1 - a_1 - a_2)\sigma$

$$B(\sigma_c) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sigma < \frac{1 - a_1}{a_3(1 - a_1 - a_2)}$$

Las soluciones para η_{ck} son ambas reales ya que dados los signos anteriores, se verifica $B^2 - 4AC > 0 \ \forall \sigma \geq 0$.

Un resultado importante y lógico es que η_{ck} no depende de la persistencia del shock, ρ ya que η_{ck} nos mide la respuesta del consumo a un cambio en el stock de capital k_t, dada la tecnología. La relación del parámetro con la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo puede inferirse diferenciando la ecuación de segundo orden que relaciona a las dos.

$$A\eta_{ck}^2 + B(\sigma_c)\eta_{ck} + \sigma_c a_3 a_1 = 0$$

$$2Ad\eta_{ck} + B(\sigma_c)d\eta_{ck} + \eta_{ck}\frac{dB}{d\sigma}d\sigma_c + a_3 a_1 d\sigma_c = 0 : \frac{dB}{d\sigma_c} = a_3(1 - a_1 - a_2) < 0$$

$$\frac{d\eta_{ck}}{d\sigma_c} = -\frac{a_3 a_1 + \eta_{ck}\frac{dB}{d\sigma_c}}{2A + B(\sigma_c)} = -\frac{a_3\left[1 - (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}\right]}{2(1 - a_1 - a_2) + (a_1 - 1) + a_3\sigma_c(1 - a_1 - a_2)} > 0$$

El denominador es siempre negativo para $\sigma_c \geq 0$. Para comprobar el signo del numerador despejamos σ_c en la ecuación de segundo grado:

$$\sigma_c = -\eta_{ck}\frac{(1 - a_1 - a_2)\eta_{ck} + a_1 - 1}{a_3\left[a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}\right]}$$

$r+(1-\alpha)\delta$ también obtendremos el resultado anterior. En caso contrario a éste, tendríamos $1-a_1-a_2 > 0$. En tal caso, para obtener valores positivos de η_{ck} tendríamos que restriguir los valores de la elasticidad de sustitución intertemporal al intervalo $\left(0, \frac{1-a_1}{a_3(1-a_1-a_2)}\right)$ ya que para valores superiores a éste η_{ck} sería un número complejo.Por otra parte este último caso supondría que $g > \frac{r+(1-\alpha)\delta}{\alpha}$ lo que nos daría una tasa exógena de crecimiento del progreso técnico desorbitada, dada una parametrización realista de r, α y δ.

$$\sigma_c = 0 \Rightarrow \eta_{ck} = \frac{1 - a_1}{1 - a_1 - a_2} > 0 : \sigma_c \to \infty \Rightarrow \eta_{ck} = \frac{-a_1}{1 - a_1 - a_2} > 0$$

Por tanto para

$$\eta_{ck} \in \left(\frac{1 - a_1}{1 - a_1 - a_2}, \frac{-a_1}{1 - a_1 - a_2} \right)$$

el numerador de $\frac{d\eta_{ck}}{d\sigma_c}$ siempre es positivo.

Esta relación creciente entre η_{ck} y σ_c se observa rápidamente a partir de las ecuaciones log-linealizadas del modelo. Un aumento de k_{t+1} deprime el tipo de interés real en (2.42) provocando un aumento en el consumo esperado que es mayor cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo, σ_c. El aumento del output resultante en y_{t+1} genera un efecto riqueza que no depende de σ_c y un efecto sustitución sobre el consumo corriente que es mayor cuanto mayor sea σ_c.

La relación entre los cambios en el tipo de interés y la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo se deriva en el apéndice 2.1.

En segundo lugar, el coeficiente η_{kk} tampoco depende de ρ y disminuye con σ_c. Este hecho podemos deducirlo a partir de:

$$\eta_{kk} = a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck}$$

$$\frac{d\eta_{kk}}{d\sigma_c} = (1 - a_1 - a_2)\frac{d\eta_{ck}}{d\sigma_c} < 0$$

En tercer lugar, el coeficiente η_{cz} es creciente en el parámetro ρ para valores bajos de σ_c pero decreciente para valores altos de σ_c, ya que:

$$\eta_{cz} = \frac{-\eta_{ck}a_2 + \sigma_c a_3(\rho - a_2)}{(1 - a_1 - a_2)(\eta_{ck} + \sigma_c a_3) + (\rho - 1)}$$

$$\frac{\partial \eta_{cz}}{\partial \rho}(\sigma_c = 0) > 0 : \frac{\partial \eta_{cz}}{\partial \rho}(\sigma_c \to \infty) < 0$$

Dado que η_{cz} es el efecto sobre el consumo de un cambio en la tecnología, dado un stock de capital, para valores bajos de σ_c el efecto sustitución en el consumo intertemporal es pequeño y la variación en el consumo se debe fundamentalmente al efecto renta. Dicho efecto renta es mayor cuantitativamente mientras más persistente sea dicho shock, por tanto, η_{cz} es creciente con ρ.

Sin embargo, para valores altos de σ_c, el efecto sustitución en el consumo es más importante. Mientras menor sea la persistencia de la perturbación, el efecto en el output y en el tipo de interés real será poco importante y el efecto renta también, pero si el efecto sustitución es alto en el consumo éste aumentará considerablemente por lo que η_{cz} será alto. Y al contrario, un shock muy persistente, incrementará el tipo de interés real lo cual desalienta el consumo y estimula el ahorro con lo que η_{cz} será pequeño e incluso negativo.

Supongamos que $\rho = 1$, y por tanto el logaritmo de la tecnología sigue un paseo aleatorio.

Realizando de nuevo la identificación:

$$E_t c_{t+1} = \eta_{ck} E_t k_{t+1} + \eta_{cz} E_t z_{t+1} = \eta_{ck} E_t k_{t+1} + \eta_{cz} z_t$$

$$E_t c_{t+1} = c_t + \sigma_c a_3 E_t(z_{t+1} - k_{t+1}) = \eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t + \sigma_c a_3 z_t - \sigma_c a_3 E_t k_{t+1}$$

Igualando $E_t c_{t+1}$:

$$\eta_{ck}(\eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t) + \eta_{cz} z_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t + \sigma_c a_3 z_t - \sigma_c a_3(\eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t)$$

Identificando coeficientes:

Para k_t:

$$\eta_{ck}\eta_{kk} - \eta_{ck} + \sigma_c a_3 \eta_{kk} = 0 : -\eta_{ck}\eta_{kz} + \sigma_c a_3(1 - \eta_{kz}) = 0$$

$$\eta_{ck} = -\frac{\sigma_c a_3 \eta_{kk}}{\eta_{kk} - 1} = \frac{\sigma_c a_3(1 - \eta_{kz})}{\eta_{kz}} \Rightarrow \eta_{kk} + \eta_{kz} = 1$$

Sustituyendo de nuevo en (2.44):

$$\eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t = a_1 k_t + a_2 z_t + (1 - a_1 - a_2)(\eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t)$$

Identificando de nuevo:

$$\eta_{kk} = a_1 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{ck} : \eta_{kz} = a_2 + (1 - a_1 - a_2)\eta_{cz}$$

La relación entre las elasticidades es:

$$\eta_{kk} + \eta_{kz} = a_1 + a_2 + (1 - a_1 - a_2)(\eta_{ck} + \eta_{cz}) \Rightarrow \eta_{ck} + \eta_{cz} = 1$$

Ahora, las variables del sistema siguen procesos de raíz unitaria y además están cointegradas, esto es, la diferencia entre cualquiera de ellas es estacionaria.

Por ejemplo, para la producción y el consumo tendríamos:

$$y_t - c_t = \frac{(1 - \alpha - \eta_{cz})}{(1 - \eta_{kk} L)} \varepsilon_t$$

Una perturbación tecnológica eleva el output, el consumo, el stock de capital mientras que el tipo de interés aumenta pero retorna a su equilibrio inicial a largo plazo.

Para cualquier valor de $\sigma_c \in (0, \infty)$. Aplicando la relación existente entre las elasticidades $\eta_{kz} = 1 - \eta_{kk}$ y $\eta_{ck} + \eta_{cz} = 1$ podemos calcular los multiplicadores en este caso:

$$\frac{\partial k_{t+s+1}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - \eta_{kk}) \sum_{j=0}^{s} \eta_{kk}^j = (1 - \eta_{kk}) \frac{1 - \eta_{kk}^{s+1}}{1 - \eta_{kk}} = 1 - \eta_{kk}^{s+1} \underset{s \to \infty}{\to} 1$$

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - \alpha) \frac{1 - \eta_{kk}^{s+1}}{1 - \eta_{kk}} + (\alpha - \eta_{kk}) \frac{1 - \eta_{kk}^{s}}{1 - \eta_{kk}} = 1 - \alpha \eta_{kk}^{s} \underset{s \to \infty}{\to} 1$$

$$\frac{\partial c_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - \eta_{ck}) \frac{1 - \eta_{kk}^{s+1}}{1 - \eta_{kk}} + [\eta_{ck}(1 - \eta_{kk}) - (1 - \eta_{ck})\eta_{kk}] \frac{1 - \eta_{kk}^{s}}{1 - \eta_{kk}}$$

$$\frac{\partial c_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - \eta_{ck}) \sum_{j=0}^{s} \eta_{kk}^j + (\eta_{ck} - \eta_{kk}) \sum_{j=0}^{s-1} \eta_{kk}^j = 1 - \eta_{ck} \eta_{kk}^{s} \underset{s \to \infty}{\to} 1$$

$$\frac{\partial r_{t+s+1}}{\partial \varepsilon_t} = a_3 \eta_{kk} \frac{1 - \eta_{kk}^{s+1}}{1 - \eta_{kk}} - a_3 \eta_{kk} \frac{1 - \eta_{kk}^{s}}{1 - \eta_{kk}}$$

$$\frac{\partial r_{t+s+1}}{\partial \varepsilon_t} = a_3 \eta_{kk} \left(\sum_{j=0}^{s} \eta_{kk}^j - \sum_{j=0}^{s-1} \eta_{kk}^j \right) = a_3 \eta_{kk}^{s+1} \underset{s \to \infty}{\to} 0$$

La perturbación tecnológica eleva los niveles de todas las variables de forma permanente a largo plazo, excepto el tipo de interés real que retorna a su nivel de equilibrio inicial.

Finalmente, para $\sigma_c \rightarrow \infty$ o $\theta \rightarrow 0$ el agente representativo es neutral al riesgo y las curvas de indiferencia son líneas rectas, esto es, las cestas de consumo para cada periodo son sustitutos perfectos. De nuevo la solución se simplifica considerablemente ya que el primer término de la ecuación de segundo grado en η_{ck} es muy pequeño en relación a los otros dos con lo que η_{ck} viene dado por:

$$\eta_{ck} = -\frac{a_1}{(1 - a_1 - a_2)} : \eta_{kk} = 0$$

$$\eta_{kz} = \rho : \eta_{cz} = \frac{-a_2}{1 - a_1 - a_2}$$

Los procesos de serie temporal que seguirían las variables serían los siguientes:

$$k_{t+1} = \frac{\varepsilon_t}{1 - \rho L} : y_t = \frac{(1 - \alpha) + \alpha \rho L}{(1 - \rho L)} \varepsilon_t$$

$$c_t = \frac{1}{1 - a_1 - a_2} \frac{-a_2 - a_1 \rho L}{1 - \rho L} \varepsilon_t : r_{t+1} = 0$$

En este caso, una perturbación tecnológica eleva transitoriamente la producción y el capital dejando inalterado el tipo de interés, pero la respuesta del consumo depende del parámetro de persistencia. Mientras más alto sea éste más fuerte es el efecto renta por lo que un shock que sea poco persistente no provocará efecto renta y dada una elasticidad de sustitución en el consumo alta permitirá que aumente en gran medida. Por otra parte mientras más persistente sea la perturbación mayor es la subida en el tipo de interés, con lo que el agente representativo sustituirá consumo presente por futuro aumentando su ahorro (el resultado analítico para el tipo de interés es debido a considerar $\sigma_c \rightarrow \infty$) de tal forma que el efecto de la perturbación tecnológica sobre el consumo puede ser negativa.

Los modelos con oferta de trabajo fija nos enseñan que el mecanismo de transmisión a través de la acumulación de capital es importante sólo cuando los shocks tecnológicos subyacentes son persistentes y es incapaz de generar efectos persistentes si las perturbaciones son transitorias y los shocks tecnológicos no tienen efectos sustanciales sobre los rendimientos del capital ya sean realizados o esperados.

Calibración.

En las siguientes tablas podemos apreciar cómo cambian las elasticidades solución del modelo ante cambios en la persistencia del shock tecnológico y de la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo.

Los valores asignados a los parámetros del modelo son los siguientes:

$$r = 0.015 : \delta = 0.025 : \alpha = 0.30 : g = 0.005$$

Tabla 2.2					
σ_c	0	0.2	1	5	100
η_{ck}	0.10	0.28	0.55	1.14	4.06

Tabla 2.3					
			η_{cz}		
ρ			σ_c		
	0	0.2	1	5	100
0	0.01	0.02	0.05	0.10	0.37
0.5	0.02	0.04	0.06	0.06	-0.62
0.95	0.15	0.25	0.23	-0.12	-2.65
1	0.90	0.70	0.41	-0.21	-3.03

Tabla 2.4					
σ_c	0	0.2	1	5	100
η_{kk}	0.99	0.98	0.95	0.89	0.59

Tabla 2.5					
			η_{kz}		
ρ			σ_c		
	0	0.2	1	5	100
0	0.08	0.08	0.07	0.07	0.05
0.5	0.08	0.07	0.07	0.07	0.16
0.95	0.07	0.06	0.06	0.09	0.36
1	0.00	0.02	0.04	0.10	0.40

Como nos indican los valores númericos calculados, para valores bajos de la elasticidad intertemporal en el consumo, el efecto de una perturbación tecnológica sobre el consumo es mayor confome mayor sea la persistencia de ésta. Sin embargo, para valores de dicha elasticidad mayores a uno, mientras mayor es la persistencia de la perturbación más pequeño es el efecto sobre el consumo, llegando incluso a hacerlo negativo.

El efecto de la perturbación tecnológica sobre el stock de capital no es cuantitativamente importante y sí aumenta conforme la elasticidad de sustitución es más alta para cualquier valor de la persistencia de dicha perturbación.

A partir de las funciones impulso respuesta podemos obtener el efecto de la producción y el tipo de interés ante la perturbación de oferta. El impacto sobre la producción y el tipo de interés real vienen dados por las expresiones siguientes.

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = (1-\alpha)$$

$$\frac{\partial r_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = a_3 \eta_{kk}$$

2.5. Apéndice 2.1.

El efecto sobre el consumo de la variación en el tipo de interés.

En el problema de maximizar la función de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal dado por:

$$Max\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$s.a.\ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t}{(1+r)^t}$$

Podemos calcular el efecto sobre el consumo de cambios en el tipo de interés y desagregar el efecto total en efecto sustitución, efecto riqueza directo y efecto riqueza indirecto.

Las condiciones de primer orden del problema vienen dadas por la ecuación de Euler para el consumo y la restricción presupuestaria.

$$u'(C_{t+i}) = \beta(1+r)u'(C_{t+i+1}) : i = 0, 1, 2, 3...$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Y_t}{(1+r)^t}$$

A fin de simplificar los cálculos consideremos únicamente dos periodos consecutivos, y no tengamos en cuenta el resto de los periodos. A partir de un momento t, las dos condiciones pueden expresarse como:

$$u'(C_t) = \beta R u'(C_{t+1})$$

$$C_t + R^{-1}C_{t+1} = Y_t + R^{-1}Y_{t+1} \Rightarrow C_{t+1} = R(Y_t - C_t) + Y_{t+1}$$

donde

$$R = (1+r) \Rightarrow dR = dr$$

Nuestro objetivo es calcular

$$\frac{dC_t}{dr} = \frac{dC_t}{dR}$$

Diferenciando las dos condiciones de optimización, tenemos:

$$u''(C_t)dC_t = \beta \left[Ru''(C_{t+1})dC_{t+1} + u'(C_{t+1})dR \right]$$

$$dC_{t+1} = Y_t dR - (RdC_t + C_t dR)$$

Sustituyendo la segunda en la primera.

$$u''(C_t)dC_t = \beta \left[Ru''(C_{t+1}) \left(Y_t dR - (RdC_t + C_t dR) \right) + u'(C_{t+1})dR \right]$$

Agrupando términos:

$$\left[u''(C_t) + \beta R^2 u''(C_{t+1}) \right] dC_t = \left[\beta u'(C_{t+1}) + \beta R(Y_t - C_t)u''(C_{t+1}) \right] dR$$

Definiendo la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo entre dos periodos t y $t+s$ como:

$$\sigma_c = -\frac{d\left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)}{d\left(\frac{u_c(c_t)}{u_c(c_{t+s})}\right)} \frac{\frac{u_c(c_t)}{u_c(c_{t+s})}}{\frac{c_t}{c_{t+s}}}$$

dicha elasticidad viene dada por:

$$\sigma_c = -\frac{d\left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)}{d\left(\frac{u_c(c_t)}{u_c(c_{t+s})}\right)} \frac{\frac{u_c(c_t)}{u_c(c_{t+s})}}{\frac{c_t}{c_{t+s}}} = \frac{c_{t+s}dc_t - c_t dc_{t+s}}{c_{t+s}^2} \frac{1}{d\left(\frac{u_c(c_t)}{u_c(c_{t+s})}\right)} \frac{c_{t+s}}{c_t} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+s})}$$

Cuando la elasticidad de sustitución no depende del consumo, esto es, es constante, podemos fijar c_t y por tanto $dc_t = 0$ y variando s:

$$\sigma_c = \frac{1}{c_{t+s}} \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+s})} \frac{1}{u'(c_t)\frac{d(u_c(c_{t+s})^{-1})}{dc_{t+s}}} = -\frac{1}{c_{t+s}} \frac{1}{u'(c_{t+s})} \frac{1}{u'(c_{t+s})^{-2}u''(c_{t+s})}$$

Cuando $s \to 0$, esto es, los intervalos en el tiempo son infinitesimales, la elasticidad de sustitución intertemporal viene dada por:

$$\sigma_c = \lim_{s\to 0} \; -\frac{1}{c_{t+s}}\frac{1}{u'(c_{t+s})}\frac{1}{u'(c_{t+s})^{-2}u''(c_{t+s})} = -\frac{u'(c_t)}{cu''(c_t)} = \frac{1}{\xi_{cc}}$$

Sustituyendo σ_c, de tal forma que eliminemos $u''(C)$.

$$\frac{dC_t}{dR} = \frac{\beta u'(C_{t+1}) - \beta R(Y_t - C_t)\frac{u'(C_{t+1})}{c_{t+1}\sigma_c}}{-\frac{u'(c_t)}{c_t\sigma_c} - \beta R^2\frac{u'(c_{t+1})}{c_{t+1}\sigma_c}}$$

Aplicando la condición de Euler:

$$\frac{dC_t}{dR} = \frac{Y_t - C_t - \frac{c_{t+1}}{R}\sigma_c}{\left[R - \frac{c_{t+1}}{c_t}\right]}$$

Del problema de maximización de la utilidad, sujeto a la restricción presupuestaria, obtenemos las demandas marshallianas o de riqueza o renta constante, que nos permite calcular las demandas óptimas de consumo para cada uno de los periodos.

$$C_t^* = C_t(W(R), R)$$

donde

$$W = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{Y_t}{(1+r)^t}$$

Diferenciando la demanda marshalliana.

$$\frac{dC_t}{dR} = \frac{\partial C_t}{\partial R} + \frac{\partial C_t}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial R}$$

A partir de la ecuación de Slutsky, podemos descomponer el efecto total de un cambio en R sobre C en efecto sustitución y efecto renta o riqueza directo.

$$\frac{\partial C_t}{\partial R} = \left(\frac{\partial C_t}{\partial R}\right)^h - C_t\frac{\partial C_t}{\partial W}$$

Por tanto:

$$\frac{dC_t}{dR} = \left(\frac{\partial C_t}{\partial R}\right)^h + (Y_t - C_t)\frac{\partial C_t}{\partial W}$$

Comparando ambas expresiones:

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial R}\right)^h = \frac{-\frac{c_{t+1}}{R}\sigma_c}{\left[R - \frac{c_{t+1}}{c_t}\right]} < 0 : (Y_t - C_t)\frac{\partial C_t}{\partial W} = \frac{Y_t - C_t}{\left[R - \frac{c_{t+1}}{c_t}\right]}$$

Es el efecto sustitución el que depende únicamente de la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo.

CAPITULO 3
EL MODELO DE CICLO ECONOMICO REAL

3.1. El modelo básico de Ciclo Real: los elementos del modelo.

3.1.1. ¿Qué es el Ciclo Económico Real.

Aunque la expresión Ciclo Económico Real (Real Business Cycles) es acuñada en el artículo de Long y Plosser (1983), el programa de investigación tiene su origen en la aportación pionera de Kydland y Prescott (1982)[21].

Fundamentalmente, el modelo básico o canónico es simplemente una extensión de los modelos de crecimiento neoclásicos formulados en las décadas de los años 50 y 60 por Solow, Cass, Koopmans y Diamond (que amplían el artículo seminal de Ramsey). Finalmente, Brock y Mirman (1972) introducen incertidumbre en el mismo, permitiendo que la función de producción cambie a partir de shocks agregados de productividad.

La Teoría del Ciclo Económico Real es por tanto la aplicación de la teoría del equilibrio general al análisis cuantativo de las fluctuciones cíclicas.

> "Real business cycle theory is the application of general equilibrium theory to the quantitative analysis of business cycle fluctuations" (Prescott, 1991).

Aunque la estructura formal de los modelos RBC es similar a los modelos de crecimiento, desde un punto de vista metodológico son deudores de los trabajos de R. Lucas y en general de aquellos economistas que podemos englobar dentro de la escuela neoclásica, pero con una gran diferencia, ahora la causa de las fluctuaciones económicas no se centra en las variaciones en

[21] Kydland, F.E., Prescott, E.C. (1982). Time-to-build and aggregate fluctuations. *Econometrica* 50: 1345-1370.

los agregados monetarios sino que son las perturbaciones que afectan a la función de producción las causantes de las variaciones cíclicas de las series macroeconómicas.

El modelo RBC en su origen es un modelo de corte walrasiano en el que agentes racionales, maximizan su utilidad o beneficios sujetos a sus correspondientes restricciones presupuestarias y tecnológicas, en un entorno de competencia perfecta, ausencia de fricciones y equilibrio contínuo en todos los mercados.

El objetivo del modelo no es otro que si con estos supuestos, es capaz de replicar los hechos estilizados del ciclo económico

Como desarrollo del paradigma clásico, el modelo de Ciclo Real intenta demostrar que para ofrecer una explicación de los ciclos económicos no es necesario contar con ningún tipo de imperfección en los mercados o incluir rigideces de precios y/o salarios, sino que el enfoque de equilibrio general competitivo en el que los agentes maximizan puede explicar de forma convincente el caracter cíclico de las macromagnitudes en cualquier economía.

La cuestión de qué factores son los causantes de las fluctuaciones cíclicas es una de las cuestiones más difíciles de resolver y el debate entre distintas escuelas de pensamiento sobre esta cuestión está en el centro de la Macroeconomía. Sin embargo, Prescott (1994) afirma que los hechos empíricos que observamos son consistentes con lo que la Teoría Económica estandar predice (el modelo walrasiano o el modelo de crecimiento, se entiene). Dada la capacidad y el deseo de los individuos de sustituir intertemporal e intratemporalmente ocio por consumo o por horas trabajadas, ante cambios en los precios, lo que sería un problema para la teoría es que la economía no experimentase esas fluctuaciones cuantitativamente importantes en el empleo o en la producción asociadas a cambios relativamente pequeños en la productividad marginal del trabajo.

Como hemos visto en el capítulo 2, el ahorro determina la acumulación de capital, el output y el resto de las variables pero son los shocks a la tecnología y su propagación los causantes de las fluctuaciones de las macromagnitudes.

El modelo RBC se basa en sólidos fundamentos microeconómicos; los individuos maximizan su utilidad sobre infinitos periodos y las empresas maximizan beneficios de tal forma que dados los precios de los factores, los agentes determinan las elecciones óptimas de trabajo, consumo, ahorro y por tanto el output resultante. Las fluctuaciones que observamos en la realidad reflejan simplemente las respuestas óptimas de los agentes económicos a los shocks tecnológicos; como podemos ver, una explicación totalmente totalmente centrada en la oferta.

Quizá la implausibilidad del modelo de ciclo económico de Lucas donde las sorpresas monetarias juegan el papel del origen del shock propició que la nueva oleada de macroeconomistas clásicos se centrase en el lado de la oferta.

De hecho, el origen de la acepción terminológica de este paradigma procede de la búsqueda del origen y causa de los ciclos en factores reales, en contraposición a los tradicionalmente monetarios, y concretamente como hemos hecho notar, descansa en la idea de que las fluctuaciones cíclicas son provocadas por shocks tecnológicos de considerable magnitud y cíclicamente volátiles que en primer lugar afectan a la capacidad productiva, esto es, a la función de producción, y que posteriormente se transmiten al resto de las variables macroeconómicas en un contexto de equilibrio general dinámico.

De esta forma, el artículo de Kydland y Prescott (1982) presenta tres ideas revolucionarias (Rebelo, 2005): la primera es que el ciclo económico puede ser estudiado utilizando modelos dinámicos de equilibrio general sujetos a perturbaciones de carácter tecnológico; la segunda es que podemos ir más allá de las propiedades cualitativas de los modelos en relación a los hechos estilizados, enfoque que dominó el trabajo macroeconómico hasta 1982, esto es, el modelo puede ser contrastado con los datos a través del procedimiento de calibración y la generación de series artificiales generadas por el propio modelo; la tercera es que es posible unificar ciclo económico y teoría del crecimiento insistiendo en que los modelos de ciclo económico deben de ser consistentes con las regularidades empíricas a largo plazo.

Como resultado, los modelos de Ciclo Real han venido con el tiempo siendo utilizados tanto como laboratorios para el análisis de políticas económicas en general como para el estudio de políticas fiscales y monetarias óptimas en particular. En este sentido, los modelos de Ciclo Real han contribuido a materializar lo que debe ser objetivo de cualquier modelo económico tal como expresó Lucas (1980, pag 696).

"one of the functions of theoretical economics is to provide fully articulated, artificial economic systems that can serve as laboratories in which policies that would be prohibitively expensive to experiment with in actual economies can be tested out at much lower cost".

Y para ello, el esfuerzo investigador debe dirigirse a:

"to write a FORTRAN (*Matlab, Dynare*)[22] program that will accept specific economic policy rules as input and will generate as output statistics describing the operating caracteristics of time series we care about, which ar predicted to resul from these policies" (Lucas, 1980, pag 709)

De hecho, con el desarrollo del programa de investigación el término RBC ha terminado asociándose con frecuencia a la metodología utilizada y no tanto a la explicación del fenómeno cíclico a partir de los shocks tecnológicos.

Finalmente, las implicaciones de política económica del modelo RBC son contundentes: las políticas de estabilización son contraproducentes, los agentes optimizadores reaccionan de forma óptima ante shocks que afectan a la oferta agregada. De esta forma, la ausencia de cualquier referencia al dinero o a la política fiscal se resumen en la sentencia de Stockman (1988, pag 24).

> "the purpose of Real Business Cycle (RBC) models is to explain aggregate fluctuations in business cycles without reference to monetary policy".

Por tanto, la pregunta fundamental que intenta dar respuesta el modelo RBC es ¿ podemos explicar los ciclos económicos a partir de shocks a la función de producción en un entorno de mercados competitivos, con precios flexibles y utilizando modelos dinámicos de equilibrio general estocástico? o dicho de otra forma ¿ es capaz el modelo neoclásico de crecimiento con shocks tecnológicos de explicar las fluctuaciones recurrentes que experimenta una economía ?

[22] Las cursivas son mías.

3.1.2. Descripción de un modelo típico.

Las características de cualquier modelo de equilibrio general y por tanto de un modelo de Ciclo Económico Real son las siguientes.

1. Los agentes son homogéneos y se supone la existencia de un agente representativo, tanto a nivel de economía doméstica como de empresa. Las decisiones óptimas que toma serían extrapoladas al resto de los individuos de la economía[23]. Esto es lo que se conoce como el enfoque de la economía de Robinson Crusoe.

2. Empresas y economías domésticas maximizan explícitamente funciones objetivo, beneficios y utilidad respectivamente, sujetas a las restricciones de recursos o a la tecnología disponible a su alcance. En suma, los resultados macroeconómicos son el resultado de múltitud decisiones óptimas con lo que los fundamentos microeconómicos tradicionales basados en la optimización toman el centro de la escena y apartan definitivamente de la modelización la aceptación de proposiciones ad hoc.

3. Los cambios en la tecnología afectan en primer lugar a la función de producción y se transmiten y amplifican de forma cíclica.

4. Todos los agentes tienen expectativas racionales y existe un equilibrio continuo en todos los mercados. Estos son completos y no existen asimetrías en la información. Los precios transmiten la información relevante para la toma de decisiones óptimas. De esta forma, los servicios del trabajo se pagan con un salario real igual a su productividad marginal física mientras que los servicios del capital generan rendimientos a sus propietarios. En modelos que incluyen activos, las empresas y economías domésticas pueden prestar y pedir prestado a un tipo de interés de mercado.

5. El mecanismo de transmisión opera tanto a partir de la sustitución intertemporal ocio-trabajo, como al deseo de los individuos de suavizar su senda de consumo dando lugar a que el aumento en la producción se traduzca en aumentos en el stock de capital futuro y por tanto en la inversión.

Supuestos del modelo.

1. Comencemos por las economías domésticas. La economía está com-

[23] Una crítica de este enfoque puede consultarse en Kirman (1992).

puesta por un número grande y finito de economías domésticas cada una de las cuales vive para siempre y se enfrenta a idénticas preferencias, parametrizadas a partir de la función de utilidad instantánea o función de felicidad. Su objetivo es maximizar su utilidad a lo largo de toda su vida.

$$\underset{\{C_t,\ell_t\}}{Max}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, \ell_t)$$

donde los argumentos de la función son el nivel de consumo C_t y el ocio ℓ_t, o su contrario, la oferta de trabajo. La función a maximizar incluye el factor de descuento de la utilidad futura, dado por $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ que obedece a dos hechos: en primer lugar, los individuos valoran menos la utilidad futura que la utilidad presente y en segundo lugar, la función debe estar acotada superiormente para tener solución finita, resultado que se consigue al descontarla hacia el periodo 0. Mientras mayor sea el factor de descuento subjetivo del individuo, representado por el parámetro ρ menos se valora la utilidad futura y más impaciente es por tanto el individuo. La presencia de incertidumbre hace que la economía doméstica maximice la utilidad esperada, siendo por tanto E_0 el operador de expectativas, condicionado a la información que tiene el individuo en el momento inicial.

La función de utilidad puede incluir persistencia en los hábitos de consumo o en la oferta de trabajo con lo que la modelización sería la siguiente.

$$\underset{\{C_t,\ell_t\}}{Max}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, C_{t-1}, \sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell_{t-i}) : \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$$

La función de utilidad $u : \Re_+ \times \Re_+ \rightarrow \Re$ debe verificar:

a) es continua y dos veces diferenciable en sus argumentos.

b) la utilidad marginal es positiva y decreciente con respecto a cada uno de sus argumentos.

$$u_C > 0 : u_\ell > 0 : u_{CC} < 0 : u_{\ell\ell} < 0$$

c) Se asume además que es estrictamente cóncava.

$$u_{CC}u_{\ell\ell} - (u_{C\ell})^2 > 0$$

d) Se satisfacen las condiciones Inada.

$$\lim_{C\to\infty} u_C = \lim_{\ell\to\infty} u_\ell = 0$$

$$\lim_{C\to 0} u_C = \lim_{\ell\to\infty} u_\ell = \infty$$

Estas condiciones aseguran la existencia de una solución interior al problema de optimización.

King, Plosser y Rebelo (1988) muestran que las preferencias dadas en la función de utilidad deben satisfacer dos condiciones para que la solución obtenida sea consistente y compatible con la senda de crecimiento equilibrado de estado estacionario.

a) A lo largo de la senda de crecimiento equilibrado (balanced growth path), el capital, el output, el consumo y la inversión crecen a la tasa de progreso tecnológico constante y por tanto la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo debe ser constante, lo cual es consecuencia de combinar la ecuación de Euler que nos da la senda óptima para el consumo con la restricción de recursos.

b) Los efectos renta y sustitución en las horas trabajadas, derivados de una variación de los salarios reales asociados con el crecimiento sostenido en la productividad del trabajo no deben alterar la oferta de trabajo a largo plazo, ya que el número de horas trabajadas en el estado estacionario es constante.

Las formas funcionales específicas para la función de utilidad son y la demostración está incluida en el apéndice 3.1.

$$u(c,\ell) = \frac{1}{1-\sigma}c^{1-\sigma}\upsilon(1-N) : \sigma \neq 1$$

Si $\sigma < 1$, $\upsilon(\ell)$ deber ser creciente y cóncava y al contrario si $\sigma > 1$, $\upsilon(\ell)$ debe ser decreciente y convexa.

$$u(c,\ell) = \ln c + \upsilon(1-N) : \sigma = 1$$

donde $\upsilon(\ell)$ debe ser creciente y cóncava.

Además para asegurar la concavidad de cualquiera de las dos formas, debe verificarse:

$$-\sigma \frac{\ell}{\upsilon'(\ell)} \upsilon''(\ell) > (1-\sigma) \frac{\ell}{\upsilon(\ell)} \upsilon'(\ell)$$

2) La función de producción utiliza capital (K) y trabajo (N) para producir el output y se asume que la tecnología utilizada presenta rendimientos constantes a escala. La función más ampliamente utilizada en la modelización es la conocida función Cobb-Douglas ya que el parámetro de cada argumento de la función nos da la participación de cada input en la renta nacional. Dicha función lleva incorporado un shock estocástico y estacionario de productividad, Z_t

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Dicha perturbación viene modelizada a partir del siguiente proceso autorregresivo:

$$\ln Z_t = (1-\rho) \ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Podemos incorporar además algún tipo de progreso tecnológico neutral, denotado como A_t. Aunque el progreso técnico neutral o que mantiene a largo plazo las participaciones de las rentas de los factores en la renta nacional puede ser de tres tipos, neutral en el sentido de Solow, Hicks o Harrod, el único compatible con la senda de crecimiento equilibrado y para cualquier función de producción es el progreso neutral en el sentido de Harrod. Por tanto la restricción tecnológica quedaría como:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

En las modelizaciones se asume que dicho progreso tecnológico crece a una tasa porcentual dada, esto es:

$$\frac{A_t - A_{t-1}}{A_t} = g \Rightarrow A_t = A_0(1+g)^t \Rightarrow A_t = (1+g)A_{t-1} = g_A A_{t-1}$$

Finalmente, al igual que la función de preferencias, la función de producción $f : \Re_+ \times \Re_+ \to \Re$ debe verificar:

a) es contínua y dos veces diferenciable en ambos de sus argumentos.

b) los productos marginales son positivos y decrecientes para cada uno de los inputs.

$$f_k > 0 : f_n > 0 : f_{kk} < 0 : f_{nn} < 0$$

c) es estrictamente cóncava

$$f_{kk} f_{nn} - (f_{nk}) \geq 0$$

d) satisface las condiciones Inada.

$$\underset{k \to \infty}{lím}\ f_k = \underset{n \to \infty}{lím}\ f_n = 0$$

$$\underset{k \to 0}{lím}\ f_k = \underset{n \to \infty}{lím}\ f_n = \infty$$

3) Las restricción de recursos o de factibilidad. Esto es, por una parte la producción es igual al gasto en consumo más el gasto en inversión en una economía cerrada sin sector público y por otra la restricción de tiempo, el número de horas de ocio más el número dedicado al trabajo son constantes y normalizadas a la unidad.

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$n_t + \ell_t = N$$

4) Las leyes dinámicas de la acumulación de activos.

Si el problema se resuelve a través de la formulación del planificador social (social planner), e incluimos un solo activo en el modelo, éste es el stock de capital que se deprecia a una tasa $\delta \in [0, 1]$ y cuya ley dinámica viene dada por:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

esto es, el stock de capital mañana es igual al existente hoy menos la depreciación del mismo más la creación de nuevo capital que es la inversión neta, o lo que es lo mismo la inversión bruta es igual a la inversión neta $(K_{t+1} - K_t)$ más la depreciación del stock de capital existente, que suponemos lo hace en un porcentaje δ del mismo.

Si el problema se plantea y resuelve a través de la formulación de equilibrio competitivo, la restricción presupuestaria dinámica de la economía doméstica viene dada por:

$$A_{t+1} = W_t N_t - C_t + (1 + r_t)A_t$$

donde A_t es el nivel de activos del individuo, r_t es el rendimiento de los activos y $W_t N_t$ es la renta laboral. El nivel de activos en $t+1$ es igual a la diferencia entre la renta laboral y el consumo más los activos poseidos por el individuo en el periodo anterior más el rendimiento porcentual de dichos activos.

5) El capital pertenece a las economías domésticas o a las empresas, el resultado final es indiferente a esta especificación (Sims, 2011). El capital y el trabajo se remuneran según su productividad marginal y la incertidumbre procede de los shocks tecnológicos. Se asume que la distribución del shock es conocida por todos los individuos y el estado de la economía viene dado por el vector de variables de estado $\{K_t, Z_t\}_{t=0}^{\infty}$.

6) Las empresas maximizan beneficios, sujetas a la restricción tecnológica de la función de producción. Dicho problema se plantea con carácter estático en los modelos básicos.

7) El modelo RBC standard puede ser resuelto a través del enfoque del planificador social (social planner) o bien a través del enfoque de equilibrio general competitivo; en ausencia de imperfecciones en los mercados o impuestos que distorsionen las decisiones óptimas de los agentes, se verifican el Primer y el Segundo teorema del bienestar y por tanto ambas soluciones son equivalentes.

8) La resolución del modelo, aplicando en tiempo discreto el método de

Lagrange, o en general la ecuación funcional de Bellman, genera un conjunto de ecuaciones dinámicas no lineales, lo que nos conduce directamente a los métodos de resolución del mismo[24]. Los primeros artículos sobre Ciclo Real aplican la técnica del regulador óptimo, o programación linear-cuadrática, método intensivo en diferenciación y que consiste básicamente en introducir las restricciones no lineales en la función a optimizar, la función de utilidad en el caso de las economías domésticas, y realizar una aproximación de segundo orden a dicha función (Mc Candless, cap 7).

Sin embargo, la publicación del artículo de King, Plosser y Rebelo (1988) marca un cambio en la forma de abordar el problema, la aproximación log-lineal de las ecuaciones no lineales de equilibrio del sistema en un entorno del estado estacionario se han convertido en el método estándar de abordar la resolución de cualquier modelo de Ciclo Real.

Esto implica resolver las condiciones de equilibrio estático y obtener el equilibrio a largo plazo o estado estacionario del modelo.

Para resolver el modelo lineal el método más utilizado se basa en la descomposición de Jordan de la matriz de coeficientes del sistema, metodología que fue popularizada a partir del artículo de Blanchard y Kahn (1980)[25]. Junto a éste, es con frecuencia utilizado el método de coeficientes indeterminados tal y como propuso Campbell (1994) o Whiteman (1983).

Existen casos especiales que permiten simplificar la solución al permitir obtener lo que se denomina una solución cerrada o exacta del sistema. Las dos condiciones que deben verificarse es que la función de utilidad que maximizan las economías domésticas sea, en logaritmos, aditiva y separable en consumo y ocio y que la tasa de depreciación del stock de capital sea igual a1, estrategia seguida por Long y Plosser (1983) y McCallum (1989) en los primeros pasos del desarrollo de los modelos de Ciclo Real.Una vez derivadas las condiciones de primer orden del problema de optimización que nos dan las ecuaciones de equilibrio debemos determinar las formas funcionales para la tecnología y la función de utilidad. Dichas funciones incorporan determinados parámetros

[24]Una revisión de los métodos de solución puede consultarse en Heer, B Maussner, A. (2005) o Taylor, J.B y Uhlig (1990).

[25]En caso de que la matriz de coeficientes de las variables adelantadas en el tiempo no sea singular, se puede realizar la descomposición de Schur.

que deben ser consistentes con la existencia de un estado estacionario estable y pueden ser estimados a partir de dos formas:

1) a partir de su estimación utilizando el Método Generalizado de los Momentos (GMM) desarrollado por Hansen (1982) y que utiliza las condiciones de primer orden obtenidas en la resolución del modelo.

2) utilizando la calibración, que consiste en utilizar estimaciones de los parámetros a partir de información obtenida a partir de varias fuentes. El modelo debe ser consistente con los hechos estilizados a largo plazo, esto es, la relación capital-producto, el número de horas trabajadas, la participación de las rentas del capital en la renta nacional, el tipo de interés o la tasa de depreciación del stock de capital deben reflejar los valores medios de una economía. Los parámetros incluidos en la función de utilidad se obtienen habitualmente a partir de estudios de corte microeconómico o pueden ser determinados a partir de las ecuaciones de estado estacionario del modelo.

La calibración no es sinónimo de estimación, esto es, cuando se calibra un modelo los valores de los parámetros no se eligen de tal forma que el modelo replique lo mejor posible los datos, aunque también pueden ser estimados a partir de introducir datos en las ecuaciones que resuelven el modelo y ser estimados a partir de máxima verosimilitud, esto es, utilizamos la información contenida en la muestra para el elegir el valor más probable que tomaría dicho parámetro.

En ocasiones se suele utilizar la desviación típica de la producción obtenida de las series de producción para estimar la desviación del residuo de Solow, ya que ambas están relacionadas a partir de la solución de las ecuaciones del modelo.

3.2. Ciclo Económico Real. El modelo multisectorial de Long y Plosser.

Long y Plosser acuñan los términos Real Business Cycle para demostrar cómo principios económicos básicos en los que los individuos maximizadores al elegir planes de consumo y/o producción generan muchas de las características comunmente asociadas con el ciclo económico. La explicación de las fluctuaciones cíclicas es consistente con la asunción de la hipótesis de expectativas racionales, la existencia de información completa, la existencia de preferencias estables, la no existencia de fricciones o costes de ajuste y la no existencia de gobierno ni dinero.

Reconociendo el hecho de que este tipo de modelo no es capaz de explicar todas las regularidades o hechos estilizados del ciclo, sí provee un marco útil para estudiar cómo una perturbación de productividad que afecte a un sector se transmite al resto de los sectores.

El modelo que desarrollamos aquí es una versión simplificada para dos bienes en la que el agente representativo (Robinson Crusoe) maximiza el valor de su utilidad esperada, que depende del vector de bienes de consumo y del ocio. Las posibilidades de producción para los 2 bienes presenta rendimientos constantes a escala y es homogénea y lineal con respecto a los inputs, X_{ij_t} ,que representan la cantidad de bien j asignado a la producción de bien i y N_{it} que son las horas asignadas a la producción de cada bien. Cada bien puede experimentar una perturbación Z_{it}, $i = 1, 2$, perturbaciones que están incorreladas entre bienes, esto es, $Cov(Z_{it}, Z_{jt}) = 0$ $i \neq j$.

Las preferencias vienen dadas por la siguiente función de utilidad.

$$U(C_t, \ell_t) = \theta_0 \ln \ell_t + \theta_1 \ln C_{1t} + \theta_2 \ln C_{2t}$$

Las dos restricciones del problema vienen dadas por la restricción de tiempo y la restricción de de recursos.

$$T = \ell_t + N_{1t} + N_{2t} \qquad ((3.1))$$

$$C_{1t} + X_{11} + X_{21} = Y_{1t} : C_{2t} + X_{12} + X_{22} = Y_{2t} \qquad ((3.2))$$

La interpretación de las restricciones anteriores es la siguiente: en la primera, ecuación (3.1) el individuo asigna su tiempo total disponible T entre ocio, o dedicarlo a la producción de los bienes, mientras que (3.2) nos da la restricción de recursos, ya que el stock disponible en un momento t de cada uno de los bienes Y_{1t} e y Y_{2t}, puede ser dedicado bien a ser consumido o formar parte como input en la producción de más cantidad de él mismo. De esta forma, Y_{1t} puede ser en parte consumido, o bien ser utilizado como input en la producción de él mismo, X_{11}, y como input en la producción del bien 2, X_{21}.

La función de producción viene dada por:

$$Y_{1t+1} = Z_{1t+1} N_{1t}^{\alpha_1} \left(X_{11}^{a_{11}} X_{12}^{a_{12}} \right) : Y_{2t+1} = Z_{2t+1} N_{2t}^{\alpha_2} \left(X_{21}^{a_{21}} X_{22}^{a_{22}} \right) \qquad ((3.3))$$

El supuesto de rendimientos constantes a escala, implica:

$$\alpha_1 + a_{11} + a_{12} = 1 : \alpha_2 + a_{21} + a_{22} = 1$$

Finalmente, supondremos que el proceso estocástico que sigue la perturbación viene dado por:

$$\ln Z_{it+1} = (1 - \rho_i) \ln Z_i + \rho_i \ln Z_{it} + \varepsilon_{it} : i = 1, 2 : 0 < \rho_i < 1 : \varepsilon_{it} \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Solución.

El objetivo del agente representativo (Crusoe) es maximizar el valor esperado de su utilidad a lo largo de su vida, sujeto a las restricciones de recursos y a la tecnología disponible.

Sea $V(S_t)$ el máximo de la función de utilidad:

$$V(S_t) = \underset{\{C_{1t}, C_{2t}, N_{1t}, N_{2t}\}}{Max} E_t \left[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} U(C_s, \ell_s) \right]$$

$$\underset{\{C_{1t}, C_{2t}, N_{1t}, N_{2t}\}}{Max} \left[U(C_t, \ell_t) + E_t \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} U(C_t, \ell_t) \right]$$

$$V(S_t) = \underset{\{C_{1t}, C_{2t}, N_{1t}, N_{2t}\}}{Max} \left[U(C_t, \ell_t) + \beta E_t V(S_{t+1}) \right]$$

obtenemos la expresión de la ecuación funcional de Bellman, donde $S_t = \{Y_{1t}, Y_{2t}, Z_{1t}, Z_{2t}\}$ representa el vector de variables de estado.

Este problema tiene solución cerrada, debido al supuesto de preferencias logarítmicas y el hecho de que la tasa de depreciación elegida sea del 100 %[26]. La solución para la función de valor toma la forma siguiente:

$$V(S_t) = K + \gamma_1 \ln Y_{1t} + \gamma_2 \ln Y_{2t} + \gamma_3 \ln Z_{1t} + \gamma_4 \ln Z_{2t}$$

donde γ_i y δ_i son parámetros a determinar, y son obviamente función de los parámetros estructurales del modelo.

Sustituyendo la restricción de tiempo en la función de utilidad, podemos resumir el problema como:

$$V(S_t) = \underset{\{C_{1t}, C_{2t}, N_{1t}, N_{2t}\}}{Max} \left[\theta_0 \ln \left(T - (N_{1t} + N_{2t}) \right) + \theta_1 \ln C_{1t} + \theta_2 \ln C_{2t} + \beta E_t V(S_{t+1}) \right]$$

sujeto a la restricción de recursos (3.2) y a la tecnología (3.3):

$$C_{it} + \sum_{j=1}^{2} X_{ijt} = Y_{it} : Y_{it+1} = Z_{it+1} N_{it}^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{2} X_{ijt}^{a_{ij}}$$

Las condiciones de optimización de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial V}{\partial C_{1t}} = \frac{\theta_1}{C_{1t}} + \beta \gamma_1 \frac{1}{Y_{1t+1}} \frac{\partial Y_{1t+1}}{\partial X_{1j}} \frac{\partial X_{1jt}}{\partial C_{1t}} = 0 \Rightarrow \frac{\theta_1}{C_{1t}} = \frac{\beta \gamma_j a_{j1}}{X_{1j}} : j = 1, 2 \quad ((3.4))$$

$$\frac{\partial V}{\partial C_{2t}} = \frac{\theta_2}{C_{2t}} + \beta \gamma_2 \frac{1}{Y_{2t+1}} \frac{\partial Y_{2t+1}}{\partial X_{2j}} \frac{\partial X_{2jt}}{\partial C_{2t}} = 0 \Rightarrow \frac{\theta_2}{C_{2t}} = \frac{\beta \gamma_j a_{j2}}{X_{2j}} : j = 1, 2 \quad ((3.5))$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_{1t}} = \frac{-\theta_0}{T - (N_{1t} + N_{2t})} + \beta \frac{\partial Y_{1t+1}}{\partial N_{1t}} \Rightarrow \frac{\theta_0}{T - (N_{1t} + N_{2t})} = \frac{\beta \gamma_1 \alpha_1}{N_{1t}} \quad ((3.6))$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_{2t}} = \frac{-\theta_0}{T - (N_{1t} + N_{2t})} + \beta \frac{\partial Y_{2t+1}}{\partial N_{2t}} \Rightarrow \frac{\theta_0}{T - (N_{1t} + N_{2t})} = \frac{\beta \gamma_2 \alpha_2}{N_{2t}} \quad ((3.7))$$

[26] Como ambos reconocen, en este caso: "functional equations are solved by "hunt and peck" or iterative procedures. In this particular example, however dumb luck yields the following solution". Real Business Cycle (1993), pag 47.

La solución para las horas de trabajo puede obtenerse a partir del sistema formado por (3.1), (3.6) y (3.7).

$$N_{it} = \frac{\beta\gamma_i\alpha_i T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)} : i = 1, 2 : \ell_t = \frac{\theta_0 T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)}$$

Las horas de trabajo y de ocio, no dependen de ninguna de las variables de estado, por tanto, dados los coeficientes del sistema, son constantes.

A partir de la condición de primer orden para el consumo de cada uno de los bienes, junto a la restricción de recursos, obtenemos la demanda óptima de cada uno de los bienes, así como los inputs utilizados en la producción de cada uno de ellos. El sistema viene dado por (3.2), (3.6) y (3.7)

$$\theta_1 X_{1j} = \beta\gamma_j a_{j1} C_{1t} : j = 1, 2$$

$$\theta_2 X_{2j} = \beta\gamma_j a_{j2} C_{2t} : j = 1, 2$$

$$Y_{1t} = C_{1t} + X_{11} + X_{21}$$

$$Y_{2t} = C_{2t} + X_{22} + X_{12}$$

que nos permite obtener las siguientes soluciones para el consumo

$$C_{1t} = \frac{\theta_1 Y_{1t}}{\theta_1 + \beta(\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21})} : C_{2t} = \frac{\theta_2 Y_{2t}}{\theta_2 + \beta(\gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22})} \qquad ((3.8))$$

y para las utilización de cada bien en la producción de él mismo y del otro, es decir las demandas como input para cada uno de los bienes:

$$X_{11} = \frac{\beta\gamma_1 a_{11}}{\theta_1 + \beta(\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21})} Y_{1t} : X_{21} = \frac{\beta\gamma_2 a_{21}}{\theta_1 + \beta(\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21})} Y_{1t} \qquad ((3.9))$$

$$X_{12} = \frac{\beta\gamma_1 a_{12}}{\theta_2 + \beta(\gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22})} Y_{2t} : X_{22} = \frac{\beta\gamma_2 a_{22}}{\theta_2 + \beta(\gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22})} Y_{2t} \qquad ((3.10))$$

Los parámetros indeterminados pueden ser calculados de la siguiente manera.

Sustituyendo las soluciones (3.8), (3.9) y (3.10) en la ecuación de Bellman y en la función de producción, podemos expresar $\ln Y_{it+1}$ como función lineal de las variables endógenas en el momento t. A su vez, introduciendo la forma funcional logarítmica con la que hemos probado como solución, podemos identificar los coeficientes γ_1 y γ_2 en función de los parámetros del modelo.

$$V(S_{t+1}) = K + \gamma_1 \ln Y_{1t+1} + \gamma_2 \ln Y_{2t+1} + \gamma_3 \ln Z_{1t+1} + \gamma_4 \ln Z_{2t+1}$$

$$V(S_t) = \underset{\{C_{1t}, C_{2t}, N_{1t}, N_{2t}\}}{Max} \left[\theta_1 \ln C_{1t} + \theta_2 \ln C_{2t} + \beta E_t V(S_{t+1})\right]$$

Dichos parámetros vienen dados por:

$$\gamma_1 = \frac{\theta_1(1-\beta a_{22}) + \theta_2 \beta a_{21}}{(1-\beta a_{11})(1-\beta a_{22}) - \beta^2 a_{12} a_{21}} : \gamma_2 = \frac{\theta_1 \beta a_{12} + \theta_2(1-\beta a_{11})}{(1-\beta a_{11})(1-\beta a_{22}) - \beta^2 a_{12} a_{21}}$$

Para identificar δ_1 y δ_2 debemos introducir la forma funcional específica para el shock tecnológico. Dado que el ocio y las horas trabajadas son constantes no es necesario incluirlas para determinar dichos parámetros.

La identificación da lugar a los siguientes resultados:

$$\gamma_1 = \theta_1 + \beta\left(\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21}\right)$$

$$\gamma_2 = \theta_2 + \beta\left(\gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22}\right)$$

$$\gamma_3 = \frac{\beta \gamma_1}{1-\rho} : \gamma_4 = \frac{\beta \gamma_2}{1-\rho}$$

Podemos expresar, las soluciones del modelo como:

$$C_{1t} = \frac{\theta_1}{\gamma_1} Y_{1t} : C_{2t} = \frac{\theta_2}{\gamma_2} Y_{2t}$$

$$X_{11t} = \beta a_{11} Y_{1t} : X_{21t} = \beta \frac{\gamma_2}{\gamma_1} a_{21} Y_{1t}$$

$$X_{12t} = \beta \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a_{12} Y_{2t} : X_{22t} = \beta a_{22} Y_{2t}$$

La demanda de consumo final de cada uno de los bienes depende directamente de las preferencias de los individuos y del stock producido hasta ese momento t e inversamente de cada uno de los parámetros γ_i. La demanda como input de cada uno de los bienes depende directamente de su stock o nivel producido en t, mientras que la utilización como input de cualquiera de los bienes, depende directamente de su participación en la producción de dicho bien, que podríamos interpretar en este modelo como un índice de productividad del bien como factor productivo.

El precio de cada uno de los bienes puede obtenerse a partir de la condición de envolvente del problema, que nos da el incremento de valor en el óptimo cuando cambia la variable de estado endógena, Y_{it}.

$$\frac{\partial V(S_t)}{\partial Y_{it}} = P_{it} = \frac{\gamma_i}{Y_{it}}$$

En segundo lugar, una hora adicional dedicada a cualquiera de las actividades debe ser remunerada en equilibrio al mismo salario y dedicar una hora adicional a trabajar en la producción de cualquiera de los bienes y por tanto disminuir en la misma cuantía el ocio, debe dejar inalterada la utilidad máxima o dar el mismo nivel de satisfacción, por tanto:

$$w_t = \frac{\partial u(C^*, \ell_t)}{\partial \ell_t}$$

El tipo de interés puede también calcularse a partir de la condición de la envolvente del problema

$$\frac{\partial V(S_t)}{\partial Y_{it}} = \beta E_t \frac{\partial V(S_{t+1})}{\partial Y_{it+1}} \frac{\partial Y_{it+1}}{\partial Y_{it}}$$

El tipo de interés es por definición, cuántas unidades monetarias adicionales espero recibir en el futuro si hoy decido prestar una unidad monetaria. La interpretación de la ecuación de la envolvente es exactamente igual que la de la ecuación de Euler, la maximización intertemporal supone que una disminución en la producción hoy debe ser compensada en el periodo siguiente.

$$\beta \frac{E_t Y_{it+1}}{Y_{it}} = \frac{\partial Y_{it}}{\partial Y_{it+1}} = \frac{1}{1 + r_{t+1}}$$

A lo largo del óptimo entre dos periodos, el individuo mantendrá constante su utilidad variando la producción hoy si en el futuro puede compensar dicha variación.

Shocks de productividad.

Una shock tecnológico positivo que afecte a uno de los bienes provoca un aumento en la cantidad de ese bien, manteniendo constantes los factores utilizados en su producción. Sin embargo, una mayor dotación del bien provoca un aumento en su demanda ya sea como input o como bien de consumo, alterando las asignaciones óptimas de inputs anteriores al shock tecnológico.

Si como estamos suponiendo cada uno de los bienes contribuye a la producción del otro de forma positiva, el aumento en la dotación de uno de ellos debida a la perturbación tecnológica elevará la producción del otro bien, dado que la producción de éste depende de la dotación del otro.

La solución del modelo puede expresarse en forma de vector autorregresivo sustituyendo las soluciones para las horas trabajadas y las utilizaciones de bienes en la producción de cada bien en la función de producción.

$$\ln Y_{1t+1} = \alpha_1 \ln \frac{\beta\gamma_1\alpha_1 T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)} + a_{11} \ln \beta a_{11} Y_{1t} + a_{12} \ln \beta \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a_{12} Y_{2t} + \ln Z_{1t+1}$$

$$\ln Y_{2t+1} = \alpha_2 \ln \frac{\beta\gamma_2\alpha_2 T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)} + a_{21} \ln \beta \frac{\gamma_2}{\gamma_1} a_{21} Y_{1t} + a_{22} \ln \beta a_{22} Y_{2t} + \ln Z_{2t+1}$$

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln Y_{1t} \\ \ln Y_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln Z_{1t+1} \\ \ln Z_{2t+1} \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes δ_i son función de los parámetros del modelo.

$$\delta_1 = \alpha_1 \ln \frac{\beta\gamma_1\alpha_1 T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)} + a_{11} \ln \beta a_{11} + a_{12} \ln \beta \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a_{12}$$

$$\delta_2 = \alpha_2 \ln \frac{\beta\gamma_2\alpha_2 T}{\theta_0 + \beta(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)} + a_{21} \ln \beta \frac{\gamma_2}{\gamma_1} a_{21} + a_{22} \ln \beta a_{22}$$

Dada la estructura del proceso de shock, podemos expresarlo como:

$$\ln Z_{it+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{i(t+1-j)} = \eta_{i(t+1)}$$

teniendo en cuenta que

$$\eta_{t+1} \sim iid\left(0, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\right)$$

Aplicando el operador de retardos y siendo la matriz de coeficientes invertible, obtenemos la producción de cada bien en función de las perturbaciones.

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \left[I - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} L \right]^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1 + \eta_{1(t+1)} \\ \delta_2 + \eta_{2(t+1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} \delta_1 + \eta_{1(t+1-j)} \\ \delta_2 + \eta_{2(t+1-j)} \end{bmatrix}$$

De esta forma, una perturbación que en principio afecta a uno de los bienes, se propaga al otro a través de la matriz A de participaciones de los inputs en la función de producción.

Supongamos $\eta_{1t+1} > 0$, $\eta_{1t+j} = 0$, $j > 1$ y $\eta_{2t+j} = 0, \forall j$.

A corto plazo, en el momento del impacto, una perturbación que afecte sólo al bien 1, eleva la producción de dicho bien con respecto a su valor de equilibrio, dejando inalterada la del otro bien.

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1t+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, conforme transcurre el tiempo.

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+2} \\ \ln Y_{2t+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 + \eta_{1t+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(\delta_1 + \eta_{1t+1}) \\ a_{21}(\delta_1 + \eta_{1t+1}) \end{bmatrix}$$

Y en general, para cualquier horizonte temporal, k periodos hacia delante.

$$\begin{bmatrix} \ln Y_{1t+k} \\ \ln Y_{2t+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^k(\delta_1 + \eta_{1t+1}) \\ a_{21}^k(\delta_1 + \eta_{1t+1}) \end{bmatrix}$$

El modelo serviría para explicar los comovimientos que se observan en distintos sectores ante perturbaciones que en principio sólo afectan a uno de ellos.

De igual forma que hemos demostrado la propagación de un shock de productividad sobre la cantidad de bienes producidos, es inmediato ver que el consumo de ambos bienes y las cantidades asignadas a la producción de cada bien se verán afectadas ante los cambios en la producción total de ambos bienes.

A partir de las soluciones del problema podemos obtener la dinámica que seguirán tanto la demanda de ambos bienes como la demanda de cada uno como inputs en la producción.

$$\begin{bmatrix} C_{1t+1} \\ C_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_1}{\gamma_1} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2}{\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \left[I - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} L \right]^{-1} \begin{bmatrix} \delta_1 + \eta_{1(t+1)} \\ \delta_2 + \eta_{2(t+1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta a_{11} & a_{21}\beta\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \\ a_{12}\beta\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & \beta a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln X_{11t+1} & \ln X_{12t+1} \\ \ln X_{21t+1} & \ln X_{12t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln Y_{1t+1} \\ \ln Y_{2t+1} \end{bmatrix}$$

3.3. Equilibrio competitivo. Interpretación de las condiciones de óptimo.

La idea principal del equilibrio competitivo es que el sistema de precios asigna los recursos de forma óptima en el sentido de Pareto, en ausencia de externalidades, bienes públicos o imperfecciones de cualquier tipo en los mercados.

Un equilibrio competitivo se define como una secuencia infinita de precios relativos, que son estrictamente positivos $\{r_t, W_t\}_{t=0}^{\infty}$, una asignación de dimensión infinita para la empresa, denotada por $\left\{K_t^d, N_t^d, Y_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ e igualmente una asignación para la economía doméstica representativa $\{K_t^s, N_t^s, Y_t, C_t, I_t, A_t\}_{t=0}^{\infty}$ tales que:

1. La asignación $\{K_t^s, N_t^s, Y_t, C_t, I_t, A_t\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el problema de la economía doméstica dada la secuencia de precios $\{r_t, W_t\}_{t=0}^{\infty}$.

El problema para la economía doméstica es:

$$\underset{\{C_t, A_{t+1}, N_t\}}{Max} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, \ell_t) \right]$$

sujeto a las restricciones

$$A_{t+1} = W_t N_t - C_t + (1 + r_t) A_t \qquad ((3.11))$$

$$N_t + \ell_t = 1$$

$$C_t, A_t, N_t, \ell_t \geq 0$$

$$A_0 \, dado$$

donde ℓ_t es el número de horas de ocio y A_t es el nivel inicial de activos que posee la economía doméstica.

La restricción de la economía doméstica viene dada por la ecuación (3.11) donde el nivel de activos en el periodo siguiente es igual al ahorro, dado por la diferencia entre su renta salarial $W_t N_t$ y su consumo C_t más la riqueza inicial A_t y el rendimiento que genera dicha riqueza.

En cada periodo, dados los precios de los factores, la economía doméstica debe elegir cuánto trabajo ofrecer, cuánto consumir y cuánto ahorrar o pedir prestado de tal forma que se verifique la restricción presupuestaria periodo a periodo.

2. la asignación $\left\{K_t^d, N_t^d, Y_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el siguiente problema de la empresa dados los precios $\{r_t, W_t\}_{t=0}^{\infty}$

$$\underset{\{K_t,N_t\}}{Max}\, Y_t - (r_t + \delta)\, K_t - W_t N_t$$

sujeto a la restricción

$$Y_t = Z_t F(K_t, N_t)$$

Determinación del óptimo. Argumentos variacionales.

En primer lugar, la economía doméstica elige cuánto consumir y cuantas horas de trabajo ofrecer en cada periodo. Los argumentos variacionales se basan en que los cambios en su utilidad deben ser nulos cuando la economía doméstica decide alterar alguno de los argumentos de los que aquélla depende. Supongamos que decide en un periodo t aumentar su oferta de trabajo en ΔN y utilizar el aumento en sus ingresos para aumentar su consumo en el mismo periodo, de tal forma que si está optimizando, esta decisión no debe alterar su utilidad esperada intratemporalmente.

La desutilidad derivada de ofrecer más trabajo en un periodo t, debe ser igual al aumento de utilidad derivado de la posibilidad de aumentar su consumo. Por tanto, a partir de la función de utilidad tenemos que a lo largo de la senda óptima debe verificarse:

$$\beta \frac{\Delta u}{\Delta N} \Delta N = \beta \frac{\Delta u}{\Delta C} \Delta C$$

donde el aumento en el consumo viene dado por:

$$\Delta C = W_t \Delta N$$

Por tanto, la condición de óptimo intratemporal viene dada por:

$$\frac{\Delta u}{\Delta N} = W_t \frac{\Delta u}{\Delta C}$$

Expresado en otros términos, en cada momento del tiempo, en el óptimo, la relación marginal de sustitución entre consumo y oferta de trabajo es igual al salario real, resultado estándar en cualquier problema de optimización estática.

En segundo lugar, consideremos un cambio marginal en el consumo hoy. De nuevo, a lo largo de la senda dinámica óptima, la utilidad esperada no debe cambiar. El cambio en el consumo hoy permite que el individuo pueda aumentar o disminuir sus posibilidades de consumo futuras. Supongamos que la economía doméstica disminuye su consumo en t, en la cuantía ΔC_t y utiliza el ahorro resultante para aumentar su riqueza y por tanto con la esperanza de aumentar su nivel de consumo en el periodo siguiente por encima del que hubiera podido alcanzar si no hubiese reducido su consumo en t.

El coste en términos de utilidad hoy debe ser igual al incremento de utilidad que obtendría en el periodo siguiente, $t+1$. Esto es, maximizar intertemporalmente la utilidad implica que debe verificarse:

$$\frac{\Delta u}{\partial C_t} \Delta C_t = E_t \frac{\Delta u}{\partial C_{t+1}} \Delta C_{t+1}$$

donde

$$\Delta C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})\Delta C_t$$

Por una parte, los flujos de utilidad derivados del consumo futuro se actualizan a la tasa subjetiva, β y por otra, el ahorro resultante y la desutilidad de consumir menos en t, debe ser compensada por un aumento en el consumo futuro, dado por el rendimiento de dicho ahorro.

Por tanto a lo largo de la senda óptima, la condición intertemporal es:

$$\frac{\Delta u}{\Delta C_t} = \beta E_t \frac{\Delta u}{\Delta C_{t+1}} (1 + r_{t+1})$$

Este resultado no es otro que la conocida ecuación de Euler para el consumo.

En otras palabras, la relación marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro es igual, en el óptimo, a:

$$RMS_{c_t}^{c_{t+1}} = \frac{u_C(C_t, 1-N_t)}{u_C(C_{t+1}, 1-N_{t+1})} = \beta(1+r_{t+1})$$

La parte izquierda de la ecuación es la tasa o relación marginal de sustitución entre el consumo entre dos periodos de tiempo consecutivos, mientras que la derecha es la relación marginal de transformación. La valoración subjetiva que realiza el individuo de consumo presente frente a consumo futuro, su RMS, tiene que ser igual al precio relativo del consumo presente en términos de consumo futuro $\beta(1+r_{t+1})$.

Si el individuo espera hoy que el tipo de interés aumente, entonces sustituirá consumo presente por consumo futuro ya que el consumo presente se ha encarecido en relación al consumo futuro.

De forma análoga a la anterior, si nuestro agente económico decide trabajar una hora adicional en el periodo t obtendrá una pérdida de utilidad dada por

$$-\frac{\partial u}{\partial N_t} W_t \Delta N_t$$

El comportamiento optimizador de la utilidad implica que dicha pérdida de utilidad debe ser igual a la ganancia de utilidad descontada que obtendrá en el periodo siguiente:

$$-\beta E_t\left[\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}} W_{t+1}(1+r_{t+1})\Delta N_t\right]$$

La variación neta de utilidad debe ser nula y por tanto debe verificarse

$$\frac{\partial u}{\partial N_t} W_t \Delta N_t = \beta E_t\left[\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}} W_{t+1}(1+r_{t+1})\Delta N_t\right]$$

En términos no estocásticos:

$$RMS_{n_t}^{n_{t+1}} \frac{u_N(C_t, 1-N_t)}{u_N(C_{t+1}, 1-N_{t+1})} = \beta(1+r_{t+1})\frac{W_t}{W_{t+1}}$$

La parte izquierda de la ecuación nos da la relación marginal de sustitución entre oferta de trabajo en dos periodos consecutivos mientras que la parte de la derecha nos da la relación marginal de transformación o cociente de precios relativos en los dos periodos. El sujeto económico estará dispuesto a ofrecer más trabajo hoy si aumenta el salario real hoy en relación al salario esperado mañana, dado un tipo de interés real. Dicho de otra forma, el coste de oportunidad del ocio hoy es mayor si aumenta el salario real presente en relación al salario real futuro.

3. A la solución del problema debemos añadirle la denominada condición de transversalidad que puede derivarse a partir de la restricción presupuestaria de la economía doméstica. Dicha restricción nos dice que la diferencia entre la renta laboral más la renta procedente de la tenencia de activos menos el consumo es igual a la acumulación de activos. Con el fin de impedir que el individuo pueda pedir prestado sin límite y por tanto intente elevar su consumo a través de una desacumulación contínua de activos debemos imponer la denominada condición de transversalidad, también denominada de juego *"no Ponzi"*.

Despejando el nivel de activos en la restricción presupuestaria.

$$A_t = \frac{C_t - W_t N_t}{1 + r_t} + \frac{A_{t+1}}{1 + r_t}$$

y resolviendo recursivamente hacia delante

$$A_t = \left\{ \prod_{j=0}^{T} \left(\frac{1}{1 + r_{t+j}} \right) \right\} (C_{t+j} - W_{t+j} N_{t+j}) + \left\{ \prod_{j=0}^{T} \left(\frac{1}{1 + r_{t+j}} \right) \right\} A_{t+T}$$

$$A_t + r_{t,t+j}\, W_{t+j} N_{t+j} = r_{t,t+j}\, C_{t+j} + r_{t,t+j}\, A_{t+T}$$

$$r_{t,t+j} = \left\{ \prod_{j=0}^{T} \left(\frac{1}{1 + r_{t+j}} \right) \right\}$$

La solución expresada así nos expresa que el valor actual de la renta salarial del individuo más su nivel de riqueza inicial deben ser igual al valor actual del consumo más un segundo término que sería el valor actual de la riqueza en el periodo final. Si éste fuese negativo implicaría que el nivel de consumo a lo largo de la vida del individuo es superior al valor actual de su riqueza y de su renta salarial dejando una deuda impagada al final de su vida, lo cual está en contradicción con el comportamiento optimizador de los individuos, esto es, nadie desearía financiar a alguien que no le va a devolver dicha deuda. Por contra si este término fuese positivo, el individuo dejaría una riqueza final con lo que su nivel de consumo a lo largo de su vida sería inferior al valor descontado de su renta y a su nivel inicial de riqueza, con lo que en este caso el individuo no estaría maximizando su utilidad. Por tanto, la condición de transversalidad del problema viene dada por:

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \prod_{j=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r_{t+j}} \right) \right\} a_{t+T} = 0$$

4. Finalmente, las empresas se enfrentan en el modelo básico a un problema estático de maximización del beneficio sujeto a la restricción tecnológica y por tanto demandan factores productivos hasta que su productividad marginal es igual a su precio.

$$r_t + \delta = Z_t F_K(K_t, N_t)$$

$$W_t = Z_t F_N(K_t, N_t)$$

3.4. Resolución a través del planificador social.

Resolver a través del planificador social (social planner) supone ignorar los mercados y calcular directamente el óptimo social.

El problema del planificador social es maximizar la función de utilidad:

$$\underset{\{C_t,\ell_t\}}{Max}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, \ell_t)$$

sujeto a las restricciones siguientes:

La función de producción agregada:

$$Y_t = Z_t F(K_{t,} N_t)$$

La restricción de recursos:

$$Y_t = C_t + I_t$$

La dinámica del stock de capital:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

La restricción de tiempo:

$$N_t + \ell_t = 1$$

$$K_0 \ dado$$

Obtendremos las condiciones de primer orden, a partir del lagrangiano, convirtiendo el problema en otro equivalente con una sola restricción. Sustituyendo la función de producción y la inversión en la restricción de recursos y la restricción temporal en la función de utilidad.

La restricción de recursos por tanto viene dada por:

$$Z_t F(K_{t,} N_t) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

Las variables de decisión del social planner son C_t, N_t, K_{t+1}, mientras que las variables de estado son el stock de capital K_t (variable endógena de estado) y Z_t, la perturbación tecnológica o variable exógena de estado.

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, K_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_0 \left[u(C_t, 1-N_t) + \lambda_t (Z_t F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t - C_t - K_{t+1}) \right]$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t (u_C(C_t, 1-N_t) - \lambda_t) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \beta^t \left[-u_\ell(C_t, 1-N_t) + \lambda_t Z_t F_N(K_t, N_t) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t + E_t \left[\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left(Z_{t+1} F_N(K_{t+1}, N_{t+1}) + (1-\delta) \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = Z_t F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t - C_t - K_{t+1} = 0$$

junto a la condición de transversalidad del problema que es:

$$\underset{t \to \infty}{lím} \beta^t u'(C_t) K_{t+1} = 0$$

Que pueden expresarse como:

$$u_C(C_t, 1-N_t) = \lambda_t$$

$$u_\ell(C_t, 1-N_t) = \lambda_t Z_t F_N(K_t, N_t)$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} \left(Z_{t+1} F_N(K_{t+1}, N_{t+1}) + (1-\delta) \right)$$

$$Z_t F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t - C_t - K_{t+1} = 0$$

Condiciones que son equivalentes a las obtenidas a través del equilibrio competitivo, teniendo en cuenta que el tipo de interés real es igual a la productividad marginal del capital menos la tasa de depreciación.

3.5. Un modelo básico de Ciclo Económico Real.

En este apartado vamos a resolver explícitamente un modelo de Ciclo Económico Real, parametrización la función de utilidad y la función de producción. Asumiremos que la tasa de depreciación es del 100 % y por tanto $\delta = 1$. Este modelo fue analizado por McCallum (1989) y básicamente equivale al modelo que plantea Prescott[27] (1986).

Esta formulación básica también ha sido utilizada por Attfield, Demery y Duck (1991, cap 8), García de Paso (1999, cap 5) y en un modelo con dos periodos por Chan y Trehan (1991).

El supuesto restrictivo sobre la tasa de depreciación junto a la función de utilidad logarítmica y separable en sus dos argumentos nos permitirá obtener una solución cerrada del problema.

El problema al que nos enfrentamos viene dado por:

$$\underset{\{C_t, \ell_t\}}{Max}\, E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\theta \ln C_t + (1-\theta) \ln \ell_t\right]$$

Las restricciones son las habituales:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$K_{t+1} = I_t$$

$$N_t + \ell_t = 1$$

$$K_t, C_t, N_t, \ell_t \geq 0$$

[27] Prescott (1986) utiliza una función de utilidad donde el ocio depende de sus valores pasados.

$$K_0, Z_0 \quad dados$$

La dinámica de la perturbación de oferta, el shock tecnológico viene dada por:

$$\log Z_t = (1-\rho)\ln Z + \rho \log Z_{t-1} + \varepsilon_t : 0 \leq \rho \leq 1$$

donde ε_t es ruido blanco.

Aún siendo repetitivo, planteamos de nuevo el problema y directamente obtenemos las condiciones de primer orden del problema.

El conjunto de restricciones puede resumirse en una si sustituimos la función de producción y la restricción de recursos en la dinámica del capital y eliminamos de la función de utilidad el ocio, expresándola en función de la oferta de trabajo.

La restricción nos quedaría con $\delta = 1$ como:

$$K_{t+1} = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - C_t$$

Calculados el nivel de consumo, la oferta de trabajo y el stock de capital que desea tener óptimamente en el periodo siguiente es inmediato el cálculo de la inversión.

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, K_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_0 \left[u(C_t, 1-N_t) + \lambda_t(-K_{t+1} + Z_t F(K_t, N_t) - C_t)\right]$$

Con las funciones propuestas, dichas condiciones quedan de la siguiente manera:

$$\lambda_t = \frac{\theta}{C_t}$$

$$\frac{1-\theta}{1-N_t} = \lambda_t Z_t K_t^{\alpha}(1-\alpha) N_t^{-\alpha}$$

$$\lambda_t = \alpha\beta E_t \left[\lambda_{t+1} Z_{t+1} N_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1}\right]$$

$$C_t + K_{t+1} = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

En esencia la solución es un sistema no lineal con cuatro ecuaciones y cuatro variables endógenas, C_t, N_t, K_{t+1} y λ_t.

En la terminología habitualmente utilizada lo que debemos calcular son las denominadas reglas de decisión óptimas o policy functions, en las que las variables de decisión vienen dadas en funcion de las variables de estado, K_t y Z_t.

$$C_t = C(K_t, Z_t) : N_t = N(K_t, Z_t) : K_{t+1} = K(K_t, Z_t) : \lambda_t = \lambda(K_t, Z_t)$$

El problema principal de cálculo es cómo resolver el sistema anterior. En el caso sencillo que estamos considerando, el nivel de horas trabajadas no cambia ya que los efectos renta y sustitución en la oferta de trabajo se anulan ante un cambio en el salario real con lo cual dejan inalterada la asignación de ocio y trabajo, por lo que en equilibrio se verifica $N_t = \bar{N}$.

El sistema puede resolverse a través del método de coeficientes indeterminados[28] como lo hace McCallum (1989) o Attfield, Demery y Duck (1991, cap 8) pero aquí seguiremos el enfoque de Romer (2001).

Eliminando el multiplicador de Lagrange, la ecuación dinámica de Euler para el consumo, en logs viene dada por:

$$-\ln C_t = \ln \beta + \ln E_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} (1 + r_{t+1}) \right] \tag{(3.12)}$$

donde

$$1 + r_{t+1} = \alpha Z_{t+1} N_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} = \alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \tag{(3.13)}$$

Dado que la tasa de depreciación es igual a uno, se verifican las siguientes igualdades:

$$K_{t+1} = I_t = Y_t - C_t = Y_t - (1 - s_t) Y_t = s_t Y_t$$

$$C_t = (1 - s_t) Y_t \Rightarrow \ln C_t = \ln(1 - s_t) + \ln Y_t \tag{(3.14)}$$

[28] Dada la estructura del problema y la forma de la función de producción, la expresión con la que probaríamos como solución para el consumo y la inversión tendría la forma

$$c_t = a_0 z_t k_t^{\alpha}$$

$$k_{t+1} = a_1 z_t k_t^{\alpha}$$

donde a_0 y a_1 serían los parámetros a determinar.

Sustituyendo (3.14) y (3.13) en (3.12):

$$-\ln(1-s_t)-\ln Y_t=\ln\beta+\ln\alpha+\ln E_t\left[\frac{1}{(1-s_{t+1})Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}\right]$$

$$-\ln(1-s_t)-\ln Y_t=\ln\beta+\ln\alpha+\ln E_t\left[\frac{1}{(1-s_{t+1})Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{s_tY_t}\right]$$

$$-\ln(1-s_t)=\ln\beta-\ln s_t+\ln\alpha+\ln E_t\frac{1}{1-s_{t+1}}$$

La ecuación dinámica para la tasa de ahorro no depende de las variables de estado, K_t y Z_t, por lo tanto, existe un valor constante $s_{t+1}=s_t=s$ que la satisface.

$$s=\alpha\beta$$

Por tanto, el consumo es una proporción constante de la renta.

$$C_t=(1-s)Y_t=(1-\alpha\beta)Y_t$$

Aplicando este resultado a las condiciones estáticas de óptimo para el consumo y la oferta de trabajo

$$\frac{1-\theta}{1-N_t}=\frac{\theta}{C_t}Z_tK_t^{\alpha}(1-\alpha)N_t^{-\alpha}\Rightarrow\frac{1-\theta}{1-N_t}=(1-\alpha)\frac{\theta}{(1-s)Y_t}\frac{Y_t}{N_t}$$

Aplicando logs

$$\ln(1-\theta)-\ln(1-N_t)=\ln(1-\alpha)+\ln\theta-\ln(1-s)-\ln N_t$$

El número de horas trabajadas ofrecidas tampoco depende de las variables de estado, sólo de los parámetros del modelo.

$$\ln\left(\frac{N_t}{1-N_t}\right)=\ln\frac{\theta(1-\alpha)}{(1-\theta)\,(1-s)}$$

$$\bar{N}=\frac{\theta(1-\alpha)}{\theta(1-\alpha)+(1-\theta)(1-s)}$$

Por tanto, la solución de equilibrio para las horas de trabajo es constante.

La solución para el consumo y la inversión vienen dadas por:

$$C_t = (1-\alpha\beta)Y_t = (1-\alpha\beta)Z_t K_t^{\alpha}\bar{N}^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1} = I_t = S_t = \alpha\beta Y_t = \alpha\beta Z_t K_t^{\alpha}\bar{N}^{1-\alpha}$$

En suma, las sendas óptimas para cada una de las variables viene dada por las siguientes expresiones que expresadas en forma log-lineal.

$$\ln K_{t+1} = \ln\alpha\beta + (1-\alpha)\ln\bar{N} + \alpha\ln K_t + \ln Z_t$$

$$\ln C_t = \ln(1-\alpha\beta) + (1-\alpha)\ln\bar{N} + \alpha\ln K_t + \ln Z_t$$

$$\ln Y_t = (1-\alpha)\ln\bar{N} + \alpha\ln K_t + \ln Z_t$$

$$N_t = \bar{N} = \frac{\theta(1-\alpha)}{\theta(1-\alpha)+(1-\theta)(1-\alpha\beta)}$$

Los estados estacionarios calculados para $Z = 1$ y por tanto $\ln Z = 0$ vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\ln K^* = \frac{\left[\ln\alpha\beta + (1-\alpha)\ln\bar{N}\right]}{1-\alpha} : \ln Y^* = \ln\bar{N} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha\beta$$

$$\ln C^* = \ln\bar{N} + \ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha\beta$$

Series temporales.

Es conveniente desde el punto de vista expositivo expresar las ecuaciones dinámicas en términos de desviaciones logarítmicas con respecto a su estado estacionario.

Definiendo $\ln\hat{K}_t = \log K_t - \log K^*$, obtenemos:

$$\ln K_{t+1} = \ln\alpha\beta + (1-\alpha)\ln n + \alpha\ln K_t + \ln Z_t$$

$$\ln K_{t+1} - \ln K^* = \alpha(\ln K_t - \ln K^*) + \ln\alpha\beta + (1-\alpha)\ln\bar{N} + (\alpha-1)\ln K^* + \ln Z_t$$

$$\ln\hat{K}_{t+1} = \alpha\ln\hat{K}_t + \ln Z_t$$

El consumo y la producción vienen expresadas en términos de sus desviaciones con respecto al estado estacionario a partir de:

$$\ln C_t - \ln C^* = \ln(1-\alpha\beta) + (1-\alpha)\ln \bar{N} + (\alpha \ln K_t - \alpha \ln K^*) + \alpha \ln K^* - \ln C^* + \ln Z_t$$

$$\ln \hat{C}_t = \alpha \ln \hat{K} + \ln Z_t$$

$$\ln \hat{Y}_t = (1-\alpha)\ln \bar{N} + \alpha \ln \hat{K}_t - \ln Y^* + \alpha \ln K_t^* + \ln Z_t$$

$$\ln \hat{Y}_t = \alpha \ln \hat{K}_t + \ln Z_t$$

Sustituyendo la expresión para la perturbación aleatoria y a partir de la ecuación dinámica para el capital podemos observar que las desviaciones de las variables respecto su estado estacionario, exceptuando el nivel de empleo, siguen procesos autorregresivos de orden 2, AR(2).

La ecuación dinámica para el capital viene dada por:

$$\ln \hat{K}_{t+1} = \alpha \ln \hat{K}_t + \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L}$$

$$\ln \hat{K}_{t+1} = (\alpha+\rho)\ln \hat{K}_t - \alpha\rho \ln \hat{K}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\ln \hat{K}_{t+1} = \frac{\varepsilon_t}{1-(\alpha+\rho)L+\alpha\rho L^2} \Rightarrow \ln \hat{K}_{tt+1} = \frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)(1-\alpha L)}$$

Retardando la ecuación dinámica del capital y sustituyéndola en las restantes obtenemos de manera análoga las ecuaciones dinámicas para consumo y producción:

$$\ln \hat{C}_t = \frac{\alpha\varepsilon_{t-1}}{(1-\rho L)(1-\alpha L)} + \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L}$$

$$\ln \hat{C}_t = (\alpha+\rho)\ln \hat{C}_{t-1} - \alpha\rho \ln \hat{C}_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\ln \hat{Y}_t = (\alpha+\rho)\ln \hat{Y}_{t-1} - \alpha\rho \ln \hat{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

Estos resultados son interesantes puesto que como subraya McCallum (1993):

> “this result is the interest because detrended quearterly U.S. data series for (the logs of) consumption and other aggregate quantities are, in fact, well described by second-order autoregressive

processes"

A partir de las ecuaciones dinámicas, solución del sistema, podemos calcular las funciones impulso-respuesta a través de los multiplicadores dinámicos que nos miden el impacto en cada periodo sobre las variables endógenas de un shock transitorio en un momento del tiempo t. Supondremos que $\varepsilon_t > 0$ y $\varepsilon_{t+i} = 0 \ \forall i \neq 0$.

Consideremos por ejemplo la producción y calculemos el efecto de una perturbación tecnológica.

$$\ln \hat{Y}_t = \frac{\varepsilon_t}{(1-\rho L)(1-\alpha L)}$$

$$\ln \hat{Y}_{t+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t+k-i} \right)$$

Para cualquier horizonte temporal $k \geq 0$ y teniendo en cuenta que $k = i$ dado que la perturbación sólo se produce en el momento t:

$$\frac{\partial \ln \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \rho^k \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 : 0 \leq \rho < 1$$

A largo plazo, por tanto el efecto de la perturbación acaba desapareciendo y el output retorna a su valor de estado estacionario inicial.

Únicamente en el caso de que la perturbación siga un paseo aleatorio, $\rho = 1$, el output aumentará de forma permanente.

$$\frac{\partial \ln \hat{Y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha} : \rho = 1$$

Por tanto, la autocorrelación en la producción depende de la persistencia de la perturbación tecnológica.

El hecho de que las tres variables sigan el mismo proceso con coeficientes iguales da lugar a que la respuesta de las mismas ante una perturbación sea la misma, característica que indudablemente no se observa en las series, es más, el modelo genera fluctuaciones de igual magnitud en el consumo y en la inversión, en contradicción con la observación bien contrastada de que la inversión es más volátil que el consumo.

Otra característica no deseable es que el modelo predice un nivel de empleo constante, por tanto, el salario es demasiado procíclico ante un shock de oferta.

En el modelo con precios flexibles y un marco competitivo, el salario real viene dado por la productividad marginal del mismo

$$W_t = \frac{\partial F}{\partial N} = (1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} \bar{N}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{\bar{N}}$$

$$\ln W_t = \ln(1-\alpha) + \ln Y_t - \ln \bar{N} \Rightarrow \ln \hat{W}_t = \ln \hat{Y}_t$$

Dado que $\bar{N}$ es constante, una perturbación de oferta da lugar a que el nuevo equilibrio en el mercado de trabajo sólo refleje una variación en el salario real.

La correlación entre salario real y producción es igual a la unidad, hecho que contradice la observación empírica ya que las variaciones en los salarios reales tienen una baja correlación con la producción real.

$$Corr(W_t, Y_t) = \frac{Cov(W_t, Y_t)}{\sqrt{Var(Y_t)}\sqrt{Var(Y_t)}} = \frac{\frac{1-\alpha}{\bar{N}}}{\frac{1-\alpha}{\bar{N}}} \frac{E(Y_t^2) - E(Y_t)^2}{Var(Y_t)} = 1$$

Dado que todas las variables del modelo siguen un proceso AR(2) podemos calcular fácilmente el coeficiente de autocorrelación entre ellas.

En un modelo AR(2) dado por $y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$ la varianza de la variable viene dada en función de la varianza de la perturbación por la siguiente expresión:

$$\sigma_y^2 = \frac{1+a_2}{(1-a_2)\left[(1+a_2)^2 - a_1^2\right]}\sigma_\varepsilon^2$$

En nuestro caso, las varianzas de todas las variables vienen dadas por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1+\alpha\rho}{(1-\alpha\rho)(1-\rho^2)(1-\alpha^2)}\sigma_\varepsilon^2$$

Con lo que este modelo sencillo predice que las variables fluctúan lo mismo ante una perturbación de oferta, esto es, la correlación entre consumo, inversión y producción son iguales a 1.

Finalmente la varianza de cualquiera de las variables aumenta conforme el shock es más persistente dado que:

$$\sigma_x^2(\rho = 0) = \frac{1}{1-\alpha^2}\sigma_\varepsilon^2 < \sigma_x^2(\rho = 1) \to \infty$$

El shock tecnológico eleva la demanda de trabajo al aumentar la productividad marginal del mismo y por tanto el salario real presente, dando lugar a un aumento en la oferta de trabajo. El incremento del salario corriente (W_t) provoca que el individuo sustituya tiempo de ocio horas de trabajo con lo que la oferta de trabajo aumentaría y disminuiría la demanda de ocio. Sin embargo, el aumento del salario real genera un efecto renta, de signo opuesto al efecto sustitución, que se compensan para dejar inalterado el equilibrio en el nivel de empleo.

En un modelo estático, con preferencias logarítmicas y donde todo el ingreso de la economía doméstica procede de su renta salarial, la cantidad de horas es constante y no depende del salario real. Esto nos indica que los efectos sustitución y el efecto salario son cuantitativamente iguales.

En un modelo dinámico, con la función de utilidad propuesta y tasa de depreciación igual a 1, la elasticidad de sustitución intertemporal entre trabajo y ocio es igual a 1, esto es, una elevación transitoria del salario real eleva la cantidad de horas trabajadas en la misma cuantía sin embargo el efecto renta cancela dicha sustitución.

A partir de las condiciones de optimización para las horas trabajadas y la ecuación de Euler, tenemos que:

$$\frac{1-\theta}{1-N_t} = \lambda_t W_t$$

$$\lambda_t = \alpha\beta E_t\left[\lambda_{t+1} Z_{t+1} N_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1}\right]$$

$$\frac{\ell_{t+1}}{\ell_t} = \frac{1-N_{t+1}}{1-N_t} = \beta E_t\left[\frac{W_t}{W_{t+1}}(1+r_{t+1})\right]$$

Dado que en el equilibrio final las horas trabajadas no cambian:

$$\frac{1-N_{t+1}}{1-N_t} = 1 = \beta E_t \left[\frac{W_t}{W_{t+1}}(1+r_{t+1}) \right]$$

El shock tecnológico no sólo ha cambiado la relación de salarios relativos sino que también ha elevado la productividad marginal del capital, con lo que el tipo de interés real debe aumentar.

Este resultado también puede inferirse a partir de la condición de óptimo para el tipo de interés.

$$1 + r_t = \alpha \left(\frac{Y_t}{K_t} \right)$$

Dado que K_t no cambia pero sí lo hace Y_t, a corto plazo, el tipo de interés aumenta, al aumentar la productividad marginal del capital.

Sin embargo, en el periodo siguiente se produce una reducción relativa del tipo de interés ya que con una tasa de ahorro constante, el mayor ahorro hoy e inversión actual conducen a un stock de capital futuro mayor con lo que a partir de:

$$K_{t+1} = I_t = sY_t : 1 + r_{t+1} = \alpha \left(\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \right)$$

tenemos que el stock de capital futuro ha aumentado y el tipo de interés futuro ha disminuido en relación al del periodo anterior debido a los rendimientos decrecientes en la función de producción.

En el modelo, aunque el tipo de interés suba, el aumento del salario provoca un efecto renta considerable que eleva el nivel de consumo desplazando la curva de oferta de trabajo hacia la izquierda. De esta forma, independientemente de la persistencia de la perturbación, ésta no afecta al número de horas trabajadas.

En el gráfico 3.1. la perturbación de oferta desplaza la función de demanda de trabajo hacia la derecha, dando lugar a una sustitución de horas de ocio por horas de trabajo; sin embargo, la elevación del salario y el efecto renta en el consumo desplazan la curva de oferta de trabajo hacia la izquierda.

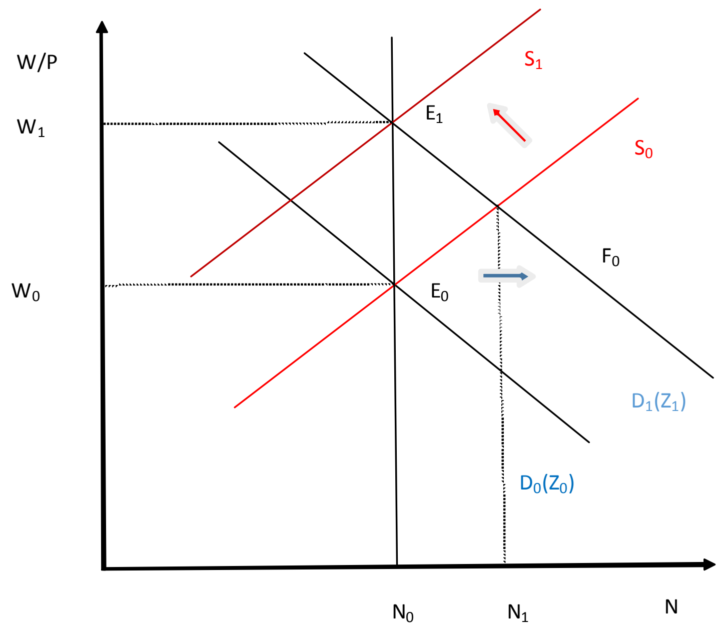

Gráfico 3.1.

El resultado es que la perturbación de oferta no afecta a las horas trabajadas, debido a que efecto sustitución y renta se cancelan.

3.6. El método de los coeficientes indeterminados con función de preferencias aditiva y separable.

En este epígrafe calculamos de manera general a partir del método de coeficientes indeterminados y con una función que ya no es logarítmica en sus argumentos la solución del modelo de Ciclo Real.

Consideramos la siguiente función de utilidad:

$$u(C_t, N_t) = \ln C_t - \frac{1}{1+\varphi} N_t^{1+\varphi} : \varphi > 0$$

$$\epsilon_n^{un} = \frac{\partial u_n}{\partial N_t} \frac{N_t}{u_n} = \frac{\partial (N_t^{\varphi})}{\partial N} \frac{N_t}{u_n} = \varphi \frac{N_t^{\varphi-1} N_t}{N_t^{\varphi}} = \varphi$$

En esta función de utilidad, el parámetro φ nos mide la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal en el trabajo. La expresion general para esta expresión está demostrada en el epígrafe 3.2.

$$\epsilon_n = -\frac{d\left(\frac{N_t}{N_{t+1}}\right)}{d\left(\frac{u_n(N_t)}{u_n(N_{t+1})}\right)} \frac{\frac{u_n(N_t)}{u_n(N_{t+1})}}{\frac{N_t}{N_{t+1}}} = \left(\frac{N_t}{N_{t+1}}\right)^{\varphi-1} \left[\varphi \left(\frac{N_t}{N_{t+1}}\right)^{\varphi-1}\right]^{-1} = \frac{1}{\varphi}$$

En el caso que $\varphi \to 0$, la función de utilidad se hace lineal en horas trabajadas. Conforme φ aumenta, aumenta la desutilidad que le reporta al individuo ofrecer más horas de trabajo y por tanto disminuye la elasticidad de sustitución intertemporal. Al estar la función acotada superiormente ya que la variable $N_t \in [0, 1]$,cuando $\varphi \to \infty$, la función de utilidad sólo depende del consumo y estaríamos en presencia de un modelo con oferta fija de trabajo.

La función de producción es la habitual Cobb-Douglas, dada por:

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Y el proceso estocástico que sigue la perturbación de oferta:

$$Z_t = (1-\rho)Z + \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dado que sólo tenemos un activo $A_t = K_t$ y $Y_t = W_t N_t + \left(\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta\right) K_t$ por tanto las restricciones desde el punto de vista de la economía doméstica y desde el punto de vista de la restricción de recursos son la misma:

$$A_{t+1} = W_t N_t + (1+r_t)A_t - C_t \Rightarrow K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t - C_t$$

Las condiciones de optimización del problema junto a la restricción de recursos vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$W_t C_t^{-1} = N_t^{\varphi} \qquad ((3.15))$$

$$C_t^{-1} = \beta E_t \left[C_{t+1}^{-1}(1+r_{t+1})\right] \qquad ((3.16))$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t - C_t \qquad ((3.17))$$

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \qquad ((3.18))$$

$$r_{t+1} = \alpha \exp\{Z_{t+1}\} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} - \delta = \alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta \qquad ((3.19))$$

$$W_t = (1-\alpha)\exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} \qquad ((3.20))$$

Dados los precios, el sistema no lineal anterior nos permitiría determinar las ecuaciones dinámicas de las variables endógenas del mismo. El parámetro φ es la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real, manteniendo constante el nivel de consumo, esto es, la denominada elasticidad de Frisch. A partir de la condición de primer orden para el consumo $W_t C_t^{-1} = N_t^{\varphi}$.

$$\epsilon_w^N = \frac{d \ln N_t}{d \ln W_t} = \frac{1}{\varphi}$$

Cálculo del estado estacionario.

En este modelo hemos supuesto que la tecnología no crece a una tasa determinista por lo que las variables en el estado estacionario son constantes y vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\beta(1+r) = 1 : \beta R = 1$$

$$\frac{Y}{K} = \frac{r+\delta}{\alpha}$$

$$\frac{C}{Y} = 1 - \frac{\alpha\delta}{r+\delta}$$

$$\frac{C}{K} = \frac{Y}{K} - \delta = \frac{r+\delta}{\alpha} - \delta = \frac{r+(1-\alpha)\delta}{\alpha}$$

$$W = (1-\alpha)\frac{Y}{N}$$

$$\frac{Y}{N} = \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{Y}{K} = \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{W}{C} = N^{\varphi} \Rightarrow (1-\alpha)\frac{Y}{C} = N^{1+\varphi}$$

Resolución del sistema.

El sistema no lineal anterior no tiene solución cerrada, con lo que procedemos a log-linealizarlo en un entorno de su estado estacionario, donde la notación en letras minúscula corresponde a la desviación en logaritmos de cada variable con respecto a su estado estacionario y las variables sin subíndice temporal indica su valor de estado estacionario. Además hemos definido $R_{t+1} = 1 + r_{t+1} = 1 + F_{K(t+1)} - \delta$ y $\hat{r}_t$ es la desviación con respecto a su valor de largo plazo.

La ecuación (3.15) log-linealizada es:

$$w_t - c_t = \varphi n_t$$

La ecuación de Euler (3.16):

$$-c_t = E_t \left[-c_{t+1} + \hat{R}_{t+1} \right]$$

La restricción de recursos (3.17):

$$\frac{K}{Y} k_{t+1} = \frac{K}{Y}(1-\delta)k_t + y_t - \frac{C}{Y} c_t$$

La función de producción (3.18):

$$y_t = z_t + \alpha k_t + (1-\alpha) n_t$$

El tipo de interés real, definido a partir del rendimiento bruto del capital.

$$\hat{R}_{t+1} = \frac{r+\delta}{1+r}(y_{t+1} - k_{t+1})$$

$$\hat{R}_{t+1} = \frac{r}{1+r} \hat{r}_{t+1}$$

El salario real en (3.20):

$$w_t = y_t - n_t$$

Sustituyendo las expresiones para los precios de los factores el sistema queda reducido a cuatro variables endógenas.

$$y_t = (1+\varphi) n_t + c_t$$

$$\frac{r+\delta}{1+r} \left[E_t y_{t+1} - k_{t+1} \right] + c_t - E_t c_{t+1} = 0$$

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + \frac{r+\delta}{\alpha} y_t - \frac{r + (1-\alpha)\delta}{\alpha} c_t$$

$$y_t = (1-\alpha) n_t + z_t + \alpha k_t$$

Sustituyendo la función de producción y el nivel de empleo en las dos ecuaciones dinámicas, obtenemos el sistema lineal a resolver expresado en términos de las dos variables endógenas k_{t+1} y c_t.

La ecuación de Euler viene modificada de la siguiente manera:

$$(\alpha+\varphi)n_t = z_t + \alpha k_t - c_t \Rightarrow E_t n_{t+1} = \frac{E_t z_{t+1} + \alpha k_{t+1} - E_t c_{t+1}}{\alpha+\varphi}$$

$$\frac{r+\delta}{1+r}\left[E_t\left[(1-\alpha)n_{t+1} + z_{t+1} + \alpha k_{t+1}\right] - k_{t+1}\right] + c_t - E_t c_{t+1} = 0$$

$$-\frac{r+\delta}{1+r}(1-\alpha)k_{t+1} + \frac{r+\delta}{1+r}(1-\alpha)\left[\frac{E_t z_{t+1} + \alpha k_{t+1} - E_t c_{t+1}}{\alpha+\varphi}\right] +$$

$$+\frac{r+\delta}{1+r}E_t z_{t+1} + c_t - E_t c_{t+1} = 0$$

$$\frac{r+\delta}{1+r}\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\varphi k_{t+1} + \left[1 + \frac{r+\delta}{1+r}\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\right]E_t c_{t+1} - c_t = \frac{r+\delta}{1+r}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}E_t z_{t+1} \qquad ((3.21))$$

Mientras que la restricción de recursos tiene por expresión:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \frac{r+\delta}{\alpha}\left[(1-\alpha)\left(\frac{z_t + \alpha k_t - c_t}{\alpha+\varphi}\right) + z_t + \alpha k_t\right] - \left(\frac{r+\delta}{\alpha} - \delta\right)c_t$$

$$k_{t+1} = \left[(1-\delta) + (r+\delta)\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}\right]k_t + \frac{r+\delta}{\alpha}\left(\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}\right)z_t - \left[\frac{r+\delta}{\alpha}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi} - \delta\right]c_t \qquad ((3.22))$$

Con el fin de simplificar de alguna manera los coeficientes en la identificación, denotamos como:

$$\psi = \frac{r+\delta}{1+r}\frac{1}{\alpha+\varphi} : a_1 = \frac{r+\delta}{\alpha}\frac{1+\varphi}{\alpha+\varphi}$$

Y por tanto nuestras dos ecuaciones (3.21) y (3.22) quedan:

$$\psi\varphi(1-\alpha)k_{t+1} + (1 + (1-\alpha)\psi)E_t c_{t+1} - c_t = \psi\,(1+\varphi)\,\rho z_t \qquad ((3.23))$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta + \alpha a_1)\,k_t + a_1 z_t - (a_1 - \delta)c_t \qquad ((3.24))$$

De nuevo aplicamos el método de los coeficientes indeterminados y nuestra conjetura para las dos variables en las que hemos reducido el modelo es.

$$c_t = \eta_{ck}k_t + \eta_{cz}z_t : k_{t+1} = \eta_{kk}k_t + \eta_{kz}z_t$$

Sustituyendo éstas en (3.21) y (3.22) procedemos a identificar las elasticidades o coeficientes indeterminados $\eta_{ck}, \eta_{cz}, \eta_{kk}$ y η_{kz}:

$$\psi\varphi(1-\alpha)\left(\eta_{kk}k_t+\eta_{kz}z_t\right)+\left(1+(1-\alpha)\psi\right)\left[\eta_{ck}\left(\eta_{kk}k_t+\eta_{kz}z_t\right)+\eta_{cz}\rho z_t\right]$$

$$-\left(\eta_{ck}k_t+\eta_{cz}z_t\right)=\psi\left(1+\varphi\right)\rho z_t$$

$$\eta_{kk}k_t+\eta_{kz}z_t=\left(1-\delta+\alpha a_1\right)k_t+a_1z_t-\left(a_1-\delta\right)\left(\eta_{ck}k_t+\eta_{cz}z_t\right)$$

a partir (3.23) obtenemos:

$$\psi\varphi(1-\alpha)\eta_{kk}+(1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck}\eta_{kk}-\eta_{ck}=0 \tag{(3.25)}$$

$$\psi\varphi(1-\alpha)\eta_{kz}+(1+(1-\alpha)\psi)\left(\eta_{ck}\eta_{kz}+\rho\eta_{cz}\right)-\eta_{cz}=\psi\left(1+\varphi\right)\rho \tag{(3.26)}$$

y a partir de (3.24):

$$\eta_{kk}=(1-\delta+\alpha a_1)-(a_1-\delta)\eta_{ck} \tag{(3.27)}$$

$$\eta_{kz}=a_1-(a_1-\delta)\eta_{cz} \tag{(3.28)}$$

Sustituyendo (3.27) en (3.25) obtenemos la ecuación de segundo grado para η_{ck}.

$$\psi\varphi(1-\alpha)\left[(1-\delta+\alpha a_1)-(a_1-\delta)\eta_{ck}\right]+$$

$$(1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck}\left[(1-\delta+\alpha a_1)-(a_1-\delta)\eta_{ck}\right]-\eta_{ck}=0$$

$$-(a_1-\delta)(1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck}^2+\left\{\left(1+(1-\alpha)\psi\right)\left(1-\delta+\alpha a_1\right)-\psi\varphi(1-\alpha)(a_1-\delta)-1\right\}\eta_{ck}$$

$$+\psi\varphi(1-\alpha)\left(1-\delta+\alpha a_1\right)=0 \tag{(3.29)}$$

Podemos observar que η_{ck} es independiente de la perturbación tecnológica. Consideremos en primer lugar dos valores extremos de φ y ver cómo evoluciona η_{ck}. Para $\varphi=0$,la elasticidad de sustitución intertemporal en el ocio es alta y la solución para viene dada por la siguiente expresión:

$$\eta_{ck\rceil\varphi=0}=\frac{1-\left(1+(1-\alpha)\psi\right)\left(1-\delta+\alpha a_1\right)}{-(a_1-\delta)(1+(1-\alpha)\psi)}>0$$

ya que además de $(1+(1-\alpha)\psi)>1$ se verifica

$$a_1-\delta=\frac{r+\delta}{\alpha}\frac{1}{\alpha}-\delta=\frac{r+\delta-\alpha^2\delta}{\alpha^2}=\frac{r+\delta(1-\alpha^2)}{\alpha^2}>0$$

$$1-\delta+\alpha a_1=1+\frac{r+\delta}{\alpha}-\delta=1+\frac{C}{K}>1$$

En el caso opuesto, $\varphi\to\infty$, para el cual la elasticidad de sustitución intertemporal en las horas de ocio es baja y en el límite es igual a 0. La ecuación de segundo grado para η_{ck} se aproxima a la ecuación lineal

$$\{(1+(1-\alpha)\psi)(1-\delta+\alpha a_1)-\psi\varphi(1-\alpha)(a_1-\delta)-1\}\,\eta_{ck}+\psi\varphi(1-\alpha)(1-\delta+\alpha a_1)=0$$

y la solución para η_{ck} tiene la expresión

$$\eta_{ck\rceil\varphi=\infty}=\lim_{\varphi\to\infty}\frac{-\psi\varphi(1-\alpha)(1-\delta+\alpha a_1)}{(1+(1-\alpha)\psi)(1-\delta+\alpha a_1)-\psi\varphi(1-\alpha)(a_1-\delta)-1}=?$$

Dicho límite es difícil de interpretar puesto que cuando $\varphi\to\infty$, el parámetro $\psi\to 0$.

Calibración.

Este inconveniente nos conduce a considerar unos determinados valores para los parámetros del modelo de tal forma que podamos hacernos una idea de los valores que toma la elasticidad del consumo con respecto al capital para distintos valores de la elasticidad de sustitución intertemporal en el ocio.

Los valores de los parámetros escogidos, estándar en la literatura de Ciclo Real son:

$$r=0.015:\delta=0.025:\alpha=0.30$$

que dan los los siguientes valores para los grandes ratios

$$\frac{C}{Y}=0.75:\frac{K}{Y}=10.17$$

Con estos datos podemos calcular cuánto responde el consumo al stock de capital para determinados valores del parámetro φ.

Tabla 3.1					
φ	0	0.2	1	5	100
η_{ck}	0.4595	0.5076	0.5610	0.5929	0.5064

Conforme aumenta el parámetro φ, η_{ck} también lo hace y por tanto su relación es directa.

Obtenida la solución $\eta_{ck} > 0$, podemos calcular el resto de elasticidades. Para η_{cz} la solución tiene la siguiente expresión.

$$\psi\varphi(1-\alpha)\left(a_1 - (a_1 - \delta)\eta_{cz}\right) + (1+(1-\alpha)\psi)\left[\left(\eta_{ck}\left(a_1 - (a_1-\delta)\eta_{cz}\right) + \rho\eta_{cz}\right)\right] - \eta_{cz} = \psi\left(1+\varphi\right)\rho$$

$$\eta_{cz} = \frac{-\psi\varphi(1-\alpha)a_1 - a_1(1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck} + \psi\left(1+\varphi\right)\rho}{-\psi\varphi(1-\alpha)(a_1-\delta) - (1+(1-\alpha)\psi)\left[(a_1-\delta)\eta_{ck} - \rho\right] - 1}$$

$$\eta_{cz} = \frac{a_1\left[\psi\varphi(1-\alpha) + (1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck}\right] - \psi\left(1+\varphi\right)\rho}{(a_1-\delta)\left[\psi\varphi(1-\alpha) + (1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck}\right] - (1+(1-\alpha)\psi)\rho + 1}$$

Dados los valores obtenidos para las combinaciones anteriores de η_{ck} y φ procedemos a calcular los posibles valores de la elasticidad del consumo con respecto a la tecnología, teniendo en cuenta que ahora η_{cz} depende del parámetro de persistencia del shock tecnológico ρ. En la tabla 3.1 siguiente hemos calculado los distintos valores que puede tomar η_{cz}, en función de algunos valores de persistencia de la perturbación que se encuentran en la columna de la izquierda y de los valores seleccionados para φ que se encuentran en la primera fila.

Tabla 3.2					
			η_{cz}		
ρ			φ		
	0	0.2	1	5	100
0	0.1843	0.1506	0.1038	0.0874	0.0678
0.5	0.2370	0.2014	0.1423	0.1243	0.0931
0.95	0.5681	0.5355	0.4353	0.4173	0.3154
1	0.7740	0.7573	0.6778	0.6736	0.5526

Como podemos observar, el valor de η_{cz} aumenta con la persistencia de la perturbación para cualquier valor de φ y disminuye conforme aumenta el parámetro φ para cualquier valor dado de la perturbación. Expresado analíticamente, la relación entre la elasticidad y los dos parámetros es:

$$\frac{\partial \eta_{cz}}{\partial \varphi} < 0 : \frac{\partial \eta_{cz}}{\partial \rho} > 0$$

En cualquier caso sí es posible calcular analíticamente la expresión para η_{cz} en el caso en el que $\varphi = 0$, y por tanto, las otras dos restantes, $\eta_{kk\rceil\varphi=0}$ y $\eta_{kz\rceil\varphi=0}$.

$$\eta_{cz\rceil\varphi=0} = \frac{a_1(1+(1-\alpha)\psi)\eta_{ck} - \psi\rho}{(1+(1-\alpha)\psi)\left\{(1-\delta+\alpha a_1) - \rho\right\}}$$

$$\eta_{kk\rceil\varphi=0} = \frac{1}{1+(1-\alpha)\psi} : \eta_{kz\rceil\varphi=0} = a_1 - (a_1 - \delta)\eta_{cz\rceil\varphi=0}$$

La respuesta de $\eta_{cz\rceil\varphi=0}$ y de $\eta_{kz\rceil\varphi=0}$ ante un shock tecnológico depende de su persistencia, mientras que $\eta_{kk\rceil\varphi=0}$ es independiente de la misma.

Como subcaso particular de éste podemos derivar las soluciones del modelo básico de ciclo real del epígrafe 3.5. con solo hacer que la tasa de depreciación tome el valor 1. En este caso concreto las elasticidades tienen soluciones simples:

$$\eta_{ck\rceil\varphi=0}^{\delta=1} = \alpha : \eta_{cz\rceil\varphi=0}^{\delta=1} = 1 : \eta_{kk\rceil\varphi=0}^{\delta=1} = \alpha : \eta_{kz\rceil\varphi=0}^{\delta=1} = 1$$

Y la solución para las variables vendría dada por:

$$w_t = y_t = k_{t+1} = c_t = \alpha k_t + z_t : n_t = 0$$

que son los resultados que obtuvimos en el modelo básico del epígrafe 3.5.

Soluciones para el resto de las variables.

Dadas las elasticidades que son funciones de los parámetros del modelo, inmediatamente podemos calcular el resto de las expresiones de las variables del modelo:

$$c_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t : k_{t+1} = \eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t$$

Sustituyendo éstas en las expresiones para las horas trabajadas, el output y el salario obtenemos:

$$n_t = \frac{1}{\alpha + \varphi} [\alpha - \eta_{ck}] k_t + \frac{1}{\alpha + \varphi} [1 - \eta_{cz}] z_t$$

$$y_t = \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha + \varphi} (\alpha - \eta_{ck}) \right] k_t + \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha + \varphi} (1 - \eta_{cz}) \right] z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = \alpha \left[1 - \frac{1}{\alpha + \varphi} (\alpha - \eta_{ck}) \right] k_t + \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha + \varphi} (1 - \eta_{cz}) \right] z_t$$

$$\hat{r}_{t+1} = \frac{r + \delta}{r} (z_{t+1} + (1-\alpha) n_t + (\alpha - 1) k_{t+1})$$

Desde el punto de vista de serie temporal las variables siguen procesos ARMA (2,1).

Efectos de una perturbación tecnológica.

De nuevo, volvemos a diferenciar los efectos en los casos donde la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo es alta y baja.

Para $\varphi = 0$, las soluciones anteriores para nuestras variables vienen dadas por:

$$c_t = \frac{1 - (1 + (1-\alpha)\psi)(1 - \delta + \alpha a_1)}{-(a_1 - \delta)(1 + (1-\alpha)\psi)} k_t + \frac{a_1 (1 + (1-\alpha)\psi) \eta_{ck} - \psi \rho}{(1 + (1-\alpha)\psi) \{(1 - \delta + \alpha a_1) - \rho\}} z_t$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1 + (1-\alpha)\psi} k_t + \eta_{kz\rceil \varphi=0} z_t$$

$$n_t = \frac{1}{\alpha} \left[\alpha - \eta_{ck\rceil \varphi=0} \right] k_t + \frac{1}{\alpha} \left[1 - \eta_{cz\rceil \varphi=0} \right] z_t$$

$$y_t = \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\alpha - \eta_{ck\rceil \varphi=0} \right) \right] k_t + \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} (1 - \eta_{cz\rceil \varphi=0}) \right] z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = \alpha\left[1 - \frac{1}{\alpha+\varphi}\left(\alpha - \eta_{ck\rceil\varphi=0}\right)\right]k_t + \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz\varphi=0})\right]z_t$$

Como podemos observar en la tabla, η_{cz} alcanza los valores máximos para cualquier valor del parámetro de persistencia de la perturbación si $\varphi = 0$. En dicho caso, la elasticidad de sustitución intertemporal de trabajo es muy alta y los efectos de una perturbación tecnológica son máximos. Aunque η_{cz} vaya restando en las expresiones anteriores, lo que indica que el consumo cancela parcialmente los efectos del shock tecnológico, las expresiones para horas trabajadas, output y salarios también dependen inversamente de φ y éste como hemos visto depende directamente de η_{cz}.

A corto plazo, el shock tecnológico eleva las variables en la siguiente cuantía:

$$n_t = \frac{1}{\alpha+\varphi}\left[\alpha - \eta_{ck}\right]k_t + \frac{1}{\alpha+\varphi}\left[1 - \eta_{cz}\right]z_t$$

$$y_t = \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\left(\alpha - \eta_{ck}\right)\right]k_t + \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz})\right]z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = \alpha\left[1 - \frac{1}{\alpha+\varphi}\left(\alpha - \eta_{ck}\right)\right]k_t + \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz})\right]z_t$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz}) : \frac{\partial n_t}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz})$$

$$\frac{\partial w_t}{\partial \varepsilon_t} = \alpha\left[1 - \frac{\alpha}{\alpha+\varphi}(1 - \eta_{cz})\right] : \frac{\partial c_t}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{cz} : \frac{\partial k_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{kz}$$

Si comparamos el efecto a corto plazo tomando como referencia $\rho = 0$ con dos valores distintos de φ, por ejemplo $\varphi = 0$ y $\varphi = 5$ obtenemos el siguiente resultado para la producción que tiene exactamente la misma interpretación para el salario y para las horas trabajadas:

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}_{|\varphi=0} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1 - 0.1843) > \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}_{|\varphi=5} 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+5}(1 - 0.0874)$$

En suma, a corto plazo, e independientemente de la persistencia de la perturbación, los efectos son mayores cuanto menor es el parámetro φ.

Si tomamos ahora un valor dado para φ y deseamos calcular el efecto a corto plazo sobre las variables anteriores pero para distintos valores en la persistencia de la perturbación, el resultado que obtenemos es que mientras más persistente sea dicha perturbación menor será el efecto sobre la variable, ya que como hemos visto η_{cz} aumenta con ρ. Por ejemplo, para $\varphi = 0$ y $\rho = 0$ y $\rho = 1$.

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}_{|\rho=0} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1 - 0.1843) > \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}_{|\rho=1} 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}(1 - 0.7740)$$

Este hecho se explica a partir del hecho de que en el caso de una perturbación transitoria el efecto sustitución entre ocio y trabajo es muy alto y el efecto renta es pequeño. Al contrario sucede cuando la perturbación de oferta es muy persistente.

En las tablas 3.3 y 3.4 ilustramos los cambios a corto plazo en la producción y en las horas trabajadas ante una perturbación tecnológica donde hemos denotado como η_{yz} y η_{nz} respectivamente, las elasticidades respectivas.

Tabla 3.3					
			η_{yz}		
ρ			φ		
	0	0.2	1	5	100
0	2.90	2.19	1.48	1.12	1
0.5	2.78	2.12	1.46	1.11	1
0.95	2.00	1.65	1.30	1.07	1
1	1.52	1.34	1.17	1.04	1

Tabla 3.4					
			η_{nz}		
ρ			φ		
	0	0.2	1	5	100
0	2.72	1.70	0.69	0.17	0.01
0.5	2.54	1.60	0.66	0.16	0.009
0.95	1.44	0.93	0.43	0.11	0.007
1	0.75	0.48	0.25	0.06	0.004

La diferencia entre los valores correspondientes a la misma posición en cada una de las tablas nos da la variación en el salario real a corto plazo ante una perturbación tecnológica.

Para $\varphi \to \infty$ es dificil de interpretar el límite de η_{ck} pero con la tabla calculada para dicha elasticidad podemos ver cuales son los efectos para $\varphi = 100$ y tomando como valor de persistencia $\rho = 1$.

$$n_t = \frac{1}{100.3}\left[0.3 - 0.5526\right]k_t + \frac{1}{100.3}\left[1 - 0.5526\right]z_t$$

$$n_t = -2.5184 \times 10^{-3}k_t + 4.4606 \times 10^{-3}z_t \simeq 0$$

$$y_t = \left[0.3 - \frac{0.17}{100.3}\right]k_t + \left[1 + \frac{0.31}{100.3}\right]z_t = 0.30k_t + z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = 0.3\left[1 + \frac{0.25}{100.3}\right]k_t + \left[1 - \frac{0.13}{100.3}\right]z_t = 0.30k_t + z_t$$

Los resultados se aproximan a las siguientes expresiones, que son prácticamente las mismas que las del modelo con oferta de trabajo fija y elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo igual a la unidad. Curiosamente las soluciones son las mismas que en el caso de función de utilidad logarítmica y tasa de depreciación del stock de capital, $\delta = 1$.

$$n_t = 0 : y_t = \alpha k_t + z_t : w_t = \alpha k_t + z_t$$

Los resultados anteriores no nos permiten aún calcular los efectos de las perturbaciones tecnológicas sobre k_{t+1} ya que la solución de éste depende de η_{kk} y de η_{kz}.

Por tanto, procedemos a calcular el valor de estas elasticidadades, η_{kk} y η_{kz}. Sus expresiones vienen dadas por las ecuaciones (3.27) y (3.28):

$$\eta_{kk} = (1 - \delta + \alpha a_1) - (a_1 - \delta)\eta_{ck}$$

$$\eta_{kz} = a_1 - (a_1 - \delta)\eta_{cz}$$

Y con los valores elegidos para la calibración, vienen expresadas en función de φ como:

$$\eta_{kk} = \left(0.975 + 1.182\,3 \times 10^{-2}\frac{1+\varphi}{0.3+\varphi}\right) - \left(3.940\,9 \times 10^{-2}\frac{1+\varphi}{0.3+\varphi} - 0.025\right)\eta_{ck}$$

$$\eta_{kz} = 3.940\,9 \times 10^{-2}\frac{1+\varphi}{0.3+\varphi} - \left(3.940\,9 \times 10^{-2}\frac{1+\varphi}{0.3+\varphi} - 0.025\right)\eta_{cz}$$

En las dos tablas siguientes vienen reflejados los valores para η_{kk} y para $\eta_{kz.}$

Tabla 3.5					
φ	0	0.2	1	5	100
η_{kk}	0.9156	0.9212	0.9355	0.9456	0.9599

Tabla 3.6					
			η_{kz}		
ρ			φ		
	0	0.2	1	5	100
0	0.1117	0.084	0.0541	0.0429	0.0387
0.5	0.1061	0.080	0.0555	0.0421	0.0381
0.95	0.071	0.057	0.0541	0.0364	0.0350
1	0.049	0.042	0.0365	0.0314	0.0316

El mayor efecto a corto plazo sobre k_{t+1} se produce para valores pequeños de la persistencia de la perturbación como del parámetro φ.

Por otra parte, es importante observar que el modelo es estable, puesto que todos los valores calibrados para η_{kk} son inferiores a la unidad.

Efectos de cambios en k_t.

De igual manera que hemos procedido con los efectos de las perturbaciones tecnológicas, podemos preguntarnos cómo afectan los cambios en el stock de capital a las variables del modelo, dado un nivel de tecnología.

Consideremos de nuevo los dos casos extremos, $\varphi = 0$ y $\varphi = 100$.

En el primer caso de una alta sustituibilidad intertemporal del trabajo, la solución para k_{t+1} y considerando además $\rho = 0$ viene dada por:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1 + (1-\alpha)\psi} k_t + \eta_{kz]\varphi=0} z_t \Rightarrow k_{t+1} = 0.9156 k_t + 0.1117 z_t$$

$$n_t = -0.5317 k_t + 2.72 z_t$$

$$y_t = -0.0723 k_t + 2.90 z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = 0.4594 k_t + 0.18 z_t$$

$$c_t = 0.4595 k_t + 0.1843 z_t$$

En el caso de una perturbación tecnológica con nula persistencia y alta sustituibilidad intertemporal en el trabajo, los individuos reaccionan aumentando su consumo y su stock de capital fundamentalmente. En unidades monetarias, los órdenes de magnitud son los siguientes:

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{\Delta K_t} = 0.9156 : \frac{\Delta Y_t}{\Delta K_t} = -0.0723 * \frac{Y}{K} = -0.0071$$

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{\Delta K_t} = (1-\delta)\frac{\Delta K_t}{\Delta K_t} + \frac{\Delta Y_t}{\Delta K_t} - \frac{\Delta C_t}{\Delta K_t} \Rightarrow \frac{\Delta C_t}{\Delta K_t} = 0.052$$

Para una baja sustituibilidad intertemporal y el mismo valor para el parámetro de persistencia, las soluciones vienen dadas por:

$$n_t = 0 : y_t = \alpha k_t + z_t : w_t = \alpha k_t + z_t$$

$$c_t = 0.5064 k_t + 0.0678 z_t : k_{t+1} = 0.9599 k_t + 0.0387 z_t$$

Un aumento en el stock de capital de un 1 %, elevaría la producción y los salarios un α % mientras que el stock de capital futuro aumenta un 0.96%.

Podemos ver el orden de magnitud de estos resultados en términos de unidades monetarias a partir de la restricción de recursos en términos de variaciones absolutas.

Con las elasticidades calculadas, tenemos que:

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{\Delta K_t} = 0.9599 : \frac{\Delta Y_t}{\Delta K_t} = 0.3 \frac{Y}{K} = 0.04$$

Por tanto:

$$\frac{\Delta C_t}{\Delta K_t} = 1 - 0.025 - 0.9599 + 0.04 = 0.055$$

Realmente, un aumento en k_t cuando la perturbación tecnológica es transitoria, no genera diferencias significativas en los efectos sobre las variables con lo que podríamos concluir que un aumento en el stock de capital hoy, eleva de forma significativa el el stock de capital futuro y el consumo casi en la misma cuantía en ambos casos. Cuando la sustituibilidad es alta los individuos desean ofrecer menos horas de trabajo ante un stock de capital inicial más elevado y no las pueden modificar cuando la sustituibilidad es baja. El impacto por tanto en la producción es negativo en el primer caso y pequeño aunque positivo en el segundo caso.

Estos resultados están en total consonancia con aquellos que se derivan de las teorías modernas del consumo como la Hipótesis de la Renta Permanente o la Hipótesis del Ciclo Vital. Una elevación en el volumen de activos no afecta prácticamente al consumo presente sino que el deseo de los individuos de mantener un nivel de consumo más o menos homogéneo a lo largo del tiempo implica que el incremento del capital se iría consumiendo a lo largo de la vida de los individuos en ausencia de otros motivos por los que dejar capital al final de su vida.

Finalmente, podemos analizar el caso en el que la perturbación tecnológica sea altamente persistente.

De nuevo volvemos a fijarnos en los casos en los que $\varphi = 0$ y $\varphi = 100$ para un parámetro de persistencia $\rho = 1$.

En el primero de los casos, las soluciones son:

$$c_t = 0.4595k_t + 0.7740z_t : k_{t+1} = 0.9156k_t + 0.049z_t$$

Sustituyendo éstas en las expresiones para las horas trabajadas, el output y el salario obtenemos:

$$n_t = -0.53k_t + 0.75z_t$$

$$y_t = 0.19k_t + 1.52z_t$$

$$w_t = y_t - n_t = 0.72k_t + 0.77z_t$$

En el caso $\varphi = 100$ los resultados son:

$$c_t = 0.5064k_t + 0.5526z_t : k_{t+1} = 0.9156k_t + 0.049z_t$$

$$n_t = 0 : y_t = 0.3k_t + z_t : w_t = 0.3k_t + z_t$$

La estructura de series temporal.

Dada la estructura del proceso de perturbación, un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1), las variables del modelo vienen representadas en general por procesos ARMA(2,1), excepto el stock de capital que tiene una representación AR(2).

Las ecuaciones dinámica vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$k_{t+1} = \frac{\eta_{kz}}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_t$$

$$c_t = \eta_{ck}\frac{\eta_{kz}}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_{t-1} + \frac{\eta_{cz}}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

$$n_t = \frac{\eta_{kz}}{\alpha+\varphi}\frac{\alpha-\eta_{ck}}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{\alpha+\varphi}\frac{[1-\eta_{cz}]}{1-\rho L}z_t$$

$$y_t = \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(\alpha-\eta_{ck})\right]\frac{\eta_{kz}}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_{t-1} + \frac{\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(1-\eta_{cz})\right]}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

$$w_t = y_t - n_t = \frac{\alpha\left[1-\frac{1}{\alpha+\varphi}(\alpha-\eta_{ck})\right]\eta_{kz}}{(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)}\varepsilon_{t-1} + \left[1-\frac{\alpha}{\alpha+\varphi}(1-\eta_{cz})\right]\frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

Operando en dichas expresiones:

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)k_{t+1} = \eta_{kz}\varepsilon_t$$

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)c_t = (\eta_{ck}\eta_{kz} - \eta_{kk}\eta_{cz})\varepsilon_{t-1} + \eta_{cz}\varepsilon_t$$

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)n_t = \frac{1}{\alpha+\varphi}(1-\eta_{cz})\varepsilon_t + \frac{1}{\alpha+\varphi}\left[\eta_{kz}\left(\alpha-\eta_{ck}\right) - \eta_{kk}(1-\eta_{cz})\right]\varepsilon_{t-1}$$

$$(1-\eta_{kk}L)(1-\rho L)y_t = \left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(1-\eta_{cz})\right]\varepsilon_t + \qquad ((3.30))$$

$$+\left\{\eta_{kz}\left[\alpha+\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}\left(\alpha-\eta_{ck}\right)\right] - \eta_{kk}\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha+\varphi}(1-\eta_{cz})\right]\right\}\varepsilon_{t-1}$$

La función impulso respuesta de la producción ante una perturbación que se produce en t, esto es, como habitualmente $\varepsilon_{t+s} = 0\ \forall s \neq 0$ puede deducirse a partir de la solución de la ecuación dinámica para y_t, donde β_i son los coeficientes de la ecuación (3.30).

$$y_{t+s} = \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t+s} + (\beta_2 - \beta_1\eta_{kk})\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^{i}\rho^{j-i}L^{j}\right)\varepsilon_{t-1+s}$$

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \beta_1\sum_{j=0}^{s}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-j} + (\beta_2-\beta_1\eta_{kk})\sum_{j=0}^{s-1}\eta_{kk}^{j}\rho^{s-1-j} =$$

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \beta_1\frac{\rho^{s+1}-\eta_{kk}^{s+1}}{\rho-\eta_{kk}} + (\beta_2-\beta_1\eta_{kk})\frac{\rho^{s}-\eta_{kk}^{s}}{\rho-\eta_{kk}}$$

A largo plazo, obtenemos que la dinámica de la producción depende de la persistencia de la perturbación.

$$\underset{s\to\infty}{lím}\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} \to 0 : 0 < \rho < 1$$

$$\underset{s\to\infty}{lím}\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} \to \beta_1 + \frac{\beta_2}{1-\eta_{kk}} > 1 : \rho = 1$$

Dado que η_{cz} es inferior a la unidad, el cociente $\frac{\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}}$ está alrededor de la unidad y $\alpha - \eta_{ck} < 0$, podemos asegurar que ante una perturbación muy persistente, el output aumenta más de lo que lo hace la perturbación.

Cálculo de correlaciones.

A partir de las soluciones del modelo podemos calcular las correlaciones entre las variables del mismo a distintos retardos.

Las expresiones concretas para los procesos de serie temporal que siguen las variables vienen dadas por:

$$Var(z_t) = \frac{1}{1-\rho^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov(k_{t+1}, k_t) = \frac{\eta_{kz}^2}{1-\eta_{kk}\rho}\frac{\eta_{kk}+\rho}{1-\eta_{kk}^2}Var(z_t)$$

$$Cov(k_t, z_t) = \frac{\eta_{kz}\rho}{1-\eta_{kk}\rho}Var(z_t)$$

Si denotamos como $x = c_t$, y_t n_t y w_t, para cualquiera de ellas, sus varianzas y covarianzas vienen dadas por:

$$Var(x_t) = \eta_{xk}^2 Var(k_t) + \eta_{xz}^2 Var(z_t) + 2\eta_{xk}\eta_{xz}Cov(k_t, z_t)$$

$$Cov(x_t, k_t) = \eta_{xk}Var(z_t) + \eta_{xk}Cov(k_t, z_t)$$

mientras que las covarianzas entre consumo, horas trabajadas y salario real con respecto a la producción, tienen por expresiones:

$$Cov(x_t, y_t) = \eta_{xk}\eta_{yk}Var(k_t) + \eta_{xz}\eta_{yz}Var(z_t) + \left(\eta_{xk}\eta_{yz} + \eta_{xz}\eta_{yk}\right)Cov(k_t, z_t)$$

El coeficiente de correlación tiene la siguiente expresión:

$$\gamma_{ij(0)} = \frac{Cov(x_i, x_j)}{\sqrt{Var(x_i)Var(x_j)}}$$

A partir de las expresiones anteriores calculamos los coeficientes de correlación contemporáneos con respecto al output de las variables. En la siguiente tabla tenemos los valores utilizados para los parámetros incluidos en las soluciones, donde hemos tomado como valor de referencia una persistencia de la perturbación $\rho = 0.95$ y considerado los dos casos extremos para la sustitución intertemporal en la oferta de trabajo, $\varphi = 0$ y $\varphi = 100$.

Tabla 3.7		
	φ	φ
$\rho = 0.95$	0	100
η_{kk}	0.9156	0.9599
η_{kz}	0.0710	0.0350
η_{ck}	0.4595	0.5064
η_{cz}	0.5681	0.3154
η_{yk}	-0.0721	2.999
η_{yz}	2	1
η_{nk}	-0.5316	-0.002
η_{nz}	1.44	0.007
η_{wk}	0.4595	2.999
η_{wz}	0.5681	1

Los coeficientes de correlación con el output, vienen dadas por:

	Tabla 3.8	
	$\gamma_{ij(0)}(\varphi = 0)$	$\gamma_{ij(0)}(\varphi = 100)$
y_t	1	1
c_t	0.9642	0.989
n_t	0.732	0.9837
w_t	0.3825	1

El modelo calibrado con los parámetros anteriores predice una correlación del consumo con respecto a la producción que es independiente de la elasticidad de sustitución intertemporal mientras que la correlación entre producción y empleo es mayor conforme mayor sea dicha elasticidad de sustitución. Sin embargo, la correlación entre salarios y producción sólo puede acercarse a la correlación empírica para valores altos de dicha elasticidad ($\varphi = 0$). Mientras más baja sea dicha elasticidad peor es la correlación entre salario y producción en relación a los datos empíricos.

De esta forma, los resultados del modelo se acercan más a los hechos empíricos mientras mayor sea la elasticidad de sustitución intertemporal en el trabajo esto es, para $\varphi = 0$ donde la curva de oferta de trabajo se hace prácticamente elástica.

3.7. El modelo de Ciclo Real desde la perspectiva del equilibrio competitivo.

En esta sección plantearemos el modelo de Ciclo Real desde la perspectiva del equilibrio competitivo, analizando el efecto de las perturbaciones de oferta a partir de un modelo similar al de oferta y demanda agregada. Volveremos a resolver el modelo básico en el caso de una perturbación permanente utilizando el método de Blanchard y Kahn (1980).

Introducimos el factor de descuento estocástico como elemento novedoso en la modelización que se suele utilizar cuando el rendimiento de los activos que posee el individuo están sujetos a incertidumbre.

En primer lugar, realizaremos un ejercicio de estática comparativa para evaluar los efectos de un shock de oferta transitorio.

Planteemos de nuevo el problema para la economía doméstica, pero ahora se enfrenta a la posibilidad de comprar activos que generan un flujo de rendimientos incierto en el tiempo.

$$\underset{\{C_{t+j},N_{t+j}\}}{Max} E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^t u(C_{t+j}, N_{t+j}) \right\}$$

Consideremos dos periodos y planteemos las restricciones presupuestarias a las que se enfrenta la economía doméstica. El consumo que puede obtener en un periodo es igual a su renta salarial menos la cantidad de activos que puede comprar, A_t, a un precio determinado, p_t. Si decide comprar activos en t, el máximo consumo que puede alcanzar en el siguiente periodo viene dado por su renta salarial más el rendimiento total derivado de la posesión de activos comprados en el periodo anterior, x_{t+1}. Tal rendimiento presenta en general dos componentes, el precio del activo en dicho periodo, p_{t+1} y el rendimiento porcentual o dividendo del mismo, d_{t+1}.Por tanto, las dos restricciones presupuestarias, una para cada periodo, vienen dadas por:

$$C_t = W_t N_t - p_t A_t$$

$$C_{t+1} = W_{t+1} N_{t+1} + A_t x_{t+1}$$

El lagrangiano viene dado por:

$$\mathcal{L}(C_t, C_{t+1}, N_t, N_{t+1}, A_t, \lambda_t, \lambda_{t+1}) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^t u(C_{t+j}, N_{t+j}) + \beta^t \lambda_1 \left(W_t N_t - p_t A_t - C_t\right)$$

$$+\beta^t \lambda_2 \left(W_{t+1} N_{t+1} + A_t x_{t+1} - C_{t+1}\right)$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = u_C(C_t, N_t) = \lambda_t : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{t+1}} = \beta E_t \left[u_C(C_{t+1}, N_{t+1})\right] = \lambda_{t+1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -u_N(C_t, N_t) = \lambda_t W_t : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_{t+1}} = -\beta E_t u_N(C_{t+1}, N_{t+1}) = E_t(\lambda_{t+1} W_{t+1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_t} = -\lambda_t p_t + \beta E_t(\lambda_{t+1} x_{t+1}) = 0$$

$$C_t = W_t N_t - p_t A_t : C_{t+1} = W_{t+1} N_{t+1} + A_t x_{t+1}$$

Despejando el precio del activo obtenemos:

$$p_t = E_t \left\{ \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} x_{t+1} \right\}$$

Su interpretación es la siguiente: bajo condiciones de incertidumbre, la economía doméstica maximiza cuando valora el precio del activo hoy en base al valor descontado de los rendimientos futuros, donde $E_t \left\{ \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right\}$ se conoce con el nombre de factor de descuento estocástico, pricing kernel o simplemente es la relación marginal de sustitución entre consumo futuro y consumo presente y lo denotaremos como:

$$M_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{u'(C_{t+1}, N_{t+1})}{u'(C_t, N_t)} \right]$$

Utilizando, dicho factor y despejando el nivel de activos de las dos restricciones, obtenemos[29]:

$$C_t + M_{t,t+1}\, C_{t+1} = W_t N_t + M_{t,t+1}\, W_{t+1} N_{t+1}$$

los flujos de consumo y renta son actualizados con el factor de descuento estocástico $M_{t,t+1}$. En general, la restricción presupuestaria intertemporal viene dada por[30]:

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_t \left[M_{t,t+j} C_{t+j} \right] = A_t + \sum_{j=0}^{\infty} E_t \left[M_{t,t+j} W_{t+j} N_{t+j} \right]$$

donde A_t serían las tenencias iniciales de activos del individuo, que hemos supuesto nulas en el planteamiento del problema de optimización.

Dicha restricción presupuestaria puede expresarse como:

$$C_t + \sum_{j=1}^{\infty} E_t M_{t,t+j} \left(C_{t+j} - W_{t+j} N_{t+j} \right) = A_t + W_t N_t$$

expresión en la que $\sum_{j=1}^{\infty} E_t M_{t,t+j} \left(C_{t+j} - W_{t+j} N_{t+j} \right)$ nos indica el valor descontado de los flujos de desahorro futuros, que son iguales al valor de la riqueza en el periodo $t+1$ necesaria para mantener dicho desahorro y que siga verificando la restricción presupuestaria. El valor actual, en t, de dicha riqueza viene dado por $M_{t,t+1} A_{t+1}$.

De esta forma, en t, la economía doméstica conoce su renta laboral unitaria, W_t y su riqueza financiera A_t y decide cuánto consumir hoy C_t,cuántas horas de trabajo ofrecer y cuanto ahorrar,donde A_{t+1} representa el poder de compra que transfiere desde el periodo t hasta el $t+1$.

[29] Hemos supuesto que $E_t x_{t+1} = x_{t+1}$.En el momento de tomar la decisión de invertir en un activo, el rendimiento futuro es incierto, aquí hemos supuesto previsión perfecta.

Una forma alternativa de obtener el mismo resultado es hacer que la $Cov(M_{t,t+1}\,, x_{t+1}) = 0$.

[30] Nótese que para un activo sin riesgo y conocidos en t, sus pagos futuros, $M_{t,t+1} = \frac{1}{1+r}$.

El problema de la economía doméstica generalizado viene formulado como:

$$\underset{\{C_{t+j},N_{t+j}\}}{Max} E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^t u(C_{t+j}, N_{t+j}) \right\}$$

sujeto a:

$$C_t + E_t M_{t,t+1} A_{t+1} = W_t N_t + A_t$$

Planteando la ecuación de Bellman.

$$V(A_t) = \max_{\{C_t, N_t, a_{t+1}\}} \{u(C_t, N_t) + \beta E_t V(A_{t+1})\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$u_C(C_t, N_t) + \beta \frac{\partial V}{\partial A_{t+1}} \frac{\partial A_{t+1}}{\partial C_t} = 0 : -u_N(C_t, N_t) + \beta \frac{\partial V}{\partial A_{t+1}} \frac{\partial A_{t+1}}{\partial N_t} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial A_t} = \beta \frac{\partial V}{\partial A_{t+1}} \frac{\partial A_{t+1}}{\partial A_t}$$

El teorema de la envolvente implica además que el cambio en el valor de la función $V(A_t)$ cuando cambia la variable de estado, A_t es igual al multiplicador de Lagrange, esto es:

$$\frac{\partial u(C^*, N^*)}{\partial A_t} = \frac{dV}{dA_t} = \lambda_t$$

Por tanto:

$$u_C(C_t, N_t) = \lambda_t : -u_N(C_t, N_t) = W_t \lambda_t$$

$$E_t \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = M_{t,t+1} \Rightarrow E_t \beta \frac{u_C(C_{t+1}, N_{t+1})}{u_C(C_t, N_t)} = M_{t,t+1}$$

$$C_t + E_t M_{t,t+1} A_{t+1} = W_t N_t + A_t$$

A partir de las condiciones de primer orden del problema para las economías domésticas podemos deducir las demandas para el consumo y para la oferta de trabajo, que vienen dadas en función de los salarios y del valor marginal de la riqueza, λ_t.lo que se conoce como funciones de demanda de Frisch[31], o curvas de demanda con utilidad marginal de la riqueza constante.

$$C_t = C^d(\lambda_t, W_t)$$

$$N_t = N^s(\lambda_t, W_t)$$

Las propiedades de las curvas de demanda de Frisch son las siguientes:

a) Dada la concavidad de la función de utilidad, $\frac{\partial N^s}{\partial W} > 0$, no hay efecto renta ya que la riqueza se mantiene constante.

b) Si el consumo y el ocio son bienes normales, entonces $\frac{\partial N^s}{\partial \lambda} > 0$ y $\frac{\partial C}{\partial \lambda} < 0$. Esto es, a lo largo de la senda de expansión la renta aumenta, lo que disminuye λ, aumentando el consumo y el nivel de ocio o lo que es lo mismo disminuyendo el número de horas de trabajo ofrecidas por la economía doméstica.

c) En general, no podemos determinar el signo de $\frac{\partial C}{\partial W}$. Sin embargo, en el caso de funciones de utilidad aditivas y separables, de la forma $U(C, N) = U(C) - v(N)$, se verifica $\frac{\partial C}{\partial W} = 0$. En tal caso, cambios temporales y de pequeña cuantía en el salario real dejan la riqueza inalterada y por tanto no afectan al consumo corriente.

Para determinar el equilibrio en el mercado de trabajo necesitamos derivar la demanda de trabajo por parte de las empresas.

La función de producción con rendimientos constantes a escala y rendimientos decrecientes para cada uno de los factores y con las propiedades habituales, donde Z_t representa shocks estocásticos de productividad sobre el factor trabajo, puede ser expresada como:

$$\frac{Y}{K} = F\left(1, Z_t \frac{N_t}{K_t}\right) = F(Z_t h_t) : h_t = \frac{N_t}{K_t}$$

El problema para la empresa es maximizar los rendimientos del capital,

[31] Dichas funciones están bien definidas dada la concavidad dela función de utilidad.

eligiendo la cantidad de trabajo h.

$$\rho_t = \max_{\{h_t\}} F(Z_t h_t) - W_t h_t$$

La solución del problema estático nos da la curva de demanda de trabajo

$$Z_t \frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_t h_t) = W_t = N^d(Z_t, h_t) \tag{(3.31)}$$

Dada la concavidad de la función de producción, la demanda de trabajo es decreciente con el salario real, dados Z_t y K_t.

El rendimiento del capital, en el óptimo es:

$$\rho_t^* = F(Z_t h_t) - Z_t \frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_t h_t) h_t$$

Como no puede ser de otra forma, con rendimientos constantes a escala, los rendimientos del trabajo más los rendimientos del capital agotan el output, una simple aplicación del teorema de Euler[32].

$$F(Z_t h_t) = \rho_t^* + W_t h_t$$

La demanda y la oferta de trabajo, determinan el salario real y la cantidad de horas de trabajo.

$$N^s(\lambda_t, W_t) = N^d(W_t, Z_t, K_t)$$

Un aumento en λ_t eleva la oferta de trabajo, $\frac{\partial N^s}{\partial \lambda} > 0$, ceteris paribus, lo que provoca una caida en el salario y un aumento en las horas trabajadas. Un aumento en el stock de capital, aumenta la demanda de trabajo, dando lugar a un aumento en las horas trabajadas y en el salario real, $\frac{\partial N^d}{\partial K} > 0$. Si

[32] El Teorema de Euler para funciones homogéneas de dos variables nos dice que si $F(x, y)$ es homogénea de grado k, entonces

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = kF(x, y)$$

el factor de productividad aumenta, el efecto sobre la demanda de trabajo en principio es ambigüo, ya que por una parte la productividad del trabajo aumenta pero por otra son necesarias menos horas de trabajo para producir el mismo nivel de output. Formalmente, si diferenciamos la condición de primer orden calculada para obtener la demanda de trabajo, dada por (3.31), manteniendo el salario real constante obtenemos:

$$d\left[Z_t\frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_th_t)\right] = Z_td\left(\frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_th_t)\right) + \frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_th_t)dZ_t = dW_t = 0$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_th_t) + Z_th_t\frac{\partial^2 F}{\partial h_t^2}(Z_th_t)\right]dZ_t + Z_t\frac{\partial^2 F}{\partial h_t^2}(Z_th_t)dh_t = 0$$

$$\frac{dh_t}{dZ_{t\,|W}} = \frac{Z_t\frac{\partial^2 F}{\partial h_t^2}(Z_th_t)}{\left[\frac{\partial F}{\partial h_t}(Z_th_t) + Z_th_t\frac{\partial^2 F}{\partial h_t^2}(Z_th_t)\right]} > 0$$

El numerador es negativo, dado el supuesto de rendimientos decrecientes, y el denominador en principio puede ser positivo o negativo, aunque en general asumimos que tiene signo positivo, lo cual se satisface por ejemplo en funciones del tipo Cobb-Douglas[33]. Como resultado, el aumento en la productividad eleva la demanda de trabajo aumentando el número de horas y el salario de equilibrio.

Obtenidos los valores de equilibrio para $\{N_t, W_t\}$ a partir de la oferta y la demanda de trabajo, sustituimos éstas en la función de demanda de Frisch y en el rendimiento bruto del capital, obteniendo el bloque de oferta agregada:

$$C_t = C^d(\lambda_t, K_t, Z_t)$$

$$Y_t = K_tF\left(Z_t\frac{N_t}{K_t}\right) = Y(\lambda_t, K_t, Z_t)$$

$$\rho_t = F\left(Z_t\frac{N_t}{K_t}\right) - W_t\frac{N_t}{K_t} = \rho(\lambda_t, K_t, Z_t)$$

[33]Si el shock de productividad entrase de forma multiplicativa en la función de producción, y por tanto la demanda de trabajo fuese de la forma $W_t = Z_tf(h_t)$ entonces la demanda de trabajo crece sin ningún tipo de ambiguedad cuando crece la productividad.

y en el cual se verifican los siguientes resultados de estática comparativa:

$$\frac{\partial C_t}{\partial \lambda_t} < 0 : \frac{\partial C_t}{\partial K_t} \gtrless 0 : \frac{\partial C_t}{\partial Z_t} \gtrless 0 : \frac{\partial Y_t^s}{\partial \lambda_t} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t^s}{\partial K_t} > 0 : \frac{\partial Y_t^s}{\partial Z_t} > 0 : \frac{\partial \rho_t}{\partial \lambda_t} > 0 : \frac{\partial \rho_t}{\partial K_t} < 0 : \frac{\partial \rho_t}{\partial Z_t} > 0$$

Obtenida la demanda de consumo para la economía doméstica y el equilibrio en el mercado de trabajo, sólo nos queda, para completar el modelo, incluir la demanda de inversión, que viene dada por la dinámica de acumulación del stock de capital y la ecuación dinámica para el valor marginal de la riqueza, λ_t.

La demanda agregada, en una economía cerrada y sin sector público viene dada por.

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$Y^d(\lambda_t, K_t, Z_t, I_t) = C(\lambda_t, K_t, Z_t) + I_t = C(\lambda_t, K_t, Z_t) + K_{t+1} + (1-\delta)K_t$$

La demanda agregada, dado un volumen de inversión es decreciente en λ_t, mientras que la dependencia de K_t y de Z_t es ambigua.

El equilibrio demanda agregada-oferta agregada, determinan el valor corriente de la utilidad marginal de la riqueza, λ_t.

Hasta ahora hemos deducido una modelización basada en las condiciones estáticas de primer orden y en la restricción de recursos. Necesitamos acoplar a éstas la condición intertemporal restante o lo que es lo mismo, determinar la demanda de inversión óptima.

La demanda de inversión óptima.

Podemos pensar en dos formas equivalentes para derivar la demanda de inversión óptima. En primer lugar, los activos de una empresa pueden valorarse igual que un activo financiero, lo que implica que podamos utilizar la expresión del pricing kernel para obtener el precio de una unidad de capital en t. El rendimiento neto total de comprar 1 u.m. de capital en t es $x_{t+1} = 1 - \delta + \rho_{t+1}$, esto es, en $t+1$ tendremos el capital que nos costó 1 u.m. que compramos en t, más el rendimiento neto de dicha unidad menos la depreciación que ha experimentado entre los dos periodos.

$$1 = E\left\{M_{t,t+1}\left(\rho_{t+1} + 1 - \delta\right)\right\}$$

O sustituyendo el pricing kernel de las condiciones de optimización

$$E_t\left\{\beta\lambda_{t+1}\left(\rho_{t+1} + 1 - \delta\right)\right\} = \lambda_t \tag{(3.32)}$$

Esta condición determina el nivel deseado de capital como una función de de las expectativas sobre λ_{t+1} y Z_{t+1}, variables que afectan a r_{t+1}.

Una derivación alternativa pero similar a la anterior es pensar que la empresa intenta maximizar el valor presente esperado descontado de su cash flow, pero ¿cuál es la tasa de descuento que la empresa debería aplicar a su cash flow futuro? Hemos visto que la forma correcta de valorar una corriente incierta de flujos futuros es utilizar la relación marginal de sustitución o de manera equivalente el pricing kernel.

Definamos V_t como el valor presente de la empresa al comienzo del periodo t y definamos su cash flow como

$$\pi_t = F(K_t, ZN_t) - w_t N_t - I_t$$

debe verificarse entonces que

$$V_t = E_t\left\{M_{t,t+1}(\pi_t + V_{t+1})\right\}$$

resolviendo para V_t forward y asumiendo la no existencia de burbujas, obtenemos el valor de la empresa como

$$V_{t+1} = E_t\left\{M_{t,t+2}(\pi_{t+1} + V_{t+2})\right\}$$

$$V_t = E_t\left\{M_{t,t+1}(\pi_t + E_t\left\{M_{t,t+2}(\pi_{t+1} + V_{t+2})\right\})\right\}$$

$$V_t = E_t\left\{\sum_{j=0}^{\infty} M_{t,t+j}\pi_{t+j}\right\} + E_t\prod_{j=0}^{T} R_{t,t+j+1}V_{t+T}$$

y en ausencia de burbujas

$$\underset{T\to\infty}{\text{lím}}\, E_t \prod_{j=0}^{T} R_{t,t+j+1} V_{t+T} = 0$$

Por tanto, el valor de la empresa es igual a los flujos de caja descontados a través del factor de descuento estocástico.

La empresa desea maximizar dicho valor sujeto a la restricción que nos da la ecuación dinámica para la inversión

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

Planteando la ecuación de Bellman, donde K_t es la variable de estado.

$$V(K_t) = \max_{\{K_{t+1}\}} \{F(K_t, Z_t N_t) - W_t N_t - I_t + E_t\left[M_{t,t+1} V(K_{t+1})\right]\}$$

cuya condición de primer orden es

$$\frac{dV_t}{dK_{t+1}} = -\frac{\partial I_t}{\partial K_{t+1}} + E_t\left[M_{t,t+1}\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}\right] = 0 \Rightarrow 1 = E_t\left[M_{t,t+1}\frac{dV}{dK_{t+1}}\right]$$

y la condición de envolvente del problema

$$\frac{dV}{dK_t} = \frac{\partial F}{\partial K_t} + E_t\left[M_{t,t+1}\frac{dV}{dK_{t+1}}\frac{dK_{t+1}}{dK_t}\right] = \frac{\partial F}{\partial K_t} + (1-\delta)$$

Adelantando un periodo

$$E_t M_{t,t+1}\frac{dV}{dK_{t+1}} = 1 = E_t M_{t,t+1}\left[\frac{\partial F}{\partial K_{t+1}} + (1-\delta)\right]$$

Con esta condición determinamos el stock de capital K_{t+1} en función de las expectativas de λ_{t+1} y de Z_{t+1}.

Veamos cómo podemos determinar el signo de la función que que expresa el stock de capital K_{t+1} en función de λ_t. Asumimos que existe una función $\lambda_{t+1} = \Lambda(K_{t+1})$ y que es única. Dicha función como veremos en el análisis dinámico es la senda estable del modelo cuando utilizamos estas dos variables.

La condición de óptimo anterior (3.32) puede expresarse como:

$$\beta E_t \left\{ \Lambda(K_{t+1}) \left(\rho_{t+1} + 1 - \delta \right) \right\} = \lambda_t$$

Ahora tenemos una función $K_{t+1}(\lambda_t)$, que resuelve la ecuación anterior. Dicha función es decreciente. Un aumento de λ_t requiere un rendimiento descontado más alto del capital y por tanto un nivel de K_{t+1} menor. Dado que $\frac{\partial \rho_{t+1}}{\partial K_{t+1}} < 0$ y $\frac{\partial \rho_{t+1}}{\partial \lambda_{t+1}} > 0$, el menor K_{t+1} incrementa directamente r_{t+1} e indirectamente λ_{t+1}.Formalmente, si aplicamos logs y diferenciamos, (despreciando el término $1-\delta$ que no tiene influencia alguna en el resultado), obtenemos el resultado buscado.

$$d \ln \lambda_t \simeq d \ln \lambda_{t+1} + d \ln r_{t+1}$$

$$\frac{d \ln \lambda_t}{d \ln K_{t+1}} \simeq \frac{d \ln \lambda_{t+1}}{d \ln r_{t+1}} \frac{d \ln r_{t+1}}{d \ln K_{t+1}} + \frac{d \ln r_{t+1}}{d \ln K_{t+1}} < 0$$

Esto nos permite determinar finalmente la demanda de inversión, como una función dependiente de λ_t.

$$I_t = K_{t+1}(\lambda_t) - (1-\delta) K_t \Rightarrow \frac{\partial I_t}{\partial \lambda_t} = \frac{\partial K_{t+1}}{\partial \lambda_t} < 0$$

Por tanto, el equilibrio en el mercado de bienes podemos escribirlo como:

$$Y^d = C(\lambda_t, K_t, Z_t) + I_t(\lambda_t, K_t)$$

Efectos de Shocks tecnológicos transitorios.

Supongamos ahora que Z_t es menor que su valor esperado mientras que todos los valores futuros permanecen sin cambio.

Resolviendo el ejercicio de estática comparativa podemos calcular el efecto de la perturbación tecnológica transitoria. A corto plazo y considerando que la perturbación es transitoria, dada la demanda de consumo, la variación de K_{t+1} ante cambios en λ_t es muy pequeña, esto es, se necesita una cambio de considerable en λ_t para provocar una variación dada en I_t. Por tanto, asumiremos que $\frac{\partial I_t}{\partial \lambda_t} \rightarrow -\infty$, es decir, la curva que nos relaciona K_{t+1} o I_t con λ_t es casi infinitamente elástica.

El equilibrio viene dado por la oferta y demanda agregada.

$$Y^d = C(\lambda_t, K_t, Z_t) + I_t(\lambda_t, K_t) = Y^s(\lambda_t, K_t, Z_t)$$

Este supuesto da lugar a que la curva de DA sea muy elástica a corto plazo. La pendiente de la DA viene dada por:

$$C_\lambda d\lambda + I_\lambda d\lambda = dY^d \Rightarrow \frac{d\lambda}{dY^d} = \frac{1}{C_\lambda + I_\lambda} < 0$$

Diferenciando el sistema OA-DA podemos calcular el efecto de la perturbación sobre las variables del modelo.

$$dY^d = C_\lambda d\lambda + C_Z dZ + I_\lambda d\lambda = Y^s_\lambda d\lambda + Y^s_Z dZ = dY^s$$

$$\frac{d\lambda}{dZ} = \frac{C_Z - Y^s_Z}{Y^s_\lambda - (C_\lambda + I_\lambda)} < 0$$

Por tanto, una perturbación transitoria adversa (negativa) eleva λ y provoca una caida en el output.

$$\frac{dY^d}{dZ} = \frac{dY^d}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dZ} = \frac{1}{C_\lambda + I_\lambda}\frac{C_Z - Y^s_Z}{Y^s_\lambda - (C_\lambda + I_\lambda)} < 0$$

El resto de los efectos son inmediatos de obtener, atendiendo a los resultados de estática comparativa anteriores.

A partir del equilibrio en el mercado de trabajo, obtenemos el cambio en el salario real ante la perturbación de oferta.

$$dN^s = \frac{\partial N^s}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial N^s}{\partial W}dW = \frac{\partial N^d}{\partial W}dW + \frac{\partial N^d}{\partial Z}dZ = dN^d$$

$$\left[\frac{\partial N^s}{\partial W} - \frac{\partial N^d}{\partial W}\right]\frac{dW}{dZ} = -\frac{\partial N^s}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dZ} + \frac{\partial N^d}{\partial Z}$$

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{-\frac{C_Z - Y_Z^s}{Y_\lambda^s - (C_\lambda + I_\lambda)} + \frac{\partial N^d}{\partial Z}}{\left[\frac{\partial N^s}{\partial W} - \frac{\partial N^d}{\partial W}\right]} < 0$$

El cambio en el empleo o número de horas trabajadas es por tanto:

$$dN^s = dN = \frac{\partial N^s}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial N^s}{\partial W} dW$$

$$\frac{dN}{dZ} = \frac{\partial N^s}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dZ} + \frac{\partial N^s}{\partial W}\frac{dW}{dZ} < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\partial N^s}{\partial W}\frac{dW}{dZ}\right| > \left|\frac{\partial N^s}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dZ}\right| \qquad ((3.33))$$

Si la curva de DA es muy elástica, el cambio en λ será pequeño (el consumo no se reduce en una cuantía considerable) y se satisface la desigualdad anterior. Por otra parte, ya hemos deducido que $\frac{dh}{dZ} > 0$, esto es, un shock de productividad desplaza sin ningún tipo de ambigüedad la demanda de trabajo hacia la izquierda. El consumo desciende casi en la misma cuantía que el aumento de λ y finalmente, el tipo de interés permanece prácticamente inalterado, el rendimiento del capital disminuye dada la disminución en horas de trabajo y en Z_t.

La caida del output recae sobre todo en la inversión, dado el supuesto que hemos realizado sobre el efecto de λ_t sobre I_t. El modelo a nivel cualitativo explicaría que ésta es más volátil que la producción y ésta más que el consumo. El gráfico 3.2. muestra sintéticamente el efecto de la perturbación adversa y transitoria de oferta.

Resolución del modelo dinámico con shock tecnológico permanente.

Supondremos que en estado estacionario la tecnología o progreso técnico crece a una tasa g.En este caso debemos reescalar las variables de tal forma que las variables en estado estacionario sean consistentes con la senda de crecimiento equilibrado. Esto es, que N sea constante y K e Y crezcan a la misma tasa que lo hace la tecnología. El salario crece a dicha tasa también, mientras que el rendimiento del capital, ρ es constante.

Por tanto tenemos que:

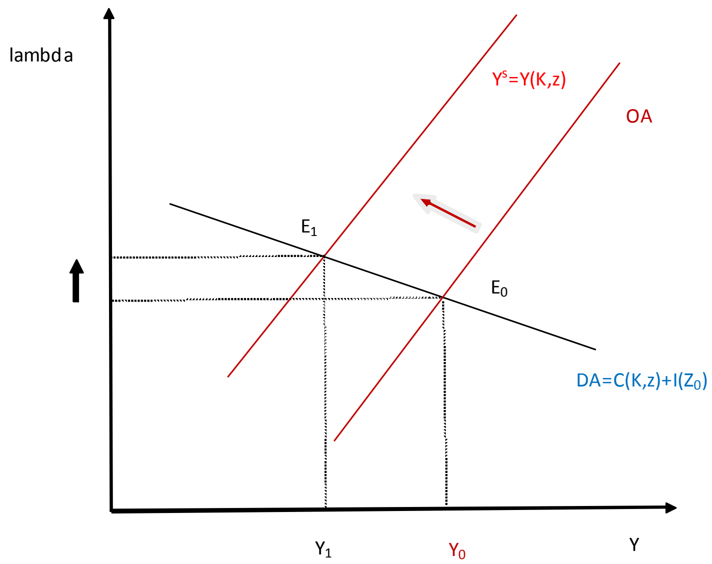

Gráfico 3.2.

$$g_{Zt+1} = \frac{Z_{t+1}}{Z_t} = g - 1$$

Es necesario transformar las variables que no son estacionarias en estacionarias, con el fin de que el estado estacionario esté bien definido.

Reescalar las variables implica dividirlas por el factor que crece en el tiempo, en este caso, el progreso tecnológico.

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{Z_t} : \tilde{K}_t = \frac{K_t}{Z_t} : \tilde{C}_t = \frac{C_t}{Z_t} : \tilde{I}_t = \frac{I_t}{Z_t} : \tilde{W}_t = \frac{W_t}{Z_t} : \tilde{\lambda}_t = \lambda_t Z_t$$

En términos de estas redefiniciones, el equilibrio en el mercado de trabajo es:

$$\tilde{N}_t = N^s(\tilde{\lambda}_t, \tilde{W}_t) : \tilde{W}_t = F'\left(\frac{N_t^d}{\tilde{K}_t}\right) : N^s = N^d$$

La solución depende sólo de $\tilde{\lambda}_t$ y $\tilde{K}_t$ de tal forma que podemos reescribir $\tilde{W}_t = \tilde{W}(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)$ y $\tilde{N}_t = N^s(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)$.

El equilibrio en el mercado de bienes:

$$\tilde{Y}_t = \tilde{K}_t F\left(\frac{N_t}{\tilde{K}_t}\right) = \tilde{K}_t F\left(\frac{N^s(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)}{\tilde{K}_t}\right) \Rightarrow \tilde{Y}_t = Y(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)$$

$$\rho_t = F'\left(\frac{N_t}{\tilde{K}_t}\right) - \tilde{W}_t \frac{N_t}{\tilde{K}_t} \Rightarrow \rho_t = \rho(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)$$

Las condiciones de equilibrio intertemporal son, para las variables reescaladas. La ecuación (3.34) es la restricción de recursos mientras que (3.35) es la ecuación de Euler.

$$C(\tilde{\lambda}_t) + \left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\tilde{K}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{K}_t\right] = Y(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t) \qquad ((3.34))$$

$$\beta E_t \left\{\frac{Z_t}{Z_{t+1}}\tilde{\lambda}_{t+1}\left[\rho(\tilde{\lambda}_{t+1}, \tilde{K}_{t+1}) + (1-\delta)\right]\right\} = \tilde{\lambda}_t \qquad ((3.35))$$

Estas condiciones de equilibrio determinan los valores constantes $\left\{\tilde{K}_t, \tilde{\lambda}_t\right\}$, dada la condición inicial $\tilde{K}_0$ y el proceso que sigue $\left\{g_{z_{t+1}}\right\}$.

En estado estacionario se verifica:

$$C + g_Z \tilde{K} - (1-\delta)\tilde{K} = Y$$

$$\rho + 1 - \delta = \beta^{-1} g_Z$$

Introducir incertidumbre en este modelo implica suponer que $g_{Z_{t+1}}$ es una variable aleatoria. Si la tecnología sigue un paseo aleatorio, $g_{z_{t+1}}$ es entonces i.i.d y $g-1$ es la tasa media de crecimiento de la tecnología, que sería la deriva del paseo aleatorio. En este caso, las leyes dinámicas de las variables toman la forma.

$$\tilde{K}_{t+1} = \frac{g_Z}{g_{Z_{t+1}}}\mathbf{K}(\tilde{K}_t) : \tilde{\lambda}_t = \mathbf{\Lambda}(\tilde{K}_t)$$

El equilibrio para el resto de las variables vendrá dado por expresiones en función de stock de capital.

$$\tilde{Y}_t = \mathbf{Y}(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t) = Y(\mathbf{\Lambda}(\tilde{K}_t), \tilde{K}_t)$$

$$N_t = \mathbf{N}(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t) = N(\mathbf{\Lambda}(\tilde{K}_t), \tilde{K}_t)$$

$$\tilde{C}_t = \mathbf{C}(\tilde{\lambda}_t) = C(\mathbf{\Lambda}(\tilde{K}_t))$$

$$\tilde{I}_t = \mathbf{I}(\tilde{K}_t) = \mathbf{K}(\tilde{K}_t)g_Z - (1-\delta)\tilde{K}_t$$

Ya que Z_t no es estacionaria por hipótesis, $K_t = \tilde{K}_t Z_t$ tampoco lo es, sin embargo sí es estacionaria por diferenciación (difference stationary), ya que:

$$g_K = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{\mathbf{K}(\tilde{K}_t)}{\tilde{K}_t} g_Z$$

es estacionaria. De la misma manera, C_{t+1}/C_t e I_{t+1}/I_t son estacionarias por diferenciación.

De esta forma $\left\{\tilde{K}_t\right\}$ será una variable estacionaria, fluctuando alrededor del estado estacionario $\tilde{K}$ al cual converge en ausencia de perturbaciones.

De igual forma, Y_t, C_t, I_t no son estacionarias pero sí son estacionarias por diferenciación. El crecimiento del output también es una variable estacionaria por diferenciación siempre que $g_{Z_{t+1}}$sea estacionaria.

$$g_{Y_{t+1}} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{\mathbf{Y}\left(\mathbf{K}(\tilde{K}_t)\frac{g_Z}{g_{Z_{t+1}}}\right)}{\mathbf{Y}(\tilde{K}_t)} g_{Z_{t+1}}$$

$$N_t = N(\tilde{K}_t)$$

$$\frac{C_t}{Y_t} = \frac{C(\mathbf{\Lambda}(\tilde{K}_t))}{Y(\tilde{K}_t)} : \frac{I_t}{Y_t} = \frac{\mathbf{I}(\tilde{K}_t)}{Y(\tilde{K}_t)}$$

Al mismo tiempo las variables N, C/Y e I/Y son todas estacionarias como se observa en los datos agregados.

Solución.

De nuevo, adoptamos el método de log-linealizar las ecuaciones de equilibrio y consideraremos una función de preferencias logarítmica y separable en sus argumentos:

$$u(C_t, N_t) = \ln C_t - \upsilon(N)$$

La condición (3.34) viene dada por:

$$C(\tilde{\lambda}_t) + \left[g_{Z_{t+1}}\tilde{K}_{t+1} - (1-\delta)\tilde{K}_t\right] = Y(\tilde{\lambda}_t, \tilde{K}_t)$$

Diferenciando:

$$C+\frac{\partial C}{\partial \tilde{\lambda}_t}(\tilde{\lambda}_t-\tilde{\lambda})+g_z\tilde{K}+\tilde{K}(g_{Z_{t+1}}-g_Z)+g_Z\tilde{K}(\tilde{K}_{t+1}-\tilde{K})-(1-\delta)\tilde{K}-(1-\delta)(\tilde{K}_t-\tilde{K}) =$$

$$= Y + \frac{\partial Y}{\partial \tilde{K}}(\tilde{K}_t - \tilde{K}) + \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}_t - \tilde{\lambda})$$

En el estado estacionario se verifica $C + g_z\tilde{K} - (1-\delta)\tilde{K} = Y$ y dividiendo entre Y.

$$-C\hat{\lambda}_t + g_Z\tilde{K}\left(\hat{g}_{z_{t+1}} + \hat{K}_{t+1}\right) - (1-\delta)\tilde{K}\hat{K}_t = \frac{\partial Y}{\partial \tilde{K}}\tilde{K}\hat{K}_t + \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}\hat{\lambda}_t$$

$$-\frac{C}{Y}\hat{\lambda}_t + g_z\frac{K}{Y}\left(\hat{g}_{Z_{t+1}} + \hat{K}_{t+1}\right) - (1-\delta)\frac{K}{Y}\hat{K}_t = \eta_{YK}\hat{K}_t + \eta_{Y\lambda}\hat{\lambda}_t \qquad ((3.36))$$

La restricción de recursos, (3.35) tiene la siguiente expresión:

$$\beta E_t\left\{g_{z_{t+1}}^{-1}\tilde{\lambda}_{t+1}\left[\rho(\tilde{\lambda}_{t+1}, \hat{K}_{t+1}) + (1-\delta)\right]\right\} = \tilde{\lambda}_t$$

Aplicando logaritmos, denotando como $\mu_{t+1} = \rho(\tilde{\lambda}_{t+1}, \hat{K}_{t+1}) + (1-\delta)$ y diferenciando:

$$-d\ln g_{Z_{t+1}} + d\ln\tilde{\lambda}_{t+1} + \frac{1}{\mu_{t+1}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial K}dK_{t+1} + \frac{\partial\rho}{\partial\tilde{\lambda}}d\tilde{\lambda}_{t+1}\right] = d\ln\tilde{\lambda}_t$$

En el estado estacionario, $\rho + 1 - \delta = \beta^{-1}g_Z$, por tanto

$$E_t\left\{-\hat{g}_{t+1} + \hat{\lambda}_{t+1} + \frac{\beta\rho}{g_Z}\left[\eta_{\rho K}\hat{K}_{t+1} + \eta_{\rho\lambda}\hat{\lambda}_{t+1}\right]\right\} = \hat{\lambda}_t \qquad ((3.37))$$

Reordenando las dos ecuaciones log-linealizadas, (3.36) y (3.37) vienen dadas por:

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\frac{C}{Y} + \eta_{Y\lambda}\right)\hat{\lambda}_t + \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\eta_{YK} + (1-\delta)\frac{K}{Y}\right)\hat{K}_t - \hat{g}_{Z_{t+1}}$$

$$\left(1+\frac{\beta\rho}{g_Z}\eta_{\rho\lambda}\right)E_t\hat{\lambda}_{t+1}+\frac{\beta\rho}{g_Z}\eta_{\rho K}\hat{K}_{t+1}=\hat{\lambda}_t : E_t\hat{g}_{Zt+1}=0$$

Expresado el sistema en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K} & \left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\eta_{YK}+(1-\delta)\frac{K}{Y}\right) & \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\frac{C}{Y}+\eta_{Y\lambda}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_t \\ \hat{K}_t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\hat{g}_{Zt+1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix}=\frac{1}{\left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right)}\begin{bmatrix} \left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right) & 0 \\ -\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K} & 1 \end{bmatrix}*$$

$$*\begin{bmatrix} \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\eta_{YK}+(1-\delta)\frac{K}{Y}\right) & \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\frac{C}{Y}+\eta_{Y\lambda}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right)}\begin{bmatrix} \left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right) & 0 \\ -\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\hat{g}_{Zt+1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}\hat{g}_{Zt+1} \qquad ((3.38))$$

donde:

$$a_{11}=\frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\eta_{YK}+(1-\delta)\frac{K}{Y}\right)>0 : a_{12}=\frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\frac{C}{Y}+\eta_{Y\lambda}\right)>0$$

$$a_{21}=-a\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K}a_{11}<0 : a_{22}=a(1-\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K}a_{12})>1$$

$$a=\left(1+\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho\lambda}\right)^{-1}<1 : b_{11}=-1 : b_{21}=a\beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Como sabemos, los signos de las elasticidades implicadas en el problema son:

$$\eta_{\rho K}\leq 0 : \eta_{\rho\lambda}>0 : \eta_{Y\lambda}>0 : \rho\frac{K}{Y}<\eta_{YK}<1$$

El determinante de la ecuación característica del sistema es:

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = aa_{11} > 0$$

y la traza de la matriz de coeficientes

$$tr\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0$$

De tal forma que las raíces del polinomio característico o autovalores de la matriz de coeficientes satisfacen

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr\mathbf{A}\lambda + |\mathbf{A}| = 0$$

Dicho polinomio satisface

$$P(0) = |\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2 = aa_{11} > 0 : P(a) = a^2 - a_{11} - a(1 - \beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K}a_{12}) + aa_{11} < 0$$

$$P(a) = (a-1)\,(a_{11}+a) + \beta\rho g_Z^{-1}\eta_{\rho K}a_{12} < 0$$

el cambio de signo del polinomio entre 0 y $P(a)$ demuestra que una raíz λ_1 verifica:

$$0 < \lambda_1 < a < 1$$

Dado que:

$$a_{11} = \frac{Y}{K}g_Z^{-1}\left(\eta_{YK} + (1-\delta)\frac{K}{Y}\right) > \frac{\rho + (1-\delta)}{g_Z} = \beta^{-1} > 1$$

y

$$P(a_{11}) = a_{11}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + aa_{11} = a_{11}(a - a_{22}) < 0 : P(\infty) = \infty$$

Al volver a cambiar el signo del polinomio, existe por tanto, una raíz λ_2 tal que

$$1 < \beta^{-1} < a_{11} < \lambda_2$$

Desacoplando el sistema obtendremos la solución.

A partir de la definición de autovectores, obtenemos la matriz P de autovectores asociados a cada autovalor de la matriz A de coeficientes en (3.38).

$$\mathbf{A}\upsilon=\lambda\upsilon : P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} & \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}$$

Definiendo el vector de variables auxiliares como:

$$P \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t \hat{\lambda}_{t+1} \\ \hat{K}_{t+1} \end{bmatrix}$$

El sistema original se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \hat{g}_{Zt+1}$$

La solución para y_t viene dada por la resolución hacia delante de la ecuación:

$$E_t y_{t+1} = \lambda_2 y_t + f(\hat{g}_{Zt+1})$$

donde $f(\hat{g}_{Zt+1})$ es una función lineal de los elementos de la segunda fila de P^{-1} y de b_{11} y b_{21}.

La solución estable viene dada por:

$$y_t = \lambda_2^{-T} E_t y_{t+T} - \lambda_2^{-1} \sum_{i=0}^{T} \lambda_2^{-i} E_t f(\hat{g}_{Zt+1+i})$$

teniendo en cuenta que $E_t \hat{g}_{Zt+1+i} = 0$ y para $T \to \infty$, $E_t y_{t+T} = 0$ y por tanto $y_t = 0$.

Deshaciendo el cambio de variables:

$$P \begin{bmatrix} x_t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{bmatrix}$$

$$x_t = \hat{K}_t$$

$$\frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} x_t = \hat{\lambda}_t$$

y por tanto, la ecuación del saddle-path o línea de estabilidad de punto de silla es:

$$\hat{\lambda}_t = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \hat{K}_t = e_{21} \hat{K}_t$$

A partir de las relaciones entre las raíces de la ecuación característica, podemos saber el signo de la pendiente de la senda estable.

$$\lambda_2 = a_{11} - \lambda_1 + a_{22} \Rightarrow \lambda_2 - a_{22} = -a_{12} e_{21} \Rightarrow \lambda_2 + a_{11} = -a_{12} e_{21} + tr\mathbf{A}$$

$$a_{12} e_{21} = \lambda_1 - a_{11} \Rightarrow e_{21} < 0$$

Sustituyendo la ecuación del saddle path en el sistema

$$\hat{K}_{t+1} = a_{12} \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \hat{K}_t + a_{11} \hat{K}_t - \hat{g}_{Z_{t+1}}$$

obtenemos la solución para el stock de capital que viene dada por:

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t - \hat{g}_{Z_{t+1}}$$

que constituye la solución de la aproximación log-lineal del sistema original.

La ecuación dinámica tiene por solución

$$\hat{K}_{t+1} = -\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t+1-i}}$$

siendo la raíz estable del sistema el que determina la función impulso-respuesta a una innovación $\hat{g}_{z_{t+1}}$.

La solución para el resto de las variables puede calcularse fácilmente

$$\hat{\lambda}_t = e_{21} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

$$\hat{Y}_t = \eta_{YK} \hat{K}_t + \eta_{Y\lambda} \hat{\lambda}_t = \left(\eta_{YK} - e_{21} \eta_{Y\lambda}\right) \hat{K}_t = -\pi_{YK} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

$$\hat{C}_t = -\hat{\lambda}_t = -e_{21} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

Por ejemplo, $\hat{g}_Y$ sería la desviación porcentual de la tasa de crecimiento de la producción. A partir de la solución para el output podemos calcular

$$g_Y = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{Z_t \tilde{Y}_t}{Z_{t-1} \tilde{Y}_{t-1}} \Rightarrow \hat{g}_Y = \hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1} + \hat{g}_Z = \Delta \hat{Y}_t + \hat{g}_Z$$

$$\hat{g}_Y = \hat{g}_Z - \pi_{YK} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \Delta \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

A partir de éstas podemos obtener las funciones impulso-respuesta para las variables.

Funciones impulso-respuesta.

Debemos tener en cuenta que las soluciones encontradas en el sistema log-linealizado son para las variables estacionarias, esto es:

$$\hat{K}_t = \ln \tilde{K}_t - \ln \tilde{K}$$

En ausencia de perturbaciones, esto es, de desviaciones de la productividad con respecto a su tasa de crecimiento tendencial, la solución encontrada para el stock de capital viene dada por:

$$\ln \tilde{K}_{t+1} - \ln \tilde{K} = \lambda_1 (\ln \tilde{K}_t - \ln \tilde{K})$$

O iterando hacia delante k periodos.

$$\ln \tilde{K}_{t+k} - \ln \tilde{K} = \lambda_1^k (\ln \tilde{K}_t - \ln \tilde{K})$$

Consideremos un incremento permanente en la productividad en t, esto es $g_{Z_t} = g_Z$ y $g_{Z_{t+j}} = 1 \ \forall j \neq 0$.

La solución para el stock de capital sin reescalar puede obtenerse de la siguiente manera.

$$\tilde{K}_t = \frac{K_t}{Z_t} \Rightarrow \ln \tilde{K}_t = \ln\left(\frac{K_t}{Z_t}\right) = \ln\left(\tilde{K}\frac{Z_{t-1}}{Z_t}\right)$$

$$\ln \tilde{K}_t = \ln \tilde{K} - \ln g_{Z_t}$$

Teniendo en cuenta la estructura de la perturbación:

$$\ln Z_t = \ln Z_{t-1} + \ln g_{Z_t}$$

Sustituyendo recursivamente, o solucionando la ecuación dinámica para el shock tecnológico:

$$\ln Z_{t+1} = \ln Z_t + \ln g_{Z_{t+1}} = \ln Z_{t-1} + \ln g_{Z_t} + \ln g_{Z_{t+1}}$$

$$\ln Z_{t+k} = \ln Z_{t-1} + \sum_{j=0}^{k} \ln g_{Z_{t+j}} = \ln Z_{t-1} + \ln g_{Z_t} : \sum_{j=1}^{k} \ln g_{Z_{t+j}} = 0$$

Por tanto, la ecuación que nos liga el stock de capital con y sin reescalar, con el stock de capital estacionario y la perturbación viene dada por:

$$\ln K_{t+k} = \ln \tilde{K}_{t+k} + \ln Z_{t+k} = \ln \tilde{K}_{t+k} + \ln g_{Z_t} + \ln Z_{t-1}$$

Sustituyendo en la ecuación dinámica del stock de capital solución del sistema:

$$\ln K_{t+k} = \lambda_1^k(\ln \tilde{K}_t - \ln \tilde{K}) + \ln \tilde{K} + \ln g_{Z_t} + \ln Z_{t-1}$$

$$\ln K_{t+k} = \lambda_1^k(\ln \tilde{K} - \ln g_{Z_t}) + \ln \tilde{K} + \ln g_{Z_t} + \ln Z_{t-1}$$

$$\ln K_{t+k} = \ln K_{t-1} + (1 - \lambda_1^k) \ln g_{Z_t}$$

que nos da las funciones impulso respuesta para el stock de capital, ante una variación permanente en la productividad o shock tecnológico.

Expresado de otra forma equivalente en función de las desviaciones de la tasa de crecimiento del shock tecnológico y teniendo en cuenta que $\hat{g}_{Zt} \neq 0$ y $\hat{g}_{Zt+i} = 0 \ \forall i \neq 0$.

Definiendo:

$$\hat{K}_t = \check{K}_t - \hat{g}_{Zt} : \check{K}_t = \ln K_t - \ln K$$

$$\check{K}_t = \hat{g}_{Zt} - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}} = (\ln Z_t - \ln Z_{t-1}) - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

$$\ln Z_t - \ln Z_{t-1} = g_{Z_t} \Rightarrow \hat{Z}_t = \hat{Z}_{t-1} + \hat{g}_{Z_t}$$

Resolviendo k periodos hacia delante:

$$\check{K}_{t+k} = \left(\hat{Z}_{t-1} + \sum_{j=0}^{k} \hat{g}_{Z_{t+j}} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Zt+k-i}$$

$$\check{K}_{t+k} = \hat{g}_{Zt} - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t+k-i}}$$

En el momento t, la perturbación no afecta al stock de capital, K_t que viene fijado desde el periodo anterior, pero a partir de ese momento, el stock de capital exhibe una trayectoria monótona convergente hacia su nuevo valor de estado estacionario, esto es, una perturbación positiva eleva de forma permanente el stock de capital.

$$\frac{\partial \ln K_{t+k}}{\partial \ln g_{Z_t}} = 1 - \lambda_1^k : \frac{\partial \check{K}_{t+k}}{\partial \hat{g}_{Z_t}} = 1 - \lambda_1^k : \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\partial \check{K}_{t+k}}{\partial \hat{g}_{Z_t}} = 1$$

El análisis realizado para la dinámica del stock de capital se generaliza para el resto de las variables del modelo.

Las soluciones para las variables originales vienen dadas por:

$$\check{Y}_{t+k} = \hat{g}_{Zt} - \pi_{YK} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t+k-i}}$$

$$\check{C}_t = \hat{g}_{Zt} - e_{21} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{g}_{Z_{t-i}}$$

A largo plazo, una perturbación aleatoria que provoque un cambio permanente en la productividad total de los factores eleva de forma permanente la producción, el consumo y el nivel de inversión.

3.8. El modelo de Ciclo Económico Real con progreso técnico.

En este epígrafe consideramos que existe progreso técnico en el sentido de Harrod, que aumenta la eficiencia del factor trabajo; incluimos una función no separable en consumo y ocio y determinamos las soluciones para las variables del modelo de Ciclo Real de una forma más compacta, siguiendo el método de resolución sugerido por Blanchard y Kahn (1980)

Expresaremos el modelo de una forma ligeramente diferente, en función de las elasticidades de la función de utilidad con respecto a sus argumentos y en función de la elasticidad de la función de producción con respecto al capital y al trabajo.

De nuevo el planificador social desea maximizar la siguiente función de utilidad sujeta a las restricciones pertinentes.

$$\underset{\{C_t,K_{t+1},N_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t,\ell_t)\right]$$

donde la función de utilidad puede tomar como sabemos alguna de estas dos formas funcionales:

$$u(C_t,\ell_t)=\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}v(\ell_t) \qquad \sigma\in\,]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$$

$$u(C_t,\ell_t)=\ln C_t+v(L) \qquad \sigma=1$$

Las restricciones son las habituales:

$$C_t+I_t=Y_t$$

$$K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t$$

$$Y_t=Z_tF(K_t,A_tN_t)$$

$$\ell_t+N_t=1$$

$$\ln Z_t = \rho \ln Z_{t-1} + (1-\rho)\ln Z + \varepsilon_t$$

$$A_{t+1} = g_A A_t$$

A lo largo de la senda de crecimiento equilibrado, las tasas de crecimiento de la producción, el consumo, el capital y la inversión vienen dadas por la tasa de progreso tecnológico que afecta a la productividad del factor trabajo:

$$g_Y = g_C = g_K = g_I = g_A$$

De nuevo, debemos transformar el modelo original y convertir en estacionarias aquellas variables que no lo son:

Dicha transformación del modelo en otro equivalente en el que las variables sean estacionarias implica realizar el cambio de variable dividiendo cada una de las variables no estacionarias entre A_t.

La función de producción, bajo rendimientos constantes a escala, viene dada por:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{A_t} = \frac{1}{A_t} Z_t F(K_t, AN_t) = Z_t F(\tilde{K}_t, N_t)$$

La restricción de recursos es ahora:

$$\frac{C_t}{A_t} + \frac{I_t}{A_t} = \frac{Y_t}{A_t} \Rightarrow \tilde{C}_t + \tilde{I}_t = Z_t F(\tilde{K}_t, N_t)$$

La ecuación dinámica de acumulación del stock de capital tiene por expresión:

$$\frac{A_{t+1}}{A_{t+1}}\frac{K_{t+1}}{A_t} = \frac{I_t}{A_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t} \Rightarrow g_A \tilde{K}_{t+1} = \tilde{I}_t + (1-\delta)\tilde{K}_t$$

Por último, transformamos la función de utilidad.

Si la función de utilidad tiene esta forma funcional y $\tilde{C}_t = \frac{C_t}{A_t}$.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\tilde{C}_t, \ell_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(A_t\tilde{C}_t)^{1-\theta}}{1-\theta} \upsilon(\ell_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta \left(g_A\right)^{1-\theta} \frac{\tilde{C}_t^{1-\theta}}{1-\theta} \upsilon(\ell_t)$$

$$\theta \in \,]0,1[\, \cup \,]1,\infty[$$

dado que $A_0 = 1$, debe verificarse:

$$\beta^* = \beta(g_A)^{1-\theta}$$

Con la condición

$$\beta^* < 1 \Leftrightarrow \beta < (g_A)^{\theta-1}$$

Como el multiplicador de Lagrange depende inversamente del consumo, debemos modificarlo de la siguiente manera:

$$\tilde{\lambda}_t = A_t \lambda_t$$

Por tanto, el problema del planificador social que elige planes contingentes de consumo, oferta de trabajo y stock de capital para el periodo siguiente resuelve el siguiente problema transformado.

$$\underset{\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} u(\tilde{C}_t, \ell_t) \right]$$

sujeto a:

$$\tilde{C}_t + \tilde{I}_t = Z_t F(\tilde{K}_t, N_t)$$

$$g_A \tilde{K}_{t+1} = \tilde{I}_t + (1-\delta)\tilde{K}_t$$

$$\ell_t + N_t = 1$$

$$K_0 \quad dado$$

$$Z = 1$$

$$\tilde{C}_t, N_t, \tilde{K}_t > 0, \quad \forall t$$

Tenemos seis variables, donde las variables de control o de decisión, son el consumo,la oferta de trabajo, la demanda de ocio y la inversión, mientras que las variables de estado son el stock de capital inicial para cada periodo y el shock de productividad. Nuestro objetivo final es expresar las variables de decisión y el resto de variables endógenas como funciones del stock de capital en t que es nuestra variable endógena predeterminada y de la variable exógena

Z_t.

Esto es, las expresiones finales para nuestras variables tendrán la forma siguiente:

$$\hat{K}_{t+1} = K(\hat{K}_t, \hat{Z}_t); \hat{C}_t = C(\hat{K}_t, \hat{Z}_t); \hat{N}_t = N(\hat{K}_t, \hat{Z}_t); \hat{Y}_t = Y(\hat{K}_t, \hat{Z}_t);$$

$$\hat{I}_t = I(\hat{K}_t, \hat{Z}_t); \hat{\ell}_t = \ell(\hat{K}_t, \hat{Z}_t)$$

donde $\hat{X}_t = \frac{dX}{X} = \ln \tilde{X}_t - \ln \tilde{X}$.

Resolución del modelo.

Sustituyendo la identidad para el ocio en la función de utilidad y la inversión en la restricción de recursos, planteamos el lagrangiano o bien, dada la naturaleza recursiva del problema, a través de la ecuación de Bellman podemos obtener las condiciones de optimización de primer orden.

El lagrangiano viene dado por:

$$\mathcal{L}(\tilde{C}_t, N_t, \tilde{K}_{t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} \left[\left\{ u(\tilde{C}_t, 1 - N_t) + \tilde{\lambda}_t (Z_t \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - \tilde{C}_t - g_A \tilde{K}_{t+1} + (1-\delta)\tilde{K}_t) \right\} \right]$$

las condiciones de optimización vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{C}_t} = u_C(\tilde{C}_t, 1 - N_t) - \tilde{\lambda}_t = 0 \qquad ((3.39))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -u_\ell(\tilde{C}_t, 1 - N_t) + \tilde{\lambda}_t Z_t F_N(\tilde{K}_t, N_t) = 0 \qquad ((3.40))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{K}_{t+1}} = -\beta^{*t} g_A \tilde{\lambda}_t + \beta^{*t+1} \left[\tilde{\lambda}_{t+1} (Z_{t+1} F_K(\tilde{K}_{t+1}, N_{t+1}) + 1 - \delta) \right] = 0 \qquad ((3.41))$$

$$Z_t F(\tilde{K}_t, N_t) - \tilde{C}_t - g_A \tilde{K}_{t+1} + (1-\delta)\tilde{K}_t = 0 \qquad ((3.42))$$

Junto a la condición de transversalidad:

$$\underset{t\to\infty}{lím} \beta^{*t} \lambda_t E_t \tilde{K}_{t+1} = 0$$

Log-linealización.

En este modelo, expresaremos las ecuaciones log-linealizadas en términos de elasticidades.

Comenzemos diferenciando la primera ecuación estática, dada por (3.40).

$$u_{CC}d\tilde{C}_t + u_{C\ell}d\ell_t = d\lambda_t$$

$$\tilde{C}\frac{u_{CC}}{u_C}\frac{d\tilde{C}_t}{\tilde{C}} + \ell\frac{u_{C\ell}}{u_C}\frac{d\ell_t}{\ell} = \frac{d\tilde{\lambda}_t}{\tilde{\lambda}}$$

Aplicando $\ell_t = 1 - N_t$ y por tanto $d\ell_t = -dN_t$.

$$\tilde{C}\frac{u_{CC}}{u_C}\frac{d\tilde{C}_t}{\tilde{C}} - \frac{N}{1-N}\ell\frac{u_{C\ell}}{u_C}\frac{dN_t}{N} = \frac{d\tilde{\lambda}_t}{\tilde{\lambda}}$$

Definiendo las elasticidades de la utilidad marginal del consumo respecto al consumo y de la elasticidad de la utilidad marginal del consumo respecto al ocio como

$$\xi_{cc} = \frac{\frac{\partial u'(\tilde{C})}{u'(\tilde{C})}}{\frac{\partial \tilde{C}}{\tilde{C}}} = \frac{\frac{\partial u'(\tilde{C})}{\partial \tilde{C}}}{\frac{u'(\tilde{C})}{\tilde{C}}} = \frac{\tilde{C}}{u'(\tilde{C})}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{C}}\right)}{\partial \tilde{C}} = \frac{\tilde{C}}{u'(\tilde{C})}\frac{\partial^2 u(\tilde{C})}{\partial \tilde{C}^2} = \tilde{C}\frac{u_{CC}}{u_C}$$

$$\xi_{c\ell} = \frac{\frac{\partial u'(\tilde{C})}{u'(\tilde{C})}}{\frac{\partial \ell}{\ell}} = \frac{\frac{\partial u'(\tilde{C})}{\partial \ell}}{\frac{u'(\tilde{C})}{\ell}} = \frac{\ell}{u'(\tilde{C})}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{C}}\right)}{\partial \ell} = \frac{\ell}{u'(\tilde{C})}\frac{\partial^2 u(\tilde{C})}{\partial \tilde{C}\partial \ell} = \ell\frac{u_{C\ell}}{u_C}$$

podemos expresar esta condición linealizada como

$$\xi_{cc}\hat{C}_t - \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t \tag{(3.43)}$$

Diferenciando la segunda condición estática, dada por (3.40).

$$u_{c\ell}d\tilde{C}_t + u_{\ell\ell}d\ell_t = Z_t F_N d\lambda_t + \lambda F_N dZ_t + \lambda Z\left[F_{NK}d\tilde{K}_t + F_{NN}dN_t\right]$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación entre la condición de primer orden, obtenemos la ecuación log-linealizada.

$$\tilde{C}\frac{u_{C\ell}}{u_\ell}\frac{d\tilde{C}_t}{\tilde{C}}+\ell\frac{u_{\ell\ell}}{u_\ell}\frac{d\ell_t}{\ell}=\frac{d\lambda_t}{\lambda_t}+\frac{dZ_t}{Z_t}+\left[\tilde{K}\frac{F_{NK}}{F_N}\frac{d\tilde{K}_t}{\tilde{K}}+N\frac{F_{NN}}{F_N}\frac{dN_t}{N}\right]$$

Definiendo las elasticidades de las productividades marginales del trabajo respecto al capital y la del trabajo respecto él mismo y la elasticidad de la utilidad marginal del ocio respecto al consumo como

$$\xi_{nk}=\frac{\frac{\partial F_N}{F_N}}{\frac{\partial K}{K}}=\frac{K}{F_N}\frac{\partial^2 F}{\partial N\partial K}=\frac{\tilde{K}}{F_N}F_{NK}:\xi_{nn}=\frac{\frac{\partial F_N}{f_N}}{\frac{\partial N}{N}}=\frac{N}{F_N}\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}=\frac{N}{F_N}F_{NN}$$

$$\xi_{\ell C}=\frac{\frac{\partial u_\ell}{u_\ell}}{\frac{\partial C}{C}}=\frac{C}{u_\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial C\partial\ell}=\frac{C}{u_\ell}u_{c\ell}$$

$$\xi_{\ell\ell}=\frac{\frac{\partial u_\ell}{u_\ell}}{\frac{\partial \ell}{\ell}}=\frac{\ell}{u_\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial \ell^2}=\frac{\ell}{u_\ell}u_{\ell\ell}$$

La ecuación (3.40) viene expresada en términos de elasticidades como:

$$\xi_{\ell c}\hat{C}_t-\frac{N}{1-N}\xi_{\ell\ell}\hat{N}_t=\hat{\lambda}_t+\hat{Z}_t+\xi_{NK}\hat{K}_t+\xi_{NN}\hat{N}_t \qquad ((3.44))$$

En tercer lugar la ecuación de Euler (3.41), que diferenciada viene dada por:

$$\frac{g_A}{\beta^*}d\lambda_t=E_t\left[(ZF_K+1-\delta)d\lambda_{t+1}+\lambda F_K dZ_{t+1}+\lambda ZF_{KK}dK_{t+1}+\lambda ZF_{KN}dN_{t+1}\right]$$

Dado que en estado estacionario $\lambda_t=\lambda_{t+1}=\lambda$ y por tanto $g_A=\beta^*\left(ZF_K+1-\delta\right)$, si dividimos entre dicha expresión

$$\frac{d\tilde{\lambda}_t}{\tilde{\lambda}}=E_t\left[\frac{d\tilde{\lambda}_{t+1}}{\lambda}+\frac{\beta^*}{g_A}ZF_K\frac{dZ_{t+1}}{Z}+\frac{\beta^*}{g_A}ZF_{KK}K\frac{d\tilde{K}_{t+1}}{\tilde{K}}+\frac{\beta^*}{g_A}ZF_{KK}N\frac{dN_{t+1}}{N}\right]$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\beta^* ZF_K}{g_A}=1-\frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}$$

$$\xi_{KN}=\frac{\frac{\partial F_K}{F_K}}{\frac{\partial N}{N}}=\frac{N}{F_K}\frac{\partial^2 F}{\partial N\partial K}=\frac{N}{F_K}F_{KN}:\xi_{KK}=\frac{\frac{\partial F_K}{F_K}}{\frac{\partial K}{K}}=\frac{K}{F_K}\frac{\partial^2 F}{\partial K\partial K}=\frac{K}{F_K}F_{KK}$$

la ecuación (3.41) log-linealizada viene dada por:

$$\hat{\lambda}_t=E_t\hat{\lambda}_{t+1}+\left(1-\frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}\right)E_t\left(\hat{Z}_{t+1}+\xi_{KK}\tilde{K}_{t+1}+\xi_{KN}\hat{N}_{t+1}\right)$$

donde ξ_{KN} es la elasticidad de la productividad marginal del capital respecto al factor trabajo[34]. Las elasticidades respectivas que aparecen en la expresión pueden escribirse de forma alternativa si definimos la elasticidad del rendimiento bruto del capital con respecto al shock a la tecnología de la siguiente forma

$$R=ZF_K+1-\delta=1+r$$

y

$$\xi_{Rz}=\frac{\partial R}{\partial Z}\frac{Z}{R}=\frac{ZF_K}{ZF_K+1-\delta}$$

En estado estacionario

$$g_A=\beta^*\left(ZF_K+1-\delta\right)\Rightarrow ZF_K=\frac{g_A}{\beta^*}-(1-\delta)$$

$$\xi_{Rz}=1-\frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}$$

expresión que multiplica a los tres últimos sumandos de nuestra ecuación. Por otra parte, si definimos además las elasticidades del rendimiento bruto del capital respecto al capital y al trabajo respectivamente obtendremos

$$\xi_{Rk}=\frac{\partial R}{\partial K}\frac{K}{R}=\frac{K}{ZF_K+1-\delta}ZF_{KK}=\frac{KF_{KK}}{F_K}\frac{ZF_K}{ZF_K+1-\delta}=\xi_{kk}\left(1-\frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}\right)$$

$$\xi_{Rn}=\frac{\partial R}{\partial N}\frac{N}{R}=\frac{N}{ZF_K+1-\delta}ZF_{KN}=\frac{NF_{KN}}{F_K}\frac{ZF_K}{ZF_K+1-\delta}=\xi_{kn}\left(1-\frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}\right)$$

Finalmente, (3.41) tiene la siguiente expresión.

$$\hat{\lambda}_t=E_t\hat{\lambda}_{t+1}+\xi_{Rz}E_t\hat{Z}_{t+1}+\xi_{Rk}\tilde{K}_{t+1}+\xi_{Rn}E_t\hat{N}_{t+1}\qquad((3.45))$$

[34] Nótese que aunque $F_{NK}=F_{KN}$ las elasticidades ξ_{NK} y ξ_{KN} no son iguales

Finalmente, la restricción de recursos (3.42) diferenciada

$$FdZ_t + ZF_K K\frac{d\tilde{K}_t}{\tilde{K}} + ZF_N N\frac{dN_t}{N} = \tilde{C}\frac{d\tilde{C}_t}{\tilde{C}} + g_A\tilde{K}\frac{d\tilde{K}_{t+1}}{\tilde{K}} - (1-\delta)\tilde{K}\frac{d\tilde{K}_t}{\tilde{K}}$$

Dividiendo la ecuación entre ZF y expresándola en función de las participaciones de los factores en la producción $s_K = \frac{ZKF_K}{ZF}$ y $s_N = \frac{ZNF_N}{ZF}$.

$$\hat{Z}_t + s_K\hat{K}_t + s_N\hat{N}_t = \frac{C}{Y}\tilde{C}_t + \frac{g_A K}{Y}\tilde{K}_{t+1} - \frac{(1-\delta)K}{Y}\tilde{K}_t$$

Es posible expresar la ecuación anterior en función de la participación de la inversión bruta en el output y por tanto sustituir las relaciones capital-producto. A partir de la acumulación del stock de capital y a partir de la inversa de la tasa de inversión respecto al stock de capital en el estado estacionario.

$$g_A\tilde{K}_{t+1} = (1-\delta)\tilde{K}_t + \tilde{I}_t$$

El segundo sumando de la parte derecha de la ecuación log-linealizada viene dado por:

$$\frac{I/Y}{K/Y} = g_A - (1-\delta) \Rightarrow \frac{g_A s_i}{g_A - (1-\delta)} = g_A\frac{K}{Y} \Rightarrow \psi s_i = g_A\frac{K}{Y}$$

donde hemos definido

$$\psi = \frac{g_A}{g_A - (1-\delta)} > 1$$

Mientras que el tercer sumando es:

$$\frac{s_i}{K/Y} = g_A - (1-\delta) \Rightarrow s_i = g_A\frac{K}{Y} - (1-\delta)\frac{K}{Y} \Rightarrow -(1-\delta)\frac{K}{Y} = -s_i(\psi - 1)$$

Y por tanto, la ecuación (3.42) puede expresarse:

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + s_K\hat{K}_t + s_N\hat{N}_t = s_c\hat{C}_t + \psi s_i\tilde{K}_{t+1} - (\psi - 1)s_i\tilde{K}_t \qquad ((3.46))$$

Además de las condiciones de primer orden es posible expresar de forma log-linealizar la productividad del trabajo, la inversión y el tipo de interés real.

La inversión $I_t = Y_t - C_t$ diferenciada viene dada por:

$$dI_t = dY_t - dC_t$$

$$\frac{dI_t}{I} = \frac{Y}{I}\frac{dY_t}{Y} - \frac{C}{I}\frac{\Delta C_t}{C} \Rightarrow \hat{I}_t = \frac{1}{s_i}\hat{Y}_t - \frac{s_c}{s_i}\hat{C}_t$$

Sustituyendo la función de producción:

$$\hat{I}_t = \frac{1}{s_i}(\hat{Z}_t + s_K\hat{K}_t + s_N\hat{N}_t) - \frac{s_c}{s_i}\hat{C}_t \qquad ((3.47))$$

La productividad media del factor trabajo se define como:

$$p_{N_t} = \frac{Y_t}{N_t} \Rightarrow \widehat{p_N}_t = \hat{Y}_t - \hat{N}_t = \hat{Z}_t + s_K\hat{K}_t + (s_N - 1)\,\hat{N}_t \qquad ((3.48))$$

La productividad media del capital

$$p_{K_t} = \frac{Y_t}{K_t} \Rightarrow \widehat{p_K}_t = \hat{Y}_t - \hat{K}_t = \hat{Z}_t + (s_K - 1)\,\hat{K}_t + s_N\hat{N}_t \qquad ((3.49))$$

Por último, calculada la oferta de trabajo se deduce directamente la expresión para el ocio a partir de $\ell_t + N_t = 1$ tenemos $d\ell_t = -dN_t$,y por tanto

$$\frac{d\ell_t}{\ell} = -\frac{N}{\ell}\frac{dN_t}{N} \Rightarrow \widehat{\ell}_t = -\frac{N}{1-N}\hat{N}_t$$

El tipo de interés real es[35]

$$r = ZF_K - \delta$$

$$\hat{r}_t = \frac{dr_t}{r} = \frac{1}{ZF_K - \delta}d(ZF_K) = \frac{1}{ZF_K - \delta}\left[ZdF_K + F_K dZ\right]$$

$$\hat{r}_t = \frac{ZF_K}{ZF_K - \delta}\left[\hat{Z}_t + \frac{F_{KK}}{F_K}K\hat{K}_t + \frac{F_{KN}}{F_K}N\hat{N}_t\right]$$

[35] Con una función Cobb-Douglas, las productividades marginal del capital y del trabajo son proporcionales a suis respectivas productividades medias con lo que log-linealizadas dan el mismo resultado.

$$\hat{r}_t = \frac{ZF_K}{ZF_K - \delta}\left[\hat{Z}_t + \xi_{KK}\hat{K}_t + \xi_{KN}\hat{N}_t\right] = \frac{r+\delta}{r}\left[\hat{Z}_t + \xi_{KK}\hat{K}_t + \xi_{KN}\hat{N}_t\right] \tag{(3.50)}$$

Resolución del modelo.

Nuestro objetivo ahora es deducir las denominadas "policy functions" o controles óptimos, para las variables de decisión $\hat{C}_t, \hat{N}_t, \hat{K}_{t+1}$ y $\hat{\lambda}_{t+1}$, soluciones que vendrán dadas en función de la variable de estado endógena $\hat{K}_t$, de la variable de coestado $\hat{\lambda}_t$ y de la variable exógena $\hat{Z}_t$.

El resto de las variables del modelo pueden deducirse a partir de las soluciones obtenidas para éstas.

Expresaremos el sistema (3.43), (3.44), (3.45) y (3.46) en forma matricial.

En primer lugar consideramos las dos ecuaciones estáticas, (3.43) y (3.44) que hemos derivado de las condiciones de primer orden para el consumo y las horas de trabajo.

$$\xi_{cc}\hat{C}_t - \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t$$

$$\xi_{\ell c}\hat{C}_t - \left(\xi_{nn} + \frac{N}{1-N}\xi_{\ell\ell}\right)\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t + \xi_{nk}\hat{K}_t + \hat{Z}_t$$

$$M_{cc}\begin{pmatrix}\hat{C}_t\\ \hat{N}_t\end{pmatrix} = M_{cs}\begin{pmatrix}\hat{K}_t\\ \hat{\lambda}_t\end{pmatrix} + M_{ce}\hat{Z}_t$$

donde

$$M_{cc} = \begin{pmatrix}\xi_{cc} & -\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\\ \xi_{\ell c} & -\left(\xi_{nn} + \frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right)\end{pmatrix} : M_{cs} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \xi_{nk} & 1\end{pmatrix} : M_{ce} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Dado que M_{cc} es no singular, podemos despejar las dos variables consumo y oferta de trabajo

$$\begin{pmatrix}\hat{C}_t\\ \hat{N}_t\end{pmatrix} = M_{cc}^{-1}M_{cs}\begin{pmatrix}\hat{K}_t\\ \hat{\lambda}_t\end{pmatrix} + M_{cc}^{-1}M_{ce}\hat{Z}_t \tag{(3.51)}$$

Las dos ecuaciones dinámicas restantes nos relacionan la variable endógena predeterminada $\hat{K}_{t+1}$ y la variable de coestado con las variables de control y la variable exógena.

$$\xi_{Rk}\tilde{K}_{t+1} + E_t\hat{\lambda}_{t+1} = \hat{\lambda}_t - \xi_{Rn}E_t\hat{N}_{t+1} - \xi_{Rz}E_t\hat{Z}_{t+1}$$

$$\psi s_i\tilde{K}_{t+1} = ((\psi-1)s_i + s_k)\,\tilde{K}_t - s_c\hat{C}_t + s_n\hat{N}_t + \hat{Z}_t$$

Matricialmente, (3.45) y (3.46):

$$M_{ss0}\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} + M_{ss1}\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} = M_{sc0}\begin{pmatrix} \hat{C}_{t+1} \\ \hat{N}_{t+1} \end{pmatrix} +$$

$$+M_{sc1}\begin{pmatrix} \hat{C}_t \\ \hat{N}_t \end{pmatrix} + M_{se0}E_t\hat{Z}_{t+1} + M_{se1}\hat{Z}_t$$

donde:

$$M_{ss0} = \begin{pmatrix} \xi_{Rk} & 1 \\ \psi s_i & 0 \end{pmatrix} : M_{ss1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -((\psi-1)s_i + s_k) & 0 \end{pmatrix} : M_{sc0} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_{Rn} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{sc1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s_c & s_n \end{pmatrix} : M_{se0} = \begin{pmatrix} -\xi_{Rz} \\ 0 \end{pmatrix} : M_{se1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el sistema (3.51) en el sistema matricial para (3.45) y (3.46).

$$M_{ss0}\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} - M_{sc0}\left[M_{cc}^{-1}M_{cs}\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ \hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} + M_{cc}^{-1}M_{ce}E_t\hat{Z}_{t+1}\right] =$$

$$= -M_{ss1}\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} + M_{sc1}\left[M_{cc}^{-1}M_{cs}\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} + M_{cc}^{-1}M_{ce}\hat{Z}_t\right] + M_{se0}E_t\hat{Z}_{t+1} + M_{se1}\hat{Z}_t$$

Reorganizando términos, finalmente podemos representar el sistema de forma compacta como:

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} + RE_t\hat{Z}_{t+1} + Q\hat{Z}_t \qquad ((3.52))$$

El sistema lineal en diferencias con expectativas racionales es la forma reducida y estandar de un modelo lineal con expectativas racionales. Hemos supuesto que la matriz $M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{cs}$ es no singular, de tal forma que existe su inversa y donde las matrices W, R y Q vienen dadas por:

$$W = \left[M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{cs}\right]^{-1}\left[M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{cs} - M_{ss1}\right]$$

$$R = \left[M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{cs}\right]^{-1}\left[M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce} + M_{se0}\right]$$

$$Q = \left[M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{cs}\right]^{-1}\left[M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{ce} + M_{se1}\right]$$

puede ser resuelto a través de la descomposición de Jordan o a través de la diagonalización de la matriz W[36]. En lo que sigue asumiremos que los autovalores son reales y distintos y que como hemos visto en modelos anteriores verifican $0 < \lambda_1 < 1$ y $\lambda_2 > 1$. El procedimiento de solución implica que la matriz W puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$W = P\Lambda P^{-1} \qquad \acute{o} \qquad P^{-1}WP = \Lambda$$

donde P es la matriz de los autovectores de W y Λ es la matriz diagonal de autovalores.

Definimos las variables auxiliares x_t e y_t.

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix}$$

y por tanto el sistema en función de las variables auxiliares viene dado por

$$P\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{pmatrix} = WP\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + RE_t\hat{Z}_{t+1} + Q\hat{Z}_t$$

Premultiplicando por P^{-1}

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{pmatrix} = \Lambda\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + P^{-1}RE_t\hat{Z}_{t+1} + P^{-1}Q\hat{Z}_t$$

[36] Estamos además suponiendo que dicha matriz es diagonalizable. Sims (1997), King y Watson (1998) y Klein (1998) han desarrollado algoritmos de solución cuando dicha matriz de coeficientes es singular. Un enfoque alternativo podría haber sido utilizar la descomposición de Schur.

Denotemos con λ_1 el autovalor estable y λ_2 el autovalor inestable. Si además particionamos las matrices anteriores de la siguiente manera podemos calcular las ecuaciones dinámicas para las variables auxiliares x_t e y_t.

$$P = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} : P^{-1} = |P|^{-1} \begin{pmatrix} e_{22} & -e_{12} \\ -e_{21} & e_{11} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} : Q = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$x_{t+1} = \lambda_1 x_t + |P|^{-1} (e_{22}b_{11} - e_{12}b_{21}) E_t \hat{Z}_{t+1} + |P|^{-1} (e_{22}c_{11} - e_{12}c_{21}) \hat{Z}_t$$

$$E_t y_{t+1} = \lambda_2 y_t + |P|^{-1} (-e_{21}b_{11} + e_{11}b_{21}) E_t \hat{Z}_{t+1} + |P|^{-1} (-e_{21}c_{11} + e_{11}c_{21}) \hat{Z}_t$$

Para resolver las ecuaciones en diferencias anteriores resolvemos hacia atrás (backward) en el caso de la existencia de raíces estables (λ_1 en este caso) y hacia delante (forward) en el caso de raíces inestables (λ_2).

Con el fin de simplificar en alguna medida las notaciones, resumimos los coeficientes de las perturbaciones en:

$$\mathrm{r}_{11} = |P|^{-1} (e_{22}b_{11} - e_{12}b_{21}) \quad y \quad \mathrm{q}_{11} = |P|^{-1} (e_{22}c_{11} - e_{12}c_{21})$$

$$\mathrm{r}_{21} = |P|^{-1} (-e_{21}b_{11} + e_{11}b_{21}) \quad y \quad \mathrm{q}_{21} = |P|^{-1} (-e_{21}c_{11} + e_{11}c_{21})$$

La resolución para la variable auxiliar y_t implica iterar sucesivamente hacia delante T veces (o utilizar el operador forward como alternativa) en la expresión

$$y_t = \lambda_2^{-1} E_t y_{t+1} + \lambda_2^{-1} \left(\mathrm{r}_{21} E_t \hat{Z}_{t+1} + \mathrm{q}_{21} \hat{Z}_t \right)$$

Y la solución es

$$y_t = \lambda_2^{-T} E_t y_{t+T} - \lambda_2^{-1} \mathrm{r}_{21} \sum_{i=0}^{T-1} \lambda_2^{-i} E_t \hat{Z}_{t+1+i} - \lambda_2^{-1} \mathrm{q}_{21} \sum_{i=0}^{T-1} \lambda_2^{-i} \hat{Z}_{t+i}$$

Si esta solución se verifica para infinitos periodos debemos imponer una condición límite o terminal que satisfaga además la condición de transversalidad del modelo. Dicha condición viene dada por

$$\underset{T\to\infty}{lím}\,\lambda_2^{-T} y_{t+T} = 0$$

Este hecho permite expresar la solución para la variable auxiliar como

$$y_t = -\lambda_2^{-1}\mathrm{r}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\hat{Z}_{t+1+i} - \lambda_2^{-1}\mathrm{q}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\hat{Z}_{t+i} \qquad ((3.53))$$

En vez de resolver para la variable auxiliar x_t, volvamos a escribir el sistema que estamos resolviendo algo modificado

$$P\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} \mathrm{r}_{11} \\ 0 \end{pmatrix} E_t\hat{Z}_{t+1} +$$

$$+P\begin{pmatrix} \mathrm{q}_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\hat{Z}_t + P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_t y_{t+1}$$

Al haber premultiplicado por P, transformamos el sistema en variables auxiliares en el sistema original.

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} \mathrm{r}_{11} \\ 0 \end{pmatrix} E_t\hat{Z}_{t+1} +$$

$$+P\begin{pmatrix} \mathrm{q}_{11} \\ 0 \end{pmatrix}\hat{Z}_t + P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_t y_{t+1}$$

Sistema que desarrollado en los componentes de las matrices respectivas

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ E_t\hat{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11}\lambda_1 e_{22} & -e_{12}\lambda_1 e_{11} \\ e_{21}\lambda_1 e_{22} & -e_{12}\lambda_1 e_{12} \end{pmatrix} |P|^{-1}\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} +$$

$$+\mathrm{r}_{11}\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} E_t\hat{Z}_{t+1} + \mathrm{q}_{11}\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}\hat{Z}_t + \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} E_t y_{t+1}$$

Y desarrollando para $\hat{K}_{t+1}$

$$\hat{K}_{t+1} = |P|^{-1}\left(e_{11}\lambda_1 e_{22}\hat{K}_t - e_{12}\lambda_1 e_{11}\hat{\lambda}_t\right) + e_{11}\mathrm{r}_{11}E_t\hat{Z}_{t+1} + e_{11}\mathrm{q}_{11}\hat{Z}_t + e_{12}E_t y_{t+1}$$

Teniendo en cuenta que

$$E_t y_{t+1} = \lambda_2 y_t + \mathrm{r}_{21}E_t\hat{Z}_{t+1} + \mathrm{q}_{21}\hat{Z}_t$$

y que

$$y_t = |P|^{-1}\left(-e_{21}\hat{K}_t + e_{11}\hat{\lambda}_t\right) \Rightarrow \hat{\lambda}_t = \left(|P|\, y_t + e_{21}\hat{K}_t\right)e_{11}^{-1}$$

La expresión para $\hat{K}_{t+1}$

$$\hat{K}_{t+1} = |P|^{-1}\left(e_{11}\lambda_1 e_{22}\hat{K}_t - e_{12}\lambda_1 e_{11}\left(|P|\, y_t + e_{21}\hat{K}_t\right)e_{11}^{-1}\right) +$$

$$+e_{11}\mathrm{r}_{11}E_t\hat{Z}_{t+1} + e_{11}\mathrm{q}_{11}\hat{Z}_t + e_{12}(\lambda_2 y_t + \mathrm{r}_{21}E_t\hat{Z}_{t+1} + \mathrm{q}_{21}\hat{Z}_t)$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + (e_{11}\mathrm{r}_{11} + e_{12}\mathrm{r}_{21})\,E_t\hat{Z}_{t+1} + (e_{11}\mathrm{q}_{11} + e_{12}\mathrm{q}_{21})\,\hat{Z}_t + e_{12}\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,y_t$$

Dadas las expresiones para r_{11}, q_{11}, r_{21} y q_{21} obtenemos:

$$e_{11}\mathrm{r}_{11} + e_{12}\mathrm{r}_{21} = |P|^{-1}\,e_{11}\,(e_{22}b_{11} - e_{12}b_{21}) + e_{12}\,|P|^{-1}\,(-e_{21}b_{11} + e_{11}b_{21}) = b_{11}$$

$$e_{11}\mathrm{q}_{11} + e_{12}\mathrm{q}_{21} = e_{11}\,|P|^{-1}\,(e_{22}c_{11} - e_{12}c_{21}) + e_{12}\,|P|^{-1}\,(-e_{21}c_{11} + e_{11}c_{21}) = c_{11}$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + b_{11}E_t\hat{Z}_{t+1} + c_{11}\hat{Z}_t + e_{12}\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,y_t$$

Finalmente, introducimos la expresión calculada de la variable auxiliar y_t,(3.48) obteniendo la ecuación dinámica del stock de capital:

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + b_{11}E_t\hat{Z}_{t+1} + c_{11}\hat{Z}_t -$$

$$e_{12}\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,\lambda_2^{-1}\left[\mathrm{r}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\hat{Z}_{t+1+i} + \mathrm{q}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\hat{Z}_{t+i}\right]$$

El stock de capital depende de los shocks a la función de producción, corrientes y futuros. Sólo nos queda introducir en la misma el proceso concreto que sigue el shock de productividad[37].

De nuevo nuestro proceso para la perturbación viene dado por:

$$\ln Z_t = \rho \ln Z_{t-1} + (1-\rho)\ln Z + \varepsilon_t$$

$$\ln Z_t - \ln Z = \rho(\ln Z_{t-1} - \ln Z) + \varepsilon_t$$

$$\hat{Z}_t = \rho \hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow E_t \hat{Z}_t = \rho^i \hat{Z}_t$$

Aplicando este resultado a la solución para el stock de capital, obtenemos:

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t + (b_{11}\rho + c_{11})\hat{Z}_t - e_{12}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\lambda_2^{-1}\left[\mathrm{r}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}\rho^{i+1}\hat{Z}_t + \mathrm{q}_{21}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}\rho^i\hat{Z}_t\right]$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t + (b_{11}\rho + c_{11})\hat{Z}_t - e_{12}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left[\frac{\mathrm{r}_{21}\rho}{\lambda_2 - \rho} + \frac{\mathrm{q}_{21}}{\mu_2 - \rho}\right]\hat{Z}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t + \left\{b_{11}\rho + c_{11} - \frac{e_{12}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)}{\lambda_2 - \rho}(\rho \mathrm{r}_{21} + \mathrm{q}_{21})\right\}\hat{Z}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t + \pi_{kz}\hat{Z}_t \qquad ((3.54))$$

Obtenida la solución para el stock de capital, calculamos la solución para la variable de coestado,

$$\hat{\lambda}_t = \left(|P|\, y_t + e_{21}\hat{K}_t\right)e_{11}^{-1} \qquad y_t = -\frac{1}{\lambda_2 - \rho}\left[\rho \mathrm{r}_{21} + \mathrm{q}_{21}\right]\hat{Z}_t$$

Y por tanto

$$\hat{\lambda}_t = \frac{e_{21}}{e_{11}}\hat{K}_t - \frac{|P|\, e_{11}^{-1}}{\lambda_2 - \rho}\left(\rho \mathrm{r}_{21} + \mathrm{q}_{21}\right)\hat{Z}_t$$

que es la ecuación de la trayectoria estable del problema.

Funciones impulso-respuesta.

Podemos calcular ahora los efectos de un shock a la tecnología a partir

[37] Si el proceso $\left\{\hat{Z}_t\right\}$ es un proceso *ARMA*,la solución para los sumatorios puede consultarse en Hansen y Sargen (1980)

del sistema formado por la ecuación dinámica del stock de capital y del shock tecnológico. Para ello expresaremos las dos ecuaciones de forma matricial de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ \hat{Z}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \pi_{kz} \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{Z}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{t+1} \end{pmatrix}$$

Denotando el sistema anterior como

$$\widehat{s}_{t+1} = \mathrm{M}\widehat{s}_t + \varepsilon_{t+1}$$

La respuesta del modelo en el periodo $t+j$ a un shock unitario ε en el periodo $t+1$ sobre $\hat{K}_{t+1}$ y sobre $\hat{Z}_t$, puede obtenerse de la manera siguiente.

Adelantando un periodo el sistema anterior

$$\widehat{s}_{t+2} = \mathrm{M}\widehat{s}_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \quad \acute{o} \quad \widehat{s}_{t+2} = \mathrm{M}^2\widehat{s}_t + \mathrm{M}\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$$

El valor esperado condicionado a la información en t será por tanto

$$E_t\widehat{s}_{t+2} = \mathrm{M}E_t\widehat{s}_{t+1} = \mathrm{M}^2\widehat{s}_t$$

Y, el error de predicción o desviación de las variables respecto dicho valor esperado:

$$\widehat{s}_{t+2} - E_t\widehat{s}_{t+2} = \mathrm{M}\varepsilon_{t+1}$$

En general se verifica

$$\widehat{s}_{t+j} - E_t\widehat{s}_{t+j} = \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{M}^i\varepsilon_{t+j-i} = \mathrm{M}^{j-1}\varepsilon_{t+1}$$

dado que sólo tenemos un shock ε_{t+1}.

Con esta expresión podemos evaluar la desviación en cualquier momento del tiempo del stock de capital respecto de su estado estacionario ante un shock a la tecnología producido en $t+1$.

El cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas del vector de estado puede calcularse a partir de la descomposición de la matriz M como:

$$\mathrm{M} = \mathrm{E_M D_M E_M^{-1}}$$

donde $\mathrm{E_M}$ es la matriz de autovectores de M y $\mathrm{D_M}$ es la matriz diagonal de autovalores de M.

Definimos tanto el vector de estados transformado como el vector de innovaciones transformado como:

$$\widehat{s}_t^* = \mathrm{E_M^{-1}} \widehat{s}_t : \varepsilon_{t+1}^* = \mathrm{E_M^{-1}} \varepsilon_{t+1}$$

De esta forma, a partir de la dinámica del vector de variables de estado, premultiplicando por $\mathrm{E_M^{-1}}$, la dinámica del vector de variables de estado transformado viene dado por:

$$\mathrm{E_M^{-1}} \widehat{s}_{t+1} = \mathrm{E_M^{-1} M} \widehat{s}_t + \mathrm{E_M^{-1}} \varepsilon_{t+1}$$

$$\mathrm{E_M^{-1}} \widehat{s}_{t+1} = \mathrm{E_M^{-1} E_M D_M E_M^{-1}} \widehat{s}_t + \mathrm{E_M^{-1}} \varepsilon_{t+1}$$
$$\widehat{s}_{t+1}^* = \mathrm{D_M} \widehat{s}_t^* + \varepsilon_{t+1}^*$$

A partir de éste, la matriz de varianzas covarianzas para cualquier par de elementos $\hat{s}_{jt+1}^*$ y $\hat{s}_{it+1}^*$ es:

$$E\left[\widehat{s}_{jt+1}^* \widehat{s}_{it+1}^*\right] = E\left[\left(\mathrm{D_M} \widehat{s}_{jt}^* + \varepsilon_{jt+1}^*\right)\left(\mathrm{D_M} \widehat{s}_{it}^* + \varepsilon_{it+1}^*\right)\right] = (d_j d_i)\, E\left[\widehat{s}_{jt}^* \widehat{s}_{it}^*\right] + E\left[\varepsilon_{jt+1}^* \varepsilon_{it+1}^*\right]$$

Dado que dicha matriz es invariante en el tiempo $E\left[\widehat{s}_{jt+1}^* \widehat{s}_{it+1}^*\right] = E\left[\widehat{s}_{jt}^* \widehat{s}_{it}^*\right]$

$$E\left[\widehat{s}_{jt+1}^* \widehat{s}_{it+1}^*\right] = (1 - d_j d_i)^{-1} E\left[\varepsilon_{jt+1}^* \varepsilon_{it+1}^*\right] = (1 - d_j d_i)^{-1} \Sigma_\varepsilon$$

Deshaciendo los cambios obtenemos la matriz de varianzas-covarianzas para las variables de estado originales:

$$\Sigma_s = E\left[\widehat{s}_t' \widehat{s}_t'\right] = \mathrm{E_M} E\left[\widehat{s}_t^{*\prime} \widehat{s}_t^{*\prime}\right] \mathrm{E_M^{-1}}$$

El hecho de que el sistema sea autorregresivo de primer orden permite además calcular las autocovarianzas para cualquier adelanto o retardo, $k > 0$.

Premultiplicando el sistema dinámico por $\widehat{s}_t$ y aplicando el valor esperado:

$$E\left[\widehat{s}_t'\widehat{s}_{t+1}'\right] = E\left[\widehat{s}_t \mathrm{M}'\widehat{s}_t' + \widehat{s}_t\varepsilon_{t+1}\right] = E\left[\widehat{s}_t\widehat{s}_t'\right]\mathrm{M}'$$

y en general

$$E\left[\widehat{s}_t\widehat{s}_{t+j}'\right] = E\left[\widehat{s}_t\widehat{s}_t'\right]\mathrm{M}^{j\prime} : E\left[\widehat{s}_t\widehat{s}_{t-j}'\right] = \mathrm{M}^j E\left[\widehat{s}_t\widehat{s}_t'\right]$$

Solución para el resto de las variables.

Obtenida la solución para el stock de capital, el resto de variables pueden ser calculadas a partir de aquélla.

En primer lugar, a partir del sistema (3.51)

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_t \\ \hat{N}_t \end{pmatrix} = M_{cc}^{-1} M_{cs} \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} + M_{cc}^{-1} M_{ce} \hat{Z}_t$$

Calculando las matrices de coeficientes, nuestras variables de decisión consumo y horas trabajadas son

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_t \\ \hat{N}_t \end{pmatrix} = |M_{cc}|^{-1} \begin{pmatrix} \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\xi_{nk} & -\left(\xi_{nn} + \frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right) + \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell} \\ \xi_{cc}\xi_{nk} & -\xi_{\ell c} + \xi_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{\lambda}_t \end{pmatrix} +$$

$$+ |M_{cc}|^{-1} \begin{pmatrix} \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell} \\ \xi_{cc} \end{pmatrix} \hat{Z}_t$$

Introduciendo la expresión solución para $\hat{\lambda}_t$.

$$|M_{cc}|\,\hat{C}_t = \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\xi_{nk}\hat{K}_t + \left[-\left(\xi_{nn} + \frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right) + \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{e_{21}}{e_{11}}\hat{K}_t + \frac{|P|\, e_{11}^{-1}}{\lambda_2 - \rho}\left(\rho \mathrm{r}_{21} + \mathrm{q}_{21}\right)\hat{Z}_t\right] + \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\hat{Z}_t$$

$$|M_{cc}|\,\hat{C}_t = \left\{\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\xi_{nk} + \frac{e_{21}}{e_{11}}\left[-\left(\xi_{nn} + \frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right) + \frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right]\right\}\hat{K}_t +$$

$$\left\{\left[-\left(\xi_{nn}+\frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right)+\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right]\left[\frac{|P|\,e_{11}^{-1}}{\lambda_2-\rho}\left(\rho\mathrm{r}_{21}+\mathrm{q}_{21}\right)\right]+\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right\}\hat{Z}_t$$

De manera análoga la condición de equilibrio en el mercado de trabajo:

$$|M_{cc}|\,\hat{N}_t=\xi_{cc}\xi_{nk}\hat{K}_t+(-\xi_{\ell c}+\xi_{cc})\left(\frac{e_{21}}{e_{11}}\hat{K}_t+\frac{|P|\,e_{11}^{-1}}{\lambda_2-\rho}\left(\rho\mathrm{r}_{21}+\mathrm{q}_{21}\right)\hat{Z}_t\right)+\xi_{cc}\hat{Z}_t$$

$$|M_{cc}|\,\hat{N}_t=\left[\xi_{cc}\xi_{nk}+(-\xi_{\ell c}+\xi_{cc})\frac{e_{21}}{e_{11}}\right]\hat{K}_t+\left[\frac{|P|\,e_{11}^{-1}}{\lambda_2-\rho}(-\xi_{\ell c}+\xi_{cc})\left(\rho\mathrm{r}_{21}+\mathrm{q}_{21}\right)+\xi_{cc}\right]\hat{Z}_t$$

En suma, al conseguir expresar las dos variables restantes del sistema en función de las variables exógena y predeterminada hemos conformado lo que se denomina la representación estado-espacio (*state space)* del modelo, representación que es

$$\widehat{s}_{t+1}=\mathrm{M}\widehat{s}_t+\varepsilon_{t+1}$$

$$\widehat{d}_t=\mathrm{D}\widehat{s}_t$$

donde

$$\widehat{d}_t=\begin{pmatrix}\hat{C}_t\\ \hat{N}_t\end{pmatrix}\qquad y\qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}\pi_{ck} & \pi_{cz}\\ \pi_{nk} & \pi_{nz}\end{pmatrix}$$

y

$$\pi_{ck}=|M_{cc}|^{-1}\left\{\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\xi_{nk}+\frac{e_{21}}{e_{11}}\left[-\left(\xi_{nn}+\frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right)+\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right]\right\}$$

$$\pi_{cz}=|M_{cc}|^{-1}\left\{\left[-\left(\xi_{nn}+\frac{1-N}{N}\xi_{\ell\ell}\right)+\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right]\left[\frac{|P|\,e_{11}^{-1}}{\lambda_2-\rho}\left(\rho\mathrm{r}_{21}+\mathrm{q}_{21}\right)\right]+\frac{N}{1-N}\xi_{c\ell}\right\}$$

$$\pi_{nk}=|M_{cc}|^{-1}\left[\xi_{cc}\xi_{nk}+(-\xi_{\ell c}+\xi_{cc})\frac{e_{21}}{e_{11}}\right]$$

$$\pi_{nz}=|M_{cc}|^{-1}\left[\frac{|P|\,e_{11}^{-1}}{\lambda_2-\rho}(-\xi_{\ell c}+\xi_{cc})\left(\rho\mathrm{r}_{21}+\mathrm{q}_{21}\right)+\xi_{cc}\right]$$

Finalmente, las soluciones para producción, inversión y productividades medias del capital y del trabajo pueden obtenerse a partir de sus expresiones log-linealizadas. Nuestro objetivo ahora es ampliar el vector $\hat{d}_t$ y por tanto la matriz D o matriz de impacto.

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_t \\ \hat{I}_t \\ \widehat{p_N}_t \\ \widehat{p_K}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_k & 1 \\ \frac{s_k}{s_i} & \frac{1}{s_i} \\ s_k & 1 \\ s_k - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{Z}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_n \\ -\frac{s_c}{s_i} & \frac{s_n}{s_i} \\ 0 & s_n - 1 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_t \\ \hat{N}_t \end{pmatrix}$$

donde hemos excluido tanto la demanda de ocio como el tipo de interés por su relación tan sencilla que las conectan con las horas trabajadas y con la productividad marginal del capital. Definiendo el sistema para el resto de variables como $\widehat{v}_t$.

$$\widehat{v}_t = V_s \widehat{s}_t + V_d \widehat{d}_t$$

Utilizando $\widehat{d}_t = \mathrm{D}\widehat{s}_t$ y la ley distributiva a la derecha obtenemos

$$\widehat{v}_t = V_s \widehat{s}_t + V_d \mathrm{D} \widehat{s}_t = [V_s + V_d \mathrm{D}]\, \widehat{s}_t$$

La matriz $[V_s + V_d\mathrm{D}]$ tiene por expresión

$$V_s + V_d\mathrm{D} = \begin{pmatrix} s_k + s_n \pi_{nk} & 1 + s_n \pi_{nz} \\ \frac{s_k}{s_i} - \frac{s_c}{s_i}\pi_{ck} + \frac{s_n}{s_i}\pi_{nk} & \frac{1}{s_i} - \frac{s_c}{s_i}\pi_{cz} + \frac{s_n}{s_i}\pi_{nz} \\ s_k + \pi_{nk} & 1 + (s_n - 1)\pi_{nz} \\ (s_k - 1) + s_n \pi_{nk} & 1 + s_n \pi_{nz} \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_t \\ \hat{I}_t \\ \widehat{p_N}_t \\ \widehat{p_K}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_k + s_n \pi_{nk} & 1 + s_n \pi_{nz} \\ \frac{s_k}{s_i} - \frac{s_c}{s_i}\pi_{ck} + \frac{s_n}{s_i}\pi_{nk} & \frac{1}{s_i} - \frac{s_c}{s_i}\pi_{cz} + \frac{s_n}{s_i}\pi_{nz} \\ s_k + \pi_{nk} & 1 + (s_n - 1)\pi_{nz} \\ (s_k - 1) + s_n \pi_{nk} & 1 + s_n \pi_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{Z}_t \end{pmatrix}$$

Ahora todas las variables endógenas del modelo están formuladas como funciones de la variable de estado, el stock de capital como variable endógena predeterminada y de la perturbación tecnológica a la función de producción como variable exógena del problema.

Finalmente podemos reunir todas las variables endógenas en una sola matriz

$$\widehat{dv_t} = \Pi \widehat{s}_t$$

donde

$$\widehat{dv_t} = \begin{pmatrix} \widehat{d}_t \\ \widehat{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_t \\ \hat{N}_t \\ \hat{Y}_t \\ \hat{I}_t \\ \widehat{p_N}_t \\ \widehat{p_K}_t \end{pmatrix} : \Pi = \begin{pmatrix} \mathrm{D} \\ V_s + V_d \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{ck} & \pi_{cz} \\ \pi_{nk} & \pi_{nz} \\ \pi_{yk} & \pi_{yz} \\ \pi_{ik} & \pi_{iz} \\ \pi_{p_N k} & \pi_{p_N z} \\ \pi_{p_K k} & \pi_{p_K z} \end{pmatrix}$$

La matriz Π nos da el multiplicador de impacto sobre las variables endógenas. La primera columna nos genera la desviación respecto el estado estacionario de las variables endógenas cuando se produce una desviación del stock de capital respecto su estado estacionario y en ausencia de shocks tecnológicos.

La segunda columna nos explica el cambio en las variables endógenas cuando se produce la perturbación tecnológica.

El sistema

$$\widehat{s}_{t+1} = \mathrm{M}\widehat{s}_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\widehat{dv_t} = \Pi \widehat{s}_t$$

nos permite computar las propiedades cíclicas del modelo, y como puede intuirse fácilmente tanto la matriz de impacto como la del vector de variables de estado dependen del conjunto de parámetros del modelo, que están incluidos en la función de utilidad, en la función de producción y en el proceso que sigue la propia perturbación.

Podemos calcular las desviaciones del vector de variables $\widehat{dv_t}$ con respecto a sus valores esperados.

Sustituyendo recursivamente la ecuación de estado en la ecuación de medida

$$\widehat{dv_t} = \Pi \widehat{s}_t : \widehat{dv}_{t+1} = \Pi \widehat{s}_{t+1} \Rightarrow \widehat{dv}_{t+1} = \Pi \mathrm{M} \widehat{s}_t + \Pi \varepsilon_{t+1} : \widehat{dv}_{t+2} = \Pi \mathrm{M} \widehat{s}_{t+1} + \Pi \varepsilon_{t+2}$$

$$\widehat{dv}_{t+2} = \Pi \mathrm{M}^2 \widehat{s}_t + \Pi \mathrm{M} \varepsilon_{t+1} + \Pi \varepsilon_{t+2}$$

$$\widehat{dv}_{t+j} = \Pi \left[\mathrm{M}^j \widehat{s}_t + \mathrm{M}^{j-1}\varepsilon_{t+1} + \mathrm{M}^{j-2}\varepsilon_{t+2} + ... + \varepsilon_{t+j} \right]$$

Como

$$E_t \left(\widehat{dv}_{t+j} \right) = \Pi \mathrm{M}^j \widehat{s}_t$$

$$\widehat{dv}_{t+j} - E_t \left(\widehat{dv}_{t+j} \right) = \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{M}^i \varepsilon_{t+j-i} = \mathrm{M}^{j-1}\varepsilon_{t+1}$$

ya que sólo tenemos un shock en el periodo $t+1$.

Conocida la matriz de varianzas covarianzas del vector de estado $\widehat{s}_t$ podemos calcular la matriz de autocovarianzas de orden j para la matriz $\widehat{dv}_t$.

$$E \left(\widehat{dv}_t \widehat{dv}'_{t+j} \right) = \Pi E(\widehat{s}_t \widehat{s}'_{t+j}) \Pi' = \Pi \mathrm{M}^j \Sigma_s \Pi'$$

La respuesta óptima ante una desviación del capital respecto a su estado estacionario.

La dinámica del stock de capital viene dada por:

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1 \hat{K}_t$$

junto a la primera columna de la matriz Π,en la que sus coeficientes son las elasticidades instantáneas de las variables del modelo respecto las desviaciones del stock de capital de su estado estacionario.

Si el stock de capital está por encima de su valor de estado estacionario, la riqueza de las economías domésticas es mayor, la productividad marginal del trabajo es alta y por tanto el salario real aumenta mientras que la productividad marginal del capital es baja con lo que el tipo de interés real cae. El primer y el tercer factor implican un descenso transitorio en las horas trabajadas debido al efecto riqueza y al efecto de sustitución intertemporal. El segundo factor opera en dirección contraria debido a la sustitución entre ocio y consumo. En general, los efectos riqueza y renta superan al efecto sustitución.

La respuesta del output depende de la respuesta de las horas de trabajo y de la desviación del stock de capital. El efecto riqueza positivo aumenta el consumo presente y la inversión cae por debajo de su nivel de estado estacionario.

El hecho de que la desviación del stock de capital sea transitoria y dado que $\lambda_1 < 1$ hace que dicha variable converja a largo plazo hacia su estado estacionario al igual que el resto de las variables endógenas del modelo.

La respuesta ante un shock de productividad.

Consideremos ahora una desviación del 1 % de $\hat{Z}_t$ de su estado estacionario. La dinámica para el stock de capital es:

$$\hat{K}_{t+1} = \pi_{kz}\hat{Z}_t$$

y la segunda columna de la matriz Π nos da la respuesta inmediata o el impacto sobre el resto de las variables del modelo.

Cuando el modelo es sujeto a un shock de productividad, ε_{t+1}, podemos distinguir dos canales de propagación del shock sobre las variables endógenas: un efecto directo medido por la columna derecha de la matriz Π y un efecto indirecto debido a la desviación del capital de su estado estacionario medido por la columna izquierda de dicha matriz, ya que éste se ve afectado también por el shock tecnológico.

La sensibilidad de los coeficientes de M y Π a los parámetros del modelo nos revelan cuantitativamente el mecanismo económico del modelo RBC, lo cual hace necesario calibrar el modelo.

Todas estas respuestas dependen de los parámetros especificados para las preferencias y para la función de producción que están incluidas en las elasticidades de los coeficientes del sistema linealizado.

Si el shock es puramente transitorio, las economías domésticas podrían consumir totalmente el aumento del output en el primer periodo sin cambiar la inversión o su oferta de trabajo. En este caso, el shock no tendrá un efecto persistente sobre el capital, ya que éste permanecerían en su estado estacionario. Al contrario, las economías domésticas pueden decidir invertir una parte del aumento de output y consumir más en el futuro. Todo depende del deseo de suavizar los niveles de consumo a lo largo del tiempo.

El shock tecnológico induce dos efectos opuestos intertemporalmente: un efecto riqueza positivo que reduce las horas de trabajo y la inversión y un efecto de sustitución intertemporal que induce al comportamiento contrario, a sustituir horas de ocio por horas de trabajo. El efecto sustitución sobre el equilibrio en las horas trabajadas es el resultado del trade-off entre consumo y ocio corriente.

La influencia de la elasticidad de sustitución intertemporal en el ocio es crucial ya que mientras mayor sea ésta, mayor es la respuesta de las horas trabajadas al shock de productividad, así como la respuesta del output, del consumo y de la inversión.

Por otra parte, mientras más persistente es el shock, mayor es el efecto riqueza y más débil es el efecto sustitución, con lo que la respuesta de las horas de trabajo y de la inversión son también más débiles.

En suma, como hemos visto reiteradamente, la respuesta de las variables depende en gran medida de la respuesta de las horas de trabajo a la perturbación y éstas a su vez del mecanismo de sustitución intertemporal entre ocio y trabajo.

Una medida de la misma es la elasticidad de sustitución intertemporal del ocio o alternativamente de las horas de trabajo, que se define como el cociente en la variación porcentual del ratio $\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}$ con respecto al ratio de salarios $\frac{w_t}{w_{t+1}}$, como vimos en el epígrafe 6.

Esto es, si por ejemplo $\frac{w_t}{w_{t+1}}$ disminuye entonces, el individuo sustituye ocio actual por horas de trabajo y por tanto aumentará el cociente $\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}$.

$$\epsilon_w^\ell = \frac{\frac{d\left(\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}\right)}{\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}}}{\frac{d\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)}{\frac{w_t}{w_{t+1}}}} = \frac{d\ln\left(\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}\right)}{d\ln\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)}$$

Para una función de utilidad no separable en consumo y ocio esta elasticidad es igual a como puede comprobarse en el apéndice 3.2.

$$\epsilon_w^\ell = \frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}\xi_{\ell c}}$$

mientras que la elasticidad de sustitución intertemporal de la oferta de trabajo viene dada por:

$$\epsilon_w^n = -\frac{1-N}{N}\frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{\ell\ell}-\xi_{c\ell}\xi_{\ell c}} = -\frac{1-N}{N}\epsilon_w^\ell \qquad ((3.55))$$

Calibración y formas funcionales.

Podemos introducir en este momento las formas funcionales para la función de preferencias y para la función de producción.

$$U(\tilde{C}_t, 1-N_t) = \frac{\left(\tilde{C}_t^a \ell_t^{1-a}\right)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1$$

Para $\theta \to 1$

$$U(\tilde{C}_t, 1-N_t) = a \ln \tilde{C}_t + (1-a)\ln(1-N_t)$$

y en este caso, el factor de descuento es:

$$\beta^* = \beta(g_A)^{1-\theta}$$

La función agregada de producción:

$$Y_t = Z_t K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha} \Rightarrow \tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{A_t} = Z_t \tilde{K}_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

Las elasticidades de las utilidades marginales del consumo y del ocio con respecto al consumo y al ocio vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\xi_{cc} = a(1-\theta)-1 : \xi_{c\ell} = (1-a)(1-\theta) : \xi_{\ell\ell} = (1-a)(1-\theta)-1 : \xi_{\ell c} = a(1-\theta)$$

La elasticidad intertemporal en la oferta de trabajo es por tanto:

$$\epsilon_w^n = -\frac{1-N}{N}\frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{\ell\ell}-\xi_{c\ell}\xi_{\ell c}} = \frac{1-N}{N}\frac{1}{a+\theta(1-a)} > 0$$

Las elasticidades implicadas en la función de producción son:

$$\xi_{kk} = (\alpha - 1) : \xi_{kn} = 1 - \alpha : \xi_{nk} = \alpha : \xi_{nn} = -\alpha$$

$$\xi_{Rz} = 1 - \frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A} : \xi_{Rk} = \left(1 - \frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}\right)(\alpha - 1) : \xi_{Rn} = -\left(1 - \frac{\beta^*(1-\delta)}{g_A}\right)\alpha$$

$$s_k = \frac{F_K K}{Y} = \frac{\alpha \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} k}{k^\alpha n^{1-\alpha}} = \alpha$$

$$s_n = \frac{F_N N}{Y} = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} n}{k^\alpha n^{1-\alpha}} = 1 - \alpha$$

El estado estacionario viene dado por las siguientes expresiones:

A partir de la ecuación de acumulación del stock de capital:

$$\frac{\tilde{I}}{\tilde{K}} = (g_A - 1 + \delta)$$

$$\psi = \frac{g_A}{g_A - (1-\delta)}$$

El estado estacionario para el stock de capital viene dado por la expresión

$$\frac{g_A}{\beta^*} = \alpha \tilde{K}^{\alpha-1} N^{1-\alpha} + 1 - \delta \Rightarrow \frac{\tilde{K}}{N} = \left(\frac{\frac{g_A}{\beta^*} - (1-\delta)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

La productividad media es:

$$\frac{\tilde{Y}}{N} = \left(\frac{\tilde{K}}{N}\right)^{\alpha}$$

La distribución de la renta o de la producción total en consumo e inversión también depende del ratio capital-trabajo. De esta forma

$$s_i = \frac{\tilde{I}}{\tilde{Y}} = \frac{(g_A - (1-\delta))\tilde{K}}{\tilde{K}^\alpha \tilde{N}^{1-\alpha}} = (g_A - (1-\delta))\left(\frac{\tilde{K}}{N}\right)^{1-\alpha}$$

O, como ya hemos calculado el estado estacionario para la relación capital per cápita, podemos expresar la participación de la inversión en la renta nacional como

$$s_i = \alpha \frac{g_A - (1-\delta)}{\frac{g_A}{\beta^*} - (1-\delta)}$$

La participación del consumo en la producción es simplemente:

$$s_c = 1 - s_i$$

Con la función de utilidad no separable y multiplicativa, tenemos dos parámetros aún por determinar que son a y θ,que definen la función de utilidad.

El parámetro a de la función de utilidad, puede obtenerse a partir de las condiciones de primer orden (3.40) y (3.41).

$$a\tilde{C}^{a-1}\ell^{1-a}\left(\tilde{C}^a\ell^{1-a}\right)^{-\theta} = \tilde{\lambda}$$

$$\tilde{\lambda}Z(1-\alpha)\tilde{K}^\alpha N^{-\alpha} = (1-a)\left(\tilde{C}^a\ell^{1-a}\right)^{-\theta}\tilde{C}^{1-\theta}\ell_t{}^{-a}$$

Eliminando $\tilde{\lambda}$.

$$a = \frac{\tilde{C}}{(1-\alpha)\left(\frac{\tilde{K}}{N}\right)^\alpha(1-N) + \tilde{C}}$$

Los valores utilizados en la calibración son los siguientes.

N	α	δ	β^*	g_A	ρ	σ_z	a
0.30	0.40	0.025	0.988	1.004	0.95	0.9	0.34

Dadas las soluciones que hemos derivado podemos obtener los parámetros que nos dan la respuesta de cada variable ante un cambio en el stock de capital o al shock tecnológico.

Análisis de sensibilidad.

Con los parámetros anteriores el modelo puede ser resuelto. El análisis de cálculo que realizamos ahora es observar cómo cambian los parámetros de la matriz Π cuando cambian tanto las elasticidades de la oferta de trabajo como del parámetro de persistencia de la perturbación.

En la siguiente tabla resumimos el cambio en la respuesta inmediata de las variables endógenas cuando la aumenta la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo.

Tabla 3.9		
θ	4	0.5
ϵ_w^n	0.8	3.5
π_{cz}	0.34	0.35
π_{nz}	0.33	0.75
π_{yz}	1.34	1.45
π_{iz}	3.10	3.95
π_{wz}	0.85	0.62
π_{rz}	1.10	1.30

El mismo tipo de análisis puede hacerse con respecto a la persistencia de la perturbación tecnológica. En la tabla siguiente realizamos el mismo ejercicio para dos valores del parámetro de autocorrelación del shock de productividad, fijado un valor para la elasticidad intertemporal del trabajo.

Tabla 3.10		
	$\epsilon_w^n = 2.3$	$\theta = 1$
ρ_z	0.25	0.95
π_{cz}	0.12	0.20
π_{nz}	1.30	1.10
π_{yz}	1.76	1.60
π_{iz}	5.70	5.50
π_{wz}	0.45	0.59
π_{rz}	0.32	1.20

Mientras más persistente es la perturbación mayor es el efecto riqueza y más débil es el efecto sustitución, con lo que la respuesta de las horas trabajadas y la producción responden en menor medida al shock tecnológico.

3.9. El modelo de Ciclo Económico Real de Hansen con trabajo divisible.

Gary Hansen (1985) constituye una referencia básica en la literatura de Ciclo Real al comparar un modelo con trabajo indivisible[38] con trabajo divisible. El objetivo de Hansen es demostrar cómo la introducción de trabajo indivisible puede mejorar la capacidad del modelo al replicar sobre todo la correlación entre horas trabajadas y productividad o salarios.

El modelo de trabajo divisible es similar al presentado en el epígrafe 5 donde la función de utilidad es logarítmica y separable en ocio y consumo.

$$u(C_t, N_t) = \ln C_t + A \ln(1 - N_t)$$

Las restricciones del problema son las habituales:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\hat{Z}_t = \rho \hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

La solución será obtenida a partir del planteamiento de la ecuación de Bellman:

$$V(K_t, Z_t) = \max_{\{C_t, K_{t+1}, N_t\}} [\ln C_t + A \ln(1 - N_t) + \beta E_t V(K_{t+1}, Z_{t+1})]$$

sujeta a la restricción

$$Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

[38] El modelo con trabajo indivisible será expuesto en el capítulo 5.

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial V}{\partial C_t}=\frac{1}{C_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}\frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t}=0\Rightarrow\frac{1}{C_t}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} \tag{(3.56)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_t}=-\frac{A}{1-N_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}\frac{\partial K_{t+1}}{\partial N_t}=0\Rightarrow\frac{A}{1-N_t}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}(1-\alpha)Z_tK_t^{\alpha}N_t^{-\alpha} \tag{(3.57)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_t}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}\frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+2}}\left(\alpha Z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha}+(1-\delta)\right) \tag{(3.58)}$$

$$Z_tK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}=C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t \tag{(3.59)}$$

Sustituyendo (3.56) y por tanto eliminando el término $\beta E_t\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}}$ obtenemos el sistema:

$$\frac{A}{1-N_t}C_t=(1-\alpha)Z_tK_t^{\alpha}N_t^{-\alpha} \tag{(3.60)}$$

$$1=\beta E_t\left[\frac{C_t}{C_{t+1}}\left(\alpha Z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}N_{t+1}^{-\alpha}+(1-\delta)\right)\right] \tag{(3.61)}$$

$$Z_tK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}=C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t \tag{(3.61)}$$

Utilizando el hecho de que en competencia perfecta, la renta del capital es igual a la productividad marginal del capital (r_t) podemos expresar el sistema de forma alternativa como:

$$AC_t=(1-\alpha)(1-N_t)\frac{Y_t}{N_t}$$

$$1=\beta E_t\left[\frac{C_t}{C_{t+1}}(r_{t+1}+(1-\delta)\right]$$

$$Y_t=C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t$$

$$Y_t=Z_tK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha} \tag{(3.62)}$$

$$r_t=\alpha\frac{Y_t}{K_t} \tag{(3.63)}$$

Los valores de estado estacionario vienen dados como sabemos a partir de las condiciones de primer orden:

$$AC = (1-\alpha)(1-N)\frac{Y}{N} : 1 = \beta(r+(1-\delta)) : Y = C+\delta K : Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha} : r = \alpha\frac{Y}{K}$$

$$\frac{AC}{(1-\alpha)y} = 1 - \frac{1}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{1+\frac{AC}{(1-\alpha)Y}}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{C}{Y} = 1 - \delta\frac{K}{Y} : \frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{r} : r = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$$

La expresilón para las horas trabajadas en estado estacionario viene dada por:

$$N = \frac{1}{1+\frac{AC}{(1-\alpha)Y}} = \frac{1}{1+\frac{A}{1-\alpha}\left[1-\frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]}$$

$$K = N\left[\frac{\alpha Z}{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Log-linealización del modelo.

En primer lugar, la condición (3.60) viene log-linealizada de la siguiente manera:

$$AC_t = (1-N_t)(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} - (1-\alpha)Y_t$$

$$AC\exp\left\{\hat{C}_t\right\} = (1-\alpha)\left[\frac{Y\exp\left\{\hat{Y}_t\right\}}{N\exp\left\{\hat{N}_t\right\}} - Y\exp\left\{\hat{Y}_t\right\}\right]$$

$$0 \approx -AC\exp\left\{\hat{C}_t\right\} + (1-\alpha)\left[\frac{Y}{N}\exp\left\{\hat{Y}_t - \hat{N}_t\right\} - Y\exp\left\{\hat{Y}_t\right\}\right]$$

$$AC(1+\hat{C}_t) = (1-\alpha)\left[\frac{Y}{N}(1+\hat{Y}_t-\hat{N}_t) - Y(1+\hat{Y}_t)\right]$$

$$AC - (1-\alpha)Y\left(\frac{1-N}{N}\right) \approx -AC\hat{C}_t + \frac{Y}{N}\left(\hat{Y}_t - \hat{N}_t\right) - Y\hat{Y}_t$$

$$0 \approx -AC\hat{C}_t + Y(1-\alpha)\left(\frac{1-N}{N}\right)\hat{Y}_t - (1-\alpha)\frac{Y}{N}\frac{1-N}{1-N}\hat{N}_t$$

$$0 \approx -\hat{C}_t + \hat{Y}_t - \frac{\hat{N}_t}{1-N}$$

La ecuación de Euler, (3.61):

$$1 = \beta E_t \frac{\exp\left\{\hat{C}_t\right\}}{\exp\left\{\hat{C}_{t+1}\right\}} r \exp\left\{\hat{r}_{t+1}\right\} + (1-\delta)\frac{\exp\left\{\hat{C}_t\right\}}{\exp\left\{\hat{C}_{t+1}\right\}}$$

$$1 = \beta E_t r \exp\left\{\hat{C}_t - \hat{C}_{t+1} + \hat{r}_{t+1}\right\} + (1-\delta)E_t \exp\left\{\hat{C}_t - \hat{C}_{t+1}\right\}$$

$$1 \approx \beta r E_t\left(1 + \hat{C}_t - \hat{C}_{t+1} + \hat{r}_{t+1}\right) + (1-\delta)E_t\left(1 + \hat{C}_t - \hat{C}_{t+1}\right) = E_t\left[1 + \hat{C}_t - \hat{C}_{t+1} + \beta r \hat{r}_{t+1}\right]$$

$$0 \approx \hat{C}_t - E_t\hat{C}_{t+1} + \beta r E_t \hat{r}_{t+1}$$

La restricción de recursos, (3.61):

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

$$Y\exp\left\{\hat{Y}_t\right\} = C\exp\left\{\hat{C}_t\right\} + K\exp\left\{\hat{K}_{t+1}\right\} - (1-\delta)\exp\left\{\hat{K}_t\right\}$$

$$0 \approx -Y(1+\hat{Y}_t) + C(1+\hat{C}_t) + K(1+\hat{K}_{t+1}) - (1-\delta)K(1+\hat{K}_t)$$

$$0 \approx Y\hat{Y}_t - C\hat{C}_t + K(1-\delta)\hat{K}_t - K\hat{K}_{t+1}$$

La función de producción, (3.62):

$$0 \approx -\hat{Y}_t + \hat{Z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t$$

El rendimiento del capital, (3.63):

$$0 \approx \hat{Y}_t - \hat{K}_t - \hat{r}_t$$

Resumiendo, el sistema log-linealizado que nos permite obtener las soluciones viene dado por:

$$0 \approx \hat{Y}_t - \frac{1}{1-N}\hat{N}_t - \hat{C}_t$$

$$0 \approx Y\hat{Y}_t - C\hat{C}_t + k\left((1-\delta)\hat{K}_t - \hat{K}_{t+1}\right)$$

$$0 \approx \hat{Z}_t - \hat{Y}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t$$

$$0 \approx \hat{Y}_t - \hat{K}_t - \hat{r}_t$$

$$0 \approx \hat{C}_t - E_t\hat{C}_{t+1} + \beta r E_t \hat{r}_{t+1}$$

Solución.

Utilizaremos el método propuesto por Uhlig (1999) para obtener las leyes dinámicas que constituyen la solución del sistema log-linealizado anterior.

El desarrollo que seguimos sigue la exposición de McCandless (2008, cap 6).

Definamos por una parte el conjunto de variables de endógenas de estado como $x_t = \left[\hat{K}_{t+1}\right]$ mientras que por otra agrupamos el resto de variables endógenas como $y_t = \left[\hat{Y}_t, \hat{C}_t, \hat{N}_t, \hat{r}_t\right]$.Separando las ecuaciones en aquellas que llevan expectativas de las que no, el modelo lineal puede ser expresado como:

$$Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t = 0$$

$$0 = E_t\left\{Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t\right\}$$

$$\hat{Z}_{t+1} = N\hat{Z}_t + \varepsilon_{t+1}$$

En nuestro caso las matrices anteriores vienen dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -K & 0 & 0 \end{bmatrix}' : B = \begin{bmatrix} 0 & (1-\delta)K & \alpha & -1 \end{bmatrix}' :$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{1-N} & 0 \\ y & -C & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} : D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F = G = H = [0] : J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \beta r \end{bmatrix}' : K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$L = M = [0] : N = [\rho]$$

La solución del sistema matricial que describe las leyes dinámicas de equilibrio tiene como sabemos la siguiente estructura, donde las funciones de decisión vienen son funciones lineales de la variable de estado, el stock de capital y la variable exógena.

$$x_t = Px_{t-1} + Q\hat{Z}_t : y_t = Rx_{t-1} + S\hat{Z}_t$$

El procedimiento de resolución se basa en el método de los coeficientes indeterminados y consiste básicamente en sustituir éstas en el sistema matricial de tal forma que finalmente obtenemos dos ecuaciones matriciales en P y Q que tienen las siguientes expresiones:

$$\left(F - JC^{-1}A\right) P^2 - (JC^{-1}B - G + KC^{-1}A)P - KC^{-1}B + H = 0 \quad ((3.64))$$

que resuelve la matriz P.

$$\left[(F - JC^{-1}A)Q\right] N + \left[FP + G + JR - KC^{-1}A\right] Q = \left[JC^{-1}D - L\right] N + KC^{-1}D - M$$

La matriz Q puede despejarse utilizando el producto de Kronecker.

Utilizando vectorización y el producto de la matriz Q viene dada por:

$$vecQ = ab + c$$

$$a = \left[N' \otimes (F - JC^{-1}A) + I_k \otimes (FP + G + JR - KC^{-1}A\right]^{-1}$$

$$b = vec\left[JC^{-1}D - L\right] N$$

$$c = KC^{-1}D - M$$

Obtenidas P y Q, las matrices R y S vienen dadas por:

$$R = -C^{-1}(AP + B) : S = -C^{-1}(AQ + D)$$

Calibración del modelo.

En orden a obtener las leyes dinámicas y no trabajar con los parámetros del modelo procedemos a calibrarlo. Los valores que elige Hansen son:

$$\beta = 0.99 : \delta = 0.025 : \alpha = 0.36$$

Estos parámetros se obtienen en general a partir de los datos trimestrales de una economía. Por ejemplo, el parámetro α nos mide la participación del capital en la renta nacional, δ corresponde a la tasa de depreciación del stock de capital físico, un 2.5% trimestral, lo que implica que en el estado estacionario el ratio capital-producto es 10 y el ratio de la inversión respecto a la producción de 0.26.

El parámetro A de la función de utilidad se determina de tal forma que en el estado estacionario el nivel de horas de trabajo sea exactamente 1/3, mientras que el parámetro de persistencia del shock tecnológico ρ es 0.95 y su desviación estándar $\sigma_\varepsilon = 0.007$ son los valores fijados por Prescott (1986) a partir de su propia estimación del residuo de Solow a partir de la función de producción agregada:

Esto es, en la ecuación del estado estacionario, $N = \frac{1}{3}$ y junto a los parámetros anteriores nos da un valor de $A = 1.72$.

$$N = \frac{1}{1 + \frac{AC}{(1-\alpha)Y}} = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]}$$

$$N = \frac{1}{1 + \frac{AC}{(1-\alpha)Y}} = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]}$$

Sustituyendo los datos de los parámetros en las ecuaciones del estado estacionario obtenemos los siguientes valores:

$$K = 12.67 : Y = 1.24 : C = 0.92 : r = 0.035$$

La ecuación (3.64) calibrada con estos parámetros viene dada por:

$$7.08P^2 - 14.24P + 7.15 = 0$$

Las dos raíces son $P_1 = 0.95$ y $P_2 = 1.07$. Tomamos la raíz inferior a uno, condición para que el equilibrio sea estable.

Finalmente:

$$Q = 0.11 : R = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.57 & -0.24 & -0.8 \end{bmatrix}' : R = \begin{bmatrix} 1.45 & 0.40 & 0.70 & 1.45 \end{bmatrix}'$$

Por tanto, las leyes dinámicas solución vienen dadas por:

$$\hat{K}_{t+1} = 0.95\hat{K}_t + 0.11\hat{Z}_t$$

$$\hat{Y}_t = 0.20\hat{K}_t + 1.45\hat{Z}_t$$

$$\hat{C}_t = 0.57\hat{K}_t + 0.40\hat{Z}_t$$

$$\hat{N}_t = -0.24\hat{K}_t + 0.70\hat{Z}_t$$

$$\hat{r}_t = -0.8\hat{K}_t + 1.45\hat{Z}_t$$

La inversión puede también deteminarse a partir de la restricción de recursos linealizada.

$$\hat{I}_t = \frac{C}{I}\hat{C}_t + \frac{Y}{I}\hat{Y}_t$$

Finalmente podemos obtener la varianza de las variables del modelo.

Comenzamos con el stock de capital puesto que necesitaremos su expresión para el cálculo de la varianza de las restantes variables endógenas. La ley dinámica viene dada por:

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}\hat{Z}_t = \eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}(\rho\hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t)$$

Aplicando el operador de retardos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}L}\varepsilon_t + \frac{\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}L}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\varepsilon_{t-i-1}$$

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kz}\sum_{i=0}^{\infty}\eta_{kk}^i\varepsilon_{t-i} + \frac{\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}L}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\varepsilon_{t-i-1}$$

Desarrollando y agrupando cada término de la perturbación aleatoria, observamos que cada término ε_{t-j} viene dado por

$$\eta_{kk}^j + \rho\eta_{kk}^{j-1} + \rho^2\eta_{kk}^{j-2} + ...{\eta_{kk}}^2\rho^{j-2} + \eta_{kk}\rho^{j-1} + \rho^j$$

con lo que la expresión para el stock de capital es

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kz}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}{\eta_{kk}}^i\rho^{j-i}\varepsilon_{t-j}$$

Obtenida la solución para el stock de capital podemos calcular la varianza de las cuatro variables endógenas restantes. Dado que su solución tiene la misma estructura podemos hacerlo con la ecuación de la producción.

$$\hat{Y}_t = \eta_{yk}\hat{K}_t + \eta_{yz}\hat{Z}_t$$

$$\hat{Y}_t = \eta_{kz}\eta_{yk}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}{\eta_{kk}}^i\rho^{j-i}\varepsilon_{t-j-1} + \eta_{yz}\hat{Z}_t$$

$$\hat{Y}_t = \eta_{kz}\eta_{yk}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^i\rho^{j-i}\varepsilon_{t-j-1} + \eta_{yz}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^i\varepsilon_{t-j}$$

$$\hat{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\eta_{kz}\eta_{yk}\sum_{i=0}^{j}\eta_{kk}^i\rho^{j-i} + \eta_{yz}\rho^{j+1}\right]\varepsilon_{t-j-1} + \eta_{yz}\varepsilon_t$$

Dado que uno de los supuestos del modelo es que los shocks a la tecnología son independientes y por tanto $Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0 \; \forall j \neq 0$.

$$Var(\hat{Y}_t) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[\eta_{kz}\eta_{yk} \sum_{i=0}^{j} \eta_{kk}^{i} \rho^{j-i} + \eta_{yz}\rho^{j+1} \right]^2 + \eta_{yz}^2 \right\} Var(\varepsilon_t) \quad ((3.65))$$

Las expresiones para el resto de las variables tiene la misma estructura, sólo es necesario cambiar η_{yk} por η_{rk} o η_{ck} y η_{yz} por η_{rz} o η_{cz}.

Para $\rho = 0.95$, el término entre llaves de (3.65) es igual a 30.0757 y dado el error estandar del output de 0.0176, la varianza del componente cíclico de la producción supone que la desviación típica del shock tecnológico es de 0.0032. Mientras mayor sea la varianza del shock de oferta, mayor volatilidad tendrá el output.

La siguiente tabla muestra las desviaciones de cada variable en función de la desviación típica de la perturbación tecnológica y la desviación relativa de cada una de ellas en porcentaje de la desviación de la producción.

Tabla 3.11				
	$\hat{Y}_t$	$\hat{C}_t$	$\hat{N}_t$	$\hat{I}_t$
σ_x	$5.48\sigma_\varepsilon$	$4.06\sigma_\varepsilon$	$1.65\sigma_\varepsilon$	$11.75\sigma_\varepsilon$
σ_x/σ_Y	100%	74%	30%	200%

3.10. Apéndice 3.1.

Restricciones sobre la formas funcionales de la función de

producción y de la función de utilidad.

En el libro de Phelps (1966) y en King, Plosser y Rebelo (1988) se subrayan las restricciones sobre la forma de progreso técnico para que el estado estacionario sea factible. En concreto, la forma de progreso técnico implícita en la notación $F(K,N)$ debe poder ser expresada en forma de progreso técnico que aumenta la eficiencia del factor trabajo.

Supongamos que escribimos la función de producción como:

$$Y = AF(X_{Kt}K_t, X_{Nt}N_t)$$

donde X_{Kt} y X_{Nt} representan tanto el progreso técnico que aumenta la eficiencia del capital como el progreso técnico que aumenta la eficiencia del factor trabajo y además presenta la propiedad de ser homogénea y lineal.

Dichos factores crecen a las tasas γ_K y γ_N respectivamente.

$$\gamma_{XK} = \frac{X_{Kt+1}}{X_{Kt}} \Rightarrow X_{Kt} = X_{K0}\gamma_K^t : \gamma_{XN} = \frac{X_{Nt+1}}{X_{Nt}} \Rightarrow X_{Nt} = X_{N0}\gamma_N^t$$

La tasa de crecimiento bruta del output satisface:

$$\gamma_Y = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{X_{Kt+1}K_{t+1}}{X_{Kt}K_t}\frac{F(Z_{t+1},1)}{F(Z_t,1)} = \gamma_{XK}\gamma_K\gamma_F$$

donde $Z = X_N N/X_K K$.

Podemos estudiar dos casos: en el primero Z es constante mientras que en el segundo el ratio $\frac{F(Z_{t+1},1)}{F(Z_t,1)}$ es constante con independencia de la constancia del ratio Z.

En el primero se verifica:

$$\gamma_Y = \gamma_K\gamma_{XK} : \gamma_F = 1$$

La restricción de recursos implica que:

$$\gamma_K = \frac{Y - C}{K} + (1 - \delta)$$

Si $Y > C$, de tal forma que la inversión es estrictamente positiva entonces tanto $\frac{Y}{K}$ como $\frac{C}{K}$ deben ser constantes, o lo que es lo mismo deben crecer a la misma tasa.

$$\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = \gamma_I$$

Por tanto $\gamma_{XK} = 1$ con lo que la factibilidad del estado estacionario requiere que no haya progreso técnico aumentador de la eficiencia del factor capital.

A partir de la definición de Z y teniendo en cuenta que es constante, obtenemos:

$$\gamma_Z = \frac{\gamma_{XN}\gamma_N}{\gamma_{XK}\gamma_K} \Rightarrow \gamma_K = \gamma_{XN}\gamma_N$$

En el enfoque del agente representativo con población constante, N se encuentra acotada entre cero y uno. Por tanto, una tasa constante de crecimiento del capital y de la producción requieren que γ_N sea igual a 1 ya que en otro caso $N \to 1$.

En el segundo caso, demostraremos que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas.

Sea

$$Z = \frac{X_N N}{X_K K} \Rightarrow \gamma_Z = \frac{\gamma_{XN}}{\gamma_{XK}\gamma_K} \Rightarrow Z_t = Z_0 a^t : a = \frac{\gamma_{XN}}{\gamma_{XK}\gamma_K}$$

$$\frac{F(Z_{t+1}, 1)}{F(Z_t, 1)} = \frac{f(Z_0 a^{t+1})}{f(Z_0 a^t)} = \text{constante}$$

Dado que la relación anterior debe cumplirse para cualquier Z_0 arbitrario, la diferenciación con respecto a éste implica:

$$0 = \frac{1}{f(Z_t)^2}\left\{f(Z_t)f'(Z_{t+1})\frac{dZ_{t+1}}{dZ_0}dZ_0 - f(Z_{t+1})f'(Z_t)\frac{dZ_t}{dZ_0}dZ_0\right\}$$

$$0 = \left\{f'(Z_{t+1})\frac{Z_{t+1}}{f(Z_{t+1})} - f'(Z_t)\frac{Z_t}{f(Z_t)}\right\}\frac{f(Z_{t+1})}{f(Z_t)}\frac{dZ_0}{Z_0}$$

El término entre llaves debe ser cero, esto es, la elasticidad de f con respecto Z debe ser constante:

$$f'(Z_t)\frac{Z_t}{f(Z_t)} = 1 - \alpha$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{df}{f} = (1-\alpha)\frac{dZ}{Z} \Rightarrow f(Z) = AZ^{1-\alpha}$$

Por tanto, el output debe venir dado por una función del tipo Cobb-Douglas.

$$Y = X_K K_t A Z^{1-\alpha} = A X_K K_t \left(\frac{X_N N}{X_K K}\right)^{1-\alpha} = A(X_K K)^{\alpha} (X_N N)^{1-\alpha}$$

En suma, el progreso técnico puede ser expresado en la forma de aumentar la eficiencia del factor trabajo, ya que:

$$Y = A(X_K K)^{\alpha} (X_N N)^{1-\alpha} = AK^{\alpha}(\tilde{X}_N N)^{1-\alpha} : \tilde{X}_N = X_N X_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Esto además implica que el progreso técnico neutral en el sentido de Hicks, que corresponde al caso en el que $X_N = X_K$ es el único consistente con la factibilidad del estado estacionario con crecimiento cuando la tecnología de la producción es Cobb-Douglas.

Desde otro punto de vista, el hecho de que las participaciones de las rentas de los factores en la renta nacional sea constante a largo plazo es una razón esgrimida tradicionalmente para restringuir la función de producción a la forma Cobb-Douglas. Sin embargo, con tecnología que aumenta la eficiencia del factor trabajo, cualquier función con rendimientos constantes a escala es compatible con la constancia de dichas partipaciones, ya que éstas son invariantes a la escala de X en el estado estacionario.

De esta forma, si s_N denota la participación de la renta del trabajo, tenemos que:

$$s_N = \frac{NX\frac{\partial F}{\partial N}(K, XN)}{XNF\left(\frac{K}{XN}, 1\right)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial N}(K, XN)}{F\left(\frac{K}{XN}, 1\right)}$$

Restricciones sobre la función de utilidad.

La condición intertemporal de óptimo viene dada por:

$$\frac{u_c(C_t, \ell)}{u_c(C_{t+1}, \ell)} = \beta \left[\frac{\partial F}{\partial K}(K_{t+1}, X_{t+1}N_{t+1}) + (1-\delta) \right]$$

Como hemos visto, a lo largo de la senda de crecimiento equilibrado $\gamma_X = \gamma_K$, conlo cual el término de la derecha es constante.

Por otra parte, a partir de la restricción de recursos

$$C_t = X_t \left[F\left(\frac{K}{X}, N \right) + (1-\delta)\frac{K}{X} - \gamma_K \frac{K}{X} \right]$$

El término entre corchetes es constante pues capital y progreso tecnológico crecen a la misma tasa, con lo que el consumo debe crecer a la tasa que crece X_t.

$$C_t = C_0 \gamma_X^t$$

Por tanto

$$\frac{u_c(C_0\gamma_X^t, \ell)}{u_c(C_0\gamma_X^{t+1}, \ell)} = k = \text{constante e independiente de } C_0$$

Diferenciando con respecto a C_0.

$$\frac{u_c(t+1)du_c(C_t) - u_c(t)du_c(C_{t+1})}{u_c^2(t+1)} = 0$$

$$\frac{u_{cc}(t)}{u_c(t+1)} dC_t - \frac{u_c(t)u_{cc}(t+1)}{u_c^2(t+1)} dC_{t+1} = 0$$

$$\frac{u_{cc}(t)}{u_c(t+1)} \gamma_X^t dC_0 - \frac{u_c(t)u_{cc}(t+1)}{u_c^2(t+1)} \gamma_X^{t+1} dC_0 = 0$$

$$\frac{u_c(t)}{u_c(t+1)} \left\{ \frac{u_{cc}(t)}{u_c(t)} C_t - \frac{u_{cc}(t+1)}{u_c(t+1)} C_{t+1} \right\} \frac{dC_0}{C_0} = 0$$

El término entre llaves debe ser igual a cero, o lo que es lo mismo la elasticidad de la utilidad marginal del consumo debe ser constante

$$\xi_{cc} = -\frac{u_{cc}}{u_c} C = -\frac{\partial u_c}{u_c} \frac{C}{\partial C} = -\sigma$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int \frac{\partial u_1}{u_1} = -\sigma \int \frac{\partial C}{C} \Rightarrow \ln u_1 = -\sigma \ln C + \ln \upsilon_1(\ell)$$

$$u_1 = C^{-\sigma} \upsilon_1(\ell)$$

Para deducir la forma de la función de preferencias, integramos de nuevo respecto C.

$$\int \frac{\partial u}{\partial C} dC = \int C^{-\sigma} \upsilon_1(\ell) dC$$

$$u(C, \ell) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} \upsilon_1(\ell) + \upsilon_2(\ell) \qquad \sigma \neq 1$$

$$u(C, \ell) = \upsilon_1(\ell) \ln C + \upsilon_2(\ell) \qquad \sigma = 1$$

Finalmente, las restricciones sobre $\upsilon_1(\ell)$ y $\upsilon_2(\ell)$ se derivan de la condición de optimización estática sobre la oferta de trabajo, esto es, a lo largo de la senda de crecimiento equilibrado la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio es igual a la relación marginal de transformación.

$$\frac{u_\ell(C, 1-N)}{u_c(C, 1-N)} = AF_N\left(XN, K\right)$$

Aplicando logs

$$\ln\left[u_\ell(C, 1-N)\right] - \ln\left[u_c(C, 1-N)\right] = \ln X + \ln\left[AF_N\left(N, \frac{K}{X}\right)\right]$$

En el estado estacionario, el producto marginal de trabajo efectivo es constantey diferenciando con respecto a C y A.

$$\frac{u_{\ell c}}{u_\ell} C \frac{dC}{C} = \frac{u_{cc}}{u_c} C \frac{dC}{C} + \frac{dX}{X}$$

Dado que en la senda de crecimiento equilibrado

$$\frac{dC}{C} = \frac{dX}{X}$$

y definiendo la elasticidad de la utilidad marginal del ocio con respecto al consumo $\xi_{\ell c}$

$$1 = \xi_{\ell c} + \sigma$$

Para $\sigma = 1$, $\xi_{\ell c}$ vale cero, con lo cual $\upsilon_1(\ell)$ debe de ser constante. Si $\sigma \neq 1$, entonces $\xi_{\ell c} \neq 0$ y $\upsilon_2(\ell)$ debe ser constante.

De ahí que la forma funcional para la función de utilidad quede como:

$$u(C, \ell) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\upsilon(\ell) \qquad \sigma \neq 1$$

$$u(C, \ell) = \ln C + \upsilon(\ell) \qquad \sigma = 1$$

Para que exista un máximo, la función de utilidad debe ser cóncava, criterio que nos es útil para elegir la función $\upsilon(\ell)$.

Dicha función es cóncava si y sólo si verifica

$$u_{cc} \leq 0 : u_{\ell\ell} \leq 0 : u_{cc}u_{\ell\ell} - u_{c\ell}^2 \geq 0$$

y estrictamente cóncava

$$u_{cc} < 0 : u_{\ell\ell} < 0 : u_{cc}u_{\ell\ell} - u_{c\ell}^2 > 0$$

Si $\sigma = 1$

$$u_c = C^{-1} : u_{cc} = -C^{-2} : u_\ell = \upsilon'(\ell)$$

$$u_{\ell\ell} = \upsilon''(\ell) : u_{c\ell} = u_{\ell c} = 0$$

$$u_{cc}u_{\ell\ell} - u_{c\ell}^2 > 0 \Rightarrow -C^{-2}\upsilon''(\ell) > 0 \Rightarrow \upsilon''(\ell) < 0$$

Por tanto, $\upsilon(\ell)$ debe ser creciente y cóncava.

En el segundo caso, $\sigma \neq 1$ la función es multiplicativamente separable y podemos distinguir dos casos: $0 < \sigma < 1$ y $\sigma > 1$.

Las utilidades marginales y sus primeras derivadas propias y cruzadas vienen dadas por:

$$u_c = C^{-\sigma}\upsilon(\ell) > 0 : u_{cc} = -\sigma C^{-\sigma-1} < 0 : u_\ell = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\upsilon'(\ell) > 0 : u_{\ell\ell} = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\upsilon''(\ell) < 0$$

$$u_{c\ell} = u_{\ell c} = C^{-\sigma}\upsilon'(\ell)$$

La condición $u_{cc}u_{\ell\ell} - u_{c\ell}^2 > 0$ viene dada por

$$-\sigma C^{-\sigma-1}\upsilon(\ell)\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\upsilon''(\ell) - (C^{-\sigma}\upsilon'(\ell))^2 > 0$$

$$-\sigma\frac{\upsilon''(\ell)}{\upsilon'(\ell)} > (1-\sigma)\frac{\upsilon'(\ell)}{\upsilon(\ell)}$$

Si $0 < \sigma < 1$ debe de cumplirse

$$\upsilon''(\ell) < 0 : \upsilon'(\ell) > 0 : \upsilon(\ell) > 0$$

con lo que $\upsilon(\ell)$ debe ser creciente y cóncava.

Si $\sigma > 1$ debe de verificarse

$$\upsilon''(\ell) > 0 : \upsilon'(\ell) < 0 : \upsilon(\ell) > 0$$

con lo cual $\upsilon(\ell)$ debe ser decreciente y convexa.

3.11. Apéndice 3.2.

Elasticidad de sustitución intertemporal de ocio y trabajo.

Las condiciones de óptimo del modelo para el consumo y el ocio vienen dadas por:

$$u_c(c_t, \ell_t) - \lambda_t = 0$$

$$u_\ell(c_t, \ell_t) - \lambda_t w_t = 0$$

con lo que la condición intertemporal es:

$$\frac{u_\ell(c_t, \ell_t)}{u_c(c_t, \ell_t)} = w_t$$

Tomando dos periodos consecutivos y dividiendo la condición intertemporal:

$$\frac{u_\ell(c_t, \ell_t)}{u_\ell(c_{t+1}, \ell_{t+1})} = \frac{u_c(c_t, \ell_t)}{u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})} \frac{w_t}{w_{t+1}}$$

Tomando logaritmos y diferenciando:

$$\ln u_\ell(c_t, \ell_t) - \ln u_\ell(c_{t+1}, \ell_{t+1}) = \ln u_c(c_t, \ell_t) - \ln u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1}) + \ln \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)$$

$$\frac{1}{u_\ell} [u_{\ell c} dc_t + u_{\ell\ell} d\ell_t] - \frac{1}{u_\ell} [u_{\ell c} dc_{t+1} + u_{\ell\ell} d\ell_{t+1}] =$$

$$= \frac{1}{u_c} [u_{cc} dc_t + u_{c\ell} d\ell_t] - \frac{1}{u_c} [u_{cc} dc_{t+1} + u_{c\ell} d\ell_{t+1}] + d \ln \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)$$

Agrupando términos:

$$\left[\frac{u_{\ell c}}{u_\ell} - \frac{u_{cc}}{u_c} \right] dc_t - \left[\frac{u_{\ell c}}{u_\ell} - \frac{u_{cc}}{u_c} \right] dc_{t+1} +$$

$$\left[\frac{u_{\ell\ell}}{u_\ell} - \frac{u_{c\ell}}{u_c} \right] d\ell_t - \left[\frac{u_{\ell\ell}}{u_\ell} - \frac{u_{c\ell}}{u_c} \right] d\ell_{t+1} = d \ln \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)$$

Introduciendo las definiciones de las elasticidades respectivas:

$$[\xi_{\ell c} - \xi_{cc}] \left[\frac{dc_t - dc_{t+1}}{c} \right] + [\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}] \left[\frac{d\ell_t - d\ell_{t+1}}{\ell} \right] = d \ln \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)$$

Por tanto

$$[\xi_{\ell c} - \xi_{cc}] [d \ln c_t - d \ln c_{t+1}] + [\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}] [d \ln \ell_t - d \ln \ell_{t+1}] = d \ln \left(\frac{w_t}{w_{t+1}} \right)$$

La relación entre las variaciones en el consumo y en el ocio se pueden obtener a partir de la ecuación de Euler del modelo o senda temporal óptima para el consumo.

$$u_c(c_t, \ell_t) = \beta(1 + r_{t+1}) u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})$$

Aplicando logaritmos y diferenciando dicha condición:

$$\frac{1}{u_c}\left[u_{cc}dc_t + u_{c\ell}d\ell_t\right] = \frac{1}{u_c}\left[u_{cc}dc_{t+1} + u_{c\ell}d\ell_{t+1}\right]$$

$$\frac{cu_{cc}}{u_c}\left[d\ln c_t - d\ln c_{t+1}\right] = \frac{\ell u_{c\ell}}{u_c}\left[d\ln \ell_{t+1} - d\ell \ln_t\right]$$

$$\left[d\ln c_t - d\ln c_{t+1}\right] = -\frac{\xi_{c\ell}}{\xi_{cc}}\left[d\ln \ell_t - d\ln \ell_{t+1}\right]$$

Por tanto

$$-\left[\xi_{\ell c} - \xi_{cc}\right]\frac{\xi_{c\ell}}{\xi_{cc}} + \left[\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}\right] d\ln\left(\frac{\ell_t}{\ln \ell_{t+1}}\right) = d\ln\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)$$

y la

$$\epsilon_w^\ell = \frac{d\ln\left(\frac{\ell_t}{\ell_{t+1}}\right)}{d\ln\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)} = \epsilon_w^\ell = \frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}\xi_{\ell c}}$$

Teniendo en cuenta que $\ell_t + n_t = 1$, la elasticidad de sustitución intertemporal de la oferta de trabajo puede ser deducida como sigue:

$$d\ln \ell_t = d\ln(1-n_t) = -\frac{dn_t}{1-n} = -\frac{n}{1-n} d\ln n_t$$

Por tanto

$$-\left[\xi_{\ell c} - \xi_{cc}\right]\frac{\xi_{c\ell}}{\xi_{cc}} - \left[\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}\right]\left(-\frac{n}{1-n}\right) d\ln\left(\frac{n_t}{\ln n_{t+1}}\right) = d\ln\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)$$

$$\epsilon_w^n = \frac{d\ln\left(\frac{n_t}{n_{t+1}}\right)}{d\ln\left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)} = -\frac{1-n}{n}\frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{\ell\ell} - \xi_{c\ell}\xi_{\ell c}} = -\frac{1-n}{n}\epsilon_w^\ell$$

CAPITULO 4
EL DINERO EN LOS MODELOS DE CICLO REAL

El modelo de Ciclo Económico Real se ha ido sucesivamente ampliando para dar cabida a variables que no se encontraban en las formulaciones originales y en este capítulo procedemos a plantear algunos modelos que han incorporado el dinero dentro del mismo. La cuestión que surge en cualquier modelo neoclásico de equilibrio general es cómo modelizar el dinero o cómo explicar porqué los consumidores necesitan demandar dinero. Sin justificar porqué existe demanda de dinero es no es posible modelizar el impacto de las variaciones de la oferta monetaria.

En general, la literatura recoge tres enfoques:

1. Introducir dinero directamente en la función de utilidad. El enfoque conocido como MIU, (Money in the Utility Function) supone la introducción de saldos reales directamente en la función de utilidad, lo que significa que el dinero es como cualquier otro bien que será demandado por los individuos. Sidrauski (1967) es un ejemplo pionero en este enfoque.

2. Cash in Advance Models. La restricción de liquidez supone que antes de que un consumidor pueda comprar bienes debe tener dinero para poder pagarlos. El dinero es demandado debido a que es el medio utilizado para realizar transacciones. En palabras de Clower (1967), "money buys goods but goods don't buy money".

3. Costes de transacción o Shopping Time Technology. En los modelos "shopping time" se modeliza el hecho de que el dinero facilita las transacciones ahorrando los costes que presentan las transacciones realizadas mediante el trueque; por tanto, la demanda de dinero surge porque su tenencia es una forma conveniente de evitar las dificultades del trueque, aunque por otra parte mantener dinero presenta un coste de oportunidad en términos del coste de oportunidad de mantener la riqueza en otro activo alternativo.

Los modelos neoclásicos de crecimiento, y el modelo básico de Ciclo Real de los cuales se deriva, no tienen en cuenta el papel del dinero y por tanto es imposible determinar si sus variaciones son un serio candidato para explicar las fluctuaciones de las variables reales y nominales. Es lógico que en los modelos de crecimiento el dinero esté ausente mientras su objetivo sea explicar determinados hechos del crecimiento a largo plazo ya que el consenso entre los economistas y la evidencia empírica son claros: a largo plazo el dinero no importa, esto es, el dinero es un velo y sus efectos a largo plazo sobre las variables reales son nulos provocando a largo plazo únicamente un aumento en el nivel de precios.

Sin embargo, cuando los modelos dinámicos de equilibrio general se han convertido en el instrumental avanzado para estudiar las fluctuaciones económicas surge la cuestión de si el dinero puede explicar mejor las fluctuaciones que el candidato original, el shock tecnológico.

Sabemos que en los modelos de Ciclo Real el origen de las fluctuaciones económicas se concentra en la fuerzas de oferta. Sin embargo, negar, rechazar o dejar de lado las explicaciones que descansan en los cambios en la oferta monetaria junto a las deficiencias que presenta el modelo puramente real han conducido de forma natural a que el modelo de equilibrio general haya sido ampliado con el fin de introducir dinero en el mismo.

En la literatura sobre Ciclo Económico Real el primer artículo en el que se introduce específicamente el sector financiero es en King y Plosser (1984) y su implicación es que el dinero bancario es importante para explicar la correlación entre el PNB y los agregados monetarios, destacando el papel que juega la denominada causalidad inversa.

4.1. Modelo monetario clásico.

Con el siguiente modelo pretendemos demostrar que un modelo monetario sin rigideces nominales predice los mismos resultados que el modelo clásico, esto es, el dinero es un velo y los precios sólo pueden determinarse a partir de la regla de política monetaria que siga el banco central. Las variables reales dependen de factores reales, entre ellos las perturbaciones debidas a shocks tecnológicos.

En este punto seguimos la exposición de Galí (2008) aunque introducimos competencia monopolística.

Las economías domésticas maximizan la siguiente función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria.

$$Max\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right]$$

$$P_t C_t + B_{t+1} = (1+i_t) B_t + W_t N_t$$

donde B_t representa la cantidad de bonos con vencimiento a un año y P_t es el precio del bien del consumo.

Planteando el lagrangiano obtenemos las condiciones de óptimo de primer orden:

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, B_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left(\frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right) + \lambda_t \left((1+i_t) B_t + W_t N_t - P_t C_t - B_{t+1} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = C_t^{-\theta} - \lambda_t P_t = 0 \qquad ((4.1))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -W_t N_t^{\varphi} + \lambda_t = 0 \qquad ((4.2))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1} (1+i_{t+1}) = 0 \qquad ((4.3))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = (1+i_t) B_t + W_t N_t - P_t C_t - B_{t+1} = 0 \qquad ((4.4))$$

Junto a la condición de transversalidad:

$$\underset{T\to\infty}{lím}\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}\right)^{T}B_{t+T+1}\to 0$$

Eliminando el multiplicador, las dos condiciones estáticas (4.1) y (4.2) nos dan la curva de oferta de trabajo, mientras que (4.1) y (4.3) nos dan la condición intertemporal o ecuación de Euler.

$$\frac{C_t^{-\theta}}{P_t}=\frac{N_t^{\varphi}}{W_t} \tag{(4.5)}$$

$$-\frac{C_t^{-\theta}}{P_t}\frac{1}{1+i_{t+1}}+\beta E_t\left(\frac{C_{t+1}^{-\theta}}{P_{t+1}}\right)=0$$

$$1=\beta E_t\left(\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\theta}(1+i_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \tag{4.6}$$

Aplicando logaritmos a (4.5) y (4.6) obtenemos la curva de oferta y la ecuación dinámica para el consumo, donde las letras en minúscula representan el logaritmo de la variable.

$$w_t-p_t=\frac{1}{\sigma_c}c_t+\varphi n_t^s:\sigma_c=\frac{1}{\theta}$$

$$E_tc_{t+1}-c_t=\sigma E_t\left(i_t-\pi_{t+1}-\ln\beta\right):\left(\pi_{t+1}=\ln P_{t+1}-\ln P_t\right)$$

siendo σ_c la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo y φ la inversa de la elasticidad de sustitución en las horas trabajadas.

En segundo lugar, podemos introducir competencia monopolística en el mercado de bienes y el caso de competencia perfecta aparecería como un caso especial[39].

Supongamos que existe un contínuo de $j\in[0,1]$ empresas con cierto poder para fijar los precios que producen cada una un bien diferenciado que se considera como bien intermedio para obtener la producción total de bienes finales, Y_t.

[39] Galí, (2008) introduce directamente competencia perfecta.

La "función de producción" de bienes finales viene dada por:

$$Y_t = \left[\int_0^1 y_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} : (\sigma > 1)$$

Las empresas maximizan sus beneficios, sujetos a dicha restricción:

$$Max\ P_t Y_t - \int_0^1 p_{jt} y_{jt} dj$$

La solución del problema nos da la demanda de cada bien intermedio, y_{jt}.

$$y_{jt} = \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t$$

La existencia de competencia perfecta en el mercado de bienes hace que los beneficios económicos sean nulos.

$$P_t Y_t = \int_0^1 p_{jt} y_{jt} dj$$

Sustituyendo la demanda de cada bien, obtenemos el nivel de precios agregado:

$$P_t Y_t = \frac{Y_t}{P_t^{-\sigma}} \int_0^1 (p_{jt})^{1-\sigma} dj \Rightarrow P_t = \left[\int_0^1 p_{jt} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Las empresas que producen bienes intermedios maximizan su beneficio, eligiendo el precio de venta, p_{jt}, sujetos a dos restricciones, la función de producción y la función de demanda del bien que producen y tomando como dados el salario, la producción de bienes finales y el nivel de precios.

El problema se plantea por tanto como:

$$\underset{\{p_{jt}\}}{Max}\ \ p_{jt} \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t - W_t N_{jt}$$

$$y_{jt} = \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-\sigma} Y_t$$

$$y_{jt} = F(Z_t N_{jt}) = (Z_t N_{jt})^{1-\alpha}$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$(1-\sigma)\left(p_{jt}\right)^{-\sigma} P_t^{\sigma} Y_t - W_t \frac{\partial N_{jt}}{\partial y_{jt}} \frac{\partial y_{jt}}{\partial p_{jt}} = 0$$

$$p_{jt} = \frac{\sigma}{\sigma-1} W_t \frac{\partial N_{jt}}{\partial y_{jt}} = \left(1 + \frac{1}{\sigma-1}\right) CMa$$

donde:

$$W_t \frac{\partial N_{jt}}{\partial y_{jt}} = CMa$$

El término $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ es el margen que aplican las empresas sobre el coste marginal que está relacionado con el grado de sustituibilidad del bien intermedio utilizado en la producción final. Si $\sigma \rightarrow 1$, el margen sobre el coste marginal será alto, mientras que si $\sigma \rightarrow \infty$, el precio es igual al coste marginal.

Dado un margen mayor que 1, los precios serán más altos que los costes marginales y por tanto mayores que en competencia perfecta mientras que los salarios reales serán menores que en competencia perfecta.

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{CMa}{P_t} \frac{\partial y_{jt}}{\partial N_{jt}} = \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\partial y_{jt}}{\partial N_{jt}} \qquad ((4.7))$$

Todas las empresas se comportan idénticamente y por tanto el equilibrio es simétrico, esto es, todas eligen el mismo precio, se enfrentan a la misma demanda, producen lo mismo y contratan la misma cantidad de trabajo. Agregando para todas las empresas obtenemos que:

$$Y_t = \left[\int_0^1 y_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = Y_t(j) \int_0^1 dj = Y_t(j)$$

El output del bien final es igual al output de los bienes intermedios.

En equilibrio por tanto:

$$N_t = \int_0^1 N_{jt} dj$$

Y la función de producción agregada es:

$$Y_t = Y_t(j) = F(Z_t N_{jt}) = \left(Z_t \int_0^1 N_{jt} \right)^{1-\alpha} = (Z_t N_t)^{1-\alpha} \qquad ((4.8))$$

Por tanto, las condiciones de primer orden para las economías domésticas y las empresas vienen dadas por (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8):

$$\frac{C_t^{-\theta}}{P_t} = \frac{N_t^{\varphi}}{W_t} : 1 = \beta E_t \left(\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\theta} (1 + i_{t+1}) \frac{P_t}{P_{t+1}} \right)$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \frac{\partial y_{jt}}{\partial N_{jt}} : Y_t = F(Z_t N_t) = (Z_t N_t)^{1-\alpha}$$

junto a las condiciones de equilibrio en el mercado de bienes y en el mercado de trabajo.

$$Y_t = C_t : N_t^s = N_t^d$$

Linealización y solución.

Dada la relación multiplicativa entre las variables no es necesario nada más que aplicar logs para convertir el modelo no lineal en lineal.

$$-\frac{1}{\sigma_c} c_t - p_t = \varphi n_t^s - w_t \qquad ((4.9))$$

$$E_t c_{t+1} - c_t = \sigma_c E_t \left(i_t - \pi_{t+1} + \ln \beta \right) : \ln(1 + i_t) \simeq i_t \qquad ((4.10))$$

$$w_t - p_t = \ln \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) + \ln(1 - \alpha) + (1 - \alpha) z_t - \alpha n_t^d \qquad ((4.11))$$

$$y_t = c_t = (1 - \alpha) z_t + (1 - \alpha) n_t \qquad ((4.12))$$

$$n_t^d = n_t^s \qquad ((4.13))$$

El sistema está compuesto de 5 ecuaciones, sin embargo tenemos 6 variables endógenas: salario nominal, nivel de precios, producción, consumo, horas trabajadas y tipo de interés nominal. Por tanto, el nivel de precios queda indeterminado.

Resolvamos el sistema, expresando las variables endógenas en función de la variable exógena, z_t.

A partir de la función de producción, (4.12) y del equilibrio en el mercado de trabajo, (4.13), obtenemos las soluciones para el salario real y para el nivel de empleo de equilibrio.[40]

$$(1-\alpha)z_t - \alpha n_t + \ln(1-\alpha) - \mu = \frac{1}{\sigma_c}c_t + \varphi n_t$$

$$y_t = c_t = (1-\alpha)z_t + (1-\alpha)n_t$$

$$n_t = \frac{(1-\alpha)(\sigma_c - 1)}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}z_t + \frac{\sigma_c(\ln(1-\alpha)-\mu)}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)} = \psi_{nz}z_t + n \quad ((4.14))$$

$$w_t - p_t = (1-\alpha)\frac{1+\sigma_c\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}z_t + (\ln(1-\alpha)-\mu)\left[1 - \frac{\alpha\sigma_c}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}\right] \quad ((4.15))$$

$$w_t - p_t = \psi_{\omega z}z_t + w$$

Sustituyendo (4.14) y (4.15) en la función de producción (4.12).

$$y_t = c_t = (1-\alpha)\sigma_c\frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}z_t + (1-\alpha)\frac{\sigma_c(\ln(1-\alpha)-\mu)}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)} = \psi_{yz}z_t + y$$

Finalmente, el tipo de interés real $r_t = i_t - E_t\pi_{t+1}$, viene determinado a partir de (4.10).

$$E_t c_{t+1} - c_t = \sigma_c E_t(i_t - \pi_{t+1} + \ln\beta)$$

$$r_t = -\ln\beta + (1-\alpha)\frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}(E_t z_{t+1} - z_t) = -\ln\beta + \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}E_t\Delta z_{t+1}$$

La resolución de la parte real de la economía implica que todas las variables reales dependen de las perturbaciones tecnológicas. Esto es un claro ejemplo de la dicotomía clásica con respecto al papel de la política monetaria. El modelo es clásico en este aspecto, sin embargo la introducción de compe-

[40] La expresión $\ln\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) = -\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{\sigma-1}\right) \simeq -\frac{1}{\sigma-1}$.Y ésta es:$-\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}-1\right) = -\mu$, el margen que aplican las empresas a los precios sobre el coste marginal.

$$1+\mu = \frac{\sigma}{\sigma-1}$$

tencia monopolística da lugar a que la curva de demanda de trabajo esté por debajo de la curva de demanda de trabajo walrasiana dando lugar a salarios más bajos y un nivel de empleo y producción inferior al modelo clásico puro debido al factor del margen que aplican las empresas a sus precios de venta[41].

Si asumimos que la tecnología sigue el siguiente proceso:

$$z_{t+1} = \rho_z z_t + \varepsilon^z_{t+1}$$

las soluciones para las variables del sistema en función del shock tecnológico son:

$$n_t = \rho_z n_{t-1} + \eta_{nz}\varepsilon^z_t : w_t - p_t = \rho_z(w_{t-1} - p_{t-1}) + \eta_{(w-p)z}\varepsilon^z_t$$

$$r_t = -\ln\beta + \rho_z r_{t-1} - \eta_{rz}(1 - \rho_z)\varepsilon^z_t : y_t = c_t = \rho_z y_{t-1} + \eta_{yz}\varepsilon^z_t$$

donde hemos denotado como η_{jz} la elasticidad de cada variable j con respecto a la perturbación.

En ausencia de perturbaciones, el nivel de equilibrio de r_t coincide con la tasa descuento subjetiva del individuo. Téngase en cuenta que β es el factor de descuento subjetivo que es igual a $\frac{1}{1+\rho}$, donde ρ es el tipo de descuento subjetivo. De esta forma $-\ln\beta = \ln(1+\rho) \simeq \rho > 0$, y lo denotaremos como r.

A partir de las expresiones anteriores, podemos calcular los efectos de una perturbación tecnológica sobre cada una de las variables.

Un shock tecnológico positivo eleva el salario real, la producción y el consumo, mientras que provoca un descenso en el tipo de interés real. El efecto sobre el nivel de horas de trabajo depende de la sustitución intertemporal en el consumo. Si $\sigma_c > 1$, el efecto sustitución es fuerte y el número de horas aumenta, y al contrario, un efecto sustitución intertemporal bajo en el consumo, hace que el efecto renta de la subida salarial sea mayor que el efecto sustitución y por tanto, el número de horas trabajadas disminuya. En

[41] Galí (1995) asume competencia monopolística y además supone que existe negociación salarial y que son los sindicatos los que deciden el nivel de oferta de trabajo. El modelo genera desempleo involuntario debido a que la curva de oferta de trabajo está a la izquierda de la curva de demanda de trabajo competitiva pero también salarios más altos en relación a la competencia perfecta.

el caso de $\sigma_c = 1$, ambos efectos se compensan y n_t permanece intalterado (la función de utilidad sería logarítmica en el consumo).

Por último calculamos la solución para el nivel de precios, que depende de la regla de política monetaria que siga la autoridad monetaria.

A partir de la ecuación de Fisher podemos ver que el nivel de precios no converge para ningún tipo de interés.

$$r_t = i_t - E_t(p_{t+1} - p_t) \Rightarrow p_t = -\sum_{i=0}^{\infty}(i_{t+i} - r_{t+i})$$

Si introducimos una regla de Taylor como:

$$i_t = r + \phi_\pi \pi_t$$

$$p_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_\pi^{-k} E_t(r_{t+k} - r)$$

El nivel de precios será finito si y sólo si $\phi_\pi > 1$.

En este caso, el nivel de precios y la inflación se ven afectados por las perturbaciones tecnológicas en cuanto el tipo de interés se ve afectado por ellas. Las perturbaciones tecnológicas disminuyen el tipo de interés por debajo de su nivel de equilibrio, con lo que el nivel de precios caería. El modelo predice un comportamiento contracíclico para el nivel de precios ante una perturbación tecnológica.

Calculando la senda futura para la desviación del tipo de interés con respecto a su equilibrio a largo plazo, la solución para el nivel de precios en función de la perturbación tiene la siguiente expresión:

$$r_t - r = \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz} E_t \Delta z_{t+1} \Rightarrow E_t(r_{t+k} - r) = \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}\rho_z^k(\rho_z - 1)z_t$$

$$p_t = (\rho_z - 1)\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}\sum_{k=0}^{\infty}\phi_\pi^{-k}\rho_z^k z_t \Rightarrow p_t = (\rho_z - 1)\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}\frac{\phi_\pi}{\phi_\pi - \rho_z}z_t$$

Introduzcamos ahora el dinero de la forma convencional a partir de la ecuación de equilibrio monetario en términos logarítmicos y suponiendo que la elasticidad renta de la demanda de dinero es igual a la unidad; la conocida ecuación LM y la ecuación de Fisher son:

$$m_t - p_t = y_t - hi_t : 0 < h < 1$$

$$i_t = r_t + E_t\pi_{t+1} \Rightarrow i_t = r_t + E_t(p_{t+1} - p_t)$$

Despejando el tipo de interés en la ecuación de Fisher y llevándolo a la ecuación de equilibrio monetario.

$$m_t - p_t = y_t - h(r_t + E_t(p_{t+1} - p_t))$$

La solución estable se encuentra resolviendo hacia delante para el nivel de precios, con .

$$p_t = \frac{h}{1+h}E_tp_{t+1} + \frac{1}{1+h}m_t - \frac{y_t}{1+h} + \frac{h}{1+h}r_t$$

donde $\lambda = \frac{h}{1+h}$.

$$p_t = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i E_t m_{t+i} - (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i E_t y_{t+i} + (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i E_t r_{t+i} :: \tag{(4.16)}$$

Por tanto, el nivel de precios depende de las sendas futuras esperadas en la oferta monetaria, pero también de las perturbaciones tecnológicas que afectan tanto a la producción como al tipo de interés real.

Inequívocamente una perturbación tecnológica provoca una disminución en el nivel de precios.

En este caso, podemos calcular cuáles son los efectos de un aumento en la tasa de crecimiento monetario Supongamos que ésta sigue el siguiente proceso:

$$\Delta m_t = \rho_m \Delta m_{t-1} + \varepsilon_t^m \Rightarrow E_t m_{t+i} = \rho_m^i \Delta m_t$$

La solución para el nivel de precios, ecuación (4.16) es:

$$p_t = m_t + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda\rho_m)^i \Delta m_t - (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\rho_z)^i y_t + (1-\lambda) \frac{\rho}{1-\rho} + (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\rho_z)^i r_t$$

$$p_t = m_t + \frac{h\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\Delta m_t - \frac{1}{1+h(1-\rho_z)}(y_t - r_t)$$

Diferenciando el nivel de precios obtenemos la solución para la tasa de inflación.

$$\pi_t = \Delta m_t + \frac{h\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\Delta m_{t-1} - \frac{1}{1+h(1-\rho_z)}(\Delta y_t - \Delta r_t)$$

Finalmente, el tipo de interés nominal es:

$$i_t = \frac{1}{h}\left(y_t - (m_t - p_t)\right)$$

$$i_t = \frac{\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\Delta m_t + \frac{1}{h}\frac{1-h\rho_z}{1+h(1-\rho_z)}y_t + \frac{1}{1+h(1-\rho_z)}r_t$$

Una perturbación monetaria eleva el nivel de precios y además sobrerreacciona al shock monetario, esto es, la desviación del nivel de precios en t, respecto a su nivel de equilibrio es mayor que uno, lo cual contrasta con la lenta respuesta del nivel de precios ante cambios en la tasa de crecimiento monetario, que es básicamente el comportamiento dinámico observado en las estimaciones empíricas.

Si suponemos un cambio permanente en la oferta monetaria de m_0 a $m_1 = m_0 + \epsilon$, la desviación en el nivel de precios respecto su equilibrio anterior viene dado por:

$$p_1 = m_0 + \epsilon + \frac{h\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\epsilon \Rightarrow p_1 - m_0 = \left(1 + \frac{h\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\right)\epsilon > 1$$

O, la desviación con respecto a su nuevo nivel de equilibrio, será:

$$p_1 - m_1 = \left(\frac{h\rho_m}{1+h(1-\rho_m)}\right)\epsilon > 0$$

Finalmente, de forma inequívoca un aumento en la tasa de crecimiento monetario eleva el tipo de interés nominal, lo que implica que el modelo no predice la existencia de efecto liquidez alguno.

4.2. Un sencillo modelo con dinero en la función de utilidad.

Un modelo de Ciclo Real relativamente sencillo es el planteado por Benassy (1995), ya que es posible calcular su solución cerrada, si asumimos que la tasa de depreciación del stock de capital es del 100 %. Consideraremos dos aspectos, en primer lugar lo resolvemos bajo el supuesto walrasiano de flexibilidad de precios y en segundo lugar introduciremos rigidez salarial.

La economía estudiada presenta dos mercados, mercado de bienes y de trabajo con precios respectivos P_t y W_t y dos agentes representativos una empresa y una economía doméstica.

La empresa tiene una tecnología Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(Z_t N_t\right)^{1-\alpha}$$

El stock de capital se deprecia totalmente en un periodo con lo que la tasa de depreciación δ es igual a la unidad.

$$K_{t+1} = I_t$$

La economía doméstica representativa maximiza la siguiente función de utilidad:

$$u\left(C_t, M_{t+1}, \ell_t\right) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t + a \ln \frac{M_{t+1}}{P_t} + V(\ell_t)\right] : V''(\ell_t) \leq 0$$

donde $\frac{M_{t+1}}{P_t}$ son los saldos reales.

Nuestro agente representativo se enfrenta a la siguiente restricción presupuestaria:

$$C_t + \frac{M_{t+1}}{P_t} + K_{t+1} = \frac{W_t}{P_t} N_t + r_t K_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{T_t}{P_t}$$

Las transferencias, T_t que recibe son financiadas a través de la impresión de dinero, esto es

$$T_t = M_{t+1} - M_t$$

mientras que la oferta monetaria sigue el proceso

$$M_{t+1} = \mu_t M_t$$

o lo que es lo mismo, la tasa de crecimiento monetario es $\mu_t - 1$.

La restricción presupuestaria puede simplificarse en sus dos últimos sumandos para dar

$$\frac{M_t}{P_t} + \frac{T_t}{P_t} = \frac{M_{t+1}}{P_t} = \mu_t \frac{M_t}{P_t}$$

La resolución del problema para las economías domésticas puede hacerse a través del planteamiento del Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(C_t, K_{t+1}, M_{t+1}, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t + a \ln \frac{M_{t+1}}{P_t} + V(\ell_t) \right) +$$

$$+\beta^t \lambda_t \left(\frac{W_t}{P_t} N_t + r_t K_t + \mu_t \frac{M_t}{P_t} + \frac{T_t}{P_t} - C_t - \frac{M_{t+1}}{P_t} - K_{t+1} \right)$$

Las condiciones de optimización de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \frac{\partial V}{\partial N_t} + \lambda_t \frac{W_t}{P_t} = 0 \qquad ((4.17))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1} r_{t+1} = 0 \qquad ((4.18))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_{t+1}} = \frac{a}{M_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} \mu_{t+1} = 0 \qquad ((4.19))$$

$$\lim_{T \to \infty} \lambda_{t+T} K_{t+1+T} = 0$$

Combinando (4.17) y (4.18), obtenemos la ecuación dinámica para el cociente $\frac{K_{t+1}}{C_t}$.

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left(\frac{\alpha Y_{t+1}}{C_{t+1} K_{t+1}} \right)$$

donde

$$r_{t+1} = \alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}$$

Sustituyendo la restricción presupuestaria $Y_t = C_t + K_{t+1}$ en la ecuación dinámica para el consumo obtenemos una ecuación dinámica lineal para el ratio $\frac{K_{t+1}}{C_t}$.

$$\frac{K_{t+1}}{C_t} = \alpha\beta E_t \left(\frac{C_{t+1} + K_{t+2}}{C_{t+1}} \right)$$

Denotando como

$$x_t = \frac{K_{t+1}}{C_t}$$

podemos resolver la ecuación en diferencias anterior, ecuación con expectativas racionales cuya expresión es

$$x_t = \alpha\beta + \alpha\beta E_t x_{t+1}$$

y cuya solución es

$$x_t = \sum_{i=1}^{T} (\alpha\beta)^i + (\alpha\beta)^T E_t x_{t+T}$$

La solución estable debe verificar

$$\underset{T\to\infty}{lím} (\alpha\beta)^T E_t x_{t+T} = 0$$

expresión que coincide con la condición de transversalidad del problema.

Por tanto nuestra solución viene dada por:

$$K_{t+1} = C_t \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha\beta)^i = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} C_t$$

La inversión es una proporción del consumo, o el ratio inversión-consumo es constante.

A partir de la restricción de recursos, $C_t + K_{t+1} = Y_t$ podemos expresar tanto el consumo como la inversión en función de la producción:

$$C_t = (1 - \alpha\beta) Y_t$$

$$K_{t+1} = \alpha\beta Y_t$$

Finalmente, obtenemos la oferta de trabajo, sustituyendo el multiplicador de Lagrange en (4.17).

$$V'(1 - N_t) = \frac{W_t}{C_t} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha\beta)N_t}$$

donde hemos utilizado

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}$$

Dada una forma funcional específica para la función $V(\ell_t)$ que verifique los supuestos usuales podríamos resolver la ecuación y determinar la oferta de trabajo; en este caso es mucho más fácil, es sólo función de los parámetros α y β, e independiente del salario real, esto es, la oferta de trabajo es inelástica o constante para cualquier salario real.[42]

$$N_t V'(1 - N_t) = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha\beta)} \Rightarrow N_t = N(\alpha, \beta)$$

Con una función de producción Cobb-Douglas, tenemos que, en logaritmos:

$$y_{t+1} = z_{t+1} + \alpha k_{t+1} + (1-\alpha)n$$

$$y_{t+1} = z_{t+1} + \alpha y_t + \alpha \ln \alpha\beta + (1-\alpha)n$$

La introducción del dinero no afecta al output, sólo los shocks a la productividad importan para la determinación de las variables reales. De nuevo obtenemos el conocido resultado de la dicotomía clásica. La razón de este resultado descansa en que hemos supuesto una función de utilidad separa-

[42]Por ejemplo, para $V(1 - N_t) = \theta \ln(1 - N_t)$ obtenemos la ecuación:

$$\theta \frac{N_t}{1 - N_t} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$$

y despejando la oferta de trabajo:

$$N_t = N = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha\beta)\,\theta + 1 - \alpha}$$

ble en sus tres argumentos, lo que da lugar a que la relación marginal de la relación consumo/ocio no dependa de los saldos reales. El dinero es neutral en el estado estacionario y a lo largo de la senda de transición hacia el mismo.

Por último, podemos determinar el nivel de precios y la ecuación de demanda agregada del modelo. A partir de la condición de primer orden para la economía doméstica, (4.19).

$$\frac{a}{M_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} \frac{M_{t+2}}{M_{t+1}} = 0$$

que expresada como

$$\frac{M_{t+1}}{C_t P_t} = a + \beta E_t \frac{M_{t+2}}{C_{t+1} P_{t+1}}$$

genera una ecuación en diferencias lineal para la variable $m_t = \frac{M_{t+1}}{C_t P_t}$ y cuya solución para la misma viene dada por:

$$\frac{M_{t+1}}{C_t P_t} = a \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i + \beta^T E_t \frac{M_{t+T}}{C_{t+T} P_{t+T}}$$

Verificándose la condición de transversalidad

$$\underset{T \to \infty}{lím} \beta^T E_t \frac{M_{t+T}}{C_{t+T} P_{t+T}} = 0$$

Y por tanto

$$\frac{M_{t+1}}{C_t P_t} = \frac{a}{1-\beta}$$

que no es sino la ecuación de demanda agregada clásica o ecuación de demanda de dinero ya que:

$$\frac{M_{t+1}}{P_t} = \frac{a}{1-\beta} C_t = \frac{a(1-\alpha\beta)}{1-\beta} Y_t$$

Con los anteriores resultados podemos obtener las ecuaciones dinámicas de las variables.

El stock de capital viene dado por:

$$\ln K_{t+1} = \ln \alpha\beta + \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln N + (1-\alpha) \ln Z_t$$

De nuevo, denotando en minúscula el logaritmo de la variable en mayúscula.

$$k_{t+1} = \frac{1}{1-\alpha L}\left[\ln \alpha\beta + (1-\alpha)n + (1-\alpha)z_t\right]$$

La ecuación dinámica para la producción, viene dada por:

$$y_{t+1} = (1-\alpha)z_{t+1} + \alpha\frac{1}{1-\alpha L}\left[\ln \alpha\beta + (1-\alpha)n + (1-\alpha)z_t\right] + (1-\alpha)n$$

$$y_{t+1}(1-\alpha L) = (1-\alpha)z_{t+1} + \alpha \ln \alpha\beta + (1-\alpha)n$$

y el nivel de precios:

$$p_t = m_{t+1} - \ln\frac{a(1-\alpha\beta)}{1-\beta} - (1-\alpha L)^{-1}(1-\alpha)z_t - \frac{\alpha \ln \alpha\beta}{1-\alpha} - n$$

Por último, la ecuación para el salario nominal:

$$w_t = \ln(1-\alpha) - n - \ln\frac{a(1-\alpha\beta)}{1-\beta} + m_{t+1}$$

De nuevo, el salario real es demasiado procíclico en el modelo. En concreto, el coeficiente de correlación entre producción y salario real es igual a la unidad, muy alto en relación a la correlación observada empíricamente, mientras que el nivel de precios es contracíclico ante las perturbaciones tecnológicas.

El nivel de precios se ve afectado tanto por los shocks de demanda nominales como por los shocks reales. La solución para el nivel de precios implica que la correlación entre éste y el output es negativa y depende de la variabilidad de este último. El hecho de que los precios en el modelo sean siempre contracíclicos es uno de los puntos débiles del modelo, aunque el "dogma" de que los precios sean procíclicos es una cuestión sujeta a debate[43]

En este sentido, Kydland y Prescott (1994, pags 332-333) afirman lo siguiente:

> "The fact is, however, that whether measured by the implicit GNP deflator or by the consumer price index, the US price level clearly has been countercyclical in the post-Korean War period"

[43] Véase por ejemplo Cooley y Ohanian (1991) y Smith (1992).

El modelo desarrollado presenta las mismas conclusiones que el modelo estándar clásico. El dinero es neutral a corto y largo plazo mientras que sólo los shocks a la función de producción producen efectos reales.

Aunque los resultados anteriores dependen del proceso específico de creación de dinero tanto como de la función de utilidad utilizada, la introducción de dinero en el modelo básico no necesariamente da un papel predominante a la política monetaria, esto es, bajo el modelo walrasiano la dinámica de las variables es exactamente igual a las del modelo puramente real.

Rigidez de salarios (Wage contracts).

Asumamos ahora que el nivel de salarios en vez de estar determinado por un mecanismo de ajuste walrasiano, está predeterminado y al comienzo de cada periodo y a dicho nivel fijado, las economías domésticas ofrecen todo el trabajo demandado por las empresas. Por tanto, el salario real nominal vendrá dado por:

$$w_t = E_{t-1}m_t + \ln(1-\alpha) - \ln v - n_t \qquad ((4.20))$$

Aunque la economía doméstica maximiza su función de utilidad, la cantidad ofrecida de trabajo no es una variable de decisión sino que viene determinada por la demanda que realizan las empresas, dado el salario nominal. Las ecuaciones anteriores siguen siendo válidas excepto la que determina la oferta de horas trabajadas por parte de las economías domésticas.

Por tanto, las ecuaciones del modelo vienen dadas por:

$$y_t = (1-\alpha)z_t + \alpha k_t + (1-\alpha)n_t \qquad ((4.21))$$

$$k_{t+1} = \ln \alpha\beta + y_t$$

$$w_t - p_t = \ln(1-\alpha) + z_t + \alpha k_t - \alpha n_t \qquad ((4.22))$$

$$m_t = \log v + p_t + y_t$$

Combinando la ecuación del salario nominal (4.20) junto a (4.21) y (4.22):

$$E_{t-1}m_t + \ln(1-\alpha) - \ln v - \ln n - p_t = \ln(1-\alpha) - y_t - n_t$$

Sustituyendo la expresión para la teoría cuantitativa, obtenemos la relación para el empleo.

$$n_t = n + (m_t - E_{t-1}m_t)$$

De esta forma, el nivel de producción queda determinado por la perturbación monetaria no anticipada.

$$y_t = (1-\alpha)z_t + \alpha k_t + (1-\alpha)n + (1-\alpha)(m_t - E_{t-1}m_t)$$

Ahora, los shocks no esperados a la oferta monetaria tienen un impacto sobre el nivel de empleo y producción. Eliminando de la anterior ecuación el stock de capital y aplicando el operador de retardos, tendremos:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)z_t + (1-\alpha)(m_t - E_{t-1}m_t) + \frac{\alpha \ln \alpha\beta}{1-\alpha} + n$$

Ahora, los shocks monetarios inesperados se propagan a través del mismo mecanismo que el shock tecnológico, esto es, a través de la acumulación de capital.

Además de las ecuaciones para el output y el empleo, podemos calcular las ecuaciones para el salario real y el nivel de precios fácilmente.

$$w_t - p_t = \ln(1-\alpha) + y_t - \ln n - (m_t - E_{t-1}m_t)$$

$$p_t = m_t - \log v - y_t$$

Cálculo de correlaciones

Eliminando las constantes no importantes, y expresando cada variable en función de los shocks únicamente, podemos calcular las correlaciones entre las variables anteriores en respuesta tanto a las perturbaciones de oferta como a las perturbaciones monetarias.

Modifiquemos de la siguiente manera las ecuaciones. Para la producción, tendremos:

$$(1-\alpha L)y_t = (1-\alpha)(m_t-E_{t-1}m_t)+[\alpha L(1-\alpha)-\alpha L(1-\alpha)]\,(m_t-E_{t-1}m_t)+(1-\alpha)z_t$$

$$(1-\alpha L)y_t = (1-\alpha)(1-\alpha L)(m_t-E_{t-1}m_t)+\alpha(1-\alpha)L(m_t-E_{t-1}m_t)+(1-\alpha)z_t$$

$$y_t = (1-\alpha)(m_t-E_{t-1}m_t)+\frac{\alpha(1-\alpha)(m_{t-1}-E_{t-1}m_{t-1})}{1-\alpha L}+\frac{(1-\alpha)z_t}{1-\alpha L}$$

De igual manera con el salario real y el nivel de precios.

$$w_t-p_t = \alpha(m_t-E_{t-1}m_t)+\frac{\alpha(1-\alpha)(m_{t-1}-E_{t-1}m_{t-1})}{1-\alpha L}+\frac{z_t}{1-\alpha L}$$

$$p_t = E_{t-1}m_t+\alpha(m_t-E_{t-1}m_t)-\frac{\alpha(1-\alpha)(m_{t-1}-E_{t-1}m_{t-1})}{1-\alpha L}-\frac{z_t}{1-\alpha L}$$

Todos los shocks de oferta inducen a una correlación positiva entre salario real y output y una negativa entre precios y output, mientras que los shocks monetarios contemporáneos inducen a una correlación negativa entre salario real y output y una correlación positiva entre nivel de precios y output.

Las soluciones de las anteriores ecuaciones pueden además expresarse como:

$$y_t = (1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i(m_{t-i}-E_{t-1}m_{t-i})+\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i z_{t-i}$$

$$w_t-p_t = \alpha(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i(m_{t-1-i}-E_{t-1}m_{t-1-i})+\alpha(m_t-E_{t-1}m_t)+\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i z_{t-i}$$

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i z_{t-i}-(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i(m_{t-i}-E_{t-1}m_{t-i})+m_t$$

Si por ejemplo, asumimos que los procesos para el logaritmo de la oferta monetaria y para el shock a la tecnología siguen unos procesos de tendencia estacionaria dados por:

$$z_t = \rho_z t+\varepsilon_{z,t} \qquad Var(\varepsilon_{z,t}) = \sigma_z^2$$

$$m_t = \rho_m t+\varepsilon_{M,t} \qquad Var(\varepsilon_{m,t}) = \sigma_m^2$$

donde $\varepsilon_{z,t}$y $\varepsilon_{m,t}$ son variables aleatorias de media cero y varianza finita e incorreladas en el tiempo podemos fácilmente calcular las correlaciones entre las variables, a partir de las ecuaciones anteriores y sabiendo que:

$$m_{t-i} - E_{t-1}m_{t-i} = \varepsilon_{m,t}$$

$$Var(m_{t-i} - E_{t-1}m_{t-i}) = \sigma_m^2$$

$$Var(z_t) = \sigma_z^2$$

De esta forma tendremos (véase apéndice 4.1).

$$Var(y_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\left[\sigma_m^2 + \sigma_z^2\right]$$

$$Var(w_t) = Var(P_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\left[2\alpha(1-\alpha)\sigma_M^m + \sigma_z^2\right]$$

$$Cov(w_t, y_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\left[-\alpha(1-\alpha)^2\sigma_m^2 + \sigma_z^2\right]$$

$$Cov(p_t, y_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\left[\alpha(1-\alpha)^2\sigma_m^2 - \sigma_z^2\right]$$

En suma:

$$Corr(w_t, y_t) = \frac{-\alpha(1-\alpha)^2\sigma_m^2 + \sigma_z^2}{\left[(1-\alpha)^2\sigma_M^2 + \sigma_z^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[2\alpha(1-\alpha)\sigma_M^2 + \sigma_z^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$Corr(p_t, y_t) = \frac{\alpha(1-\alpha)^2\sigma_M^2 - \sigma_z^2}{\left[(1-\alpha)^2\sigma_M^2 + \sigma_z^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[2\alpha(1-\alpha)\sigma_m^2 + \sigma_z^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Si sólo tuviésemos shocks de oferta, la correlación entre salario real y output seguiría siendo la unidad. Sin embargo, esta correlación disminuye conforme tenemos en cuenta shocks monetarios, llegando a hacer incluso negativa dicha correlación. Por tanto, la baja correlación entre salario real y output puede explicarse mejor si combinamos perturbaciones tecnológicas con shocks monetarios y rigidez salarial.

En cuanto a la correlación entre nivel de precios y producción, ésta será negativa e igual a -1 si sólo tenemos shocks de oferta. En cuanto incluimos shocks monetarios la correlación negativa desaparece y tenemos un comportamiento procíclico del nivel de precios. Por tanto, la inclusión de shocks de demanda en un modelo con rigidez salarial pero formulado con el espíritu y la metodología de los modelos de Ciclo Real permite obtener predicciones más cercanas a los hechos estilizados que un modelo que sólo presente shocks a la tecnología.

4.3. Salarios rígidos y persistencia.

Consideremos una economía similar a la del epígrafe 1 pero con un mercado de trabajo no competitivo, donde los salarios son rígidos y el esquema de su revisión es el diseñado por Calvo (1983). Según este esquema de precios rígidos, las empresas no tienen flexibilidad para cambiar sus precios, sino que en cada periodo, el porcentaje de empresas que están dispuestas a cambiarlo viene dado por $1-\gamma$, mientras que un porcentaje γ no lo cambiarán. Por tanto, la probabilidad de que una empresa cambie su precio viene dada precisamente por $1-\gamma$ siendo este ajuste independiente del tiempo que ha transcurrido desde el último ajuste en el precio[44].

El output total es un agregado de un contínuo de outputs indexados por $i \in [0,1]$.

$$\ln Y_t = \int_0^1 \ln Y_{it} di$$

Cada índice Y_{it} es a su vez un agregado de multitud de outputs indexados por j.

$$Y_{it} = \left[\int_0^1 Y_{ijt}^{\theta} dj \right]^{\frac{1}{\theta}} : 0 < \theta < 1$$

La estructura del modelo es tal que i representaría sectores de una economía mientras que j representa empresas dentro de un mismo sector. Supondremos que todas las empresas dentro de un sector negocian los salarios al mismo tiempo, mientras que entre sectores las negociaciones no tienen porqué estar

[44] Matemáticamente, la probabilidad de cambiar el precio es una distribución de Bernoulli, siendo la distribución de probabilidad del número de periodos entre cambios sucesivos en el precio una distribución geométrica. El número de periodos medio entre cambios en el precio para una empresa viene dado por $\frac{1}{1-\gamma}$.

sincronizadas.

La función de producción de una empresa j del sector productivo i, viene dada por:

$$Y_{ijt} = Z_t N_{ijt}^{1-\alpha}$$

El consumidor representativo maximiza el valor esperado de su utilidad descontada

$$u = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t + a \ln \frac{M_{t+1}}{P_t} - b \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right]$$

sujeto a la restricción presupuestaria.

$$C_t + \frac{M_t}{P_t} = \frac{W_t}{P_t} N_t + \mu_t \frac{M_{t-1}}{P_t}$$

De las condiciones de primer orden en el caso de flexibilidad de salarios obtenemos para el nivel de empleo y el salario nominal las siguientes expresiones:

$$N = \left(\frac{1-\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1+\varphi}} : W_t = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{b} \left(\frac{1-\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1+\varphi}} M_t$$

En condiciones de contratos salariales negociados, asumiremos que los mercados de bienes son competitivos mientras que al salario negociado el nivel de empleo lo determina la demanda de trabajo. Dicha demanda se deriva de la demanda de bienes.

Dado un volumen de producción final, las empresas de cada sector maximizan sus beneficios de tal manera que el problema y la solución vienen dados por:

$$Max \quad P_t Y_t - \int_0^1 P_{it} Y_{it} di \quad s.a. \ln Y_t = \int_0^1 \ln Y_{it} di$$

$$Y_{it} = \frac{P_t Y_t}{P_{it}} : \ln P_t = \int_0^1 \ln P_{it} di$$

Igualmente, cada empresa j en cada sector, dado Y_{it}, maximiza:

$$Max \quad P_{it}Y_{it} - \int_0^1 P_{ijt}Y_{ijt}di \quad s.a.Y_{it} = \left[\int_0^1 Y_{ijt}^{\theta}dj\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

cuya solución es:

$$Y_{ijt} = Y_{it}\left(\frac{P_{ijt}}{P_{it}}\right)^{-\frac{1}{1-\theta}} : P_{it} = \left[\int_0^1 P_{ijt}^{-\frac{1-\theta}{\theta}}dj\right]^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}$$

La demanda de cada bien i, viene dada por:

$$Y_{ijt} = \frac{P_tY_t}{P_{it}}\left(\frac{P_{ijt}}{P_{it}}\right)^{-\frac{1}{1-\theta}} \qquad ((4.23))$$

La demanda de trabajo de cada empresa en competencia perfecta maximiza los beneficios con la restricción de la función de producción.

$$Max \quad P_{ijt}Y_{ijt} - W_{ijt}N_{ijt}$$

La solución viene dada por:

$$P_{ijt}(1-\alpha)N_{ijt}^{-\alpha} = W_{ijt} \Rightarrow W_{ijt}N_{ijt} = (1-\alpha)P_{ijt}Y_{ijt}$$

Todas las empresas del mismo sector i pagan el mismo salario y tienen el mismo nivel de contratración (equilibrio simétrico):

$$W_{it}N_{it} = (1-\alpha)P_{it}Y_{it} = (1-\alpha)P_tY_t$$

Combinando esta condición de primer orden junto a la demanda del bien i, (4.23) y la función de producción, la demanda de trabajo viene dada por:

$$N_{ijt} = \left[(1-\alpha)\frac{(P_tY_t)^{1-\theta}(P_{ij}Z_t)^{\theta}}{W_{ijt}}\right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\theta}} \qquad ((4.24))$$

Contratos salariales óptimos.

Sea $W_{ij}^C(s,t)$ el contrato negociado en un momento s y que está vigente en el periodo t. El contrato tiene una probabilidad γ de ser renovado, y por tanto, la probabilidad de estar vigente en un momento t es γ^{t-s}.

Las economías domésticas maximizan la función de utilidad esperada.

$$u = E_0 \sum_{t \geq s}^{\infty} \beta^{t-s} \gamma^{t-s} \left[\ln C_t + a \ln \frac{M_{t+1}}{P_t} - b \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right]$$

sujeta a la restricción presupuestaria y la ecuación de demanda de trabajo, (4.24).

$$C_t + \frac{M_t}{P_t} = \frac{W_{ijt}^C(s,t)}{P_t} N_{ijt} + \mu_t \frac{M_{t-1}}{P_t}$$

$$N_{ijt} = \left[(1-\alpha) \frac{(P_t Y_t)^{1-\theta} (P_{ijt} Z_t)^{\theta}}{W_{ijt}^C(s,t)} \right]^{\frac{1}{1-(1-\alpha)\theta}} = \left(\psi_{it} W_{ijt}^C(s,t) \right)^{-\frac{1}{1-(1-\alpha)\theta}}$$

Sustituyendo la demanda de trabajo en la restricción presupuestaria y en la función de utilidad, planteamos el lagrangiano.

$$\mathcal{L}(C_t, W_{ijt}^C(s,t), \lambda_{ijt}) = E_0 \sum_{t \geq s}^{\infty} \beta^{t-s} \gamma^{t-s} \left(\ln C_t + a \ln \frac{M_{t+1}}{P_t} - b \frac{\left(\psi_{it} W_{ijt}^C(s,t) \right)^{-\frac{1+\varphi}{1-(1-\alpha)\theta}}}{1+\varphi} \right) +$$

$$+ \beta^{t-s} \gamma^{t-s} \lambda_{ijt} \left(\psi_{it} \frac{W_{ijt}^C(s,t)^{\frac{-\alpha\theta}{1-(1-\alpha)\theta}}}{P_t} - C_t \right)$$

Las dos condiciones de primer orden pueden resumirse:

$$(1-\alpha)\theta W_{ijt}^C(s,t)^{\frac{-1}{1-(1-\alpha)\theta}} E_s \left[\frac{\psi_{it}}{P_t C_t} \right] = b W_{ijt}^C(s,t)^{\frac{1+\varphi}{1-(1-\alpha)\theta}-1} E_s \left[\psi_{it}^{1+\varphi} \right]$$

A partir de la condición de maximización de beneficios para cada empresa del sector y con la función de producción, determinamos ψ_{it}.

$$P_{it} = \frac{P_t Y_t}{Y_{it}} = \frac{P_t Y_t}{Z_t N_{it}^{1-\alpha}} = \frac{P_t Y_t}{Z_t \left[(1-\alpha) \frac{P_t Y_t}{W_{it}} \right]^{1-\alpha}} \Rightarrow P_{it} = \frac{(P_t Y_t)^{\alpha}}{Z_t} \left(\frac{W_{it}^C}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha}$$

$$\psi_{it} = (1-\alpha)P_t Y_t \left(W_{it}^C\right)^{\frac{(1-\alpha)\theta}{1-(1-\alpha)\theta}}$$

Asumiendo que el salario negociado en todas las empresas de un sector debe ser el mismo, $W_{ijt}^C(s,t) = W_{it}^C(s,t)$.

Por tanto, la condición de primer orden viene dada por:

$$(1-\alpha)^2\theta W_{it}^C(s,t)^{1+\varphi} = b(1-\alpha)^{1+\varphi}E_s\left[(P_tY_t)^{1+\varphi}\right]$$

Con la ecuación de demanda de dinero clásica, $P_tY_t = (\frac{1-\beta}{a})M_t$, relacionamos el salario negociado con la oferta monetaria.

$$(1-\alpha)^2\theta W_t^C(s,t)^{1+\varphi} = b\left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{a}\right)^{1+\varphi} E_s\left[M_t^{1+\varphi}\right] \qquad ((4.25))$$

Y el nivel de precios en cualquier sector cuando el salario negociado es $W_t^C(s,t)$ vendrá dado por:

$$P_{st} = \frac{1}{Z_t}\left(\frac{(1-\beta)}{a}M_t\right)^{\alpha}\left(\frac{W_{st}^C}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \qquad ((4.26))$$

Dinámica de las variables.

Como la proporción de contratos vigentes, negociados en periodos antes del momento t es $(1-\gamma)\gamma^{t-s}$, tendremos que el nivel de precios viene dado por:

$$p_t = \ln P_t = \int_0^1 \ln P_{it}di = (1-\gamma)\sum_{s=-\infty}^{t}\gamma^{t-s}\ln P_{st}$$

sustituyendo (4.25) y (4.26) y en logaritmos.

$$p_t = \ln\left(\frac{1-\beta}{a}\right)+\frac{1-\alpha}{1+\varphi}\ln\left(\frac{b}{(1-\alpha)^2\theta}\right)+\alpha m_t - z_t + (1-\alpha)(1-\gamma)\sum_{s=-\infty}^{t}\gamma^{t-s}\ln W_{st}^C$$

expresamos el nivel de precios en función de la oferta monetaria esperada cuando el salario se negoció k periodos anteriores a t.

$$p_t = A + \alpha m_t - z_t + (1-\alpha)(1-\gamma)\sum_{k=0}^{t} \gamma^i \ln \left[E_{t-k} M_t^{1+\varphi}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}}$$

Dado el siguiente proceso para la tasa de crecimiento monetario.

$$m_t - m_{t-1} = \frac{\varepsilon_t^m}{1-\rho L} : \varepsilon_t^m \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

obtenemos las expresiones para el nivel de precios y para el nivel de producción.

La ecuación para el nivel de precios viene dada por (véase apéndice 4.2):

$$p_t = A + m_t - \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\gamma L)(1-\gamma\rho L)}\varepsilon_t^m + \frac{(1-\alpha)(1+\gamma\rho)\gamma(1+\varphi)}{2(1-\gamma\rho)(1-\gamma\rho^2)(1-\gamma)}\sigma_\varepsilon^2$$

mientras que la correspondiente al nivel de producción viene dada por:

$$y_t = \ln\left(\frac{1-\beta}{a}\right) + m_t - p_t$$

$$y_t = z_t + (1-\alpha)n + \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\gamma L)(1-\gamma\rho L)}\varepsilon_t^m + B$$

$$B = \frac{1-\alpha}{1+\varphi}\ln\left((1-\alpha)\theta\right) - \frac{(1-\alpha)(1+\gamma\rho)\gamma(1+\varphi)}{2(1-\gamma\rho)(1-\gamma\rho^2)(1-\gamma)}\sigma_\varepsilon^2$$

La expresión en B depende del grado de poder de mercado, θ,si éste es alto, el empleo y la producción serán inferiores en relación a un mercado competitivo.

Funciones impulso-respuesta.

Los parámetros que guían la dinámica del output y del nivel de precios son la persistencia de la perturbación monetaria y la probabilidad de que un contrato sea cambiado en un momento del tiempo, γ.

La expresión para el output puede escribirse como:

$$y_t = \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\rho}\left[\frac{1}{1-\gamma L} - \frac{\rho}{1-\gamma\rho L}\right]\varepsilon_t^m$$

Los multiplicadores dinámicos vienen dados por:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t^m} = \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\rho}\gamma^k\left[1-\rho^{k+1}\right] : \underset{k\to\infty}{lím}\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t^m} = 0$$

A corto plazo, el efecto de la perturbación monetaria eleva la producción, pero a largo plazo, ésta vuelve hacia su nivel de equilibrio. La senda dinámica presenta un máximo si $\gamma > \frac{1}{1+\rho}$, esto es, existe un momento k, donde el efecto de la política monetaria sobre la producción es mayor que el impacto inicial.

Un hecho estilizado que el modelo de Ciclo Real es incapaz de reproducir es la positiva autocorrelación de las variaciones en la producción (Cogley y Nason, 1995). Veamos cuál es la autocorrelación a un retardo del crecimiento de la producción en este modelo.

$$Corr(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) = \frac{\gamma + \gamma\rho + \gamma^2\rho - 1}{2} > 0$$

Mientras mayor sea la persistencia del shock monetario y más tiempo tarden los salarios en ajustarse, mayor será la autocorrelación en la tasa de crecimiento de la producción.

Collard y Ertz (2000) y Chari, Kehoe y McGrattan (2000) estudian modelos similares a éste. En el primero, los resultados son similares a los presentados y donde una duración media de un año o dos en los contratos conduce a un fuerte mecanismo de propagación de la política monetaria. Los segundos consideran una duración media de los contratos inferior y por tanto la persistencia del crecimiento de la producción ante una perturbación monetaria es obviamente inferior.

4.4. Dinero en la función de utilidad.

Walsh (2010) explica un modelo walrasiano más general que el presentado en el epígrafe 4.2. Ahora la tasa de depreciación es positiva e inferior a la unidad y la función de utilidad no es separable en saldos reales y consumo. Por otra parte, interrelaciona la perturbación monetaria con el shock de productividad.

Cada individuo maximiza la siguiente función de utilidad general.

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right)$$

sujeto a la restricción presupuestaria, la dinámica del stock de capital y la función de producción.

$$Y_t + (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t = C_t + I_t + \frac{B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t}$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

$$Y_t = F(Z_t, K_t, N_t)$$

Sustituyendo la inversión bruta y la función de producción en la restricción presupuestaria:

$$F(Z_t, K_t, N_t) + (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (1-\delta)K_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t = C_t + K_{t+1} + \frac{B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t}$$

El lagrangiano del problema es:

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, \frac{M_t}{P_t}, K_{t+1}, B_t, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) +$$

$$+\beta^t \lambda_t \left[F(Z_t, K_t, N_t) + (1+i_t)\frac{B_t}{P_t} + (1-\delta)K_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t - C_t - K_{t+1} - \frac{B_{t+1}}{P_t} - \frac{M_t}{P_t}\right]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{\partial u}{\partial C_t} - \lambda_t = 0 \Rightarrow u_C = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -\frac{\partial u}{\partial N_t} - \lambda_t F_N = 0 \Rightarrow -u_N = \lambda_t F_N$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1}(F_{K(t+1)} + 1 - \delta) = 0 \qquad ((4.27))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = u_M \frac{1}{P_t} - \frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} = 0 : \left(m = \frac{M}{P}\right) \qquad ((4.28))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \lambda_{t+1}(1 + i_{t+1})\frac{1}{P_{t+1}} = 0 \qquad ((4.29))$$

Podemos interpretar detalladamente las condiciones de óptimo.

En primer lugar, el óptimo para la cantidad demandada por los individuos, ecuación (4.28) viene explicada de la siguiente manera. La utilidad marginal de mantener dinero tiene dos componentes, el primero es que el dinero da utilidad de forma directa (u_M) y el segundo es que añade recursos reales al siguiente periodo.

$$u_M + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1} P_t}{P_{t+1}} = \lambda_t$$

A partir de (4.27) obtenemos la relación marginal de sustitución entre dos periodos, o ecuación de Euler para el consumo:

Sustituyendo el multiplicador de Lagrange por la utilidad marginal del consumo:

$$u_C(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t) = \beta E_t \left[(\rho_{t+1} + 1 - \delta) u_C(C_{t+1}, \frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}, N_{t+1})\right] : (\rho_{t+1} = F_{K(t+1)})$$

expresión que puede escribirse como:

$$u_C(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t) = \beta E_t (1 + i_t) \frac{P_t}{P_{t+1}} u_C(C_{t+1}, \frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}, N_{t+1})$$

y de la que se obtiene la conocida ecuación de Fisher.

$$(\rho_{t+1} + 1 - \delta) = (1 + r_t) = (1 + i_t)E_t\frac{P_t}{P_{t+1}} \Rightarrow i_t \approx r_t + E_t\pi_{t+1}$$

A partir de las dos condiciones estáticas, obtenemos la relación marginal de sustitución entre consumo y horas trabajadas.

$$-\frac{u_C(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t)}{u_N(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t)} = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} \tag{(4.30)}$$

Y finalmente a partir de (4.28), la relación marginal de sustitución entre saldos reales y consumo:

$$\frac{u_M}{u_C} = 1 - \beta E_t\frac{\lambda_{t+1}P_t}{\lambda_t P_{t+1}} = 1 - \frac{1}{1 + i_t} = \frac{i_t}{1 + i_t}$$

Esta condición tiene la siguiente interpretación: la relación marginal de sustitución entre tenencias de dinero y bienes de consumo es igual al precio relativo de ambos bienes y este precio relativo es el coste de oportunidad de mantener dinero, $\frac{i_t}{1+i_t}$. Dicho de otra manera, si la economía doméstica decide tener una unidad de dinero menos en t, puede comprar un bono que le da un tipo nominal, i_t, el valor real de este rendimiento es $i/1 + \pi$ y como se recibe al siguiente periodo, su valor presente es $i/\left(1 + \pi\right)\left(1 + r\right) = i/1 + i$.

Formas funcionales específicas.

Consideremos ahora una forma función muy utilizada en el análisis económico como es la función CES con aversión relativa al riesgo constante.

$$u(C_t, m_t, N_t) = \frac{(aC_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b})^{\frac{1-\phi}{1-b}}}{1-\phi} + B\frac{(1-N_t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

donde $m_t = \frac{M_t}{P_t}$ son los saldos reales y los parámetros tienen los signos siguienes.

$$0 < a < 1, b, \theta, B, \phi > 0 \qquad y \qquad b, \theta, \phi \neq 1$$

La función de producción es la típica Cobb-Douglas.

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Definiremos como R_t, el rendimiento bruto del capital, $R_t = 1 + r_t = F_{K(t+1)} + 1 - \delta$.

$$R_t = E_t \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + 1 - \delta$$

Dada la expresión, relativamente compleja, para la función de utilidad denotaremos como

$$\mathbf{C}(C_t, m_t) = aC_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b}$$

donde $\mathbf{C}(C_t, m_t)$ es un bien compuesto del consumo de bienes y de la tenencia de saldos reales.

Las utilidades marginales de la función de utilidad vienen dadas por:

$$u_C = \mathbf{C}^{\frac{1-\phi}{1-b}-1} aC_t^{-b} : u_M = \mathbf{C}^{\frac{1-\phi}{1-b}-1}(1-a)m_t^{-b} : u_\ell = -\theta(1-N_t)^{-\theta}$$

Las condiciones de primer orden, la restricción de recursos a nivel agregado, la función de producción agregada, la ecuación dinámica de los saldos reales y suponiendo que el banco central inyecta liquidez a una tasa μ, nos permiten calcular los valores óptimos para las variables. Eliminando el multiplicador de Lagrange de dichas condiciones, éstas vienen dadas por las expresiones:

$$\frac{B(1-N_t)^{-\theta}}{a\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1} C_t^{-b}} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}$$

$$\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1} aC_t^{-b} = \beta E_t \left[R_t \mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1} aC_{t+1}^{-b} \right]$$

$$\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{m_t}{C_t}\right)^{-b} = \frac{i_t}{1+i_t}$$

$$R_t = E_t \left(\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}}\right) + 1 - \delta$$

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

$$\frac{M_t}{M_{t-1}} = 1 + \mu_t \Rightarrow 1 + \mu_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \frac{P_t}{P_t}$$

$$m_t = \frac{1 + \mu_t}{1 + \pi_t} m_{t-1}$$

Finalmente, debemos especificar dos procesos estocásticos para la productividad y el crecimiento monetario.

$$\hat{z}_t = \rho_z \hat{z}_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$\hat{\mu}_t = \rho_m \hat{\mu}_{t-1} + \psi \hat{z}_{t-1} + \varepsilon_t^m$$

donde la tasa de crecimiento monetario está correlacionada con el shock de producitividad y $\hat{\mu}_t = \mu_t - \mu$, representa la desviación de la tasa de crecimiento monetario respecto a su valor de estado estacionario.

El estado estacionario.

En el estado estacionario las variables alcanzan su nivel de equilibrio o en una economía estacionaria sus valores son constantes.

$$u_C F_N = -u_N$$

$$u_C = u_m + \beta \left[\frac{u_C}{1 + \pi} \right]$$

$$1 = \beta \left[F_k + 1 - \delta \right] \Rightarrow 1 = \beta R$$

El estado estacionario para la tasa de inflación viene dado por $m_t = m_{t-1}$, esto es, saldos reales constante y por tanto, $\pi = \mu$.

Aplicando este resultado a la segunda condición tendremos

$$\frac{u_m}{u_C} = 1 - \frac{\beta}{1 + \pi} = \frac{R(1 + \pi) - 1}{R(1 + \pi)} = \frac{(1 + r)(1 + \pi) - 1}{(1 + r)(1 + \pi)} = \frac{i}{1 + i} > 0$$

Por último, la restricción de recursos en estado estacionario será:

$$Y = C + \delta K$$

$$R-1+\delta=\alpha\frac{Y}{K}$$

A partir de las anteriores podemos obtener los estados estacionarios de los ratios siguientes:

$$\frac{Y}{K},\frac{N}{K},\frac{C}{K},\frac{M}{K}$$

$$\frac{Y}{K}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta\right)$$

$$\frac{N}{K}=\left(\frac{Y}{K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{C}{K}=\frac{Y}{K}-\delta=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta\right)-\delta=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\delta$$

$$\frac{m}{C}=\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{i}{1+i}\right)^{-\frac{1}{b}}=\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\mu-\beta}{1+\mu}\right)^{-\frac{1}{b}}$$

$$\frac{m}{K}=\frac{m}{C}\frac{C}{K}$$

Todos los ratios anteriores son independientes de la tasa de inflación excepto $\frac{m}{C}$.

Por último, el cálculo del estado estacionario para la oferta de trabajo es algo más laborioso. A partir de la relación marginal de sustitución entre consumo y oferta de trabajo, (4.30).

$$B(1-N)^{-\theta}=(1-\alpha)\frac{Y}{N}\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1}aC^{-b}$$

El estado estacionario para $\mathbf{C}$ tiene la expresión:

$$\mathbf{C}=ac^{1-b}\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\pi-\beta}{1+\pi}\right)^{\frac{b-1}{b}}\right]$$

$$B(1-N)^{-\theta}=(1-\alpha)\left(\frac{Y}{K}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}a^{\frac{1-\phi}{1-b}}C^{-\phi}\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}}$$

y a partir de

$$C^{-\phi}=\left(\frac{C}{K}\right)^{-\phi}\left(\frac{K}{N}\right)^{-\phi}N^{-\phi}$$

$$\frac{N^{\phi}}{(1-N)^{\theta}} = A\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\mu-\beta}{1+\mu}\right)^{\frac{b-1}{b}}\right]^{\frac{b-\phi}{1-b}} \qquad ((4.31))$$

donde

$$A = a^{\frac{1-\phi}{1-b}}\left(\frac{1-\alpha}{B}\right)\left(\frac{Y}{K}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{C}{K}\right)^{-\phi}\left(\frac{K}{N}\right)^{-\phi}$$

que es función de los estados estacionarios ya calculados $\frac{Y}{K}, \frac{K}{N}, \frac{C}{K}$.

Es significativo observar que en la ecuación (4.31), el nivel de empleo de estado estacionario sí depende de la tasa de crecimiento monetario o de la tasa de inflación de estado estacionario. Si aplicamos logaritmos y diferenciamos la expresión, obtenemos:

$$\phi \ln N - \theta \ln(1-N) = \ln A + \frac{b-\phi}{1-b}\ln\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\mu-\beta}{1+\mu}\right)^{\frac{b-1}{b}}\right]$$

$$\left(\frac{\phi}{N}+\theta\frac{1}{1-N}\right)dN = \frac{b-\phi}{1-b}\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\mu-\beta}{1+\mu}\right)^{\frac{b-1}{b}}\right]^{-1}\frac{b-1}{b}\frac{\beta}{(1+\mu)^2}d\mu$$

$$\left(\frac{\phi}{N}+\theta\frac{1}{1-N}\right)dN = -\frac{b-\phi}{b}\left[1+\left(\frac{a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{b}}\left(\frac{1+\mu-\beta}{1+\mu}\right)^{\frac{b-1}{b}}\right]^{-1}\frac{\beta}{(1+\mu)^2}d\mu$$

$$\frac{dN}{d\mu} < 0 \Leftrightarrow b-\phi > 0$$

El efecto de una tasa de crecimiento monetario más alto, que implica una inflación de estado estacionario más alta depende del signo de $b-\phi$. Si éste es positivo, un crecimiento monetario más alto da lugar a que la parte derecha de la ecuación sea decreciente lo que conduce a una caída en el empleo de estado estacionario. El signo positivo de la diferencia entre estos dos parámetros implica que los argumentos de la función de utilidad sean complementarios en el sentido de Edgeworth ya que la utilidad marginal cruzada entre consumo y saldos reales es positiva.

$$u_{Cm} = a(1-a)C^{-b}\left(\frac{1-\phi}{1-b}-1\right)(1-b)\left(aC_t^{1-b}+(1-a)m_{t+1}^{1-b}\right)^{\frac{1-\phi}{1-b}} > 0 \Leftrightarrow b > \phi$$

Una tasa de inflación más alta reduce los saldos reales y disminuye la utilidad marginal del consumo lo que conduce a que las economías domésticas sustituyan tiempo de trabajo por tiempo de ocio.

Obviamente los efectos son opuestos si consumo y saldos reales son sustitutivos en el sentido de Edgeworth.

Solución.

Para encontrar la solución del sistema no lineal anterior procedemos al método estándar de log-linealizar las condiciones de primer orden junto a la función de producción y la restricción de recursos.

Nuestras ecuaciones de partida son:

$$\frac{B(1-N_t)^{-\theta}}{a\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1}C_t^{-b}} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} \tag{(4.32)}$$

$$\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1}aC_t^{-b} = \beta E_t\left[R_t\mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1}aC_{t+1}^{-b}\right] \tag{(4.33)}$$

$$\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{m_t}{C_t}\right)^{-b} = \frac{i_t}{1+i_t} \tag{(4.34)}$$

$$R_t = E_t\left(\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}}\right) + 1 - \delta \tag{(4.35)}$$

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \tag{(4.36)}$$

$$Y_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t \tag{(4.37)}$$

$$m_{t+1} = \frac{1+\mu_t}{1+\pi_t}m_t \tag{(4.38)}$$

El sistema tiene 7 variables endógenas $\{Y_t, K_{t+1}, N_t, m_{t+1}, \pi_t, R_t, C_t\}$, dos variables predeterminadas $\{m_t, K_t\}$ y dos variables puramente exógenas $\{u_t, z_t\}$, que presentan el comportamiento dinámico preestablecido con anterioridad.

Las ecuaciones log-linealizadas correspondientes a las condiciones de primer orden son:

$$\left(1+\theta\left(\frac{N}{1-N}\right)\right)\hat{N}_t = \hat{Y}_t + \hat{\xi}_t$$

a (4.32) y donde hemos definido

$$\xi_t = \mathbf{C}^{\frac{b-\phi}{1-b}-1} a C_t^{-b}$$

$$\hat{\xi}_t = -\left[\zeta\phi + (1-\zeta)b\right]\hat{C}_t + (b-\phi)(1-\zeta)\hat{m}_t$$

$$\zeta = \frac{aC^{1-b}}{aC^{1-b} + (1-a)m^{1-b}} = \frac{1}{1+\frac{1-a}{a}\left(\frac{m}{C}\right)^{1-b}}$$

a (4.33).

$$\hat{\xi}_t = E_t\left(\hat{R}_t + \hat{\xi}_{t+1}\right)$$

a (4.34).

$$\hat{m}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b}\hat{\imath}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b}\left(\hat{R}_t + E_t\pi_{t+1}\right)$$

a (4.35).

$$\hat{R}_t = \alpha\frac{Y}{K}E_t(\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1})$$

a (4.36).

$$\hat{Y}_t = \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t + \hat{z}_t$$

a (4.37)

$$\hat{Y}_t = \frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1} - \frac{K}{Y}(1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t$$

a (4.38)

$$\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} - \hat{\pi}_t + \hat{\mu}_t$$

Si $b = \phi = 1$, la función CES se convierte en una función separable y log-lineal y las sendas de transición son independientes de la oferta monetaria ya que la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio es independiente de los saldos reales (Fischer, 1979) y sólo los saldos reales dependen de la tasa de inflación.

$$u(C_t, m_t, N_t) = a\ln C_t + (1-a)\ln m_t + B\frac{(1-N_t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$\underset{b\to 1}{líma} C_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b} = a\ln C_t + (1-a)\ln m_t$$

Si $b = \phi \neq 1$, la función de preferencias se convierte en una función aditiva y separable:

$$u(c_t, m_{t+1}, \ell_t) = \frac{aC_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b}}{1-\phi} + B\frac{\ell_t^{1-\eta}}{1-\eta}$$

y ni la utilidad marginal del consumo ni la utilidad marginal del ocio dependen del nivel de saldos reales, con lo que las variables reales, empleo, output y consumo no dependen en el estado y estacionario de la tasa de crecimiento monetario. El modelo exhibe superneutralidad, tanto en el estado estacionario como en su senda dinámica de ajuste hacia el mismo.

Este tipo de función de utilidad da lugar a una ecuación de demanda de dinero frecuentemente utilizada en la literatura empírica. La demanda de dinero viene dada a partir de la condición de primer orden:

$$\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{m_t}{C_t}\right)^{-b} = \frac{i_t}{1+i_t}$$

$$\ln\frac{M_t}{P_t} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + \ln C_t - \frac{1}{b}\ln\frac{i_t}{1+i_t}$$

La elasticidad de la demanda de dinero con respecto al tipo de interés nominal viene dada por:

$$\epsilon_i^m = -\frac{d\ln m_t}{\frac{di_t}{i_t}} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+i}$$

siendo aproximadamente la elasticidad de la demanda de dinero con respecto al coste de oportunidad del mismo, $\frac{1}{1+i}$, $\frac{1}{b}$. A menudo y por simplicidad y cuando los tipos de interés no son demasiado altos, se suele asumir que $\frac{1}{1+i} \simeq 1$ y $\frac{1}{b}$ sería la elasticidad de la demanda de dinero al tipo de interés.

Por otra parte, nótese que cuando $b \to \infty$, la elasticidad de la demanda de dinero al tipo de interés nominal es prácticamente cero y básicamente la condición de primer orden se convierte en lo que denominaremos una restricción cash-in-advance en el próximo epígrafe.

En este caso, la expresión para la variable $\hat{\xi}_t$ que depende en general del consumo y de los saldos reales, sólo dependería del primero, con lo que el sistema quedaría dividido en una parte real y otra monetaria, esto es, podremos resolverlo por una parte para las variables reales $\left(\hat{K}_{t+1}, \hat{Y}_t, \hat{N}_t, \hat{C}_t, \hat{R}_{t+1}\right)$, con independencia del proceso que siga la oferta monetaria y por tanto de la tasa de inflación.

$$\hat{\xi}_t = -\left[\zeta\phi + (1-\zeta)b\right]\hat{C}_t + (b-\phi)(1-\zeta)\hat{m}_t = -b\hat{C}_t \Longleftrightarrow b = \phi \neq 1$$

En este caso, tendríamos de nuevo los resultados clásicos, y el sistema exhibiría superneutralidad, esto es, las variables reales son independientes a lo largo de su senda de ajuste y en el estado estacionario de la tasa de crecimiento monetario.

Las ecuaciones que nos definen el equilibrio para las variables reales serían las típicas del modelo de Ciclo Económico Real.

$$\left(1 + \theta\left(\frac{N}{1-N}\right)\right)\hat{N}_t = \hat{Y}_t - b\hat{C}_t$$

$$-b\hat{C}_t = E_t\left(\hat{R}_t - b\hat{C}_{t+1}\right)$$

$$\hat{Y}_t = \frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1} - \frac{K}{Y}(1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t$$

$$\hat{R}_t = \alpha\frac{Y}{K}E_t(\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1})$$

$$\hat{Y}_t = \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t + \hat{z}_t$$

Mientras que el sistema que nos permitiría caracterizar la inflación y los saldos reales en función de la tasa de crecimiento monetario.

$$\hat{m}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b}\hat{\imath}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b}\left(\hat{R}_t + E_t\pi_{t+1}\right)$$

$$\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} - \hat{\pi}_t + \hat{\mu}_t$$

La primera de éstas puede escribirse como:

$$b\left(\hat{M}_t - \hat{P}_t\right) = b\hat{C}_t - \hat{R}_t - E_t\hat{P}_{t+1} + \hat{P}_t$$

$$\hat{P}_t = \frac{1}{1+b}E_t\hat{P}_{t+1} + \frac{b}{1+b}\hat{M}_t + x_t$$

Esta no es sino la ecuación dinámica para el nivel de precios que permite resolver la senda de equilibrio para el nivel de precios y es exactamente la misma que utilizó P. Cagan (1956) en su conocido estudio sobre las hiperinflaciones. Dado que $\hat{C}_t$ y $\hat{R}_t$ vienen determinadas en la parte real del sistema, el nivel de precios queda resuelto en función de la senda futura para la oferta monetaria.

Resolviendo hacia delante, obtenemos:

$$\hat{P}_t = \frac{b}{1+b} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+b} \right)^i E_t \hat{M}_{t+i}$$

Cuando $b \neq \phi$, el dinero importa en el sentido de que sólo cambios anticipados en la tasa de crecimiento monetario afectan a las variables reales a largo plazo. Si el shock monetario es puramente transitorio, $\hat{\mu}_t = \varepsilon_t^m$, esto es, un cambio no anticipado en la tasa de crecimiento monetario que no tiene efectos sobre los valores futuros anticipados de la tasa de crecimiento monetario, ya que $\rho_m = \psi = 0$.

$$E_t \hat{\mu}_{t+1} = 0$$

En este caso, la tasa de inflación a largo plazo ni la expectativa sobre la misma se ve alterada. Sólo provoca un aumento en el nivel de precios permanente que es proporcional al incremento no esperado en la tasa de crecimiento monetario, dejando inalterados los saldos reales.

Este resultado contrasta con el modelo de Lucas del capítulo 1, en el sentido de que como tuvimos ocasión de ver, sólo los cambios no anticipados podían tener efecto sobre el nivel de producción.

Sin embargo, si la perturbación monetaria presenta persistencia ($\rho_m > 0$) el crecimiento monetario elevará las expectativas de inflación futura. Dados unos niveles de consumo y de tipo de interés real, el aumento de las expectativas de inflación provoca una caida en los saldos reales, esto es, $\hat{M}_{t+1} - \hat{P}_t < 0$, como podemos apreciar en

$$\hat{m}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b} \hat{\imath}_t = \hat{C}_t - \frac{1}{b} \left(\hat{R}_t + E_t \pi_{t+1} \right)$$

La caída en los saldos reales, afecta a las variables reales a través de la ecuación de Euler y al nivel de empleo de equilibrio, y por tanto se propaga al resto de las variables reales.

$$\hat{\xi}_t = -\left[\zeta\phi + (1-\zeta)b\right]\hat{C}_t + (b-\phi)(1-\zeta)\hat{m}_t$$

$$\hat{\xi}_t = E_t(\hat{R}_{t+1} + \hat{\xi}_{t+1})$$

$$\left(1 + \theta\frac{N}{1-N}\right)\hat{N}_t = \hat{Y}_t + \hat{\xi}_t$$

Calibración.

En el modelo tenemos 13 parámetros que caracterizan el comportamiento del mismo alrededor del estado estacionario. Algunos de ellos son comunes a los modelos estándar de Ciclo Real mientras que otros son estimados. En Cooley y Prescott (1995) se incluyen algunos valores calibrados para periodos trimestrales. Para la tasa de crecimiento monetario, Walsh supone que crece al 5 % anual o lo que es lo mismo, al 1.0125 trimestral. Cooley y Hansen (1989) estiman un valor de 0.0089 para la desviación estándar de la innovación del crecimiento monetario para EEUU.

El resto de los parámetros son los que caracterizan la función de utilidad. El valor de θ es fijado en 1, mientras que B es elegido de tal forma que en el estado estacionario $N = 1/3$. Para este valor, la elasticidad de la oferta de trabajo $\theta\frac{1-N}{N}$ es igual a 2.

Para a y b los valores elegidos son consistentes con los estimados por Chari, Kehoe y McGrattan (2000). El parámetro a tiene un valor de 0.95 y b es igual a 2.56. La inversa de la elasticidad intertemporal de sustitución, ϕ, es fijada en 2, de tal forma que $b - \phi > 0$ y el resultado que nos dará el modelo será una caida en el empleo y en el output cuando se acelere la tasa de crecimiento monetario esperado.

Walsh (2010) calibra el modelo con los siguientes valores de los parámetros.

α	β	δ	ϕ	θ	a	b	$1+\pi$	ρ	σ_ε	σ_u
1/3	0.989	0.02	2	1	0.95	2.56	1.0125	0.95	0.007	0.0089

Dados estos parámetros, los valores de estado estacionario para los "grandes ratios" del modelo son:

R	$\frac{Y}{K}$	$\frac{C}{K}$	$\frac{m}{K}$	$\frac{N}{K}$
1.011	0.084	0.065	0.089	0.021

Los resultados que genera el modelo ante un shock consistente en un aumento en la tasa de crecimiento monetario son una caida en el empleo y el nivel de producción, caída que depende del grado de persistencia de la perturbación monetaria. Las variaciones en las variables reales ante el aumento ante la perturbación monetaria son de poca relevancia cuantitativa. La única variable que resulta afectada de manera cuantitativamente importante es el tipo de interés nominal dado que el aumento en la tasa de inflación provoca un aumento del mismo. Este resultado supone que el modelo es incapaz de generar efecto liquidez.

El mecanismo de transmisión de los shocks monetarios es débil debido a que sus variaciones afectan a los saldos reales y dado que éstos están incluidos en la función de utilidad, terminan en alguna medida influyendo en la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio. El aumento en la tasa de inflación cuando la tasa de crecimiento monetario está correlacionada, ($\rho_m \neq 0$) y $b - \phi > 0$ reduce los saldos reales, reduciendo la utilidad marginal del consumo, dando lugar a una demanda mayor de ocio y a una reducción en las horas trabajadas.

Por otra parte, el haber supuesto que la tasa de crecimiento monetario está correlacionada con la perturbación tecnológica nos permite comprobar cómo afecta ésta a la primera, lo cual depende del signo del parámetro ψ que nos da la correlación entre las dos variables exógenas.

En el caso de que $\psi \leq 0$, la inflación y la producción están negativamente correlacionadas, ya que el shock de productividad eleva la producción y reduce el nivel de precios. El shock tecnológico provoca una reducción en la tasa de crecimiento monetario esperada y por tanto en la inflación, lo que reduce los saldos reales, aumenta la utilidad marginal del consumo y provoca un aumento en el nivel de empleo ($b > \phi$).

Con $\psi > 0$, un shock tecnológico conduce a una inflación esperada más elevada y el empleo y la producción responden en menor medida que para $\psi \leq 0$.

La simulación revela que las diferencias en todos los casos son de pequeña magnitud, y por tanto los cambios en la tasa de crecimiento monetario afectan princpalmente al tipo de interés nominal y a la tasa de inflación.

4.5. Modelos cash-in-advance, (CIA).

Cooley y Hansen (1989) introducen dinero en el modelo de Hansen con trabajo indivisible. Los modelos cash in advance requieren que los agentes tengan efectivo en cualquier periodo para la compra de bienes de consumo con lo que la función principal del dinero es servir como medio para financiar transacciones. La forma concreta de introducir la restricción cash-in-advance depende sobre qué bienes esté sujeta dicha restricción, esto es, puede incluir a todos los bienes o sólo a un subconjunto de ellos[45]. Los supuestos acerca de la secuencia en las transacciones también pueden ser importantes en este tipo de modelos. En Lucas (1982) los individuos asignan su riqueza entre dinero y otros activos al comienzo de cada periodo y después asignan el resto a la compra de bienes; es como si el mercado de activos abriese antes que el mercado de bienes. Si el coste de oportunidad de mantener dinero es alto, el individuo asignará más dinero a la compra de activos y menos a la compra de bienes. En Svensson (1985), por contra el mercado de bienes abre primero y la demanda de bienes está restringida por el dinero procedente del periodo anterior.

Estas aportaciones no contemplan ni la existencia de capital, ni la decisión de oferta de trabajo. Cooley Hansen (1989) introducen estos aspectos además de identificar a los bienes de consumo como bienes sujetos a la restricción cash-in-advance, (cash-goods) mientras que los bienes de inversión y el ocio se consideran bienes a crédito (credit goods).

En estos modelos, la inflación constituye un impuesto sobre las compras

[45] Hairault J. y Portier, F (1995) plantean un modelo cash-in-advance en el que la restricción no sólo afecta a los bienes de consumo sino también a los bienes de inversión.

de bienes de consumo y por tanto, tasas de inflación más altas, provocan un cambio en la demanda desde bienes de consumo a bienes no restringuidos por la restricción de liquidez.

El efecto de la inflación será reducir las horas de trabajo y por tanto reducir la producción, el consumo, la inversión y el estado estacionario para el stock de capital.

4.5.1. Modelo I.

En este modelo comparamos los resultados que se obtienen de su resolución con los obtenidos en el modelo anterior del epígrafe 4.4.

Consideremos un modelo básico, donde la función de utilidad viene dada por:

$$u(C_t, m_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\phi}}{1-\phi} - B\frac{(1-N_t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

La restricción CIA sólo se aplica a bienes de consumo, esto es, el nivel de consumo debe ser como máximo igual a las tenencias de saldos nominales.

$$P_t C_t = M_{t-1}$$

La restricción presupuestaria viene dada por:

$$Y_t + (1-\delta)K_t + (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} + T_t = C_t + K_{t+1} + \frac{B_t}{P_t} + \frac{M_t}{P_t}$$

Y la función de producción es:

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Planteando la ecuación de Bellman.

$$V(K_t, M_{t-1}, Z_t) = Max\{u(C_t, N_t) + \beta V(K_{t+1}, M_t, Z_{t+1})\}$$

donde las variables de decisión son $\{C_t, N_t, K_{t+1}, B_t, M_t\}$ y $\lambda_t^{(1)}$ y $\lambda_t^{(2)}$ los multiplicadores asociados a las dos restricciones, obtenemos las condiciones de primer orden del problema.

$$C_t^{-\phi} = \lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}$$

$$B(1-N_t)^{-\theta} = \lambda_t^{(1)}(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}$$

$$\lambda_t^{(1)} = \beta E_t R_t \lambda_{t+1}^{(1)}$$

$$\lambda_t^{(1)} = \beta E_t \left(\frac{P_t}{P_{t+1}}(1+i_t)\right)\lambda_{t+1}^{(1)}$$

$$\lambda_t^{(1)} = \beta E_t \frac{P_t}{P_{t+1}}\left(\lambda_{t+1}^{(1)} + \lambda_{t+2}^{(2)}\right)$$

donde

$$R_t = E_t \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + 1 - \delta$$

Junto a las restricciones cash-in-advance, la restricción de recursos, la función de producción y la evolución de los saldos reales.

$$C_t = \frac{M_t}{P_t}$$

$$Y_t + (1-\delta)K_t = C_t + K_{t+1}$$

$$m_t = \frac{1+\mu_t}{1+\pi_t} m_{t-1}$$

$$Y_t = \exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

El estado estacionario.

Los ratios en estado estacionario tienen las siguientes expresiones:

$$\beta = \frac{1+i}{1+\pi} : \lambda_t^{(1)} = \frac{\beta}{1+\pi} C^{-\phi} : C^{-\phi} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}$$

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{R-(1-\delta)} : R = \frac{1}{\beta} : \frac{C}{K} = \frac{Y}{K} - \delta : \frac{K}{N} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

A partir de la restricción CIA.

$$C = \frac{M - T}{P} = \frac{M}{P}$$

$$(1-N)^{-\theta} N^{\phi} = \frac{1-\alpha}{B} \frac{\beta}{1+\pi} \left(\frac{Y}{K}\right)^{\frac{\phi-\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{C}{K}\right)^{-\phi}$$

El efecto sobre el consumo de un aumento en la tasa de crecimiento monetario y por tanto en la tasa de inflación sobre el consumo puede observarse en:

$$\lambda_t^{(1)} = \beta E_t \frac{P_t}{P_{t+1}} u'(C_{t+1}) \Rightarrow \lambda_t^{(1)} = \beta E_t \frac{u'(C_{t+1})}{1+\pi_{t+1}}$$

En estado estacionario, una elevacion de la tasa de inflación debe elevar $u'(C)$ o lo que es lo mismo, provocar una disminución en el consumo. Aplicando logaritmos en el estado estacionario y diferenciando:

$$\ln \frac{\lambda_t^{(1)}}{\beta} = \ln \frac{u'(C)}{1+\pi} \Rightarrow d \ln u'(C) = d\pi : \ln(1+\pi) \simeq \pi$$

Es aquí donde podemos ver el efecto real que provoca un aumento en la tasa de crecimiento.

La aproximación log-lineal de las condiciones de primer orden tiene las siguientes expresiones. La restricción de recursos, la función de producción y el tipo de interés real tienen las mismas expresiones que el modelo con dinero en la función de utilidad. Definiendo $m_t = M_t/P_t$ $\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$ y $\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_t^{(1)}$.

$$\hat{Y}_t = \frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1} - \frac{K}{Y}(1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t$$

$$\hat{R}_t = \alpha \frac{Y}{K} E_t(\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1})$$

$$\hat{Y}_t = \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t + \hat{z}_t$$

$$\hat{\lambda}_t = -E_t(\phi \hat{m}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}) \tag{(4.39)}$$

$$\hat{C}_t = \hat{m}_t$$

$$\left(1 + \theta\left(\frac{N}{1-N}\right)\right)\hat{N}_t = \hat{Y}_t + \hat{\lambda}_t \tag{(4.40)}$$

$$\hat{\lambda}_t = \hat{R}_t + E_t\hat{\lambda}_{t+1}$$

$$\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} - \hat{\pi}_t + \hat{\mu}_t \tag{(4.41)}$$

$$\hat{\imath}_t = \hat{R}_t + E_t\hat{\pi}_{t+1}$$

En el modelo con dinero en la función de utilidad logarítmica obtuvimos que el dinero era superneutral; en este modelo cash in advance, para $\phi = 1$ obtenemos una función logarítmica en el consumo, sin embargo, ahora el dinámica de ajuste de las variables reales no es independiente de la tasa de crecimiento monetario. Esto es, en el modelo con restricción de liquidez un aumento de la tasa de crecimiento monetario provoca efectos reales cuando en el modelo con dinero en función de utilidad no los provocaba.

A partir de (4.39), (4.40) y (4.41), que nos ligan los saldos reales, el nivel de horas trabajadas y el consumo.

$$\hat{\lambda}_t = -E_t(\hat{m}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}) : (\phi = 1)$$

$$\left(1 + \theta\left(\frac{N}{1-N}\right)\right)\hat{N}_t - \hat{Y}_t = -E_t(\hat{m}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}) = -E_t(\hat{m}_t + \hat{\mu}_{t+1})$$

$$E_t\hat{\mu}_{t+1} = -E_t\hat{C}_t + \hat{Y}_t - \left(1 + \theta\left(\frac{N}{1-N}\right)\right)\hat{N}_t \tag{(4.42)}$$

El resultado en (4.42) implica que una variación en la tasa de crecimiento monetario debe ajustar o bien el consumo, o bien el número de horas trabajadas o bien el nivel de producción y por tanto afecta a una o a todas estas variables reales.

Los resultados de la calibración en este modelo, generan resultados cualitativos análogos al modelo con dinero en la función de utilidad aunque el efecto cuantitativo es algo mayor. De nuevo, sólo el tipo de interés nominal aumenta ante la tasa de crecimiento monetario mientras que el empleo y el nivel de producción caen a corto plazo.

La transmisión del shock monetario se realiza a partir de la restricción de liquidez. Un aumento en la tasa de crecimiento monetario aumenta la tasa de inflación provocando una reducción en el consumo, debido a que aquélla actúa como un impuesto sobre éste (impuesto inflacionista), lo que induce a una sustitución hacia el ocio que disminuye la oferta de trabajo.

4.5.2. Modelo II.

En este modelo asumiremos una función de utilidad logarítmica en el consumo y lineal en horas de trabajo y resolveremos a través del equilibrio competitivo. En este caso incluiremos explícitamente los mercados de trabajo y capital, donde las rentas de ambos factores se determinan por la oferta y demanda de ambos factores y los agentes individuales toman como dados dichos precios, ya que sus acciones individuales no tienen influencia sobre los mismos. Aunque en equilibrio, las cantidades ofrecidas de trabajo y capital son determinadas por las decisiones individuales de las familias, este feedback no es tomado en cuenta cuando las decisiones de optimización son realizadas. Todas las familias son iguales y terminarán haciendo lo mismo, pero cada familia es tan pequeña que sus decisiones no afectan al agregado de capital o trabajo.

Es útil pensar en la economía como un conjunto contínuo de i agentes, $i \in [0,1]$. Existe una masa unitaria de agentes idénticos, de tal forma que cuando los sumamos, el agregado se comporta como cualquiera de ellos; las variables de decisión de los individuos serán denotados con letra minúscula y las variables agregadas con mayúsculas.

El modelo es similar al planteado por Cooley y Hansen (1989).

Cada economía doméstica, i, desea maximizar:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i, n_t^i) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln c_t^i - B n_t^i\right]$$

La tecnología es Cobb-Douglas

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Bajo condiciones de competencia perfecta:

$$w_t = (1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

$$r_t = \alpha Z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

$$\ln Z_t = \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Debe notarse que las cantidades agregadas de trabajo y capital son las que determinan los salarios y la renta del capital. Dado que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala, toda la producción se distribuye entre masa salarial y renta del capital, esto es, las empresas no tienen beneficios extraordinarios.

Las cantidades agregadas de trabajo y de capital son:

$$N_t = \int_0^1 n_t^i di : K_t = \int_0^1 k_t^i di$$

Cada familia tiene una cantidad de dinero procedente del periodo anterior m_t y recibe una transferencia de dinero del gobierno igual a:

$$T = M_{t+1} - M_t$$

La cantidad de dinero crece a la tasa μ_t

$$M_t = \mu_t M_{t-1}$$

$$T_t = (\mu_t - 1)M_t$$

donde M_t es el stock de dinero per cápita en t. Lo que recibe como transferencia cada familia es independiente de la cantidad de dinero que tiene, esto es, las transferencias monetarias son función del agregado monetario pero no de las propias tenencias de dinero de las familias. En este modelo, al existir una masa unitaria de familias, las variables per cápita son iguales al agregado de la misma variable, ya que al dividir la variable agregada entre la unidad, nos da el agregado, ventaja que obtenemos al definir la población como un continuum de masa igual a la unidad.

La restricción cash in advance sobre los bienes de consumo viene dada por:

$$P_t c_t^i \leq m_t^i + (\mu_t - 1)M_t$$

donde, P_t es el nivel de precios.

Supondremos además que la restricción cash-in-advance está saturada esto es, todo el dinero se gasta en bienes de consumo.

Además de la restricción anterior, las familias se enfrentan a la restricción presupuestaria que expresada en términos reales:

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{m_{t+1}^i}{P_t} = w_t n_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + \frac{m_t^i}{P_t} + \frac{(\mu_t - 1)M_t}{P_t}$$

Para resolver el modelo necesitamos definir el estado estacionario. Si $\mu_t = \mu = 1$, la cantidad de dinero permanece constante y las variables serían estacionarias. Sin embargo, para $\mu_t \neq 1$, la cantidad de dinero o bien está aumentando o bien se está contrayendo continuamente en el tiempo, y por tanto no existiría un equilibrio de estado estacionario. Esto es, de alguna forma debemos normalizar o reescalar nuestras variables. Cooley y Hansen normalizan el nivel de precios y la cantidad de dinero nominal de cada economía doméstica dividiendo por la cantidad de dinero, M_t. Una forma alternativa sería dividir entre el nivel de precios y expresar las variables en términos reales.

Aquí seguiremos el enfoque de estos autores y por tanto:

$$\tilde{P}_t = \frac{P_t}{M_t} : \tilde{m}_t = \frac{m_t^i}{M_t} : \tilde{m}_{t+1} = \frac{m_{t+1}^i}{M_t} : \frac{M_t}{M_t} = 1$$

Con esta redefinición las restricciones quedan como:

$$\tilde{P}_t c_t^i \leq \tilde{m}_t + \mu_t - 1$$

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{\tilde{m}_{t+1}}{\tilde{P}_t} = W_t n_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + \frac{\tilde{m}_t}{\tilde{P}_t} + \frac{\mu_t - 1}{\tilde{P}_t}$$

Finalmente, añadimos la regla estocástica de comportamiento de la tasa de crecimiento monetario:

$$\ln \mu_t = (1-\rho_\mu)\ln \mu + \rho_\mu \ln \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

Las condiciones de agregación en el equilibrio son:

$$K_t = k_t : N_t = n_t : C_t = c_t : \tilde{M}_t = \tilde{m}_t = 1$$

El planteamiento realizado a partir del lagrangiano es el siguiente:

$$\mathcal{L}(c_t^i, n_t^i, k_{t+1}^i, \lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)}) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln c_t^i - B n_t^i + \lambda_t^{(1)} \left(\tilde{P}_t c_t^i - (\tilde{m}_t + \mu_t - 1) \right) \right) +$$

$$+ \beta^t \lambda_t^{(2)} \left(k_{t+1}^i + \frac{\tilde{m}_{t+1}}{\tilde{P}_t} - W_t n_t^i - r_t k_t^i - (1-\delta) k_t^i \right)$$

las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \frac{1}{c_t^i} + \lambda_t^{(1)} \tilde{P}_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t^i} = -B - \lambda_t^{(2)} W_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}^i} = \lambda_t^{(2)} - \beta E_t \lambda_{t+1}^{(2)} \left[(1-\delta) + r_{t+1} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{m}_{t+1}} = \frac{1}{\tilde{P}_t} \lambda_t^{(2)} - \beta E_t \lambda_{t+1}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t^{(1)}} = \tilde{P}_t c_t^i - (\tilde{m}_t + \mu_t - 1) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t^{(2)}} = k_{t+1}^i + \frac{\tilde{m}_{t+1}}{\tilde{P}_t} - W_t n_t^i - r_t k_t^i - (1-\delta) k_t^i = 0$$

Despejando los multiplicadores de las dos primeras, el sistema se reduce al siguiente de sólo cuatro ecuaciones:

$$\beta E_t \frac{W_t}{W_{t+1}} \left[(1-\delta) + r_{t+1} \right] = 1$$

$$-\frac{B}{W_t} + \beta E_t \frac{1}{c_{t+1}^i} = 0$$

$$\tilde{P}_t c_t^i = \tilde{m}_t + \mu_t - 1$$

$$k_{t+1}^i + \frac{\tilde{m}_{t+1}}{\tilde{P}_{t+1}} = W_t n_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta) k_t^i$$

los precios de los factores vienen dados por:

$$W_t = (1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

$$r_t = \alpha Z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

Las condiciones de agregación son, dado que todas las economías domésticas son idénticas:

$$C_t = c_t^i : N_t = n_t^i : K_{t+1} = k_{t+1}^i : \tilde{M}_t = \tilde{m}_t^i$$

El estado estacionario tiene las siguientes expresiones.

$$\ln Z_t = \frac{1}{1-\rho L}\varepsilon_t \Rightarrow \ln Z = 0 \Rightarrow Z = 1$$

$$\ln \mu_t = (1-\rho_\mu) + \rho_\mu \ln \mu_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \mu_t = \mu$$

$$\beta\left[(1-\delta) + r\right] = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\beta} - (1-\delta)$$

$$C = \frac{\beta W}{\mu B}$$

$$\tilde{P}C = 1 : \tilde{m} = 1 : \frac{1}{\tilde{P}} = WN + (r-\delta)K$$

$$W = (1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} :$$

$$K = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} N$$

$$K = \frac{C}{\frac{r}{\alpha} - \delta}$$

Ni el salario real ni el rendimiento del capital dependen de la tasa de crecimiento monetario en estado estacionario, pero el consumo, el nivel de precios, el stock de capital, las horas trabajadas y el output sí dependen de él.

Para los siguientes valores de calibración, la tabla 4.1 nos indica las variables que en estado estacionario están relacionadas negativamente con la tasa de crecimiento monetario media de estado estacionario.

β	δ	θ	B
0.99	0.025	0.36	2.60

Tabla 4.1				
C	K	Y	N	$\tilde{P}$
$\frac{0.91}{\mu}$	$\frac{12.5}{\mu}$	$\frac{1.22}{\mu}$	$\frac{0.33}{\mu}$	$\frac{1.10}{\mu}$

Resolución.

Sustituyendo las variables individuales por sus agregados correspondientes y eliminando el stock de dinero ya que la cantidad de dinero agregada debe ser igual a 1 y por tanto $\hat{m}_t = 0$ el sistema log-linealizado viene dado por:

$$\beta E_t \frac{W_t}{W_{t+1}} \left[(1-\delta) + r_{t+1}\right] = 1 \Rightarrow \hat{W}_t = E_t \left[\hat{W}_{t+1} + \beta r \hat{r}_{t+1}\right] \tag{(4.44)}$$

$$-\frac{B}{W_t \tilde{P}_t} + \beta E_t \frac{1}{C_{t+1} \tilde{P}_{t+1} \mu_{t+1}} = 0 \Rightarrow \hat{W}_t + \hat{P}_t = E_t \hat{\mu}_{t+1} \tag{(4.45)}$$

$$K\hat{K}_{t+1} = -\frac{1}{p}\hat{P}_t - WN\hat{W}_t - WN\hat{N}_t - rK\hat{r}_t - rK\hat{K}_t - (1-\delta)K\hat{K}_t \tag{(4.46)}$$

$$\hat{W}_t = \hat{Z}_t + \alpha\hat{K}_t + \alpha\hat{N}_t : \hat{r}_t = \hat{Z}_t + (1-\alpha)\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t \tag{(4.47)}$$

Los shocks tecnológicos y monetarios log-linealizados:

$$\ln Z_t = \rho_z \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$\ln Z_t - \ln Z = \rho_z \ln Z_{t-1} - \rho_z \ln Z + \rho_z \ln Z - \ln Z + \varepsilon_t$$

$$\hat{Z}_t = \rho_z \hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t : (\rho_z - 1)\ln Z = 0$$

$$\ln \mu_t = (1-\rho_\mu)\ln \bar{\mu} + \rho_\mu \ln \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\ln \mu_t - \ln \mu = (1-\rho_\mu)\ln \mu - \ln \mu + \rho_\mu \ln \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\mu}_t = \rho_\mu \hat{\mu}_{t-1} + \varepsilon_t^\mu$$

De nuevo, podemos calcular la solución del sistema por el método de coeficientes indeterminados propuesto por Uhlig (1999).

Definiendo $x_t = \left[\hat{K}_{t+1}\right]$, $y_t = \left[\hat{r}_t, \hat{W}_t, \hat{N}_t, \hat{P}_t\right]$ y $z_t = [\hat{z}_t, \hat{\mu}_t]'$ escribimos el sistema como:

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t$$

$$0 = E_t \left[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t\right]$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1}$$

de tal forma que el sistema dado por (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47) podemos escribirlo como:

$$0 = -\hat{W}_t + E_t \left[\hat{W}_{t+1} + \beta r \hat{r}_{t+1}\right]$$

$$0 = K\hat{K}_{t+1} - \frac{1}{P}\hat{P}_t - WN\hat{W}_t - WN\hat{N}_t - rK\hat{r}_t - rK)\hat{K}_t - (1-\delta)K\hat{K}_t$$

$$\hat{W}_t + \hat{P}_t = E_t \hat{\mu}_{t+1}$$

$$0 = \hat{W}_t - \hat{Z}_t - \alpha\hat{K}_t + \alpha\hat{N}_t$$

$$0 = \hat{r}_t - \hat{Z}_t - (1-\alpha)\hat{K}_t - (1-\alpha)\hat{N}_t$$

Expresado en forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : B = \begin{bmatrix} -(r+1-\delta) \\ 1-\alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} : C = \begin{bmatrix} -rK & -WN & -WN & -\frac{1}{P} \\ 1 & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : F = G = H = [0] : J = \begin{bmatrix} \beta r & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] : L = M = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] : N = \left[\begin{array}{cc} \rho_z & 0 \\ 0 & \rho_\mu \end{array} \right]$$

Dados los valores de calibración anteriores obtenemos como solución:

$$P = [0.95] : Q = \left[\begin{array}{cc} 0.15 & 0.0271 \end{array} \right]$$

$$R = \left[\begin{array}{c} -0.95 \\ 0.53 \\ -0.47 \\ -0.53 \end{array} \right] : S = \left[\begin{array}{cc} 1.94 & -0.05 \\ 0.47 & 0.03 \\ 1.47 & -0.08 \\ -0.47 & 0.45 \end{array} \right]$$

donde

$$\hat{K}_{t+1} = 0.95\hat{K}_t + 0.15\hat{Z}_t + 0.0271\hat{\mu}_t$$

$$\left[\begin{array}{c} \hat{r}_t \\ \hat{W}_t \\ \hat{N}_t \\ \hat{P}_t \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -0.95 \\ 0.53 \\ -0.47 \\ -0.53 \end{array} \right] \hat{K}_t + \left[\begin{array}{cc} 1.94 & -0.05 \\ 0.47 & 0.03 \\ 1.47 & -0.08 \\ -0.47 & 0.45 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \hat{Z}_t \\ \hat{\mu}_t \end{array} \right] \qquad ((4.44))$$

En la solución dada por (4.44) podemos observar que los coeficientes que acompañan a la desviación de la tasa de crecimiento monetario son cuantitativamente pequeños. A través del efecto que ejerce un aumento en la tasa de crecimiento monetario sobre la tasa de inflación, el efecto sobre el empleo es negativo mientras que sí provoca un aumento significativo en el nivel de precios. En este caso, de nuevo el papel que juega una mayor tasa de inflación es encarecer los bienes de consumo, lo que induce a los individuos a sustituirlo por ocio, disminuyendo la oferta de trabajo.

4.6. Dinero y rigideces nominales. Una versión IS-LM.

En este epígrafe desarrollamos un modelo similar a los expuestos en los epígrafes 1 y 3 de este capítulo en los que introducimos competencia monopolística en el mercado de bienes; aquí combinamos este planteamiento para llegar a una versión con expectativas del modelo IS-LM, a partir de una función de utilidad con saldos reales.

Existe un contínuo de economías domésticas $i \in [0,1]$, cada una de las cuales suministra un bien diferenciado i (con lo que podemos considerar a la economía doméstica como un monopolista para dicho bien) y maximiza la siguiente función de utilidad.

$$E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[u(C_t^i) + v\left(\frac{M_t^i}{P_t}\right) - \phi(Y_t^i) \right] \right\}$$

donde

$$C_t^i = \left[\int_0^1 C_t(j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} : \sigma > 1$$

es un índice de consumo de los j productos diferenciados y el parámetro σ nos mide la elasticidad de sustitución entre bienes.

La función de utilidad presenta las siguientes propiedades.

$$u' > 0 : u'' < 0 : v' > 0 : v'' < 0 : \phi' > 0 : \phi'' > 0$$

Esta función de utilidad tiene un conjunto de características que simplican el análisis. En primer lugar, la economía doméstica ofrece directamente bienes con un coste en su utilidad. Podríamos de forma equivalente asumir la desutilidad derivada de trabajar junto a una función de producción que tiene el factor trabajo como input, como hicimos en el capítulo 1. En segundo lugar, el flujo de utilidad derivado de la tenencia de saldos reales es separable con lo que las variaciones en los mismos no tiene efectos sobre la relación marginal de sustitución entre ocio y consumo, de tal forma que la cantidad de dinero no tiene efecto sobre el output potencial, o nivel de producción que se alcanzaría con precios flexibles. En tercer lugar, las decisiones sobre la producción no tienen efecto sobre la relación marginal de sustitución entre consumo y tenencia de saldos reales, con lo que la ecuación de demanda de dinero tiene la misma forma que en modelos donde no se incorpora la elección de trabajo.

El nivel de precios agregado viene dado por la siguiente expresión:

$$P_t = \left[\int_0^1 P_t(j)^{1-\sigma} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

e y_t^i es la oferta del bien j por el individuo i. Finalmente, M_t^i / P_t representa las tenencias de saldos reales por parte del individuo i.

La restricción presupuestaria entre dos periodos viene dada por:

$$\int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj + M_t^i + E_t \left\{ Q_{t,t+1}(B_{t+1}^i) \right\} \leq M_{t-1}^i + B_t^i + P_t^i Y_t^i - T_t$$

M_{t-1}^i es la cantidad de dinero en poder de la economía doméstica en t, B_{t+1} es la cantidad de bonos transferidos desde t a $t+1$, y valorados de acuerdo con el pricing kernel nominal $Q_{t,t+1}$, que se relaciona con el pricing kernel real a partir de la expresión.

$$Q_{t,t+1} = R_{t,t+1} \frac{P_t}{P_{t+1}}$$

La riqueza total del individuo en el momento t, A_t^i se define como $A_t^i = B_t^i + M_{t-1}^i$, y utilizando la definición del tipo de interés nominal de un bono a un periodo, $\frac{1}{1+i_t} = E\left(Q_{t,t+1}\right)$ podemos expresar la restricción como

$$\int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj + M_t^i + E_t \left\{ Q_{t,t+1}(A_{t+1}^i - M_t^i) \right\} \leq A_t^i + P_t^i Y_t^i - T_t$$

$$\int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj + \frac{i_t}{1+i_t} M_t^i + E_t \left\{ Q_{t,t+1} A_{t+1}^i \right\} \leq A_t^i + P_t^i Y_t^i - T_t$$

Resolviendo hacia delante para A_t, la restricción presupuestaria intertemporal es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} E_0 \left\{ Q_{0,t} \left[\int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj + \frac{i_t}{1+i_t} M_t^i \right] \right\} \leq \sum_{t=0}^{\infty} E_0 Q_{0,t} \left[P_t^i Y_t^i - T_t \right] + A_0$$

donde la condición de transversalidad viene dada por:

$$\underset{T\to\infty}{lím}\, E_t Q_{0,T} A_T = 0$$

Resolveremos el problema en varios pasos: en primer lugar calculamos la demanda para cada bien, dado un nivel de gasto; en segundo lugar resolvemos el problema intertemporal de asignación del gasto y del dinero en el tiempo y finalmente consideramos las decisiones de fijación de precios óptimos para cada una de las economías domésticas.

La demanda óptima que realiza cada economía doméstica i de cada bien k viene dada por (ver apéndice 1.1).

$$C_t^k(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\sigma} C_t^i$$

El problema intertemporal.

Dados los ingresos $P_t(i) Y_t^i$ y teniendo en cuenta que $\int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj = P_t C_t^i$ es el gasto en bienes, podemos resolver la asignación óptima de consumo y tenencias de dinero. Por tanto, la maximización de la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria viene dada por:

$$\max\ E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(C_t^i) + \upsilon \left(\frac{M_t^i}{P_t} \right) - \phi(Y_t^i) \right] \right\}$$

$$s.a.\ \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \left[Q_{0,t} \int_0^1 P_t(j) C_t^i(j) dj + \frac{i_t}{1+i_t} M_t^i \right] = \sum_{t=0}^{\infty} E_0 Q_{0,t} \left[P_t^i Y_t^i - T_t \right] + A_0^i$$

$$\mathcal{L}(C_t^i, M_t^i, \lambda) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \left[u(C_t^i) + \upsilon \left(\frac{M_t^i}{P_t} \right) - \phi(Y_t^i) \right] + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} E_0 Q_{0,t} \left[P_t(i) Y_t^i - T_t \right] + \right\} +$$

$$+\beta^t \lambda \left\{ A_0^i - \sum_{t=0}^{\infty} E_0 Q_{0,t} \left[P_t C_t^i + \frac{i_t}{1+i_t} M_t \right] \right\}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t^i} = u'(C_t^i) - \lambda Q_{0,t} P_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t^i} = \upsilon' \left(\frac{M_t^i}{P_t} \right) - \lambda Q_{0,t} P_t \frac{i_t}{1+i_t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{t=0}^{\infty} E_0 Q_{0,t} \left[P_t(i) Y_t^i - T_t \right] + A_0 - \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \left\{ Q_{0,t} \left[P_t C_t^i + \frac{i_t}{1+i_t} M_t \right] \right\} = 0$$

junto a la condición de transversalidad

$$\underset{T \to \infty}{lím} E_t \left\{ Q_{0,T} A_T \right\} = 0$$

La usual condición intertemporal de equilibrio que debe verificarse en cada momento y en cada estado.

$$\frac{\beta^t u'(C_t^i)}{Q_{0,t} P_t} = \frac{\beta^{t+1} u'(C_{t+1}^i)}{Q_{0,t+1} P_{t+1}} \Rightarrow \frac{\beta u'(C_{t+1}^i)}{u'(C_t^i)} = \frac{P_{t+1}}{P_t} \frac{Q_{0,t+1}}{Q_{0,t}} = Q_{t,t+1} \frac{P_{t+1}}{P_t} = R_{t,t+1}$$

y por tanto el tipo de interés satisface

$$Q_{t,t+1} = \frac{1}{1+i_t} = E_t \left\{ \frac{\beta u'(C_{t+1}^i)}{u'(C_t^i)} \frac{P_{t+1}}{P_t} \right\} \tag{(4.45)}$$

Además

$$\lambda = \frac{u'(C_t^i)}{Q_{0,t} P_t} = \frac{\upsilon' \left(\frac{M_t^i}{P_t} \right)}{Q_{0,t} P_t \frac{i_t}{1+i_t}} \Rightarrow \frac{\upsilon' \left(\frac{M_t^i}{P_t} \right)}{u' \left(C_t^i \right)} = \frac{i_t}{1+i_t} \tag{(4.46)}$$

Dado que $\upsilon'' < 0$ la demanda real de dinero disminuye con el tipo de interés nominal, dado un nivel determinado de consumo.

Fijación de precios óptima y decisiones de producción.

Finalmente debemos considerar la decisión de fijación óptima de precios.

Cada economía doméstica debe tener en cuenta que sus ventas afectan al precio ya que se enfrenta a una curva de demanda con pendiente negativa. Agregando las demandas de todas las economías domésticas k, para cada bien i, obtenemos la demanda del bien i, teniendo en cuenta que la demanda individual óptima de cada economía doméstica viene dada por $C_t^k(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t^k$.

$$Y_t^i = \int_0^1 C_t^k(i)dk = \int_0^1 C_t^k \left(\frac{P_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} dk = \left(\frac{P_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} \int_0^1 C_t^k dk = Y_t \left(\frac{P_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma}$$

$$P_t^i = P_t \left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$Y_t^i = \left(\frac{P_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} \int_0^1 C_t^k dk \Rightarrow Y_t^i = Y_t \left(\frac{P_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma}$$

donde $Y_t = \int_0^1 C_t^k dk$ es una medida de la demanda agregada.

Bajo el supuesto de competencia monopolística cada economía doméstica es pequeña en relación al tamaño del mercado con lo que elige un precio $\{P_t(j)\}$ tomando como dados tanto el nivel de precios P_t como la demanda agregada Y_t. Estos dos valores agregados determinan la posición de cada demanda agregada individual.

Consideremos ahora dos supuestos de fijación de precios. En primer lugar, asumimos que el nivel de precios es flexible con lo que cada productor es libre de fijar el precio, conocido el estado de la economía en cada momento. En segundo lugar, supondremos que los precios son fijados un periodo antes.

El caso de flexibilidad de precios.

Bajo precios flexibles, el productor del bien i, se enfrenta al siguiente problema estático:

$$\max_{\{Y_t^i\}} P_t^i Y_t^i - CT(Y_t^i)$$

sujeto a la curva de demanda

$$P_t^i = \left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} P_t$$

Planteando la condición de primer orden:

$$\max_{\{Y_t^i\}} Y_t^{\frac{1}{\sigma}} P_t \left(Y_t^i\right)^{1-\frac{1}{\sigma}} - CT(Y_t^i)$$

obtenemos el precio óptimo que maximiza su beneficio sujeto a la curva de demanda.

$$\frac{\sigma-1}{\sigma}\left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} P_t = CMa(Y_t^i) = \frac{dCT}{dY_t^i} \Rightarrow P_t^i = \frac{\sigma}{\sigma-1} CMa(Y_t^i)$$

$$P_t^i = \left(1 + \frac{1}{\sigma-1}\right) CMa(Y_t^i)$$

El margen de los precios sobre el coste marginal es constante e igual a $\frac{1}{\sigma-1}$. Si la elasticidad de sustitución es alta la curva de demanda será elástica y el margen sobre el precio será bajo, y al contrario una elasticidad de sustitución baja implica una curva de demanda inelástica, un margen alto y precios más altos.

La relación entre coste marginal y precio del bien puede expresarse de forma alternativa en función de la utilidad marginal del consumo y de la desutilidad marginal de las horas trabajadas. Supongamos que en vez de incluir directamente la producción en la función de utilidad, utilizamos un paso indirecto, asumir que la utilidad depende negativamente de las horas trabajadas, como hemos hecho en este modelo, e introducimos una función de producción $Y_t^i = F(N_t^i)$ y la desutilidad del trabajo fuese $G(N_t^i)$.En el óptimo, la demanda de factor viene dada por[46]

$$CMa(Y_t^i) = \frac{W_t}{F'(N_t^i)}$$

[46] Véase por ejemplo Gravelle H, Rees D. (2004). capítulo 10.

Por otra parte, la condición de primer orden en el problema de maximización para la economía doméstica implica que la relación marginal de sustitución entre horas de trabajo y consumo viene dada por:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{G'(N_t^i)}{u'(C_t^i)}$$

Por tanto, el coste marginal real:

$$\frac{\sigma - 1}{\sigma}\left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{CMa(Y_t^i)}{P_t} = \frac{G'(N_t^i)}{u'(C_t^i)} = \frac{G'(F^{-1}(Y_t^i))}{u'(C_t^i)} = \frac{\phi'(Y_t^i)}{u'(C_t^i)} \quad ((4.47))$$

donde $\phi'(Y_t^i) = G'(N_t^i)/F'(N)$.[47]

Finalmente para caracterizar el equilibrio supondremos que la oferta monetaria, M_t^s es exógena y que los impuestos son recaudados por señoriaje, esto es, la restricción presupuestaria del gobierno viene dada por:

$$T_t = -(M_t^s - M_{t-1}^s)$$

Equilibrio con expectativas racionales.

Un equilibrio con expectativas racionales es el conjunto de procesos estocásticos para $\{C_t, M_t, Y_t, P_t, P_t^i, R_{t,t+1}\}$ dado una condición inicial para la variable exógena M_0, y de tal forma que:

1. $\{C_t, M_t, P_t^i\}$ resuelven el problema para la economía doméstica dados $\{Y_t, P_t, R_{t,t+1}, T_t\}$.

2. Las variables a nivel agregado son consistentes con las elecciones individuales, esto es $Y_t = C_t$ y $P_t = P_t^i$.

---

[47]Sea

$$G(N) = G(F^{-1}(Y))$$

$$G'(N) = G'(F^{-1}(Y))F'(F^{-1}(Y)) = \phi'(Y)F'(F^{-1}(Y))$$

$$\phi'(Y) = \frac{G'(N)}{F'(N)}$$

3. El mercado de dinero está equilibrado con cualquier periodo y estado, esto es $M_t = M_t^s$.

4. Se satisface la restricción presupuestaria del gobierno anterior en todos los periodos y estados.

Agregando para todos los individuos, las condiciones de óptimo que caracterizan el equilibrio, expresadas en función de Y_t vienen dadas por (4.45), (4.46) y (4.47).

$$\frac{\upsilon'(M_t^s/P_t)}{u'(Y_t)} = \frac{i_t}{1+i_t} \Leftrightarrow \frac{M_t^s}{P_t} = L(Y_t, i_t) \Rightarrow \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta P}{P}$$

$$\frac{1}{1+i_t} = \beta \frac{P_t}{u'(Y_t)} E_t \left\{ \frac{u'(Y_{t+1})}{P_{t+1}} \right\} : \frac{1+\pi_t}{1+i_t} = \beta : \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_{t+1}$$

$$\frac{\phi'(Y_t)}{u'(Y_t)} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \Rightarrow Y_t = Y^*$$

$$\underset{T\to\infty}{lím} E_t \{Q_{0,T} A_T\} = \underset{T\to\infty}{lím} \beta^t E_t \left(u'(Y_T) \frac{M_{T-1}^s}{P_T} \right) = 0$$

La ecuación (4.46) define el equilibrio en el mercado de dinero y por tanto es la tradicional curva LM. La ecuación (4.46) sería la curva de equilibrio en el mercado de bienes o curva IS, mientras que (4.47) conforma la curva de oferta agregada.

Con precios flexibles, el output es constante, esto es, la curva de oferta agregada es vertical y las variaciones en el nivel de oferta monetaria únicamente cambian el nivel de precios proporcionalmente y aumentan el tipo de interés en igual cuantía que la tasa de inflación. De nuevo obtendríamos el resultado clásico.

Precios rígidos.

Supongamos ahora que los productores fijan los precios para el periodo t en el periodo anterior, $t-1$, dada la información disponible en el momento de fijación de dichos precios. El problema al que se enfrenta el individuo ahora es:

$$\max_{\{P_t^i\}} E_{t-1}\left[P_t^{i1-\sigma}P_t^\sigma Y_t - CT(Y_t^i)\right]$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$E_{t-1}\left[(1-\sigma)\,Y_tP_t^\sigma\left(P_t^i\right)^{-\sigma} - CMa\left(Y_t^i\right)\frac{\partial Y_t^i}{\partial P_t^i}\right] = 0$$

$$P_t^i = \left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} P_t \Rightarrow \frac{\partial Y_t^i}{\partial P_t^i} = -\sigma P_t^\sigma Y_t\left(P_t^i\right)^{-1-\sigma}$$

$$E_{t-1}\left\{\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\left(\frac{Y_t^i}{Y_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}P_t - CMa(Y_t^i)\right)\left(-\sigma Y_tP_t^\sigma\left(P_t^i\right)^{-1-\sigma}\right)\right\} = 0$$

El primer término del paréntesis es el ingreso marginal menos el coste marginal que es cero con precios flexibles, pero con precios fijados un periodo antes, $E_{t-1}\left[u'(Y_t)\frac{\sigma-1}{\sigma} - \phi'(Y_t)\right]$ es distinto de cero. Cuando se fijan los precios la única fuente de incertidumbre es el valor que tome la demanda agregada Y_t (suponiendo que $E_{t-1}P_t$ es conocido) y por tanto el beneficio marginal fluctúa estocásticamente cuando se producen perturbaciones de demanda. El segundo término refleja la pendiente de la curva de demanda individual, que también cambia cuando lo hace Y_t.

Sustituyendo la condición de equilibrio $Y_t = C_t$, agregando para los i consumidores y sustituyendo el coste marginal real.

$$E_{t-1}\left\{Y_t\left(u'(Y_t)\frac{\sigma-1}{\sigma} - \phi'(Y_t)\right)\right\} = 0 \qquad ((4.48))$$

Resolución del modelo.

La condición (4.48) sustituye a la ecuación (4.47), por tanto la primera más (4.45) y (4.46) definen la solución del modelo en presencia de precios rígidos.

Supongamos en primer lugar que la oferta monetaria sigue una distribución idéntica en el futuro, esto es, la secuencia $\{M_T^s\}_{T\geq t+1}$ es la misma e igual a M. En este caso, el nivel de equilibrio del nivel de precios será el mismo para todos los periodos y para todos los estados, esto es, $P_{t+i} = P$.

El valor de equilibrio de Y_t depende de P_t, de M_t y de los valores futuros esperados de M_t. Como la distribución de la oferta monetaria es invariante en el tiempo, Y_t sólo dependerá de P_t y de M_t que son constantes, con lo cual $E_t\left\{u'(Y_{t+1}\right\} = \lambda > 0$.

En tal caso, variaciones aleatorias de la oferta monetaria, desplazan la curva LM, provocando variaciones en el tipo de interés y en la producción, dejando la curva IS inalterada.

$$\frac{\upsilon'(M_t^s/P_t)}{u'(Y_t)} = \frac{i_t}{1+i_t} \tag{(4.49)}$$

$$\frac{1}{1+i_t} = E_t\left\{\frac{\beta u'(Y_{t+1})}{u'(Y_t)}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \Rightarrow \frac{u'(Y_t)}{\beta\lambda} = 1+i_t \tag{(4.50)}$$

Dados λ y P, la solución para la producción viene dada por $Y\left(M_t^s, \lambda^*, P^*\right)$.

Finalmente, estos valores de los parámetros deben satisfacer las dos siguientes condiciones:

$$E_t\left\{u'(Y\left(M_t^s, \lambda, P\right))\right\} = \lambda$$

$$E_{t-1}\left\{Y_t\left(u'(Y_t)\frac{\sigma}{\sigma-1} - \phi'(Y_t)\right)\right\} = E_{t-1}\left\{\Psi(Y\left(M_t^s, \lambda, P\right))\right\} = 0 \tag{(4.51)}$$

A partir del sistema anterior en (λ, P) podemos encontrar la solución para $Y\left(M_t^s, \lambda, P\right)$.

Por tanto, el modelo a nivel cualitativo puede explicar los efectos sobre la producción de cambios no esperados en la política monetaria, con lo que éstos pueden ser origen de las fluctuaciones cíclicas.

Supongamos en segundo lugar que las variaciones de la oferta monetaria están serialmente correlacionadas. Dado que el modelo anterior es no lineal procedemos a aproximarlo a través de la log-linealización en un entorno del estado estacionario. El sistema formado por (4.49), (4.50) y (4.51) log-linealizado viene dado por:

$$m_t = \frac{M_t}{P_t} = L(Y_t, i_t) \Rightarrow \hat{m}_t = \kappa\hat{Y}_t - h\hat{\imath}_t \tag{(4.52)}$$

$$\frac{1}{1+i_t} = \frac{\beta}{u'(Y_t)} E_t \left\{ \frac{u'(Y_{t+1})}{1+\pi_{t+1}} \right\} \Rightarrow \hat{\imath}_t = E_t \hat{\pi}_{t+1} - \frac{1}{\sigma_c} \left[\hat{Y}_t - E_t \hat{Y}_{t+1} \right] : \sigma_c = -\frac{u'(Y)}{u''(Y)Y} \quad ((4.53))$$

donde σ_c es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Aplicando la condición (4.51):

$$E_t \left[\Psi(Y_{t+1}) \right] = 0 \Rightarrow E_t \hat{Y}_{t+1} = 0$$

Incluyendo la ecuación dinámica de saldos reales, que viene expresada en función de la tasa de crecimiento monetario y de la tasa de inflación completamos el sistema:

$$\frac{M_t}{P_t} = \frac{M_t}{P_t} \frac{M_{t-1}}{M_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \Rightarrow m_t = \frac{1+\mu_t}{1+\pi_t} m_{t-1} : 1 + \mu_t = \frac{M_t}{M_{t-1}}$$

que log-linealizada

$$\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} + \hat{\mu}_t - \hat{\pi}_t \quad ((4.54))$$

Los valores de estado estacionario vienen dados por:

$$m = L(Y, i) : 1 + i = \frac{1}{\beta} : \pi = \mu : \Psi(Y) = 0$$

Con el sistema (4.52), (4.53) y (4.54) podemos calcular la solución para $\left\{ \hat{Y}_t, \hat{\imath}_t, \hat{\pi}_{t+1} \right\}$ dado el proceso exógeno que sigue la tasa de crecimiento monetario $\{\hat{\mu}_t\}$ y las condiciones iniciales $\hat{m}_{t-1}$ y $\hat{\pi}_{t-1}$ de tal manera que $\hat{\pi}$ es predeterminada en $t-1$.

$$\hat{m}_t = \kappa \hat{Y}_t - h \hat{\imath}_t$$

$$\hat{Y}_t = -\sigma_c (\hat{\imath}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1})$$

$$\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} + \hat{\mu}_t - \hat{\pi}_t$$

Nos queda asumir el proceso estocástico que sigue la tasa de crecimiento monetario. Podemos suponer que sigue el siguiente proceso, donde ε_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza finita.

$$\hat{\mu}_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1}$$

Esta modelización para la tasa de crecimiento monetario incorpora tres casos interesantes:

a) si $a_0 = 0$, la oferta monetaria sigue un paseo aleatorio en el que los cambios permanentes en la oferta monetaria son completamente predecidos con un periodo de antelación.

$$\ln \mu_t = \ln M_t - \ln M_{t-1}$$

$$\hat{\mu}_t = \widehat{\ln M_t} - \widehat{\ln M_{t-1}} = \ln M_t - \ln M_{t-1} = a_1 \varepsilon_{t-1}$$

donde

$$E_{t-1} (\ln M_t - \ln M_{t-1}) = a_1 \varepsilon_{t-1}$$

b) Si $a_1 = 0$, la oferta monetaria sigue un paseo aleatorio, donde los cambios permanentes en la oferta monetaria son completamente inesperados.

$$E_{t-1} (\ln M_t - \ln M_{t-1}) = E_{t-1} (a_0 \varepsilon_t) = 0$$

c) Si $a_0 = -a_1$, la oferta monetaria es un proceso de ruido blanco, con cambios transitorios totalmente inesperados.

$$\hat{\mu}_t = \widehat{\ln M_t} - \widehat{\ln M_{t-1}} = \ln M_t - \ln M_{t-1} = a_0(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

$$(1 - L) \ln M_t = a_0(1 - L)\varepsilon_t \Rightarrow \ln M_t = a_0 \varepsilon_t$$

Adelantando un periodo las ecuaciones (4.52) y (4.53) un periodo y aplicando expectativas en t.

$$E_t \hat{m}_{t+1} = -hE_t \hat{\imath}_{t+1} = -hE_t \hat{\pi}_{t+2}$$

Haciendo lo propio en la ecuación de saldos reales, (4.54) hasta el periodo 2:

$$E_t \hat{m}_{t+2} = E_t \hat{m}_{t+1} - E_t \hat{\pi}_{t+2}$$

Relacionando las dos ecuaciones obtenemos la ecuación dinámica para los saldos reales.

$$E_t\hat{m}_{t+1} = -h\left(E_t\hat{m}_{t+1} - E_t\hat{m}_{t+2}\right) \Rightarrow E_t\hat{m}_{t+1} = \left(\frac{h}{1+h}\right)E_t\hat{m}_{t+2}$$

La única solución convergente que satisface la anterior ecuación dinámica debe satisfacer $E_t\hat{m}_{t+1} = 0$ o lo que es igual $E_t\hat{\pi}_{t+2} = E_t\hat{\imath}_{t+1} = 0$.

A partir de la ecuación de saldos reales obtenemos la tasa de inflación en función de las perturbaciones.

$$E_t\hat{m}_{t+1} = \hat{m}_t + E_t\hat{\mu}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1} = 0 \Rightarrow \hat{\pi}_{t+1} = \hat{m}_t + a_1\varepsilon_t$$

Calculando el error de predicción en t, tenemos los saldos reales.

$$\hat{m}_t - E_{t-1}\hat{m}_t = \hat{m}_t + \hat{\mu}_t - \hat{\pi}_t - (\hat{m}_{t-1} + E_{t-1}\hat{\mu}_t - E_{t-1}\hat{\pi}_t) = a_0\varepsilon_t : E_{t-1}\hat{\pi}_t = \hat{\pi}_t$$

$$\hat{m}_t = a_0\varepsilon_t : \hat{\pi}_{t+1} = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_t = (a_0 + a_1)\varepsilon_t$$

Obtenidas las soluciones para los saldos reales y la inflación, obtenemos la expresión para las curvas IS-LM en función de la perturbación.

$$\kappa\hat{Y}_t - h\hat{\imath}_t = a_0\varepsilon_t$$

$$\hat{Y}_t + \sigma_c\hat{\imath}_t = \sigma_c(a_0 + a_1)\varepsilon_t$$

Las soluciones para $\hat{Y}_t$ e $\hat{\imath}_t$ vienen dadas por:

$$\hat{Y}_t = \frac{\sigma_c\left[(a_0(1+h) + ha_1\right]}{h + \kappa\sigma_c}\varepsilon_t : \hat{\imath}_t = -\frac{a_0(1 - \sigma_c\kappa) - \sigma_c\kappa a_1}{h + \kappa\sigma_c}\varepsilon_t$$

Ahora, un cambio en ε_t afecta tanto a la curva IS como a la LM. La curva LM se desplazaría a la derecha si $a_0 > 0$, esto es, si hay un incremento inesperado en la oferta monetaria mientras que la curva IS se desplazaría a la derecha si $a_0 + a_1 > 0$, esto es, si el efecto sobre $E_tM^s_{t+1}$ es positivo. Este último efecto opera a través de la inflación esperada que provoca una elevación en el tipo de interés nominal. En la solución observamos que el efecto neto sobre el tipo de interés nominal es indeterminado mientras que inequívocamente el output sí aumenta.

Consideremos los casos especiales considerados anteriormente:

Si $a_0 = 0$, la oferta monetaria es un paseo aleatorio perfectamente predecible y las soluciones vienen dadas por:

$$\hat{m}_t = 0 : \hat{\pi}_{t+1} = a_1 \varepsilon_t : \hat{Y}_t = \frac{\sigma_c h a_1}{h + \sigma_c \kappa} \varepsilon_t : \hat{\imath}_t = \frac{\kappa a_1 \sigma_c}{h + \sigma_c \kappa} \varepsilon_t$$

En este caso, los saldos reales no cambian ya que el cambio en el nivel de precios anula completamente el cambio esperado en la oferta monetaria. El cambio en la oferta monetaria sí afecta al output a través de una inflación esperada más alta que aumenta el tipo de interés nominal. El output aumenta en el momento del anuncio y no en el momento en el que la oferta monetaria aumenta ya que depende de a_1, por tanto el momento en el que se anuncian cambios en la política monetaria futura afectan a la producción hoy.

Si $a_1 = 0$, la oferta monetaria sigue un paseo aleatorio no predecible. Las soluciones son:

$$\hat{m}_t = a_0 \varepsilon_t : \hat{\pi}_{t+1} = a_0 \varepsilon_t : \hat{Y}_t = \frac{\sigma_c a_0 (1 + h)}{h + \sigma \kappa} \varepsilon_t : \hat{\imath}_t = -\frac{a_0 (1 - \sigma_c \kappa)}{h + \sigma \kappa} \varepsilon_t$$

Si la oferta monetaria es un ruido blanco y $a_0 = -a_1$ las soluciones vienen dadas por

$$\hat{m}_t = a_0 \varepsilon_t : \hat{\pi}_{t+1} = 0 : \hat{Y}_t = \frac{\sigma_c a_0}{h + \sigma_c \kappa} \varepsilon_t : \hat{\imath}_t = -\frac{a_0}{h + \sigma_c \kappa} \varepsilon_t$$

De los ejemplos anteriores podemos sacar tres conclusiones fundamentales:

1) Tanto la predicitibilidad de los cambios monetarios como su grado de persistencia importan para determinar los efectos reales sobre el output, para un incremento dado de M_t^s.

2) Las correlaciones empíricas entre M^s e Y o entre P e Y difieren dependiendo de la naturaleza del proceso estocástico que genera las variaciones de M^s, lo que no es sino una consecuencia de la conocida crítica de Lucas a la evaluación de la política monetaria.

3) Téngase en cuenta que en las soluciones anteriores para el output,

excepto en el caso de perfecta predictibilidad, hemos obtenido

$$\hat{Y}_t = g(\sigma_c, h, \kappa)(\hat{\mu}_t - E_{t-1}\hat{\mu}_t)$$

esto es, en el modelo sólo cambios no anticipados en la cantidad de dinero importan para determinar el output, al igual que en el modelo de Lucas con información asimétrica. En general, noticias que cambien las expectativas sobre la senda futura del crecimiento en la oferta monetaria nominal pueden afectar inequívocamente a la curva IS a través de cambios en las expectativas de inflación.

4) Las perturbaciones transitorias en la oferta monetaria tienen efectos puramente transitorios sobre el output y sobre el tipo de interés.nominal. El efecto sobre el output es mayor cuando la oferta monetaria sigue un paseo aleatorio pero el modelo no genera persistencia para el output debido a que la tasa de variación de la oferta monetaria no presenta autocorrelación alguna.

4.7. El modelo New-keynesian.

El modelo New-keynesian comienza a desarrollarse en los años 90 a partir de la combinación de elementos keynesianos desarrollados en los años 80, [48]con el enfoque optimizador de los modelos de Ciclo Real. Entre el trabajo pionero de Yun (1996), que introduce la rigidez de precios à la Calvo en un modelo dinámico, la derivación de la Nueva Curva de Phillips por Roberts (1995) junto a la regla de política monetaria de Taylor (1993) sólo faltaba una curva IS para conseguir un modelo general dinámico. El conjunto completo aparece finalmente en el artículo de Clarida, Gali y Gertler (2000) en el que la denominada curva IS dinámica viene deducida a partir de la ecuación de Euler.

El modelo New Keynesian es por tanto metodológicamente similar a los modelos de Ciclo Real, pero sus implicaciones son muy distintas.

Los cuatro elementos centrales de esta Nueva Síntesis Clásica, según Goodfriend y King (1994) son:

1. utilización de los modelos de optimización intertemporal.
2. existencia de competencia monopolística.
3. expectativas racionales.
4. rigideces nominales en precios y/o salarios, provocados por la existencia de costes de ajuste en los mismos.

Además del cuarto elemento citado, tal y como señala Galí, (2008) existen dos grandes diferencias con respecto al marco conceptual del modelo de Ciclo Real.

1. Los ciclos económicos no son el resultado del comportamiento óptimo de individuos que operan en mercados competitivos que reaccionan de forma eficiente a cambios en factores de tipo real, shocks tecnológicos. El corolario sería que las políticas de estabilización no serían ni necesarias ni seguramente deseables, concediendo a la política monetaria por ejemplo un papel limitado o nulo. Por contra, el enfoque New Keynesian parte de que los efectos de

[48]Sobre todo la introducción de competencia monopolística y de rigidez de precios, a partir de del mecanismo ideado por Calvo (1983) o contando con el supuesto de costes de ajuste de precios cuadráticos, Rotemberg (1982).

la política monetaria no son neutrales a corto plazo ya que ante cambios en los tipos de interés nominales, la tasa de inflación no variaría en la misma cuantía, (véase la ecuación de Fisher) provocando cambios en el tipo de interés real que se transmite al resto de las variables reales. Debido a la existencia de rigideces o dificultades para cambiar sin coste alguno, salarios y/o precios, las empresas actuando óptimamente ajustarían la producción a las nuevas condiciones de la demanda, y por tanto afectando a los niveles de empleo, producción, consumo e inversión.

A largo plazo se produce el ajuste en precios pero hasta entonces, el impacto sobre las variables reales debido a cambios en las variables monetarias, oferta monetaria o tipos de interés es patente.

2. Los shocks tecnológicos son importantes pero ni es el único ni quizá el más importante factor que pueda explicar las fluctuaciones cíclicas.

En este sentido, existe cierto consenso en que aunque el dinero no es neutral a corto plazo pero sí a largo plazo, la inflación tiene efectos adversos sobre el bienestar y por tanto es importante que los bancos centrales mantengan la credibilidad basada en reglas que asuman un compromiso de alcanzar un nivel estable y bajo de inflación.

Consideremos un modelo básico en el que no existe stock de capital.

En el modelo monetario clásico obtuvimos las siguientes condiciones de optimización para las economías domésticas, las ecuaciones (4.9) y (4.10).

$$w_t - p_t = \frac{1}{\sigma_c} c_t + \varphi n_t^s$$

$$E_t c_{t+1} - c_t = \sigma_c E_t \left(i_t - \pi_{t+1} - \rho \right)$$

En equilibrio

$$y_t = c_t$$

A partir de (4.10) obtenemos la denominada curva IS dinámica, (DIS en adelante), que expresada en términos del output gap puede escribirse como:

$$y_t - y_t^n = E_t y_{t+1} - E_t y_{t+1}^n - y_t^n + E_t y_{t+1}^n - \sigma_c E_t \left(i_t - \pi_{t+1} - r \right)$$

donde y_t^n es el nivel de producción de equilibrio con precios flexibles ($\mu = 0$) y viene dado por:

$$y_t^n = c_t^n = (1-\alpha)\sigma_c \frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)} z_t + (1-\alpha)\frac{\sigma_c \ln(1-\alpha)}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)} = \psi_{yz} z_t + \bar{y}$$

$$y_t^n = \psi_{yz} z_t + \bar{y}$$

Mientras que r_t^n es la tasa natural de interés dada por:

$$r_t^n = -\ln\beta + (1-\alpha)\frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}(E_t z_{t+1} - z_t) = -\ln\beta + \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz} E_t \Delta z_{t+1}$$

$$r_t^n = r + \frac{1}{\sigma_c} E_t(y_{t+1}^n - y_t^n)$$

Por tanto, la curva DIS viene dada por la siguiente expresión que nos relaciona el output gap con el tipo de interés real y el valor esperado para dicho output gap.

$$\tilde{y}_t = E_t \tilde{y}_{t+1} - \sigma_c E_t(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n) \qquad ((4.55))$$

El bloque de oferta queda resumido en la ecuación dinámica siguiente para la tasa de inflación, expresión conocida como Nueva curva de Phillips o curva de Phillips New Keynesian (NKPC en adelante), deducida a partir del problema de maximización de la empresa con fijación óptima de precios à la Calvo (derivada en el apéndice 4.3).

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t \qquad ((4.56))$$

Bajo el supuesto de que los efectos sobre el output disminuyen asintóticamente, aún en presencia de rigideces nominales debe verificarse

$$\underset{T\to\infty}{lím}\, E_t \tilde{y}_{t+T} = 0$$

esto es, resolviendo hacia delante la ecuación DIS, el output gap viene dado por:

$$\tilde{y}_t = -\sigma_c \sum_{i=0}^{\infty} E_t(r_{t+i} - r_{t+i}^n) : r_t = i_t - E_t \pi_{t+1}$$

La curva NKPC junto a la curva DIS y el proceso de equilibrio para la tasa natural constituyen el bloque del modelo básico New Keynesian.

A partir de la NKPC determinamos la inflación dada una senda para el output gap, esto es, resolviendo hacia delante la ecuación dinámica, obtenemos:

$$\pi_t = \kappa \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E_t \tilde{y}_{t+i}$$

Análogamente, a partir de la curva DIS determinamos el output gap a partir de la senda dinámica del diferencial entre el tipo de interés real y la senda exógena del tipo de interés real natural.

En suma, el modelo consta de dos ecuaciones, la de equilibrio en el mercado de bienes (DIS) y la de oferta (NKPC) mientras que tenemos tres variables, el output gap, la tasa de inflación y el tipo de interés nominal. Consideraremos dos reglas de política monetaria, en la primera, suponemos que el Banco Central fija los tipos de interés a partir de la conocida regla de Taylor, mientras que en la segunda, analizamos el equilibrio bajo el supuesto de que la oferta monetaria es exógena.

4.7.1. Equilibrio bajo una regla de tipo de interés nominal.

Supongamos que el Banco Central sigue una regla como la siguiente, popularizada a partir de los trabajos de Taylor.

$$i_t = \ln \beta + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + \upsilon_t \qquad ((4.57))$$

donde υ_t es un componente exógeno y estocástico de media cero que sigue el siguiente proceso autorregresivo de orden 1.

$$\upsilon_t = \rho \upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Sustituyendo la regla monetaria (4.57) en la DIS, podemos expresar ésta junto a la NKPC en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma_c \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sigma_c \phi_y & \sigma_c \phi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_c \\ 0 \end{bmatrix} (\upsilon_t - \hat{r}_t^n)$$

$$\begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_c \kappa + \beta(1+\sigma_c \phi_y)}{\beta} & \sigma_c \frac{\beta \phi_\pi - 1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_c \\ 0 \end{bmatrix} (\upsilon_t - \hat{r}_t^n) \quad ((4.58))$$

Dado que las dos variables son no predeterminadas, los dos autovalores de la matriz de coeficientes del sistema deben estar fuera del círculo unitario o bien los autovalores de su inversa deben estar dentro del círculo unitario si deseamos encontrar la solución estable.

El polinomio característico de dicha matriz de coeficientes viene dado por:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sigma_c \kappa + \beta(1+\sigma_c \phi_y)}{\beta} - \lambda & \sigma_c \frac{\beta \phi_\pi - 1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\sigma_c \kappa + \beta(1+\sigma_c \phi_y) + 1}{\beta} \lambda + \frac{1}{\beta^2} \left[\kappa \sigma_c (\beta \phi_\pi - 1) + \sigma_c \kappa + \beta(1+\sigma_c \phi_y) \right] = 0$$

La condición necesaria y suficiente de estabilidad relevante viene dada por:

$$1 + b + c > 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{\sigma_c\kappa + \beta(1+\sigma_c\phi_y)+1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\left[\kappa\sigma_c(\beta\phi_\pi - 1) + \sigma_c\kappa + \beta(1+\sigma_c\phi_y)\right] > 0$$

$$\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_y > 0$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, probamos como solución con las siguientes expresiones:

$$\tilde{y}_t = a\upsilon_t \Rightarrow E_t\tilde{y}_{t+1} = a\rho\upsilon_t : \pi_t = b\upsilon_t \Rightarrow E_t\pi_{t+1} = b\rho\upsilon_t$$

Sustituyendo en el sistema dinámico, obtenemos un sistema lineal en a y b y donde a_{ij} son los elementos de la matriz de coeficientes del sistema.

$$(\rho - a_{11})a - a_{12}b = \sigma : a_{21}a + (a_{22} - \rho)b = 0$$

$$a = -\frac{\sigma_c(1-\beta\rho)}{\beta\rho^2 + (1-\beta\rho)\left(1+\sigma\phi_y\right) + \sigma_c\kappa\phi_\pi} < 0$$

$$b = -\frac{\sigma_c\kappa}{\beta\rho^2 + (1-\beta\rho)\left(1+\sigma\phi_y\right) + \sigma_c\kappa\phi_\pi} < 0$$

Un incremento exógeno en el tipo de interés conduce a un descenso persistente en el output gap y en la inflación. Como el nivel de producción natural no se ve afectado por el shock de política monetaria, la senda del output gap es la misma que la del output.

El tipo de interés real, expresado en desviación respecto su tasa natural, puede obtenerse a partir de la DIS.

$$\hat{r}_t = -\frac{1}{\sigma_c}(\tilde{y}_t - E_t\tilde{y}_{t+1}) = \frac{a(1-\rho)}{\sigma_c}\upsilon_t = \frac{(1-\beta\rho)(1-\rho)}{\beta\rho^2 + (1-\beta\rho)\left(1+\sigma_c\phi_y\right) + \sigma_c\kappa\phi_\pi}\upsilon_t$$

El tipo de interés nominal viene dado por

$$\hat{\imath}_t = \hat{r}_t + E_t\pi_{t+1} = \frac{a(1-\rho)}{\sigma_c}\upsilon_t + b\rho\upsilon_t = c\upsilon_t = \frac{(1-\beta\rho)(1-\rho) - \sigma_c\kappa\rho}{\beta\rho^2 + (1-\beta\rho)\left(1+\sigma_c\phi_y\right) + \sigma_c\kappa\phi_\pi}\upsilon_t$$

Con una perturbación suficientemente persistente, el tipo de interés nominal podría disminuir si $\sigma_c\kappa\rho > (1-\beta\rho)(1-\rho)$.

Finalmente, a partir de la ecuación LM podemos determinar el cambio en la oferta monetaria requerido para reestablecer el equilibrio monetario.

$$\Delta m_t = \Delta p_t + \Delta y_t - h\Delta i_t$$

$$\Delta p_t = \pi_t = b\upsilon_t : \Delta\tilde{y}_t = \Delta y_t = a(\upsilon_t - \upsilon_{t-1})$$

$$\Delta i_t = c(\upsilon_t - \upsilon_{t-1}) : \upsilon_t - \upsilon_{t-1} = (\rho - 1)\,\upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\frac{dm_t}{d\varepsilon_t} = \frac{dp_t}{d\varepsilon_t} + \frac{dy_t}{d\varepsilon_t} - h\frac{di_t}{d\varepsilon_t} = b + a - hc = \frac{(1-\beta\rho)(\sigma_c + h(1-\rho)) + \sigma_c\kappa(1-h\rho)}{\beta\rho^2 + (1-\beta\rho)\left(1+\sigma_c\phi_y\right) + \sigma_c\kappa\phi_\pi} \gtrless 0$$

En principio, el cambio en la oferta monetaria es ambigüo aún cuando es necesario que disminuya ante una subida del tipo de interés nominal para preservar el equilibrio monetario, dados el nivel de precios y el output. Dado que ambos caen y por tanto también lo hace la demanda de dinero en términos nominales no podríamos eliminar la posibilidad de un aumento en la oferta monetaria. Sin embargo, el hecho de que el tipo de interés nominal suba es una condición suficiente para asegurar tanto una contracción en la oferta monetaria nominal como observar la presencia de un efecto liquidez, esto es, una disminución a corto plazo del tipo de interés nominal y una expansión monetaria simultánea.

Finalmente podemos calcular los multiplicadores dinámicos para las variables del modelo. Dado el supuesto sobre el comportamiento dinámico del shock monetario, tendremos:

$$\tilde{y}_t = a\upsilon_t = \frac{a}{1-\rho L}\varepsilon_t : \pi_t = b\upsilon_t = \frac{b}{1-\rho L}\varepsilon_t$$

El efecto de los shocks tecnológicos.

Los shocks tecnológicos pueden ser introducidos en el modelo al obtener la relación entre los costes marginales medios y una medida de la actividad económica agregada. En general, e independientemente de la forma de la fijación de precios, el coste marginal real medio para un factor productivo deducido a partir del problema de minimización de costes de una empresa

viene dado por:
$$CMa = \frac{p_i}{PMa_i}$$
Definiendo el CMa_R real como el CMa/P_t, con la función de producción con un sólo factor productivo, tendremos que:

$$CMa_R = \frac{W_t}{P_t \frac{\partial Y_t}{\partial N_t}}$$

Y en logaritmos:

$$cma_t = (w_t - p_t) - \ln\left(\frac{\partial Y_t}{\partial N_t}\right) = w_t - p_t - [(1-\alpha)z_t - \alpha n_t - \ln(1-\alpha)]$$

Sustituyendo el salario real derivado a partir de la condición de primer orden de las economías domésticas y a su vez introduciendo n_t a partir de la función de producción linealizada:

$$w_t - p_t = \frac{1}{\sigma_c} c_t + \varphi n_t : n_t = \frac{y_t - (1-\alpha)z_t}{1-\alpha}$$

$$cma_t = \left(\frac{y_t}{\sigma_c} + \varphi \frac{y_t - (1-\alpha)z_t}{1-\alpha}\right) - (1-\alpha)z_t + \alpha \frac{y_t - (1-\alpha)z_t}{1-\alpha} + \ln(1-\alpha)$$
$$cma_t = \left(\frac{1}{\sigma_c} + \frac{\alpha+\varphi}{1-\alpha}\right) y_t - (1+\varphi)\, z_t + \ln(1-\alpha)$$
Con precios flexibles, el coste marginal real es constante y el output es el correspondiente a su nivel natural $y_t = y_t^n$. Por tanto:

$$cma^n = \left(\frac{1-\alpha+\sigma_c(\alpha+\varphi)}{\sigma_c\,(1-\alpha)}\right) y_t^n - (1+\varphi)\, z_t + \ln(1-\alpha)$$

$$y_t^n = \frac{\sigma_c(1-\alpha)}{1-\alpha+\sigma_c(\alpha+\varphi)} \left[cma_t - \ln(1-\alpha) + (1+\varphi)\, z_t\right]$$
De tal forma que:

$$\widehat{cma}_t = cma_t - cma^n = \frac{1-\alpha+\sigma_c(\alpha+\varphi)}{\sigma_c\,(1-\alpha)}(y_t - y_t^n)$$

De esta forma la curva de Phillips New Keynesian viene dada por:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\gamma\beta)(1-\gamma)}{\gamma} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma} \widehat{cma}_t$$

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa(y_t - y_t^n)$$

El tipo de interés real en términos de desviaciones viene dado por:

$$\hat{r}_t^n = r_t^n - r = (1-\alpha)\frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}(E_t z_{t+1} - z_t) = \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz} E_t \Delta z_{t+1}$$

De nuevo suponemos que el shock tecnológico sigue un proceso autorregresivo de primer orden:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow E_t z_{t+1} = \rho z_t$$

Con lo que la desviación del tipo de interés natural con respecto a su estado estacionario viene dada por la siguiente expresión:

$$\hat{r}_t^n = \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz} E_t \Delta z_{t+1} = -\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}(1-\rho) z_t$$

Volvemos al sistema original (4.58) y haciendo $\upsilon_t = 0$ resolvemos para calcular el efecto del shock a la tecnología sobre las variables del modelo.

$$\begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_c\kappa + \beta(1+\sigma_c\phi_y)}{\beta} & \sigma_c \frac{\beta\phi_\pi - 1}{\beta} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_c \\ 0 \end{bmatrix} (-\hat{r}_t^n)$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados y probando como solución con:

$$\tilde{y}_t = a\hat{r}_t^n \Rightarrow E_t \tilde{y}_{t+1} = aE_t \hat{r}_{t+1}^n : \pi_t = b\hat{r}_t^n \Rightarrow E_t \pi_{t+1} = bE_t \hat{r}_{t+1}^n$$

En este caso

$$E_t \hat{r}_{t+1}^n = \rho \hat{r}_t^n = -\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}(1-\rho)\rho z_t$$

con lo que la solución es exactamente igual en valor absoluto que en el caso del shock al tipo de interés, teniendo en cuenta ahora que $-\hat{r}_t^n$ funciona como υ_t. La consecuencia para la solución es que los coeficientes a y b son iguales pero de distinto signo, esto es, ahora $a, b > 0$.

Las soluciones para el output gap y para la tasa de inflación vienen dadas por:

$$\tilde{y}_t = -a\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}(1-\rho)z_t : \pi_t = -b\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}(1-\rho)z_t$$

Esto es, un shock tecnológico positivo provoca un descenso del output gap y de la tasa de inflación.

El efecto sobre el nivel de output y sobre el empleo vienen dados por:

$$y_t = \tilde{y}_t + y_t^n = \left(-a\frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz}(1-\rho) + \psi_{yz}\right)z_t = \psi_{yz}\left(1 - \frac{a(1-\rho)}{\sigma_c}\right)z_t$$

$$(1-\alpha)\,n_t = y_t - (1-\alpha)z_t = \psi_{yz}\left(-\frac{a(1-\rho)}{\sigma_c} + \alpha\right)z_t$$

Por tanto, la respuesta del output y del empleo a un shock tecnológico positivo es en general indeterminada ya que depende de los valores concretos que tomen los parámetros.

4.7.2. Equilibrio bajo una regla de crecimiento monetario.

Consideremos ahora el efecto sobre nuestras variables de interés de una regla monetaria dada por:

$$\Delta m_t = \rho\Delta m_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde Δm_t es la tasa de crecimiento monetario.

La curva LM en términos del output gap viene dada por:

$$\tilde{y}_t - hi_t = m_t - p_t - y_t^n$$

La curva DIS, (4.55) es:

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \sigma E_t(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n)$$

La dinámica de la inflación o NKPC, (4.56) es:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t$$

Y finalmente, la identidad que nos relaciona los saldos reales con la inflación es:

$$\frac{M_t}{M_{t-1}} = \frac{M_t}{M_{t-1}} \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_t}$$

$$\ln M_t - \ln M_{t-1} = (\ln M_t - \ln P_t) + (\ln P_t - \ln P_{t-1}) - (\ln M_{t-1} - \ln P_{t-1})$$

$$m_t - p_t = \Delta m_t - \pi_t + m_{t-1} - p_{t-1} \Rightarrow l_t = l_{t-1} - \pi_t + \Delta m_t \qquad ((4.59))$$

Resolución para $h = 0$.

El modelo se simplifica de forma notable si suponemos que la demanda de dinero es independiente de la variación del tipo de interés nominal y dado que la política monetaria no afecta a la producción natural, $y_t^n = 0$, la ecuación LM es simplemente:

$$m_t - p_t = l_t = \tilde{y}_t \qquad ((4.60))$$

En este caso, la demanda agregada vendría dada por la teoría cuantitativa del dinero y la curva DIS no sería necesaria ya que la curva LM sería en este caso la ecuación de demanda agregada.

Para resolver el sistema formado por la NKPC, (4.56), la ecuación de saldos reales, (4.59) y la curva LM, (4.60) adelantamos un periodo (4.59) sustituyendo la inflación y el output gap para obtener una ecuación dinámica para los saldos reales.

$$E_t \pi_{t+1} = l_t - E_t(l_{t+1}) + E_t \Delta m_{t+1}$$

$$\pi_t - \beta E_t \pi_{t+1} = l_{t-1} - l_t + \Delta m_t - \beta l_t + \beta E_t(l_{t+1}) - \beta E_t \Delta m_{t+1} = \kappa l_t$$

Suponiendo que la tasa de crecimiento monetario viene dada por:

$$\Delta m_{t+1} = \rho_m \Delta m_t + \varepsilon_{t+1}^m : E_t \Delta m_{t+1} = \rho_m \Delta m_t$$

$$E_t(l_{t+1}) = \beta^{-1}(1+\beta+\kappa)\,l_t - \beta^{-1}l_{t-1} - \left(\beta^{-1} - \rho_m\right)\Delta m_t$$

Matricialmente la ecuación anterior más la dinámica de la perturbación puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} l_t \\ E_t(l_{t+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^{-1} & \beta^{-1}(1+\beta+\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{t-1} \\ l_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_m - \beta^{-1} \end{pmatrix} \Delta m_t$$

Dado que l_{t-1} es predeterminada, el sistema es estable y tiene solución única si tiene un autovalor dentro del círculo unitario y otro fuera del círculo unitario.

Los autovalores del sistema vienen dados por:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta^{-1}(1+\beta+\kappa) - \lambda & -\beta^{-1} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta^{-1}(1+\beta+\kappa)\lambda + \beta^{-1} = 0$$

Dicho polinomio presenta estas características:

$$P(0) = \beta^{-1} > 0 : P(1) = -\beta^{-1}\kappa < 0 : P(\beta^{-1}) = -\beta^{-2}\kappa < 0 : P(\infty) = \infty$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \beta^{-1}(1+\beta+\kappa) > 1 : \lambda_1\lambda_2 = \beta^{-1} > 1$$

con lo que existen dos raíces reales que verifican:

$$0 < \lambda_1 < 1 < \beta^{-1} < \lambda_2$$

Solución.

De nuevo es factible obtener la solución a través del cálculo de autovalores y autovectores. Los autovalores del sistema cumplen:

$$(A - \lambda_i I)v = 0$$

$$e_{1i} - \lambda_i e_{2i} = 0 : -\beta^{-1}e_{1i} + \beta^{-1}(1+\beta+\kappa)\,e_{2i} = \lambda_i e_{2i}$$

$$e_{11} = 1 : e_{21} = \lambda_1 : e_{12} = 1 : e_{22} = \lambda_2$$

Por tanto la matriz de autovectores y su inversa vienen dados por:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}: P^{-1}=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix}$$

El sistema original puede expresarse en función de las variables auxiliares, x e y, como:

$$\begin{pmatrix}x_t\\ E_t y_{t+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{t-1}\\ y_t\end{pmatrix}+P^{-1}\begin{pmatrix}\rho_m-\beta^{-1}\\ 0\end{pmatrix}\Delta m_t$$

donde

$$P^{-1}\begin{pmatrix}l_t\\ E_t(l_{t+1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_t\\ E_t y_{t+1}\end{pmatrix}$$

Desacoplado el sistema original, calculamos las soluciones para dichas variables auxiliares:

$$x_t=\lambda_1 x_{t-1}+\frac{\rho_m-\beta^{-1}}{\lambda_2-\lambda_1}\Delta m_t \Rightarrow E_t y_{t+1}=\lambda_2 y_t-\frac{1-\beta\rho_m}{\beta\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}\Delta m_t$$

Dado que $\lambda_2>1$, la solución estable para y_t se encuentra resolviendo hacia delante su ecuación dinámica:

$$y_t=\frac{1}{\lambda_2}\frac{1-\beta\rho_m}{\beta\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\Delta m_{t+i}=\frac{1-\beta\rho_m}{\beta\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\Delta m_t$$

Deshaciendo la transformación:

$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{t-1}\\ l_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{t-1}\\ y_t\end{pmatrix}$$

y por tanto, la solución estable es:

$$-\lambda_1 l_{t-1}+l_t=y_t=\frac{1-\beta\rho_m}{\beta\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\Delta m_t$$

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \frac{1-\beta\rho_m}{\beta\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\Delta m_t$$

El output gap y el output siguen la misma ley dinámica que los saldos reales mientras que la inflación viene dada por:

$$\pi_t = l_{t-1} - l_t + \Delta m_t = -(1-L)\frac{1-\rho_m\beta}{\beta\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\frac{\Delta m_t}{1-\lambda_1 L} + \Delta m_t$$

$$\left(1-\lambda_1 L\right)\pi_t = -(1-L)\frac{1-\rho_m\beta}{\beta\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\Delta m_t + \left(1-\lambda_1 L\right)\Delta m_t$$

$$\left(1-\lambda_1 L\right)\pi_t = \frac{1}{\beta\left(\lambda_2-\rho_m\right)}\left[(\beta\lambda_2-1)\Delta m_t - \beta\rho_m(1-\lambda_1)\Delta m_{t-1}\right]$$

Un aumento en la tasa de crecimiento monetario eleva los saldos reales, el output, el output gap y la tasa de inflación. El grado de persistencia de las perturbaciones monetarias dependen del parámetro λ_1 que a su vez depende de los dos parámetros de este modelo, β y κ.

Efecto de los shocks tecnológicos.

Supongamos de nuevo que el shock tecnológico viene modelizado a partir de:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow E_t z_{t+1} = \rho z_t$$

y por tanto $\Delta m_t = 0$. Las ecuaciones del modelo son (4.56), (4.59) y (4.60), a las que hay que añadir la relación entre producción natural y shock tecnológico.

La ecuación dinámica para los saldos reales es:

$$y_t^n = \psi_{yz} z_t + \bar{y}$$

$$E_t(l_{t+1}) = \beta^{-1}\left(1+\beta+\kappa\right)l_t - \beta^{-1}l_{t-1} - \kappa\beta^{-1}\psi_{yz}z_t \qquad ((4.61))$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} E_t(l_{t+1}) \\ l_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{-1}\left(1+\beta+\kappa\right) & -\beta^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_t \\ l_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa\beta^{-1}\psi_{yz} \\ 0 \end{pmatrix} z_t$$

El modelo es exactamente igual que el anterior por lo que aplicaremos resultados anteriores.

Las variables auxiliares vienen dadas por:

$$E_t x_{t+1} = \lambda_2 x_t + \frac{-\kappa\beta^{-1}\psi_{yz}}{\lambda_2 - \lambda_1} z_t \Rightarrow x_t = \frac{\kappa\beta^{-1}\psi_{yz}}{(\lambda_2 - \rho)(\lambda_2 - \lambda_1)} z_t : y_t = \lambda_1 y_{t-1} + \frac{\kappa\beta^{-1}\psi_{yz}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t(l_{t+1}) \\ l_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa\beta^{-1}\psi_{yz} \left[(\lambda_2 - \rho)(\lambda_2 - \lambda_1)\right]^{-1} E_t z_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix}$$

La dinámica para los saldos reales tiene como solución:

$$l_{t+1} = \lambda_1 l_t + \frac{\kappa\beta^{-1}\psi_{yz}}{\lambda_2 - \rho} z_{t+1}$$

A partir de la LM expresada en términos de output gap:

$$\tilde{y}_t = l_t - y_t^n \Rightarrow (1 - \lambda_1 L)\tilde{y}_t = \frac{\psi_{yz}}{\lambda_2 - \rho} \left[\left(\kappa\beta^{-1} - 1\right) z_t + \lambda_1 z_{t-1}\right]$$

mientras que el output, $y_t = \tilde{y}_t + y_t^n$.

$$(1 - \lambda_1 L) y_t = \frac{\psi_{yz}\kappa\beta^{-1}}{\lambda_2 - \rho} z_t$$

El nivel de empleo de equilibrio podemos obtenerlo a partir de la función de producción $(1 - \alpha)\, n_t = y_t - z_t$.

$$(1 - \alpha)\,(1 - \lambda_1 L) n_t = \left(\frac{\psi_{yz}\kappa\beta^{-1}}{\lambda_2 - \rho} - 1\right) z_t + \lambda_1 z_{t-1}$$

Finalmente, la tasa de inflación es:

$$\pi_t = -(1 - L) l_t \Rightarrow (1 - \lambda_1 L)\pi_t = -(1 - L)\kappa\beta^{-1}\psi_{yz} z_t$$

Los resultados anteriores indican que un shock tecnológico positivo eleva la producción y los saldos reales, sin embargo provoca una disminución del output gap, disminuye la tasa de inflación y el efecto sobre el nivel de empleo de equilibrio depende de los parámetros de calibración.

El parámetro ψ_{yz} viene dado por:

$$\psi_{yz} = \sigma_c \frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)}$$

La solución para el nivel de empleo entocnes puede escribirse como:

$$(\lambda_2-\rho)(1-\alpha)(1-\lambda_1 L)n_t =$$

$$\left((1-\alpha)\kappa\beta^{-1}\sigma_c \frac{1+\varphi}{\sigma_c(\varphi+\alpha)+(1-\alpha)} - (\lambda_2-\rho)\right) z_t + \lambda_1(\lambda_2-\rho) z_{t-1}$$

Si la elasticidad de sustitución en el consumo es baja, el efecto del shock tecnológico probablemente es negativo, ya que disminuye el tipo de interés real, reducción que es mayor cuanto más baja sea σ_c, lo que provoca un aumento en el consumo y un desplazamiento de la oferta de trabajo hacia la izquierda.

$$\hat{r}_t^n = r_t^n - r = \frac{1}{\sigma_c}\psi_{yz} E_t \Delta z_{t+1}$$

El caso de un paseo aleatorio.

Podemos considerar un caso particular en el que la tecnología sigue un paseo aleatorio y comparar sus efectos con los derivados de cambios monetarios cuando la oferta monetaria sigue también un paseo aleatorio. Esto es, las variables exógenas vienen dadas por:

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t^z : \Delta m_t = \varepsilon_t^m$$

Con el fin de simplificar el análisis supondremos además que $\sigma_c = \varphi = 1$, esto es, la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo es uno y la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo también es igual a la unidad. En este caso concreto

$$\psi_{yz} = 1-\alpha \Rightarrow y_t^n = (1-\alpha) z_t$$

El modelo debe reformularse teniendo en cuenta que los shocks aleatorios tienen efectos permanentes por lo que ahora los saldos reales y el output no son estacionarias. Debemos definir ahora los saldos reales de la siguiente manera:

$$\tilde{l}_t = l_t - z_t$$

Ahora la ecuación de equilibrio monetario es:

$$\tilde{y}_t = l_t - y_t^n = \tilde{l}_t$$

La identidad de los saldos reales:

$$l_{t-1} = l_t + \pi_t - \Delta m_t$$

$$\tilde{l}_{t-1} = \tilde{l}_t + \pi_t + \Delta m_t - \varepsilon_t^z$$

Sustituyendo la inflación y el output gap en la curva NKPC obtenemos la ecuación dinámica para los saldos reales:

$$\tilde{l}_{t-1} - \tilde{l}_t + \Delta m_t - \varepsilon_t^z = \kappa \tilde{l}_t + \beta E_t \left(\tilde{l}_t - \tilde{l}_{t+1} + \Delta m_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^z \right)$$

$$E_t \tilde{l}_{t+1} = \beta^{-1}(1 + \beta + \kappa)\tilde{l}_t - \beta^{-1}\tilde{l}_{t-1} - \beta^{-1}\varepsilon_t^m + \beta^{-1}\varepsilon_t^z$$

Ecuación que tiene la misma estructura dinámica que (4.61). Los saldos reales vienen dados por y teniendo en cuenta que $\lambda_1\lambda_2 = \beta^{-1}$.

$$l_{t+1} = \lambda_1 l_t - \frac{-\beta^{-1}}{\lambda_2}\varepsilon_{t+1}^m \Rightarrow l_{t+1} = \lambda_1 l_t + \lambda_1 \varepsilon_{t+1}^m$$

El output gap tiene la misma solución.

$$\tilde{y}_t = \lambda_1 \tilde{y}_{t-1} + \lambda_1 \varepsilon_{t+1}^m$$

Mientras que la tasa de inflación:

$$(1 - \lambda_1 L)\pi_t = \lambda_1 \varepsilon_{t-1}^m - \lambda_1 \varepsilon_t^m + (1 - \lambda_1 L)\varepsilon_t^m$$

$$(1 - \lambda_1 L)\pi_t = (1 - \lambda_1)\varepsilon_t^m$$

Inequívocamente una perturbación monetaria permanente eleva la tasa de inflación de forma transitoria, pero sí produce un aumento permanente en el nivel de precios.

El efecto de una perturbación tecnológica sobre los saldos reales y el output gap puede calcularse a partir de las soluciones:

$$\tilde{l}_{t+1} = \lambda_1 \tilde{l}_t - \lambda_1 \varepsilon^a_{t+1} : \tilde{y}_t = \lambda_1 \tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 \varepsilon^a_{t+1}$$

$$l_{t+1} - z_{t+1} = \lambda_1 (l_t - z_t) - \lambda_1 \varepsilon^a_{t+1} \Rightarrow l_{t+1} = \lambda_1 l_t + (1 - \lambda_1) z_{t+1}$$

Un shock tecnológico permanente disminuye el output gap de forma transitoria mientras que provoca una elevación permanente sobre los saldos reales, consecuencia de la reducción permanente que se produce en la tasa de inflación.

$$-(1 - \lambda_1 L)\pi_t = (1 - \lambda_1) z_t$$

Dado que el output gap está relacionado positivamente con el nivel de empleo, éste caería para ir gradualmente aumentando hacia su nivel de equilibrio estacionario.

4.7.3. Solución en el modelo ampliado.

Obtenidas las soluciones en el modelo sencillo, ahora relajamos el supuesto $h = 0$.

La razón fundamental es que con el supuesto simplificador no podemos obtener la dinámica para el tipo de interés nominal ni podemos observar la existencia de un efecto liquidez que el modelo ampliado es capaz de replicar.

Diferenciando la curva LM y despejando la tasa de inflación esperada de la curva DIS, obtenemos la relación entre tipo de interés y tasa de crecimiento monetario.

$$E_t(m_{t+1} - m_t) - E_t \pi_{t+1} = E_t \left(\tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t \right) - h(i_{t+1} - i_t)$$

A partir de la DIS:

$$E_t\pi_{t+1} = -\frac{1}{\sigma_c}\left(E_t\tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t\right) + i_t$$

$$i_t = \frac{h}{1+h}i_{t+1} + \frac{1}{1+h}E_t\Delta m_{t+1} + \frac{1-\sigma_c}{\sigma_c\left(1+h\right)}E_t\left(\tilde{y}_{t+1} - \tilde{y}_t\right)$$

ecuación dinámica que resuelta hacia delante (forward):

$$i_t = \frac{\rho}{1+h(1-\rho)}\Delta m_t + \frac{1-\sigma_c}{\sigma_c\left(1+h\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{h}{1+h}\right)^i E_t\Delta y_{t+i+1}$$

Esto es, el tipo de interés nominal responde positivamente a las perturbaciones de demanda. Sólo cuando σ_c sea lo suficientemente alto y/o la persistencia de la perturbación tecnológica sea baja, un aumento en la tasa de crecimiento monetario puede conducir a una reducción en el tipo de interés.

El sistema ampliado con $h > 0$, viene dado por la ecuación DIS, la curva de equilibrio monetario LM, la dinámica de los saldos reales y la NKPC.

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \sigma_c E_t(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n)$$

$$\tilde{y}_t - hi_t = l_t - y_t^n$$

$$l_t = l_{t-1} - \pi_t + \Delta m_t$$

$$\pi_t = \beta E_t\pi_{t+1} + \kappa\tilde{y}_t$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{h}{\sigma_c} & h \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_t \\ E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+\frac{h}{\sigma_c} & 0 \\ 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{t-1} \\ \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta m_t \\ r_t^n \\ y_t^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_t \\ E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{\sigma_c}{h} & \frac{\sigma_c}{h} + 1 + \sigma_c\kappa\beta^{-1} & \sigma_c\left(\frac{1}{h} - \beta^{-1}\right) \\ 0 & -\kappa\beta^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{t-1} \\ \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_c}{h} & \sigma_c & \frac{\sigma_c}{h} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta m_t \\ r_t^n \\ y_t^n \end{bmatrix}$$

Resolución.

Descomponemos la matriz de coeficientes $A = P\Lambda P^{-1}$ y definimos el vector de variables auxiliares como:

$$P^{-1}\begin{bmatrix} x_t \\ E_t s_{1t+1} \\ E_t s_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_t \\ E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix}$$

de tal forma que desacoplamos el sistema para obtener:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ E_t s_{1t+1} \\ E_t s_{2t+1} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ s_{1t} \\ s_{2t} \end{bmatrix} + P^{-1}B \begin{bmatrix} \Delta m_t \\ r_t^n \\ y_t^n \end{bmatrix}$$

donde Λ es la matriz diagonal de autovalores que verifica $0 < \lambda_1 < 1$ y λ_2 y $\lambda_3 > 1$.

Las expresiones dinámicas para las variables auxiliares son:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \theta_t : E_t s_{1t+1} = \lambda_2 s_{1t} + \omega_t : E_t s_{2t+1} = \lambda_3 s_{2t} + \delta_t$$

donde

$$\theta_t = r_{11}\Delta m_t + r_{12}r_t^n + r_{13}y_t^n : \omega_t = r_{21}\Delta m_t + r_{22}r_t^n + r_{23}y_t^n : \delta_t = r_{31}\Delta m_t + r_{32}r_t^n + r_{33}y_t^n$$

y los r_{ij} son los elementos de la matriz $P^{-1}B$.

Las soluciones estables para las ecuaciones dinámicas de las variables con raíces superiores a la unidad vienen dadas por:

$$s_{1t} = -\lambda_2^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t\omega_{t+i} : s_{2t} = -\lambda_3^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_3^{-i}E_t\delta_{t+i}$$

donde

$$\underset{i\to\infty}{lím}\lambda_2^{-i}E_t s_{1t+i} = 0 \text{ y} \underset{i\to\infty}{lím}\lambda_3^{-i}E_t s_{2t+i} = 0$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos:

$$p_{11}l_t + p_{12}E_t\tilde{y}_{t+1} + p_{13}E_t\pi_{t+1} = x_t$$

$$p_{21}l_t + p_{22}E_t\tilde{y}_{t+1} + p_{23}E_t\pi_{t+1} = E_t s_{1t+1}$$

$$p_{31}l_t + p_{32}E_t\tilde{y}_{t+1} + p_{33}E_t\pi_{t+1} = E_t s_{2t+1}$$

donde p_{ij} son los elementos de la matriz inversa de autovectores.

A partir de las dos últimas y aplicando Cramer podemos expresar $E_t\tilde{y}_{t+1}$ y $E_t\pi_{t+1}$ en función de las variables auxiliares y de l_t.

$$E_t\tilde{y}_{t+1} = P_{11}^{-1}(P_{12}l_t + p_{33}E_t s_{1t+1} - p_{23}E_t s_{2t+1})$$

$$E_t\pi_{t+1} = P_{11}^{-1}(P_{13}l_t - p_{32}E_t s_{1t+1} + p_{22}E_t s_{2t+1})$$

donde cada P_{ij} es el menor complementario del elemento p_{ij}.

De esta forma obtenemos x_t en función de l_t.

$$P_{11}x_t = p_{11}P_{11}l_t + p_{12}(P_{12}l_t + p_{33}E_t s_{1t+1} - p_{23}E_t s_{2t+1}) + p_{13}(P_{13}l_t - p_{32}E_t s_{1t+1} + p_{22}E_t s_{2t+1})$$

$$P_{11}x_t = \left|P^{-1}\right|^{-1}l_t - P_{21}E_t s_{1t+1} - P_{31}E_t s_{2t+1}$$

Sustituyendo en la ecuación dinámica de la variable auxiliar x_t obtenemos la ecuación dinámica para los saldos reales:

$$P_{11}^{-1}\left[\left|P^{-1}\right|^{-1}l_t - P_{21}E_t s_{1t+1} - P_{31}E_t s_{2t+1}\right] = \lambda_1 P_{11}^{-1}\left[\left|P^{-1}\right|^{-1}l_{t-1} - P_{21}E_t s_{1t} - P_{31}E_t s_{2t}\right] + \theta_t$$

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \left|P^{-1}\right|^{-1}\{[P_{21}(E_t s_{1t+1} - \lambda_1 s_{1t}) + P_{31}(E_t s_{2t+1} - \lambda_1 s_{2t})] + P_{11}\theta_t\}$$

Con las expresiones y las soluciones para las variables auxiliares, finalmente obtenemos la ecuación para los saldos reales en función de las variables exógenas.

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \left|P^{-1}\right|^{-1} \{P_{21}(\lambda_2 - \lambda_1)s_{1t} + P_{21}\omega_t + P_{31}(\lambda_2 - \lambda_1)s_{2t} + P_{31}\delta_t + P_{11}\theta_t\}$$

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \left|P^{-1}\right|^{-1} - P_{21}(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i} E_t\omega_{t+i} + \left|P^{-1}\right|^{-1} P_{21}\omega_t +$$

$$- \left|P^{-1}\right|^{-1} P_{31}(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_3^{-i} E_t\delta_{t+i} + \left|P^{-1}\right|^{-1} P_{31}\delta_t + \left|P^{-1}\right|^{-1} P_{11}\theta_t$$

Shocks monetarios.

Consideremos ahora el efecto de un shock a la tasa de crecimiento monetario y por tanto $r_t^n = 0$ e $y_t^n = 0$.

Las variables exógenas vienen dadas por:

$$\theta_t = r_{11}\Delta m_t : \omega_t = r_{21}\Delta m_t : \delta_t = r_{31}\Delta m_t$$

y

$$E_t\omega_{t+i} = r_{21}E_t\Delta m_{t+i} = r_{21}\rho_m^i \Delta m_t : E_t\delta_{t+i} = r_{31}\rho_m^i \Delta m_t$$

La ecuación de los saldos reales en función de la tasa de crecimiento monetario resultante de lo anterior es:

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \left|P^{-1}\right|^{-1} \left\{ P_{11}r_{11} + P_{21}r_{21}\frac{\lambda_1 - \rho_m}{\lambda_2 - \rho_m} + P_{31}r_{31}\frac{\lambda_1 - \rho_m}{\lambda_3 - \rho_m} \right\} \Delta m_t$$

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \psi_{lm}\Delta m_t \Rightarrow l_t = \frac{\psi_{lm}\Delta m_t}{1 - \lambda_1 L}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de los saldos reales obtenemos la dinámica de la tasa de inflación.

$$(1 - \lambda_1 L)\pi_t = (1 - \psi_{lm})\Delta m_t + (\psi_{lm} - \lambda_1)\Delta m_{t-1}$$

Adelantando ésta y aplicando el operador de expectativas obtenemos

$E_t\pi_{t+1}$ que sustituida finalmente en la NKPC nos da tanto la solución para el output como para el output gap.

$$\kappa(1-\lambda_1 L)\tilde{y}_t = \left[(1-\psi)(1-\beta\rho) - \beta\psi(1-\lambda_1)\right]\Delta m_t +$$

$$+\left[\beta\lambda_1(1-\psi)\rho + \psi - \lambda_1\right]\Delta m_{t-1}$$

$$y_t = \tilde{y}_t + y_t^n$$

Finalmente, podemos obtener tanto la dinámica del tipo de interés nominal a partir de la curva LM como del tipo de interés real a partir de su definición.

$$i_t = \frac{\tilde{y}_t - l_t + y_t^n}{h}$$

$$h\kappa(1-\lambda_1 L)i_t = \left[(1-\psi)(1-\beta\rho) - \beta\psi(1-\lambda_1)\right]\Delta m_t +$$

$$+\left[\beta\lambda_1(1-\psi)\rho + \psi - \lambda_1\right]\Delta m_{t-1} - \psi_{lm}\Delta m_t$$

Shocks tecnológicos.

De igual forma podemos calcular los efectos de un shock a la tecnología, teniendo en cuenta que ahora:

$$\theta_t = r_{12}r_t^n + r_{13}y_t^n = (1-\alpha)(r_{12}(\rho_z - 1) + r_{13})z_t$$

$$\omega_t = r_{22}r_t^n + r_{23}y_t^n = (1-\alpha)(r_{22}(\rho_z - 1) + r_{23})z_t$$

$$\delta_t = r_{32}r_t^n + r_{33}y_t^n = (1-\alpha)(r_{32}(\rho_z - 1) + r_{33})z_t$$

y con los parámetros de la calibración aplicados se simplifican a:

$$r_t^n = E_t\Delta z_{t+1} = (\rho_z - 1)z_t : y_t^n = (1-\alpha)z_t$$

La solución para los saldos reales viene dada por:

$$l_t = \lambda_1 l_{t-1} + \left|P^{-1}\right|^{-1}\left(P_{11}(r_{12}(\rho_z - 1) + r_{13}) + P_{21}(r_{22}(\rho_z - 1) + r_{23})\frac{\lambda_1 - \rho_z}{\lambda_2 - \rho_z}\right)z_t +$$

$$+\left|P^{-1}\right|^{-1}P_{31}(r_{32}(\rho_z-1)+r_{33})\frac{\lambda_1-\rho_z}{\lambda_3-\rho_z}z_t$$

$$l_t=\lambda_1 l_{t-1}+\psi_{lz}z_t\Rightarrow l_t=\frac{\psi_{lz}}{1-\lambda_1 L}z_t$$

A partir de los saldos reales:

$$\pi_t=-(1-L)l_t\Rightarrow\pi_t=-(1-L)\frac{\psi_{lz}}{1-\lambda_1 L}z_t$$

A partir de la NKPC:

$$\pi_t-\beta E_t\pi_{t+1}=\frac{-\psi_{lz}}{1-\lambda_1 L}(z_t-z_{t-1})+\beta\frac{-\psi_{lz}}{1-\lambda_1 L}(E_t z_{t+1}-z_t)=\kappa\tilde{y}_t$$

$$\kappa\tilde{y}_t(1-\lambda_1 L)=-\psi_{lz}\left[(1-\beta(\rho_z-1))z_t+\beta z_{t-1}\right]$$

El output viene dado por:

$$y_t=\tilde{y}_t+y_t^n\Rightarrow y_t=\frac{-\psi_{lz}\left[(1-\beta(\rho_z-1))z_t+\beta z_{t-1}\right]}{\kappa(1-\lambda_1 L)}+(1-\alpha)z_t$$

Y finalmente, el tipo de interés nominal:

$$hi_t=y_t-l_t\Rightarrow i_t(1-\lambda_1 L)=\frac{-\psi_{lz}\left[(1-\beta(\rho_z-1))z_t+\beta z_{t-1}\right]}{\kappa h}$$

$$+(1-\alpha)(1-\lambda_1 L)z_t-\psi_{lz}z_t$$

4.8. Apéndice 4.1.

Cálculo de varianzas y covarianzas en el modelo monetario.

$$y_t = (1-\alpha)(m_t - E_{t-1}m_t) + \frac{\alpha(1-\alpha)(m_{t-1} - E_{t-1}m_{t-1})}{1-\alpha L} + \frac{(1-\alpha)z_t}{1-\alpha L}$$

$$Var(y_t) = (1-\alpha)^2\sigma_m^2 + \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_m^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_z^2$$

$$Var(y_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_m^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_z^2$$

$$w_t - p_t = \alpha(m_t - E_{t-1}m_t) + \frac{\alpha(1-\alpha)(m_{t-1} - E_{t-1}m_{t-1})}{1-\alpha L} + \frac{z_t}{1-\alpha L}$$

$$Var(w_t - p_t) = \alpha^2\sigma_m^2 + \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_m^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_z^2$$

$$Var(w_t - p_t) = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha^2}\sigma_m^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_z^2$$

$$Cov(w_t - p_t, y_t) = E\left[(w_t - p_t)y_t\right] = E\left[(y_t - \varepsilon_t^m)y_t\right] = E(y_t^2) - E(\varepsilon_t^m y_t)$$

$$E(\varepsilon_t^m y_t) = E\left[\varepsilon_t^m((1-\alpha)\varepsilon_t^m + \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha L}\varepsilon_{t-1}^m\right] = (1-\alpha)\sigma_m^2$$

$$Cov(w_t - p_t, y_t) = \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_m^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_z^2 - (1-\alpha)\sigma_m^2 = \frac{-\alpha(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2}\sigma_m^2$$

4.9. Apéndice 4.2.

Cálculo de:

$$(1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i E_{t-i}\ln\left[E_{t-i}M_t^{1+\varphi}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}}$$

Ya que la masa monetaria es log-normal, utilizamos:

$$\ln\left[E_{t-i}M_t^{1+\varphi}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}} = E_{t-i}m_t + (1+\varphi)\frac{Var_{t-i}(m_t)}{2}$$

$$m_t = m_{t-i} + \frac{\varepsilon_t^m}{1-\rho L} + ... + \frac{\varepsilon_{t-i+1}^m}{1-\rho L}$$

$$E_{t-i}m_t = m_{t-i} + \frac{\rho\varepsilon^m_{t-i}}{1-\rho L} + ... + \frac{\rho^i\varepsilon^m_{t-i}}{1-\rho L} = m_{t-i} + \frac{\rho(1-\rho^j)}{(1-\rho)(1-\rho L})\varepsilon^m_{t-i}$$

Por tanto, el error de predicción viene dado por:

$$m_t - E_{t-i}m_t = (1+\rho+..+\rho^{i-1})\varepsilon^m_{t-i+1} + (1+\rho+..+\rho^{i-2})\varepsilon^m_{t-i+2} + ... + \varepsilon^m_t$$

$$m_t - E_{t-i}m_t = \frac{1-\rho^i}{1-\rho}\varepsilon^m_{t-i+1} + \frac{1-\rho^{i-1}}{1-\rho}\varepsilon^m_{t-i+2} + ... + \varepsilon^m_t$$

Y por tanto, la varianza condicionada a la información en $t-i$.

$$Var_{t-i}(m_{t-i}) = E_{t-i}\left[(m_t - E_{t-i}m_t)^2\right] = \sigma^2_\varepsilon\left[\left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2 + \left(\frac{1-\rho^{i-1}}{1-\rho}\right)^2 + ... + 1\right]$$

$$Var_{t-i}(m_{t-i}) = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{(1-\rho)^2}\left[i - \frac{2\rho(1-\rho^i)}{1-\rho} + \frac{\rho^2(1-\rho^{2i})}{1-\rho^2}\right]$$

Por tanto, sustituyendo en la expresión buscada.

$$(1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i E_{t-i}\ln\left[E_{t-i}M_t^{1+\varphi}\right]^{\frac{1}{1+\varphi}} = (1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\left(m_{t-i} + \frac{\rho(1-\rho^j)}{(1-\rho)(1-\rho L)}\varepsilon^m_{t-i}\right) +$$

$$+(1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\frac{(1+\varphi)\,\sigma^2_\varepsilon}{2\,(1-\rho)^2}\left[i - \frac{2\rho(1-\rho^i)}{1-\rho} + \frac{\rho^2(1-\rho^{2i})}{1-\rho^2}\right]$$

El primer sumando tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\left(m_{t-i} + \frac{\rho(1-\rho^j)}{(1-\rho)(1-\rho L)}\varepsilon^m_{t-i}\right) = m_t - \frac{\gamma}{(1-\gamma L)(1-\gamma\rho L)}\varepsilon^m_t$$

$$(1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\frac{(1+\varphi)\,\sigma^2_\varepsilon}{2\,(1-\rho)^2}\left[i - \frac{2\rho(1-\rho^i)}{1-\rho} + \frac{\rho^2(1-\rho^{2i})}{1-\rho^2}\right] = \frac{(1+\gamma\rho)\gamma(1+\varphi)}{2(1-\gamma\rho)(1-\gamma\rho^2)(1-\gamma)}\sigma^2_\varepsilon$$

Cálculo de la autocorrelación del output.

$$\Delta y_t = \frac{(1-\alpha)\gamma}{(1-\gamma L)(1-\gamma\rho L)}(1-L)\varepsilon^m_t$$

$$\Delta y_t = \left[\frac{a}{1-\gamma L} + \frac{b}{1-\gamma\rho L}\right]\varepsilon^m_t : a = -\frac{(1-\alpha)}{1-\rho}(1-\gamma) : b = \frac{(1-\alpha)}{1-\rho}(1-\gamma\rho)$$

$$Var\left(\Delta y_t\right) = \left[\frac{a^2}{1-\gamma^2} + \frac{b^2}{1-(\gamma\rho)^2} + \frac{2ab}{1-\gamma(\gamma\rho)}\right]\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Delta y_{t-k} = \left[a\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\varepsilon_{t-k-i}^m + b\sum_{i=0}^{\infty}\left(\gamma\rho\right)^i\varepsilon_{t-k-i}^m\right]$$

Dado que $E({}^i\varepsilon_t^{mi}\varepsilon_{t-k-i}^m) = 0\ \forall k \neq i$

$$Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-k}) = E\left[\left(\Delta y_t \Delta y_{t-k}\right)^2\right] = \left[\frac{a^2\gamma^k}{1-\gamma^2} + \frac{b^2\left(\gamma\rho\right)^k}{1-\left(\gamma\rho\right)^2} + \frac{ab\left(\gamma^k + \left(\gamma\rho\right)^k\right)}{1-\gamma\left(\gamma\rho\right)}\right]\sigma_\varepsilon^2$$

4.10. Apéndice 4.3.

Deducción de la curva de Phillips, con fijación de precios à la Calvo (1983).

Las empresas sólo pueden cambiar el precio que fijan en un cierto periodo. El porcentaje de empresas que cambian su precio es $1-\gamma$ que es por tanto la probabilidad de que una empresa cambie su precio en un momento determinado. La distribución de probabilidad sigue un proceso de Bernouilli, esto es, llegado un momento del tiempo la empresa cambia o no cambia su precio, decisión que es independiente del lapso temporal transcurrido desde el último cambio de precio.

Veamos el problema para la empresa. Sea P^* el precio de la empresa que decide cambiar su precio y consideremos el problema de la maximización del valor descontado de sus beneficios.

$$\underset{\{P_t^*\}}{Max}\ \ E_t\sum_{k=0}^{\infty}M_{t,t+k}\left(P_t^*Y_{t+k}^i - CT(Y_{t+k|t}\right)$$

sujeto a las restricciones siguientes:

$$Y_{t+k}^i = \left(\frac{P^*}{P_{t+k}}\right)^{-\sigma}Y_{t+k} : Y_t^i = \left(Z_tN_t\right)^{1-\alpha}$$

De tal forma el coste total puede expresarse como:

$$W_{t+k}N^i_{t+k} = \lambda_{t+k}Z_{t+k}N^i_{t+k} = \lambda_{t+k}Y^i_{t+k} = \lambda_{t+k}\left(\frac{P^*}{P_{t+k}}\right)^{-\sigma} Y_{t+k}$$

Por tanto, el valor esperado de los beneficios futuros de la empresa i, vienen dados por:

$$\underset{\{P_t^*\}}{Max} \quad E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k M_{t,t+k}\frac{P_t}{P_{t+k}}\left(P_t^*\left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\sigma} Y_{t+k} - CT_{t+k|t}\left(\left(\frac{P^*}{P_{t+k}}\right)^{-\sigma} Y_{t+k}\right)\right)$$

La condición de primer orden es:

$$P_t^* = \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{E_t\gamma^k M_{t,t+k}\left(P^\sigma_{t+k}\lambda^R_{t+k|t}Y_{t+k}\right)}{E_t\gamma^k M_{t,t+k}\left(P^{\sigma-1}_{t+k}Y_{t+k}\right)} : \lambda_t^R = \frac{\lambda_t}{P_t} = \frac{CMa}{P_t} = \frac{W_t}{P_t}\frac{\partial N_t^j}{\partial Y_t^j}$$

Nótese que en el caso de no existir ningún tipo de rigidez de precios, $\gamma = 0$ y obtenemos la conocida regla de fijación de precios en competencia monopolística.

$$P_t^* = \frac{\sigma}{\sigma-1}\lambda_t$$

La fijación óptima del precio por parte de la empresa queda linealizado como:

$$\hat{P}_t^* = \ln\frac{\sigma}{\sigma-1} + (1-\gamma\beta)E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\beta^k(\hat{\lambda}^R_{t+k} + \hat{P}_{t+k})$$

Calculemos la diferencia entre el coste marginal real esperado y el coste marginal, teniendo en cuenta que $\ln\frac{\sigma}{\sigma-1} = -\hat{\lambda}_t^R$ y

$$\hat{\lambda}_t^R = \hat{W}_t - \hat{P}_t - \ln(1-\alpha) - (1-\alpha)\hat{Z}_t + \alpha\frac{\hat{Y}_t - (1-\alpha)\hat{Z}_t}{1-\alpha}$$

$$E\hat{\lambda}^R_{t+k|t} - \hat{\lambda}^R_{t+k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(E_t\hat{Y}_{t+k} - \hat{Y}_{t+k})$$

Sustituyendo la demanda:

$$\hat{\lambda}^R_{t+k|t} - \hat{\lambda}^R_{t+k|t} = -\frac{\alpha\sigma}{1-\alpha}(\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t+k})$$

$$\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1} = -\frac{\alpha\sigma}{1-\alpha}\hat{P}_t^* + (1-\gamma\beta)E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\beta^k(\hat{\lambda}_{t+k}^R + \frac{1-\alpha+\alpha\sigma}{1-\alpha}\hat{P}_{t+k} - \hat{P}_{t-1})$$

Desarrollando la suma y expresando el segundo término en tasas de inflación:

$$\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1} = -\hat{P}_{t-1} + (1-\gamma\beta)E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\beta^k(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}\hat{\lambda}_{t+k}^R + \hat{P}_{t+k} - \hat{P}_{t-1})$$

$$\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1} = \gamma\beta\left[(1-\gamma\beta)\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\beta^k\hat{\lambda}_{t+k+1}^R + E_t\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\beta^k\hat{\pi}_{t+k+1}\right]$$

$$+(1-\gamma\beta)\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}\hat{\lambda}_t^R + \hat{\pi}_t = \gamma\beta E_t(\hat{P}_{t+1}^* - \hat{P}_t) + (1-\gamma\beta)\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}\hat{\lambda}_t^R + (1-\gamma)(\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1})$$

$$\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1} = \gamma\beta E_t(\hat{P}_{t+1}^* - \hat{P}_t) + (1-\gamma\beta)\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}\hat{\lambda}_t^R + (1-\gamma)(\hat{P}_t^* - \hat{P}_{t-1})$$

El nivel de precios sabemos que viene dado por el agregador CES.

$$P_t = \left[\int_0^1 \left(P_t^i\right)^{1-\sigma} di\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

En este problema, hay un porcentaje de empresas γ,que no pueden cambiar su precio y una fracción $1-\gamma$ que sí lo cambia.

Por tanto, dicho nivel de precios viene dado por:

$$P_t = \left[\int_0^{1-\gamma} (P_t^*)^{1-\sigma} + \int_{1-\gamma}^1 (P_{t-1})^{1-\sigma} di\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[(1-\gamma)(P_t^*)^{1-\sigma} + \gamma (P_{t-1})^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

La ecuación para el nivel de precios que log-linealizada viene dada por:

$$\hat{\pi}_t = (1-\gamma)(\hat{P}_t^* - \hat{P}_t)$$

Sustituyendo ésta en la condición de optimización de primer orden, obtenemos la NKPC.

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\gamma\beta)(1-\gamma)}{\gamma}\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma}\hat{\lambda}_t^R$$

Finalmente, queda expresar la curva de Phillips en función del output gap.

$$\ln \lambda_t^R = (w_t - p_t) - (y_t - n_t + \ln(1-\alpha))$$

Sustituyendo el salario real por la condición de optimización de la economía doméstica y el nivel de empleo por la función de producción:

$$w_t - p_t = \frac{1}{\sigma_c} y_t + \varphi n_t : n_t = \frac{y_t - (1-\alpha) z_t}{1-\alpha} - y_t - \ln(1-\alpha)$$

$$\ln \lambda_t^R = \frac{1}{\sigma_c} y_t + \varphi n_t - y_t + \frac{y_t - (1-\alpha) z_t}{1-\alpha} + \ln(1-\alpha))$$

$$\ln \lambda_t^R = \frac{\sigma_c (\varphi + \alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\sigma_c} y_t - (1+\varphi) z_t + \ln(1-\alpha)$$

El margen en el caso de flexibilidad de precios es:

$$\ln \lambda_t^{Rn} = -\mu = \frac{\sigma_c (\varphi + \alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\sigma_c} y_t^n - (1+\varphi) z_t + \ln(1-\alpha)$$

$$\hat{\lambda}_t^R = \lambda_t^R - \lambda^{Rn} = \frac{\sigma_c (\varphi + \alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\sigma_c} (y_t - y_t^n)$$

Sustituyendo en la curva de Phillips.

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa (y_t - y_t^n)$$

$$\kappa = \frac{(1-\gamma\beta)(1-\gamma)}{\gamma} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma} \frac{\sigma_c (\varphi + \alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\sigma_c}$$

CAPITULO 5
EXTENSIONES DEL MODELO DE CICLO REAL

El modelo básico de Ciclo Económico Real ha sido ampliado en múltiples direcciones dada su flexibilidad para incorporar nuevos elementos o modificar las parametrizaciones iniciales. Como no podría ser de otra forma, el objetivo en gran medida final de la amplia investigación en este campo se ha dirigido a intentar demostrar si el modelo es capaz de replicar mejor las propiedades estadísticas de las series macroeconómicas. Con toda seguridad, la modelización del mercado de trabajo ha recibido una especial atención, dada la incapacidad del modelo básico de explicar determinados hechos característicos. El esfuerzo pionero en este sentido fue liderado por Hansen al modelizar el margen extensivo y generar una función de oferta de trabajo totalmente elástica, aunque progresivamente otras hipótesis alternativas acerca del funcionamiento del mercado de trabajo han sido incluidas en el modelo básico, siendo de especial relevancia el enfoque de búsqueda y emparejamiento (search and matching) o la incorporación del modelo de salarios de eficiencia.

El modelo neoclásico de crecimiento ha ido incorporando sucesivamente otras fuentes de perturbación y comprobar si éstas pueden dentro de su marco teórico explicar también los hechos estilizados del ciclo económico, competir con los shocks tecnológicos como posible fuente de las fluctuaciones cíclicas o acompañar a éstos como condición necesaria para mejorar las predicciones del modelo. La inclusión de otras variables, por ejemplo de política fiscal, es lo que se ha denominado en la literatura, incrementar la dimensión estocástica del modelo.

En este capítulo ofrecemos una serie de elementos innovadores que han ido contribuyendo a enriquecer el modelo original de crecimiento neoclásico.

5.1. El papel de la relación marginal de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo.

El supuesto de trabajo divisible es la forma más sencilla de incluir la oferta de trabajo dentro de la función de utilidad de los individuos. Se asume que todos los individuos están trabajando y cada uno de ellos dispone de una disponibilidad de tiempo fija que reparte de forma óptima entre ocio y trabajo. Por tanto, los cambios en el salario real afectan únicamente a lo que se denomina el margen intensivo, esto es, al número de horas que el individuo desea trabajar.

Existe un abundante cuerpo de literatura que se ha centrado en la oferta de trabajo y más específicamente en el mercado de trabajo dentro de los modelos de Ciclo Real. Este conjunto de investigaciones ha sido motivado por cuatro dificultades básicas encontradas en el modelo básico.

1. Los modelos de Ciclo Real necesitan una elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real muy alta en relación a los parámetros estimados en estudios de corte microeconómico. Dicho de otra forma, el ratio de desviaciones estandar de horas en relación a los salarios reales es demasiado alto en el modelo. La razón es bastante fácil de deducir, los shocks tecnológicos alteran la demanda de trabajo y dada la baja elasticidad de la oferta de trabajo con respecto a los salarios reales, todo el ajuste del cambio en la productividad total de los factores tendría que se absorbido por los salarios y no tanto por el empleo, con lo que el modelo predice un comportamiento fuertemente procíclico de éstos mientras que los datos nos señalan que en el mejor de los casos los salarios reales son débilmente procíclicos. Reconciliar el modelo con los datos implicaría suponer una alta elasticidad de la oferta de trabajo con lo que el cambio en la demanda se traduciría en cambios sustanciales en el empleo y no tanto en los salarios. Sin embargo, las estimaciones de la oferta de trabajo a nivel microeconómico no son altas.

2. Toda la variación en horas trabajadas a nivel agregado en los modelos

de Ciclo Real se deben únicamente a cambios en horas por trabajador, mientras que la experiencia en los mercados de trabajo es que dicha variación se debe a cambios en el número de empleados. Esto es, los datos nos enseñan que la volatilidad en las horas trabajadas es debida al margen extensivo, la diferencia entre estar trabajando o no, mientras que la sustitución de trabajo por ocio en el margen intensivo es lo usual en los modelos RBC estándar, debido a la utilización de trabajo divisible.

3. Los datos agregados de horas trabajadas presentan mayor volatilidad que la que generan los modelos de Ciclo Real.

4. Mientras que la productividad del trabajo y la producción es moderada, los modelos de Ciclo Económico Real predicen una alta correlación entre ambas variables. Básicamente, el modelo no permite distinguir entre salario real y productividad, y la razón de ello se encuentra en que la utilización de la función Cobb-Douglas y el supuesto de competencia perfecta da lugar a que:

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha)\, K^{\alpha} N^{-\alpha} = (1-\alpha)\, \frac{Y_t}{N_t} = F_N(K_t, N_t)$$

$$w_t - p_t = \ln(1-\alpha) + y_t - n_t$$

Esto es, la productividad marginal del trabajo, que es igual al salario real es exactamente igual al producto medio cuando linealizamos la condición de equilibrio.

Por tanto, si los ciclos son causados por shocks de productividad, la correlación entre salarios y producción debería ser alta mientras que en la realidad es sólo moderada. Como hemos comentado, el problema reside en parte en la función de producción utilizada, del tipo Cobb-Douglas, que implica un producto marginal proporcional al producto medio, e iguales cuando se linealiza la demanda de trabajo.

Uno de los principales problemas que presenta el modelo de Ciclo Real es que la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo debe ser muy alta para generar resultados plausibles en relación a la correlación entre horas de trabajo y salarios reales, o lo que es lo mismo, necesita que la curva de oferta de trabajo sea muy elástica. La alta sustitución en lal oferta de trabajo ha sido un importante mecanismo de propagación en los modelos clásicos desde el trabajo de Lucas y Rapping (1969). La idea es que los individuos están dispuestos a sustituir ocio por trabajo en periodos en los que los salarios son transitoriamente más altos.

En un modelo estático, un incremento en el salario produce un efecto sustitución que aumenta el número de horas trabajadas y el consumo así como un un efecto renta que opera en sentido contrario. En un modelo dinámico, el efecto del cambio en el salario es más complejo porque el efecto renta depende de si el cambio en el salario es permanente o transitorio. Un cambio transitorio en el salario tienen un fuerte efecto sustitución y un efecto renta pequeño.

Consideremos la siguiente función de utilidad, separable en consumo y ocio.

$$U(C_t, \ell_t) = \ln C_t + A\frac{\ell_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} : \theta > 0 : \theta \neq 1$$

y la restricción presupuestaria intertemporal

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{W_t N_t}{(1+r)^t}$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$A(1-N_t)^{-\theta} = \lambda_t W_t$$

y la curva de oferta de trabajo linealizada es:

$$\frac{-\theta}{1-N} dN_t = \frac{dW_t}{W} + \frac{d\lambda_t}{\lambda}$$

$$\hat{N}_t = \left(\frac{1-N}{\theta N}\right)(\hat{W}_t + \hat{\lambda}_t) \qquad ((5.1))$$

La relación entre horas trabajadas entre dos periodos consecutivos y la elasticidad de sustitución intertemporal viene dada por:

$$\frac{\ell_{t+1}}{\ell_t} = \frac{1 - N_{t+1}}{1 - N_t} = \left[\beta(1 + r_{t+1})\frac{W_t}{W_{t+1}}\right]^{1/\theta}$$

Por otra parte, la elasticidad de sustitución intertemporal en el ocio viene dada por:

$$\sigma_\ell = \frac{d\ln(\ell_t/\ell_{t+1})}{d\ln(W_t/W_{t+1})} = -\frac{1}{\theta}$$

y la elasticidad de sustitución intertemporal en las horas trabajadas (véase apéndice 1):

$$\sigma_n = \frac{d\ln\left(\frac{N_t}{N_{t+1}}\right)}{d\ln\left(\frac{W_t}{W_{t+1}}\right)} = -\frac{1 - N}{N}\sigma_\ell = \frac{1 - N}{\theta N}$$

$$\hat{N}_t = \sigma_n(\hat{W}_t + \hat{\lambda}_t)$$

De dichos resultados podemos hacer dos observaciones:

1. Un cambio transitorio en el salario entre los dos periodos conduce a un aumento en la oferta de trabajo hoy y a una disminución en el ocio. Por contra, una elevación permanente en los salarios relativos deja inalterada la oferta de trabajo.

2. En el ejemplo anterior, $\sigma_n = \frac{1-N}{\theta N}$ es la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo, λ constante, que mide la elasticidad en la oferta de trabajo con respecto al salario real, manteniendo constante la utilidad marginal del consumo.

Si $\theta = 1$, la utilidad es logarítmica en ocio y para una fracción de las horas trabajadas en estado estacionario , $N = 0.2$, dicha elasticidad nos da un valor de 4, esto es un cambio en el salario real de un 1 % genera un aumento en las horas trabajadas de un 4 % si el efecto renta es pequeño (λ constante).

Sin embargo, la evidencia microeconómica sobre los valores de dicha elasticidad, que aunque varía sustancialmente dependiendo del género, se estima que es mucho menor que la unidad. Las estimaciones de Pencavel (1986) o Mankiw, Rotemberg y Summers (1985) así lo confirman.

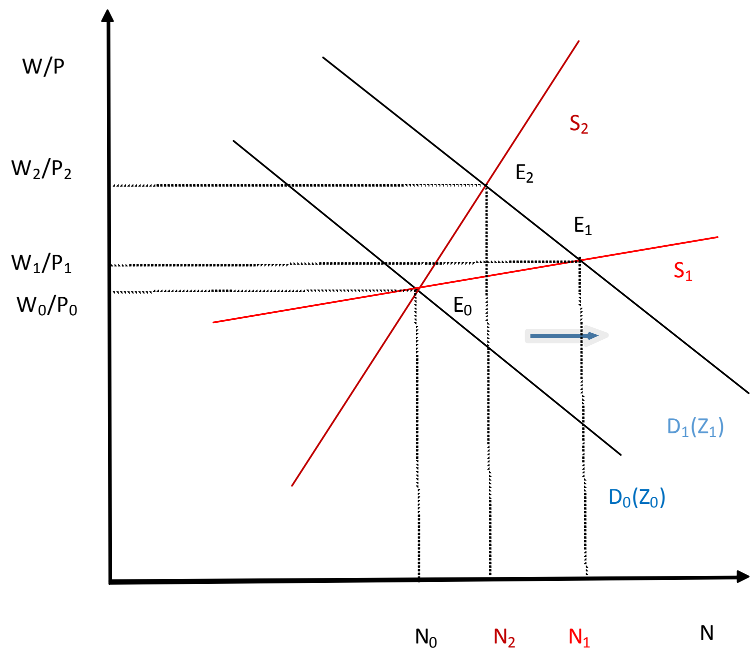

Gráfico 5.1.

King y Rebelo (1999) estiman los efectos de reducir la elasticidad intertemporal de la oferta de trabajo a 1 y comprueban que se produce una importante reducción en la volatilidad del output, sin embargo el modelo pierde capacidad para generar fluctuaciones en el empleo.

En el gráfico 5.1. observamos el efecto de la perturbación tecnológica sobre el mercado de trabajo clásico y cómo el nivel de empleo y el salario real son sensibles a la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo. En S_1, σ_n es alta, mientras que en S_2 es baja. Como hemos comentado anteriormente, el modelo necesita de una alta sustituibilidad para generar predicciones en línea con los datos empíricos pero las estimaciones a nivel microeconómico no confirman una alta elasticidad de sustitución intertemporal.

5.2. Modelizando el margen extensivo. Hansen (1985).

Los investigadores con modelos RBC han explorado algunas formas de mejorar la respuesta de la oferta agregada de trabajo centrándose en modelizar el margen extensivo, es decir, en la decisión del individuo de trabajar un número de horas determinado o por contra no trabajar y dejar a un lado el margen intensivo esto es, que el mecanismo de la alta sustituibilidad entre horas de trabajo y ocio no sea necesario en el modelo.

Es más, desde el punto de vista empírico, la mayor parte de las fluctuaciones en las horas trabajadas se deben no a cambios en el número de horas por trabajador sino todo lo contrario a las variaciones en el desempleo, esto es, en el número de ocupados.

Si partimos de la siguiente identidad

$$H = hN$$

donde H es el número agregado de horas, h el número de horas por empleado y N el número de ocupados, tenemos que:

$$Var(\ln H) = Var(\ln h) + Var(\ln N) + 2Cov(\ln h, \ln N)$$

Hansen (1985) estima que:

$$\frac{Var(\ln N)}{Var(\ln H)} = 0.55 : \frac{Var(\ln h)}{Var(\ln H)} = 0.20$$

es decir, más de la mitad en la variabilidad de las horas totales trabajadas viene explicada por la variación en el número de empleados y sólo un 20 % de las mismas viene explicado por el margen intensivo o el número de horas por trabajador.

Existen dos estrategias para modelizar el margen extensivo dentro del análisis del ciclo económico.

La primera es asumir que las economías domésticas son heterogéneas en relación a sus salarios de reserva, debido a la existencia de costes de ir al trabajo, enfoque convencional en economía laboral y que ha sido incorporado en modelos de ciclo real por Cho y Cooley (1993).

La segunda es la desarrollada a partir de los trabajos de Rogerson (1988) y aplicado al Ciclo Real por G. Hansen (1985) que asume que los individuos son idénticos pero acuerdan participar en un contrato eficiente que asigna, a partir de un sistema de loterías, si un trabajador permanecerá ocioso o bien trabajará. Este enfoque ha sido dominante en la literatura e implica que toda la variación en las horas trabajadas se produce en el margen extensivo.

Una característica importante es la compatibilidad de una oferta de trabajo a nivel agregado muy elástica con una elasticidad de la oferta de trabajo individual inelástica.

Aunque idealmente las preferencias de un individuo pueden ser tales que desee ofrecer un número de horas inferior a h, habitualmente cada individuo tiene que elegir entre trabajar un número de horas fijo $\bar{h}$ o no trabajar nada, sin embargo esta elección no es convexa ya que incluye $h = 0$ y $h = \bar{h}$, pero no combinaciones lineales entre los dos, esto es, el trabajo es indivisible.

Recordemos que en los modelos de Ciclo Real se asume como restricción que el tiempo total disponible del individuo se destina o bien a ofrecer trabajo o bien a demandar ocio, esto es, en la notación que estamos utilizando:

$$h_t + \ell_t = 1$$

Esta relación es un conjunto convexo y el individuo representativo elige la combinación de h_t y ℓ_t que maximiza su utilidad, esto es, el trabajo es divisible.

Sin embargo, si el número de horas $h_t = \bar{h}$ es fijo, la demanda de ocio es fija tambien y la restricción deja de operar como conjunto convexo, o dicho de otra forma, el número de horas de trabajo no es una variable de elección para el individuo. Si asumimos que el número de horas por trabajador es fijo, el total de la variación en el número de horas trabajadas a nivel agregado simplemente vendría explicado por la variación en el número de trabajadores ya que las horas por trabajador son constantes.

En todo caso, la elección del trabajador es de tipo discreto, o trabajar $\bar{h}$ horas o no trabajar nada. El problema técnico es garantizar una solución interior al problema del agente representativo, lo que implica introducir un mecanismo de tal manera que el conjunto de posibilidades de elección sea convexo.

La idea de Hansen de introducir un sistema de loterías permite convexificar el conjunto de elección del individuo.

Aceptar entrar en el mercado de trabajo implicaría participar en la lotería. Supongamos que la probabilidad de ofrecer $\bar{h}$ es p, (trabajar) mientras que la probabilidad de ofrecer 0 horas, (no trabajar), es $1-p$. La probabilidad p puede interpretarse como la proporción de la población que encontrará trabajo. Si normalizamos ésta a 1, simplemente nos dará el número de empleados.

Denotemos con C^ey C^u, los niveles de consumo respectivos de aquellos agentes que son asignados a trabajar y de los que permanecerán desempleados.

La utilidad esperada de un individuo antes de jugar la lotería es

$$E(u) = pu(C^e, 1-\bar{h}) + (1-p)u(C^u, 1)$$

La asignación factible de consumo entre empleados y desempleados debe verificar:

$$pC^e + (1-p)C^u = C$$

donde C es el consumo total.

Maximizar la función de utilidad respecto a los niveles de consumo nos da la denominada condición de reparto eficiente del riesgo.

$$\frac{\partial u}{\partial C^e}(c_1, 1-\bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial C^u}(c_2, 1-\bar{h})$$

Para una función de preferencias separable en consumo y trabajo, dicha condición implica que los niveles de consumo serán iguales independientemente de la situación del individuo.

Dicha condición implica que cada economía doméstica tiene acceso a contratar un seguro en caso de que se encuentre en situación de desempleo, esto es, paga una prima proporcional a la renta que se aseguraría en caso de permanecer desempleado (esta condición es necesaria para eliminar la heterogeneidad ex-post, esto es, después del resultado de la lotería una proporción trabajará y otra no).

El individuo representativo maximiza su utilidad esperada con la restricción presupuestaria. En cada periodo, se enfrenta a dos posibles restricciones, dependiendo de si está empleado o no.

$$C_t^e + K_{t+1}^e = W_t \bar{h} + (r_t + 1 - \delta) K_t^e - \tau_t S_t$$

con probabilidad p y

$$C_t^u + K_{t+1}^u = (r_t + 1 - \delta) K_t^u - \tau_t S_t + S_t$$

con probabilidad $1 - p$.

Y donde, $\tau_t S_t$ sería la prima pagada y S_t la compensación que recibiría en caso de estar desempleado.

Planteando el lagrangiano, obtenemos las condiciones de óptimo:

$$\mathcal{L}(C_t^e, C_t^u, C, K_{t+1}^e, K_{t+1}^u, C, \lambda_t) = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[p_t u(C_t^e, 1 - \bar{h}) + (1 - p_t) u(C_t^u, 1) \right] +$$

$$+\lambda_t^e p_t \left[W_t \bar{h} + (r_t + 1 - \delta) K_t^e - \tau_t S_t - C_t^e - K_{t+1}^e \right] +$$

$$+\beta^t \lambda_t^u (1 - p_t) \left[(r_t + 1 - \delta) K_t^u - \tau_t S_t - C_t^u - K_{t+1}^u + S_t \right]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t^e} = 0 \Rightarrow u_c(C_t^e) = \lambda_t^e : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t^u} = 0 \Rightarrow u_c(C_t^u) = \lambda_t^u$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_t} = 0 \Rightarrow -\lambda_t^e p \tau_t + \lambda_t^u (1 - p)(1 - \tau_t) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}^{e}} = 0 \Rightarrow \lambda_t^e p_t = \beta E_t \lambda_{t+1}^e p_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}^{u}} = 0 \Rightarrow \lambda_t^u (1 - p_t) = \beta E_t \lambda_{t+1}^u (1 - p_{t+1})(r_{t+1} + 1 - \delta)$$

$$C_t^e + K_{t+1}^e = W_t \bar{h} + (r_t + 1 - \delta) K_t^e - \tau_t S_t$$

$$C_t^u + K_{t+1}^u = (r_t + 1 - \delta) K_t^u - \tau_t S_t + S_t$$

Los beneficios esperados de la aseguradora, Π_t vienen dados por:

$$E(\Pi_t) = \tau_t C_t - (1 - p) C_t$$

Suponiendo rendimientos constantes, o competencia perfecta en el sector asegurador nos daría un beneficio esperado nulo y por tanto el porcentaje de prima sobre la compensación sería igual a la probabilidad de estar desempleado.

$$\tau_t = 1 - p_t$$

Este supuesto implica que $\lambda_t^u = \lambda_t^e = \lambda_t$ lo que finalmente implica que el nivel de ahorro será el mismo en cualquiera de las dos situaciones, $\lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta)$, ya que la acumulación de capital es independiente de las probabilidades de estar empleado o desempleado.

Además los niveles de consumo en las dos situaciones serán iguales:

$$u'(C_t^e) = u'(C_t^u) = \lambda_t$$

A partir de las restricciones presupuestarias, la compensación vendría dada por $S_t = W_t \bar{h}$. Este resultado supone que los individuos se asegurarían completamente ya que obtendrían la misma renta trabajando o no. El comportamiento de la economía doméstica es idéntico esté o no esté empleado, lo que elimina completamente la heterogeneidad entre los individuos a través de la posibilidad de contratar un seguro.

Apliquemos estos resultados a dos funciones de utilidad concretas.

En primer lugar, el modelo standard de trabajo indivisible asume que la función de utilidad es logarítmica y separable en consumo y ocio.

$$u(C, \ell) = \ln C + \ln(\upsilon(\ell))$$

En este caso, la utilidad esperada viene dada por:

$$E(u) = p\left[\ln C^e + \ln \upsilon(1 - \bar{h})\right] + (1 - p)\left[\ln C^u + \ln \upsilon(1)\right]$$

Dada la condición de igualdad de las utilidades marginales en el consumo.

$$\frac{1}{C^e} = \frac{1}{C^u} \Rightarrow C^e = C^u$$

En este caso, la función de utilidad viene dada por:

$$E(u) = \ln C + \frac{1 - \ell_t}{\bar{h}}(\ln \upsilon(1 - \bar{h}) - \ln \upsilon(1)) + \ln \upsilon(1) = \ln C + B\,(1 - \ell_t)$$

donde $\ell_t = 1 - p\bar{h}$ es el número medio de horas de ocio. Dado que $H_t = p\bar{h}$ es el número agregado de horas, la función de utilidad es lineal en ocio o en número de horas totales, donde $B = \frac{1}{\bar{h}} \ln \upsilon\left(1 - \bar{h}\right) - \ln \upsilon(1) < 0$ es la desutilidad marginal del trabajo.

Existen dos características notables en esta modelización.

En primer lugar, mientras que cada individuo tiene una elasticidad finita de oferta de trabajo, (podemos pensar que es cercana a cero comos sugieren los estudios de corte microeconómico), la economía en su conjunto actúa como si estuviese formada por agentes con una elasticidad de la oferta muy alta. En concreto el agente representativo para esta economía tiene preferencias lineales en ocio, lo que implica una elasticidad infinita para la oferta de trabajo.

A partir de (5.1).

$$\hat{N}_t = \left(\frac{1 - N}{\theta N}\right)(\hat{W}_t + \hat{\lambda}_t)$$

para $\theta \to 0$, la elasticidad de Frisch para la oferta de trabajo tiende a infinito.

En segundo lugar, en esta economía estar desempleado es óptimo, ya que la utilidad en esta situación es mayor que estar empleado $v(1) > v(1-\bar{h})$.

Es interesante analizar por qué la elasticidad individual de la oferta de trabajo difiere de la de la economía en su conjunto y las consecuencias que tiene para la determinación del output y del trabajo. Cuando calculamos la elasticidad de la oferta de trabajo individual intentamos responder a la cuestión de cuántas horas trabajaría más un individuo si el salario real creciese un 1 %. Pero esta cuestión es irrelevante si el número de horas es fijo, $\bar{h}$ o 0. En otras palabras, el margen intensivo no es operativo y por tanto su elasticidad de respuesta es irrelevante.

Con la función de preferencias anterior un pequeño cambio en el salario conduce a un efecto considerable sobre la cantidad de trabajo ofrecida. Para ver esto, consideremos un individuo que maximiza

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t + B(1-\ell_t)\right]$$

A lo largo de la restricción presupuestaria intertemporal relevante, para que el individuo trabaje una parte de su tiempo en cada periodo $(0 < \ell_t < 1)$ debe verificarse en el óptimo que[49], esto es, la curva de oferta de trabajo es totalmente elástica.

$$\lambda_t W_t = \frac{\partial u}{\partial \ell_t} = -B$$

Una implicación de esta función de oferta de trabajo es que en el equilibrio, la demanda de trabajo al fijar la cantidad de horas de trabajo por empleado, determina la cantidad de empleo.

Para una función de utilidad más general que la logarítmica anterior también obtenemos el mismo resultado. Consideremos la siguiente función de utilidad no separable:

$$u(c,\ell) = \frac{1}{1-\theta}\left\{[Cv(\ell)]^{1-\theta} - 1\right\}$$

[49] Si $\lambda_t W_t < B$, el agente asignaría todo su tiempo disponible al ocio $(\ell_t = 1)$ y al contrario, el individuo desearia dedicar todo su tiempo disponible a trabajar $(\ell_t = 0)$.Simplemente éstas serían soluciones de esquina, no interiores, al problema de optimización.

La función de utilidad esperada tiene la siguiente expresión.

$$E(u) = \frac{p}{1-\theta}\left\{\left[C_t^e \upsilon(1-\bar{h})\right]^{1-\theta} - 1\right\} + \frac{1-p}{1-\theta}\left\{\left[C_t^u \upsilon(1)\right]^{1-\theta} - 1\right\}$$

La condición de reparto de riesgo eficiente implica que la asignación de consumo debe satisfacer:

$$u'(C_t^e) = u'(C_t^u) \Rightarrow C_t^e = C_t^u \left[\frac{\upsilon(1-\bar{h})}{\upsilon(1)}\right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$u(C,\ell) = \frac{1}{1-\theta}\left\{C^{1-\theta}\left[\left(\frac{1-\ell}{\bar{h}}\right)\upsilon(1-\bar{h})^{\frac{1-\theta}{\theta}} + \left(1-\frac{1-\ell}{\bar{h}}\right)\upsilon_2^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right]^{\theta} - 1\right\} : \theta \neq 1$$

$$u(C,\ell) = \frac{1}{1-\theta}\left(C^{1-\theta}\upsilon^*(\ell)^{1-\theta} - 1\right)$$

Si $\theta > 1$ el consumo cuando el individuo está empleado será mayor que el nivel de consumo cuando está desempleado $\frac{\upsilon(1-\bar{h})}{\upsilon(1)} < 1$.

Existen dos puntos a destacar en esta expresión: en primer lugar, la función de utilidad conserva la constancia a largo plazo de las horas trabajadas por individuo y en segundo lugar, la función de utilidad mantiene las propiedades de la función de utilidad original respecto a los efectos de los cambios en el ocio sobre la utilidad marginal del consumo. En concreto cuando $\theta > 1$ la utilidad marginal del consumo es decreciente en ocio, $\frac{\partial u_c}{\partial \ell} < 0$.

Calculemos las condiciones de óptimo del individuo con este tipo de función.

$$\lambda_t = C_t^{-\theta}\upsilon^*(\ell)^{1-\theta} : \lambda_t W_t = C_t^{1-\theta}\upsilon^*(\ell)^{-\theta}$$

Sus aproximaciones log-lineales vienen dadas por:

$$-\theta\hat{C}_t + (1-\theta)\kappa\hat{\ell}_t = \hat{\lambda}_t$$

$$(1-\theta)\hat{C}_t - \left(\frac{(1-\theta)^2}{\theta}\kappa\right)\hat{\ell}_t = \hat{\lambda}_t + \hat{W}_t : (\kappa = \frac{W\ell}{C})$$

Despejando el ocio en una de ellas y sustituyendo en la otra, obtenemos una curva de oferta totalmente elástica, independiente del valor de $\hat{\ell}_t$.

$$\hat{\lambda}_t + \theta \hat{W}_t = 0$$

Esto es, independientemente de que la función de utilidad sea separable en consumo y ocio, la función de oferta de trabajo es siempre totalmente elástica.

5.3. El modelo de Hansen con trabajo indivisible.

El modelo de Hansen con trabajo indivisible implica que la función de preferencias es separable en consumo y ocio y lineal en éste. De nuevo, el problema de nuestro agente representativo es maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones pertinentes:

$$Max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t - BN_t \right]$$

sujeto a las condiciones habituales en un problema de planificador social:

$$C_t + K_{t+1} = \exp\left(Z_t\right) K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta) K_t$$

$$\ln Z_t = (1-\rho) \ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

La obtención de las condiciones de optimización puede hacerse a través del lagrangiano:

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, K_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[(\ln C_t - BN_t) - \lambda_t (C_t + K_{t+1} - \exp\left(Z_t\right) K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - (1-\delta) K_t) \right]$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_t} = \lambda_t \qquad ((5.2))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -B + \lambda_t(1-\alpha)\exp\{Z_t\} K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} = 0 \Rightarrow B = \lambda_t(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} \quad ((5.3))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + K_{t+1} - \exp(Z_t) K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t = 0 \quad ((5.4))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t\left[\lambda_{t+1}(\exp\{Z_t\}\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta)\right] = 0 \quad ((5.5))$$

$$Y_t = \exp(Z_t) K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \quad ((5.6))$$

$$R_{t+1} = 1 - \delta + r_{t+1} = 1 - \delta + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} = 1 - \delta + \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \quad ((5.7))$$

Las ecuaciones (5.2)-(5.6) junto al proceso de shock, nos dan un sistema no lineal donde las variables endógenas son consumo, producción, rendimiento bruto del capital, empleo y stock de capital (K_{t+1}) y como variable exógena tenemos el shock de productividad, siendo las variables de estado, el multiplicador de Lagrange y el stock de capital inicial K_t.

Cálculo del estado estacionario determinista.

A partir de (5.2)-(5.6) podemos obtener los valores de estado estacionario de las variables anteriores.

$$\lambda = \frac{1}{C} : B = \lambda(1-\alpha)\frac{Y}{N}$$

$$C = Y - \delta K : 1 = \beta R$$

$$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha} : R = \alpha\frac{Y}{K} + 1 - \delta$$

A partir de las expresiones anteriores podemos calcular los grandes ratios tales como la relación capital-producto, o su inversa, y la participación del consumo respecto a la producción expresadas en función de los parámetros del modelo.

$$\frac{K}{Y} = \frac{\alpha}{R-(1-\delta)} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)} : \frac{C}{Y} = 1 - \delta\frac{K}{Y} = 1 - \frac{\alpha\delta}{R-(1-\delta)} = 1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}$$

$$N = \frac{1-\alpha}{B}\frac{Y}{C} = \frac{1-\alpha}{B\left(1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)} : K = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} N$$

Linealización y resolución.

El sistema log-linealizado viene dado por:

$$0 = \hat{C}_t + \hat{\lambda}_t \tag{(5.8)}$$

$$0 = \hat{\lambda}_t + \hat{Y}_t - \hat{N}_t \tag{(5.9)}$$

$$C\hat{C}_t + K\hat{K}_{t+1} = Y\hat{Y}_t + (1-\delta)K\hat{K}_t \tag{(5.10)}$$

$$\hat{\lambda}_t = E_t(\hat{\lambda}_{t+1} + \hat{R}_{t+1}) \tag{(5.10)}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t \tag{(5.11)}$$

$$R\hat{R}_t = \alpha\frac{Y}{K}(\hat{Y}_t - \hat{K}_t) \tag{(5.12)}$$

Simplificando el modelo.

El modelo puede ser resuelto por el método de los coeficientes indeterminados y para ello puede simplificarse fácilmente sustituyendo las ecuaciones y dejándolo expresado en sólo dos variables; en este caso, resolveremos para el multiplicador de Lagrange y para el stock de capital.

Sustituyendo (5.11) en (5.9) y (5.12):

$$R\hat{R}_t = \alpha\frac{Y}{K}(\hat{Z}_t + (1-\alpha)(\hat{N}_t - \hat{K}_t))$$

$$0 = \hat{\lambda}_t + \hat{Z}_t - \alpha(\hat{N}_t - \hat{K}_t)$$

Combinando ambas expresiones

$$R\hat{R}_t = \frac{Y}{K}(\hat{Z}_t + (1-\alpha)\hat{\lambda}_t) \tag{(5.13)}$$

Adelantando un periodo (5.13) y sustituyendo en (5.10), obtenemos:

$$R(\hat{\lambda}_t - E_t\hat{\lambda}_{t+1}) = \frac{Y}{K}E_t(\hat{Z}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{\lambda}_{t+1})$$

con lo que finalmente obtenemos:

$$\hat{\lambda}_t = \frac{Y}{KR}E_t\hat{Z}_{t+1} + \left(\frac{Y}{KR}(1-\alpha)+1\right)E_t\hat{\lambda}_{t+1} \qquad ((5.14))$$

Introduciendo en la restricción de recursos, (5.10) tanto la función de producción (5.11) como el consumo linealizado, (5.8):

$$-C\hat{\lambda}_t + K\hat{K}_{t+1} = Y(\hat{Z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t) + (1-\delta)K\hat{K}_t$$

y eliminando la oferta de trabajo con $0 = \hat{\lambda}_t + \hat{Z}_t - \alpha(\hat{N}_t - \hat{K}_t)$, obtenemos:

$$-C\hat{\lambda}_t + K\hat{K}_{t+1} = Y\hat{Z}_t + \alpha Y\hat{K}_t + (1-\alpha)Y(\hat{K}_t + \frac{1}{\alpha}(\hat{\lambda}_t + \hat{Z}_t)) + (1-\delta)K\hat{K}_t$$

Reorganizando términos, podemos expresar ésta como:

$$\hat{K}_{t+1} = \left(\frac{C}{K} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{Y}{K}\right)\hat{\lambda}_t + \left(\frac{Y}{K}+1-\delta\right)\hat{K}_t + \frac{Y}{\alpha K}\hat{Z}_t \qquad ((5.15))$$

Las ecuaciones (5.14) y (5.15) nos definen el sistema en $\left(\hat{K}_{t+1}, \hat{\lambda}_{t+1}\right)$. A partir de la solución para éstas podemos encontrar la solución para el resto de las variables.

Con el fin de simplificar la notación, denotaremos las dos ecuaciones como

$$\hat{K}_{t+1} = a_1\hat{\lambda}_t + a_2\hat{K}_t + a_3\hat{Z}_t$$

$$\hat{\lambda}_t = a_4E_t\hat{\lambda}_{t+1} + a_5E_t\hat{Z}_{t+1}$$

donde

$$a_1 = \left(\frac{C}{K} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{Y}{K}\right); a_2 = \left(\frac{Y}{K}+1-\delta\right)$$

$$a_3 = \frac{Y}{\alpha K}; a_4 = \left(\frac{Y}{KR}(1-\alpha)+1\right); a_5 = \frac{Y}{KR}$$

Solución.

Podemos probar como solución con las siguientes expresiones, donde las mismas expresan que las dos variables dependen de la variable exógena y de la variable endógena predeterminada.

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t \qquad ((5.16))$$

$$\hat{\lambda}_t = \eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t \quad y \quad E_t\hat{\lambda}_{t+1} = \eta_{\lambda k}\hat{K}_{t+1} + \eta_{\lambda z}E_t\hat{Z}_{t+1}$$

Sustituyendo en (5.14):

$$\eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t = a_1(\eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t) + a_2\hat{K}_t + a_3\hat{Z}_t$$

Identificando coeficientes obtenemos:

$$\eta_{kk} = a_1\eta_{\lambda k} + a_2 \quad y \quad \eta_{kz} = a_1\eta_{\lambda z} + a_3$$

Sustituyendo en (5.15):

$$\eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t = a_4(\eta_{\lambda k}\hat{K}_{t+1} + \eta_{\lambda z}E_t\hat{Z}_{t+1}) + a_5E_t\hat{Z}_{t+1}$$

$$\eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t = a_4\eta_{\lambda k}(\eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t) + a_4\eta_{\lambda z}E_t\hat{Z}_{t+1}) + a_5E_t\hat{Z}_{t+1}$$

Introduciendo ahora $E_t\hat{Z}_{t+1} = \rho\hat{Z}_t$ y comparando coeficientes en las dos ecuaciones

$$\eta_{\lambda k} = a_4\eta_{\lambda k}\eta_{kk} \quad y \quad \eta_{\lambda z} = a_4\eta_{\lambda k}\eta_{kz} + a_4\eta_{\lambda z}\rho + a_5\rho$$

La principal dificultad reside en el cálculo de η_{kk} ya que nos enfrentamos a una ecuación de segundo grado para el cálculo de dicha elasticidad.

$$\eta_{\lambda k} = \frac{\eta_{kk} - a_1}{a_4} \qquad y \qquad \frac{\eta_{kk} - a_2}{a_1} = a_4\frac{\eta_{kk} - a_2}{a_1}\eta_{kk};$$

$$P(\eta_{kk}) = \eta_{kk}^2 - (a_2 + \frac{1}{a_4})\eta_{kk} + \frac{a_2}{a_4} = 0$$

y su solución es

$$\eta_{kk} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_4} \pm \sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{a_4}\right)^2 - 4\frac{a_1}{a_4}}}{2}$$

$$\eta_{kk} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_4} \pm \sqrt{\left(a_1^2 + \left(\frac{1}{a_4}\right)^2 + 2\frac{a_1}{a_4}\right) - 4\frac{a_1}{a_4}}}{2} = \frac{a_1 + \frac{1}{a_4} \pm a_1 - \frac{1}{a_4}}{2}$$

$$\eta_{kk}^{(1)} = a_1 \qquad y \qquad \eta_{kk}^{(2)} = \frac{1}{a_4}$$

La solución estable viene dada por $\eta_{kk} = \frac{1}{a_4}$ y $a_4 > 1$.

Por tanto las soluciones para nuestras constantes indeterminadas vienen dadas por:

$$\eta_{\lambda k} = \frac{\frac{1}{a_4} - a_2}{a_1}; \eta_{kz} = \frac{a_3 a_4\left(\frac{1}{a_4} - a_2\right) + a_1 a_5 \rho}{a_4(a_2 - \rho)} + a_3; \eta_{\lambda z} = \frac{a_3 a_4\left(\frac{1}{a_4} - a_2\right) + a_1 a_5 \rho}{a_1 a_4(a_2 - \rho)}$$

Calculadas las soluciones para el stock de capital y para $\hat{\lambda}_t$, podemos calcular las expresiones dinámicas para el resto de las variables.

Como la ecuación (5.8) viene dada por $0 = \hat{C}_t + \hat{\lambda}_t$:

$$\hat{C}_t = -\eta_{\lambda k}\hat{K}_t - \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t \tag{(5.17)}$$

A partir de (5.10), $C\hat{C}_t + K\hat{K}_{t+1} = Y\hat{Y}_t + (1-\delta)K\hat{K}_t$ podemos obtener la solución para la producción

$$\hat{Y}_t = -\frac{C}{Y}(\eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t) + \frac{K}{Y}(\eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t) - \frac{K}{Y}(1-\delta)\hat{K}_t$$

$$\hat{Y}_t = \left(-\frac{C}{Y}\eta_{\lambda k} + \frac{K}{Y}\eta_{kk} - \frac{K}{Y}(1-\delta)\right)\hat{K}_t + \left(-\frac{C}{Y}\eta_{\lambda z} + \frac{K}{Y}\eta_{kz}\right)\hat{Z}_t \tag{(5.18)}$$

A partir de (5.13) $R\hat{R}_t = \frac{Y}{K}(\hat{Z}_t + (1-\alpha)\hat{\lambda}_t)$:

$$\hat{R}_t = \frac{Y}{RK}\hat{Z}_t + \frac{Y}{RK}(1-\alpha)(\eta_{\lambda k}\hat{K}_t + \eta_{\lambda z}\hat{Z}_t)$$

$$\hat{R}_t = \frac{Y}{RK}\left(1 + (1-\alpha)\eta_{\lambda z}\right)\hat{Z}_t + \frac{Y}{RK}(1-\alpha)\eta_{\lambda k}\hat{K}_t \tag{(5.19)}$$

Por último a partir de (5.9), $0 = \hat{\lambda}_t + \hat{Y}_t - \hat{N}_t$ podemos obtener la solución para la oferta de trabajo

$$\hat{N}_t = \left(-\frac{C}{Y}\eta_{\lambda k} + \frac{K}{Y}\eta_{kk} - \frac{K}{Y}(1-\delta) + \eta_{\lambda k}\right)\hat{K}_t + \left(-\frac{C}{Y}\eta_{\lambda z} + \eta_{\lambda z} + \frac{K}{Y}\eta_{kz}\right)\hat{Z}_t \tag{(5.20)}$$

Los efectos de los shocks a la tecnología.

Calculadas las soluciones para las variables, nuestro objetivo se centra ahora en el cálculo de las funciones de impulso-respuesta ó como se desenvuelven dinámicamente las variables endógenas ante un shock al parámetro tecnológico.

Consideremos la ecuación dinámica solución para el stock de capital y el proceso autorregresivo que sigue el shock a la tecnología:

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t \quad y \quad \hat{Z}_t = \rho\hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

Sustituyendo el proceso autorregresivo que sigue el shock tecnológico en la ecuación solución para el stock de capital, obtenemos la solución para $\hat{K}_{t+1+T}$ en función de los parámetros del modelo.

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kz}\sum_{i=0}^{\infty}\eta_{kk}^{i}\hat{Z}_{t-i}$$

$$\hat{Z}_{t-i} = \sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}\varepsilon_{t-i-j}$$

Por tanto

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kz}\sum_{i=0}^{\infty}\eta_{kk}^{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}\varepsilon_{t-i-j}\right)$$

O, en general

$$\hat{K}_{t+1+T} = \eta_{kz}\sum_{i=0}^{\infty}\eta_{kk}^{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}\varepsilon_{t+T-i-j}\right) \tag{(5.21)}$$

Si consideramos $\varepsilon_t \neq 0$ y $\varepsilon_{t+i} = 0\ \forall i \neq 0$, los multiplicadores dinámicos nos dan el efecto sobre el stock de capital futuro de dicha perturbación.

$$\frac{\partial \hat{K}_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{kz} > 0 : \frac{\partial \hat{K}_{t+2}}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{kz}(\rho + \eta_{kk}) > 0$$

$$\frac{\partial \hat{K}_{t+3}}{\partial \varepsilon_t} = \eta_{kz}(\rho^2 + \eta_{kk}\rho + \eta_{kk}^2) > 0$$

Para $\rho + \eta_{kk} > 1$ la dinámica del stock de capital tendrá forma de joroba (hump-shaped). Conforme nos alejamos del momento en el que se produjo la perturbación, el efecto sobre el stock de capital seguirá siendo positivo pero cada vez menor, y a largo plazo puede comprobarse que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\partial \hat{K}_{t+T}}{\partial \varepsilon_t} \to 0$$

Las variables del modelo siguen procesos autorregresivos; por ejemplo, el stock de capital sigue un proceso AR(2).

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{K}_t + +\eta_{kz}\hat{Z}_t \quad y \quad \hat{Z}_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \rho L}$$

$$\hat{K}_{t+1} = (\rho + \eta_{kk})\hat{K}_t - \eta_{kk}\rho\hat{K}_{t-1} + \eta_{kz}\varepsilon_t$$

mientras que el resto de las variables siguen procesos siguen procesos ARMA (2,1).

Calibración.

En el capítulo 3, calibramos el modelo de Hansen de trabajo divisible con estos parámetros:

$$\beta = 0.99 : \delta = 0.025 : \alpha = 0.36$$

$$K = 12.67 : Y = 1.24 : C = 0.92 : r = 0.035$$

Para obtener el valor del parámetro B en estado estacionario y comparar el modelo de trabajo indivisible con el modelo de trabajo divisible del capítulo 3, debemos recordar que en éste, el valor de A, coeficiente de la función de utilidad venía dado por:

$$N = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]}$$

También sabemos que el parámetro B depende las horas de trabajo individuales a partir de:

$$B = \frac{1}{\bar{h}} \ln \upsilon \left(1 - \bar{h}\right) - \ln \upsilon(1)$$

que en el caso de la función logarítmica y separable tiene por expresión:

$$B = \frac{A \ln\left(1 - \bar{h}\right)}{\bar{h}}$$

A partir del estado estacionario para el parámetro B, tenemos:

$$N = \frac{1-\alpha}{B\left(1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)}$$

Dado que deseamos que el número de horas de estado estacionario en los dos modelos sean iguales, se verifica la siguiente igualdad:

$$N = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]} = \frac{1-\alpha}{B\left(1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)} = \frac{1-\alpha}{\frac{A\ln\left(1-\bar{h}\right)}{\bar{h}}\left(1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)}$$

con lo que podemos determinar el número de horas de trabajo individual $\bar{h}$.

$$\frac{\bar{h}}{\ln\left(1 - \bar{h}\right)} = -\frac{\frac{A}{1-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha\delta\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)}{1 + \frac{A}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\beta\delta\alpha}{1-\beta(1-\delta)}\right]}$$

donde es aproximadamente $\bar{h} = 0.58$.

Sustituyendo los parámetros en las soluciones, obtenemos las leyes dinámicas para cada una de las variables del modelo.

$$\hat{K}_{t+1} = 0.94\hat{K}_t + 0.15\hat{Z}_t$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_t &= 0.06\hat{K}_t + 1.94\hat{Z}_t \\
\hat{C}_t &= 0.53\hat{K}_t + 0.47\hat{Z}_t \\
\hat{N}_t &= -0.47\hat{K}_t + 1.47\hat{Z}_t \qquad ((5.22)) \\
\hat{R}_t &= -0.9546\hat{K}_t + 1.9615\hat{Z}_t \\
\hat{W}_t &= \hat{Y}_t - \hat{N}_t = 0.53\hat{K}_t + 0.47\hat{Z}_t
\end{aligned}$$

Si comparamos la ecuación (5.22) con su homóloga del capítulo 3 que es:

$$\hat{N}_t = -0.24\hat{K}_t + 0.70\hat{Z}_t$$

podemos observar que el coeficiente de la perturbación tecnológica es mayor en el caso de trabajo indivisible, esto es, en el caso de que la curva de oferta de trabajo es más elástica y por tanto provoca un aumento cuantitativamente mayor en las horas trabajadas.

De manera análoga, en el caso de trabajo indivisible, el aumento en el salario ante el shock tecnológico es de 0.47, mientras que a partir de:

$$\hat{Y}_t - \hat{N}_t = 0.44\hat{K}_t + 0.75\hat{Z}_t$$

el salario crece en el impacto de la perturbación tecnológica mucho más en presencia de trabajo divisible.

5.4. El margen extensivo en el modelo de Cho y Cooley.

La característica esencial de la aportación de Cho y Cooley (1994) es que los individuos se enfrentan a costes fijos asociados con el hecho de ir a trabajar, y que dependen de la proporción de días que están trabajando, e, que esencialmente es la tasa de empleo del individuo. Dichos costes se asocian al tiempo que dedica una persona a ir a su puesto de trabajo o también pueden interpretarse como los costes que deben pagarse por no poder realizar tareas dentro del hogar.

La utilidad media diaria para un individuo viene dada modelizada por:

$$U(C_t, N_t, e_t) = u(C_t) - v(n_t)e_t - c(e_t)e_t : c' > 0$$

donde $c(e_t)$ son los costes asociados a la oferta de trabajo y n el número de horas por día.

A partir de tres ejemplos vamos a ilustrar las implicaciones que tienen estos supuestos para la oferta de trabajo.

Las preferencias vienen dadas por:

$$U(C_t, N_t, e_t) = \frac{1}{\sigma}C^{\sigma} - a\frac{n^{1+\theta}}{1+\theta} - b\frac{e_t^{\varphi}}{1+\varphi} : 0 < \sigma < 1 : \theta, \varphi > 0$$

La restricción presupuestaria del individuo y la función de producción vienen dadas por:

$$C = Wne : 0 \leq n \leq 1 : 0 \leq e \leq 1 : Y = Z_t N_t^{1-\alpha}$$

Con la formulación anterior podemos hacer tres supuestos acerca de la decisión del individuo. Puede elegir entre cuántos días y cuántas horas trabajar simultánemente o bien sólo cuántos días o bien sólo cuantas horas por día; esto es, podemos ver para unos parámetros determinados cómo es la elasticidad de la oferta de trabajo variando tanto los márgenes intensivo y extensivo, como sólo el extensivo o únicamente el intensivo.

Consideremos en primer lugar que podemos elegir entre cuántos días trabajar y cuántas horas al día hacerlo. Las condiciones de optimización de primer orden vienen dadas por:

$$e = a_1 n^{1+\theta/\varphi} : n = a_2 W^{\frac{\sigma}{a_3}} : a_2 = \left(\frac{a_1^{\sigma-1}}{a}\right)^{\frac{1}{a_3}} : a_3 = \theta + \frac{(\theta+\varphi+1)(1-\sigma)}{\varphi}$$

La tasa de empleo para el individuo.

$$e = a_1 W^{\sigma(1+\theta)/\varphi a_3}$$

La oferta de trabajo agregada es:

$$N^s = en \Rightarrow \epsilon_w^N = \epsilon_w^n + \epsilon_w^e$$

La demanda de trabajo viene dada por:

$$N^d = Z(1-\alpha)W^{-1/\alpha}$$

Igualando oferta y demanda de trabajo, obtenemos la solución al problema estático. Para los siguientes valores de los parámetros, $a = 7.5$, $b = 0.8$, $\sigma = 0.8, \theta = 2, \varphi = 0.8, \alpha = 0.34$, las elasticidades de las horas y del empleo con respecto al salario vienen dadas por:

$$\epsilon_w^n = 1.02 : \epsilon_w^e = 0.27 : \epsilon_w^N = 1.29$$

En segundo lugar, si los costes de ir a trabajar son fijos ($\varphi = 0$), tendríamos el modelo de trabajo indivisible de Hansen.

El resultado del problema de optimización anterior es que el número de horas, n, es fijo y no depende del salario. En este caso, los resultados para las elasticidades son los siguientes:

$$\epsilon_w^n = 0 : \epsilon_w^e = 4 : \epsilon_w^N = 4$$

En tercer lugar, si dichos costes de ir a trabajar son nulos, $b = 0$, (margen intensivo) obtenemos:

$$\epsilon_w^n = 0.36 : \epsilon_w^e = 0 : \epsilon_w^N = 0.36$$

Estos resultados subrayan la importancia de considerar el ajuste en ambos márgenes, ya que modelizar únicamente el margen intensivo subestima la elasticidad de la oferta de trabajo, mientras que simplemente modelizar el margen extensivo sobreestima dicha elasticidad.

Cho y Cooley calibran y simulan un modelo de Ciclo Real estandar dinámico donde la principal dificultad estriba en calibrar los parámetos presentes en la función de utilidad.

El parámetro φ es fijado arbitrariamente y le es asignado un valor de 0.62. A partir de tiempo dedicado a trabajar, $N = 1/3$, la tasa de empleo y el hecho de que el ratio de fluctuaciones en horas de trabajo en relación al empleo sea de 1/3 aproximadamente, determinan los parámetros de tal forma que sean consistentes con las ecuaciones del estado estacionario.

Los resultados que obtienen son que las horas trabajadas, el empleo y la productividad tienen un coeficiente de correlación más alto con la producción en el modelo que la serie americana considerada.

5.5. Modelos de búsqueda y Ciclo Real.

El modelo de búsqueda en el mercado de trabajo, elaborado por Pissarides (1990), ha sido también incorporado dentro de los modelos de Ciclo Real en un intento de mejorar la dinámica de las variables del mercado de trabajo. La introducción de fricciones en el mercado de trabajo parte del supuesto de que tanto la actividad de búsqueda de empleo por parte de los trabajadores como la búsqueda de trabajadores por parte de las empresas es un proceso costoso para ambas partes.

La idea fundamental es que las variaciones en el empleo no se alcanzan instantáneamente sino que transcurre un tiempo entre el momento en el que las empresas anuncian una vacante y ésta es cubierta. El ritmo al que un desempleado encuentra trabajo depende de cuantos individuos puedan estar compitiendo por dicha vacante, y por tanto, los ajustes en el mercado de trabajo varían a lo largo del ciclo. Los modelos de búsqueda no modelizan explícitamente el desempleo, éste es simplemente lo opuesto a estar empleado, sólo detallan la estructura que explica cómo las vacantes y el desempleo varían periodo a periodo.

En el planteamiento del modelo, se supone además que un trabajador ya empleado no busca trabajo.

Varios artículos han introducido este enfoque dentro de un modelo de de ciclo real estandar, entre ellos, Andolfatto (1996) y Merz (1995). Más recientemente las aportaciones de Hall (2005), Shimer (2005) y Ebell (2006) han contribuido a intentar explicar las variaciones cíclicas en las variables relevantes del mercado de trabajo.

5.5.1. El modelo básico y los shocks de productividad.

El concepto analítico clave en los modelos de búsqueda se basa en la función de emparejamiento ("matching"), que determina la forma funcional concreta en la que los individuos que buscan trabajo se combinan con las empresas que ofrecen puestos de trabajo, para producir un nuevo contrato. La interpretación de la función de matching es análoga a una función de producción habitual, el output, medido en número de contrataciones, depende de los inputs, el número de individuos buscando trabajo y del número de empresas buscando trabajadores.

La función de emparejamiento M, tiene como argumentos el número de desempleados uL y el número de vacantes disponibles, VL, donde L es el número de trabajadores en el mercado de trabajo, empleados más desempleados. Por otra parte es creciente para ambos y cóncava.

$$ML = m(uL, VL)$$

La tasa a la que las vacantes son cubiertas es:

$$q(\theta) = \frac{M}{VL} = \frac{m(uL, VL)}{VL} = m\left(\frac{u}{V}, 1\right) = m(\theta)$$

donde $\theta = \frac{V}{u}$ es el número de vacantes por trabajador desempleado y nos da una medida de la tensión en el mercado de trabajo. Durante un intervalo de tiempo dado, la probabilidad de cubrir una vacante es por tanto $q(\theta)\Delta t$.

De igual manera, la tasa a la que un desempleado encuentra trabajo viene dada por:

$$p(\theta) = \frac{m(uL, VL)}{uL} = m\left(1, \frac{V}{u}\right) = \theta m(\theta) = \theta q(\theta)$$

De esta forma, la duración media en el desempleo viene dada por $\frac{1}{\theta q(\theta)}$.

De las definiciones anteriores, obtenemos

$$q'(\theta) \leq 0 : p'(\theta) \geq 0$$

La tasa de separación, ψ, exógena en el modelo, nos da la probabilidad de que un trabajador pierda su puesto de trabajo, por tanto, el número de ellos que pierden su trabajo viene dado por $\psi(1-u)L\Delta t$. El número de desempleados que encuentra trabajo en su proceso de búsqueda viene dado por $\theta q(\theta)uL\Delta t$.

La tasa neta de variación en la tasa de desempleo nos la da la diferencia entre la destrucción y la creación de empleo, determinada por la ecuación diferencial.

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \psi(1-u) - \theta q(\theta)u$$

En equilibrio, la tasa de desempleo viene dada por:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi}{\psi + \theta q(\theta)} \qquad ((5.23))$$

que es la expresión de la conocida curva de Beveridge o curva uV.

Para la empresa tanto la decisión de cubrir una vacante como de tener el puesto ocupado tiene beneficios y costes. Sea $\mathcal{V}$ el valor actual descontado de la decisión de cubrir una vacante y $\mathcal{J}$ el valor actual descontado que tiene para la empresa tener la vacante cubierta.

$$\mathcal{V} = \delta\left[-cZ + (q(\theta)\mathcal{J} + (1-q(\theta))\mathcal{V}\right] : \delta = \frac{1}{1+r}$$

donde cZ es el coste de búsqueda de la empresa, que suponemos es directamente proporcional a la productividad de la vacante buscada.

Por otra parte, el valor actual de tener el puesto ocupado

$$\mathcal{J} = \delta\left[(Z-W) + (1-\psi)\mathcal{J}\right]$$

Dada la libre entrada de cualquier empresa para buscar una vacante, en equilibrio el beneficio de decidir cubrir una vacante es nulo y por tanto se verifica:

$$\mathcal{V} = 0 \Rightarrow \mathcal{J} = \frac{cZ}{q(\theta)}$$

La curva de demanda o condición de creación de trabajo, (curva JC) que relaciona el salario con la tensión en el mercado de trabajo viene dada por:

$$Z - W = \frac{(r+\psi)cZ}{q(\theta)} \tag{(5.24)}$$

El salario no es en este caso igual a la productividad del trabajo, ya que existen costes de búsqueda. Para $c = 0$, tendríamos la condición habitual $Z = W$. Un cambio en la productividad en este modelo provocará que los salarios aumenten, pero menos de lo que lo harían en un mercado competitivo.

De manera análoga, un individuo obtiene un flujo descontado de renta, ya esté desempleado o no. Sea $\mathcal{U}$ el valor descontado de los flujos de renta si está desempleado y $\mathcal{W}$ si no lo está.

$$\mathcal{U} = \delta\left[x + \theta q(\theta)\mathcal{W} + (1-\theta q(\theta))\mathcal{U}\right]$$

donde x representa posibles compensaciones por desempleo.

$$\mathcal{W} = \delta\left[W + \psi\mathcal{U} + (1-\psi)\mathcal{W}\right]$$

El trabajador permanecerá empleado si

$$\mathcal{W}-\mathcal{U}=\frac{W-x}{r+\psi+\theta q(\theta)}\geq 0\Leftrightarrow W\geq x$$

La determinación de salarios asume un valor tal para el salario que maximiza la media geométrica de los beneficios netos para trabajador y empresa del proceso de búsqueda por ambas, esto es.

$$W=\arg\max_{\{W\}}\left(\mathcal{W}-\mathcal{U}\right)^{\beta}\left(\mathcal{J}-\mathcal{V}\right)^{1-\beta}$$

en el que el parámetro β refleja el grado de poder de negociación en ambas partes.

La condición de primer orden es:

$$\mathcal{W}-\mathcal{U}=\beta(\mathcal{J}+\mathcal{W}-\mathcal{V}-\mathcal{U})$$

Sustituyendo sus expresiones obtenidas, obtenemos la curva de salario, que nos relaciona de forma directa, el salario negociado con θ,o línea de creación de trabajo (JCL).

$$W=(1-\beta)x+\beta Z(1+\theta c) \qquad ((5.25))$$

A partir de las curvas de Beveridge, la curva de creación de empleo y la curva de salario obtenemos el equilibrio para u, V y W. El sistema es no lineal pero un simple ejercicio de estática comparativa y para costes de búsqueda pequeños, nos permite comprobar que un aumento en la productividad eleva el salario real, disminuye el desempleo, aumenta θ y el número de vacantes.

El modelo puede ser dinamizado, y observar como la tasa de desempleo responde con retraso a un cambio en la productividad. En este caso, la variable de estado predeterminada es la tasa de desempleo y la variable de control θ.

La ecuación dinámica para la tasa de desempleo ya la hemos obtenido, mientras que para θ, se determina haciendo variar el valor que tiene para la empresa el hecho de cubrir una vacante.

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = (r+\psi)\mathcal{J} - (Z-W) : du = \psi(1-u) - \theta q(\theta)u$$

Diferenciando esta expresión obtenemos un sistema no lineal en θ que se aproxima a través de un desarrollo de Taylor de primer orden (apéndice 5.1). El sistema diferencial lineal viene dado por:

$$\begin{pmatrix} du \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi - \theta q(\theta) & -[\theta q(\theta)]^{-1} \\ 0 & g(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - u^* \\ \theta - \theta^* \end{pmatrix}$$

Dado que el producto de las dos raíces es negativo, la estabilidad es de punto de silla. En el momento de la perturbación, la tasa de desempleo no cambia, mientras que θ sobrerreacciona para ir poco ajustándose a su nuevo nivel de equilibrio.

El shock de productividad es capaz de explicar cualitativamente el hecho de que tanto el número de vacantes como la propia productividad sean indicadores adelantados con respecto a la tasa de desempleo.

En los gráficos 5.2. y 5.3. podemos comprobar el efecto de la perturbación tecnológica. A partir de la curva de Beveridge, ecuación (5.23), la ecuación (5.24) o curva de demanda o de creación de empleo (JC), la ecuación (5.25), línea de creación de trabajo (JCL) más la definición de tensión en el mercado de trabajo $\theta = \frac{V}{u}$ podemos ver que una perturbación tecnológica desplaza hacia la derecha la demanda de trabajo y hacia arriba la línea de salarios.

En el gráfico 5.3. observamos como el número de vacantes sobrerreacciona hasta el punto p y con el tiempo va descendiendo hasta el nuevo equilibrio en E_1

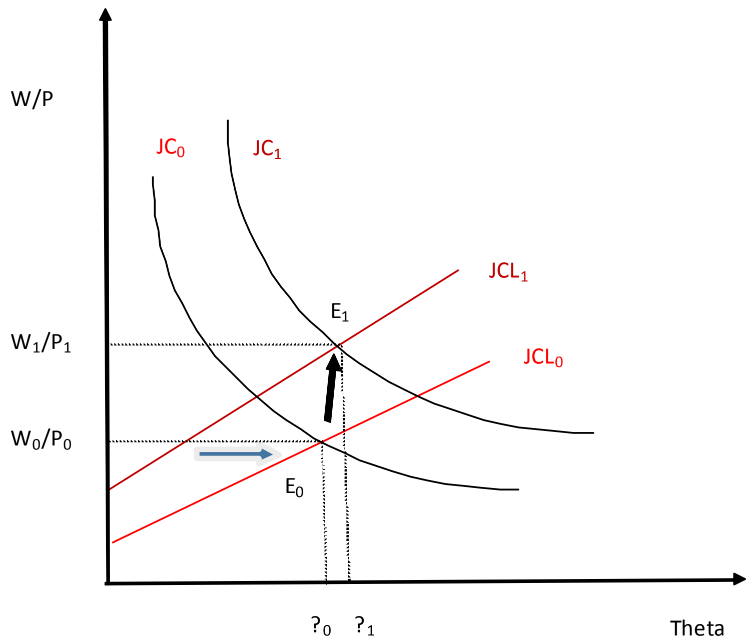

Gráfico 5.2.

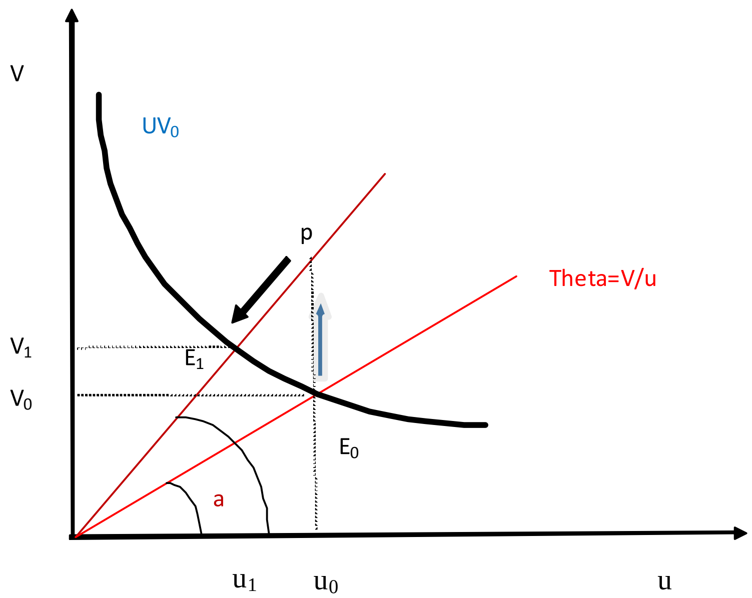

Gráfico 5.3.

5.2.2. El modelo de Merz (1995).

El artículo de Merz es pionero en introducir el marco del modelo de búsqueda en el mercado de trabajo en un modelo básico de Ciclo Económico real. El objetivo es demostrar que la existencia de fricciones en el mercado de trabajo como consecuencia de la búsqueda tanto de empresas como de desempleados puede contribuir a explicar de manera más satisfactoria algunos hechos relacionados con el mercado de trabajo.

Entre éstos, se demuestra que el comportamiento de los salarios reales es menos volátil que la productividad del trabajo lo que implica que la participación de las rentas del trabajo en la renta nacional tiene un comportamiento contracíclico. Además, ya que la formalización de nuevos contratos no es instantánea, la productividad del trabajo es un indicador adelantado del empleo a lo largo del ciclo económico.

Los ingredientes del modelo son los siguientes:

Las economías domésticas maximizan la siguiente función de utilidad.

$$Max\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t - \frac{N^{1-\theta}}{1-\theta} \right)$$

donde θ es la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real, manteniendo constante la utilidad marginal de la renta, la elasticidad Frisch.

La restricción de recursos viene dada por:

$$Y_t = C_t + I_t + c(S_t)(1 - N_t) + aV_t$$

donde $c(S_t)$ representa el coste de búsqueda por desempleado, variable que depende de la intensidad de dicha búsqueda, S_t; de igual manera, aV_t es el coste total en el que incurren las empresas en el proceso de cubrir una vacante.

La función de coste de búsqueda es creciente y convexa, esto es, se asume que la intensidad de búsqueda de trabajo aumenta los costes más que proporcionalmente.

$$c(S_t) = c_0 S_t^{\eta} : c_0 > 0 : \eta \geq 1$$

La función de producción es la usual Cobb-Douglas.

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

La ley dinámica del capital:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

El nivel de empleo sigue la siguiente ley de movimiento dinámica.

$$N_{t+1} = (1-\psi)N_t + M_t : 0 \leq \psi \leq 1$$

donde ψ es la tasa de separación que se considera exógena al modelo; el número de empleos es igual al anterior menos los despidos más el número de vacantes que han sido cubiertas en el proceso de búsqueda, M_t.

La función de emparejamiento viene dada por una función del tipo Cobb-Douglas, con rendimientos constantes, que depende de la intensidad de la búsqueda, del nivel de desempleo y de las vacantes demandadas por las empresas, donde λ mide la elasticidad de las contrataciones con respecto al número de desempleados y a la intensidad de la búsqueda.El parámetro de la función, λ, nos mide la elasticidad de las contrataciones con respecto al número de desempleados.

$$M_t = V_t^{1-\lambda}(S_t(1-N_t))^{\lambda} : 0 \leq \lambda \leq 1$$

Como hemos visto, la introducción de la función de "matching", endogeneiza tanto las probabilidades de transición desde estar desempleado a estar empleado, p_t, como la de buscar una vacante y cubrirla, q_t.

Dichas probabilidades vienen dadas por:

$$p_t = \frac{M_t}{S_t(1-N_t)} = \left(S_t^{-1}\theta_t\right)^{1-\lambda}$$

$$q_t = \frac{M_t}{V_t} = \left(S_t\theta_t^{-1}\right)^{\lambda}$$

donde $\theta_t = \frac{V_t}{1-N_t}$. Por tanto dichas probabilidades de matching dependen tanto de la intensidad de búsqueda como de la tensión en el mercado de trabajo y verifican:

$$\frac{\partial p_t}{\partial S_t} < 0 : \frac{\partial q_t}{\partial S_t} > 0 : \frac{\partial p_t}{\partial \theta_t} > 0 : \frac{\partial q_t}{\partial \theta_t} < 0$$

El problema por tanto para el planificador social consiste en elegir planes contingentes para $\{C_t, K_{t+1}, N_{t+1}, S_t, V_t\}_{t\geq 0}$ en el momento $t = 0$ en orden a maximizar la función objetivo, sujeto a las restricciones y funciones anteriores. Las variables de estado son N_0 y K_0 y la variable exógena, el shock de productividad que sigue la siguiente ley dinámica:

$$\ln Z_t = (1-\rho)\ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Solución del modelo.

Planteando la ecuación de Bellman.

$$V(K_t, N_t, Z_t) = \max\left[u(C_t, N_t) + \beta E_t V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})\right]$$

sujeto a:

$$K_{t+1} + C_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t - c(S_t)(1-N_t) - aV_t$$

$$N_{t+1} = (1-\psi)N_t + V_t^{1-\lambda}(S_t(1-N_t))^{\lambda}$$

$$\ln Z_t = (1-\rho)\ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas para las variables de decisión, $C_t, V_t\ S_t$:

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} + \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t} = 0 \qquad ((5.26))$$

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} \frac{\partial C_t}{\partial V_t} + \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial V_t} = 0 \qquad ((5.27))$$

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial S_t} = 0 \qquad ((5.28))$$

Junto a las condiciones de envolvente.

$$\frac{\partial V}{\partial K_t} = \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t} \qquad ((5.29))$$

$$\frac{\partial V(K_t, N_t, Z_t)}{\partial N_t} = \frac{\partial u}{\partial C_t} \frac{\partial C_t}{\partial N_t} + \frac{\partial u}{\partial N_t} + \qquad ((5.30))$$

$$\beta E_t \left[\frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial N_t} + \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial N_t} \right]$$

El sistema se reduce a tres ecuaciones tras eliminar $\beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial K_{t+1}}$ y $\frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}}$.

A partir de la condición de óptimo para el consumo, (5.26) y adelantando la envolvente para el stock de capital, (5.29) tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial K_{t+1}}$$

$$E_t \frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} = \beta E_t \frac{\partial V(K_{t+2}, N_{t+2}, Z_{t+2})}{\partial K_{t+2}} \frac{\partial K_{t+2}}{\partial K_{t+1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = \beta E_t \left[\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}} \frac{\partial K_{t+2}}{\partial K_{t+1}} \right]$$

Sustituyendo la utilidad marginal del consumo, ecuación (5.26) en la condición de envolvente para N_t, (5.30) y adelantándola un periodo.

$$E_t \frac{\partial V(K_{t+1}, N_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}} = E_t \frac{\partial u}{\partial C_{t+1}} \frac{\partial C_{t+1}}{\partial N_{t+1}} + \frac{\partial u}{\partial N_{t+1}} + \qquad ((5.31))$$

$$+\beta E_t\left[\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial K_{t+2}}{\partial N_{t+1}}+\frac{\partial V(K_{t+2},N_{t+2},Z_{t+2})}{\partial N_{t+2}}\frac{\partial N_{t+2}}{\partial N_{t+1}}\right]$$

Las condiciones de primer orden (5.27) y (5.28) vienen dadas por:

$$-\frac{\partial u}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial V_t}\left(\frac{\partial N_{t+1}}{\partial V_t}\right)^{-1}=\beta E_t\frac{\partial V(K_{t+1},N_{t+1},Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial S_t}\left(\frac{\partial N_{t+1}}{\partial S_t}\right)^{-1}=\beta E_t\frac{\partial V(K_{t+1},N_{t+1},Z_{t+1})}{\partial N_{t+1}}$$

Sustituyendo las condiciones de primer orden (5.27) y (5.28) en (5.31), obtenemos para V_t:

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial V_t}\left(\frac{\partial N_{t+1}}{\partial V_t}\right)^{-1}=E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial N_{t+1}}+\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}}+E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial K_{t+2}}{\partial N_{t+1}}+$$
$$-E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial V_{t+1}}\left(\frac{\partial N_{t+2}}{\partial V_{t+1}}\right)^{-1}\frac{\partial N_{t+2}}{\partial N_{t+1}} \tag{(5.32)}$$

y de manera análoga para S_t:

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial S_t}\left(\frac{\partial N_{t+1}}{\partial S_t}\right)^{-1}=E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial N_{t+1}}+\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}}+E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial K_{t+2}}{\partial N_{t+1}}-$$
$$E_t\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}\left(\frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_{t+1}}\right)\left(\frac{\partial N_{t+2}}{\partial S_{t+1}}\right)^{-1}\frac{\partial N_{t+2}}{\partial N_{t+1}} \tag{(5.33)}$$

Aplicando las formas funcionales propuestas a las condiciones de primer orden.

La condición (5.26) viene dada por:

$$\frac{1}{C_t}=\beta E_t\left[\frac{1}{C_{t+1}}\left[Z_{t+1}\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha}+(1-\delta)\right]\right]$$

La condición (5.32):

$$a\frac{1}{(1-\lambda)C_t}V_t^{\lambda}(S_t(1-N_t))^{-\lambda}=\beta E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}}\left((1-\alpha)Z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}N_{t+1}^{-\alpha}\right)+c_0S_{t+1}^{\eta}))-N_{t+1}^{-\theta}\right)+$$

$$+\beta E_t\left(\frac{a}{(1-\lambda)C_{t+1}}V_{t+1}^{\lambda}(S_{t+1}(1-N_{t+1}))^{-\lambda}\left[1-\psi-\lambda V_{t+1}^{1-\lambda}S_{t+1}^{\lambda}(1-N_{t+1})^{\lambda-1}\right]\right)$$

La condición (5.33):

$$\frac{1}{\lambda C_t}\eta c_0 S_t^{\eta-1}V_t^{\lambda-1}(1-N_t)^{1-\lambda}S_t^{1-\lambda}=\beta E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}}\left((1-\alpha)Z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}N_{t+1}^{-\alpha}\right)+c_0S_{t+1}^{\eta})-N_{t+1}^{-\theta}\right)+$$

$$+\beta E_t\left(\frac{1}{\lambda C_{t+1}}\eta c_0 S_{t+1}^{\eta-1}V_{t+1}^{\lambda-1}(1-N_{t+1})^{1-\lambda}S_{t+1}^{1-\lambda}\left[1-\psi-\lambda V_{t+1}^{1-\lambda}S_{t+1}^{\lambda}(1-N_{t+1})^{\lambda-1}\right]\right)$$

donde:

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t}=(1-N_t)\frac{\partial c}{\partial S_t}:\frac{\partial C_t}{\partial N_t}=c(S_t)$$

$$\frac{\partial N_{t+1}}{\partial V_t}=\frac{\partial M_t}{\partial V_t}=(1-\lambda)V_t^{-\lambda}(S_t(1-N_t))^{\lambda}$$

$$\frac{\partial N_{t+1}}{\partial N_t}=(1-\psi)+\frac{\partial M_t}{\partial N_t}=(1-\psi)-\lambda V_t^{1-\lambda}S_t^{\lambda}(1-N_t)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial c_t}{\partial S_t}=\eta c_0 S_t^{\eta-1}:\frac{\partial N_{t+1}}{\partial S_t}=\frac{\partial M_t}{\partial S_t}=\lambda V_t^{1-\lambda}(1-N_t)^{\lambda}S_t^{\lambda-1}$$

Las ecuaciones (5.26), (5.32) y (5.33) junto a las dos restricciones nos permiten caracterizar la solución para las variables endógenas del problema $C_t, K_{t+1}, N_{t+1}, S_t, V_t$.

$$K_{t+1}+C_t=Z_tK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}+(1-\delta)K_t-c(S_t)(1-N_t)-aV_t$$

$$N_{t+1}=(1-\psi)N_t+V_t^{1-\lambda}(S_t(1-N_t))^{\lambda}$$

El sistema es log-linealizado (apéndice 5.2) y calibrado. Los resultados que obtiene Merz vienen resumidos por:

a) Los salarios reales fluctúan mucho menos comparado con la producción que lo que fluctúa la productividad media del factor trabajo con respecto a la producción.

b) El modelo es capaz de replicar el hecho empírico de que la productividad media del trabajo adelante al empleo en dos o tres trimestres. Este resultado es consecuencia de la propia estructura de los modelos de búsqueda, esto es un shock de productividad, aumenta la productividad del trabajo y aumenta el número de contrataciones aunque entre la contratación efectiva y la oferta de vacantes existe un lapso temporal explícito en el modelo.

c) El modelo es capaz de replicar la fuerte relación inversa entre entre la participación de los salarios en la renta y el PIB. Este resultado es consecuencia de que con unos salarios reales que fluctúan menos que la productividad media del factor trabajo, el shock de productividad positivo provoca una mayor aumento en el denominador que en el numerador.

$$s_n = \frac{WN}{Y} = \frac{W}{Y/N}$$

$$\frac{ds_n}{s_n} = \frac{dW}{W} - \frac{d(Y/N)}{Y/N}$$

d) El desempleo y las vacantes son las variables que más fluctúan y exhiben una fuerte correlación negativa, en total concordancia con la curva de Beveridge. El grado relativo de volatilidad depende de la intensidad de búsqueda. Cuando ésta es variable, un shock tecnológico da lugar a dos efectos contrapuestos sobre la tasa de desempleo. Por una parte aumenta el número de vacantes solicitadas por las empresas lo que disminuye la tensión en el mercado de trabajo, θ_t, pero también conduce a un aumento en la intensidad de búsqueda.

e) El empleo y el desempleo exhiben un grado mayor de persistencia que se traduce en mayor persistencia en la producción.

5.6. Salarios de Eficiencia y Ciclo Real.

Danthine y Donaldson (1990) introducen salarios de eficiencia en un modelo de Ciclo Real con el objetivo de intentar superar la incapacidad del modelo walrasiano para resolver el problema de la la variabilidad entre productividad o salarios y empleo a lo largo del ciclo económico.

Lo que distingue al enfoque de los salarios de eficiencia es la conexión entre el salario y el nivel de esfuerzo o eficiencia del factor trabajo. Esto implica que la empresa fija los salarios al nivel deseado por ella con el fin de que el esfuerzo del trabajador sea el deseado.

En concreto podemos señalar cuatro motivos para explicar porqué una empresa puede desear pagar salarios por encima de la productividad marginal. El artículo de Yellen (1994) resume de forma excelente este enfoque y aquí exponemos cuatro razones por las que el salario pagado está relacionado con el nivel de esfuerzo.

a) las empresas desean reducir el incentivo que tiene el trabajador a eludir el esfuerzo (shirking) en el trabajo haciendo que el coste de oportunidad de perder el mismo sea alto. Es una medida eficaz cuando la supervisión o el esfuerzo en el puesto de trabajo es dificilmente observable o su medición es costosa, lo cual supone la existencia de información imperfecta acerca del cumplimiento en el puesto de trabajo (Shapiro y Stiglitz (1984)).

b) reduce la probabilidad de frecuentes rotaciones en la plantilla y por tanto ahorra costes a la empresa, (Salop 1979).

c) mejora la calidad del trabajo, lo cual supone a priori que la empresa tiene información imperfecta sobre las habilidades del trabajador (Stiglitz, 1976).

d) influye positivamente en la moral del trabajador, lo que se refleja en el esfuerzo que aplica en el puesto de trabajo (Akerlof (1982)). Este enfoque, denominado modelo de "intercambio de regalos" (gift exchange), implica que si la empresa paga un salario superior a un salario de referencia (habitualmente el salario de reserva del trabajador), el trabajador en correspondencia desarrollará su labor con mayor eficacia. La idea es que el grado de cumplimiento del trabajador depende de lo justamente que se considere tratado en la empresa.

La idea de Akerlof se formaliza suponiendo que existe una función de esfuerzo que depende positivamente de la diferencia entre el salario pagado y un salario de referencia exógeno a la empresa y que marcaría el límite salarial inferior que el trabajador considera justo.

El modelo que proponen Danthine y Donaldson presenta las siguientes características:

La economía está formada por J firmas idénticas donde la función de producción viene dada por:

$$Y_t = Z_t F(K_t, e_t N_t)$$

donde e_t es la eficiencia o calidad del factor trabajo.

Danthine y Donaldson proponen la siguiente función de esfuerzo:

$$e\left(\frac{W_t}{\bar{W}}\right) = \bar{e} + \alpha \ln\left(\frac{W_t}{\bar{W}}\right) \qquad ((5.34))$$

donde $\bar{W}$ es el salario de referencia, definiendo éste como una media geométrica entre el salario percibido (W) y cualquier prestación alternativa a éste que el trabajador pudiese conseguir si no estuviese en dicho puesto de trabajo, (b).

$$\bar{W} = W^{1-u} b^u \qquad ((5.35))$$

La ponderación la marca la tasa de desempleo, u.

Los consumidores maximizan una función de utilidad aditiva y separable en consumo y esfuerzo y donde se asume que los individuos trabajan un número fijo de horas.

$$u(C_t, e_t, W_t, \bar{W}) = \ln C_t - (e_t - g(W_t, \bar{W}))^2$$

El modelo por otra parte es el habitual, con la salvedad que las empresas maximizan su beneficio teniendo en cuenta que el nivel de esfuerzo es una variable de elección. Las condiciones de primer orden de maximización nos dan la conocida condición de que la elasticidad del esfuerzo con respecto al salario es igual a uno (Solow, 1979).

$$\epsilon_W^e = \frac{\partial \ln e}{\partial \ln W} = 1$$

Dada la función de esfuerzo, dicha condición requiere que la empresa elija el nivel salarial de tal forma que $e^* = \alpha$, o lo que es lo mismo las empresas fijan el salario de tal manera que el nivel de esfuerzo sea constante.

A partir de (5.34)

$$de = \alpha d \ln \left(\frac{W_t}{\bar{W}} \right) e \Rightarrow \frac{\partial \ln e}{\partial \ln W} = 1 \Leftrightarrow e^* = \alpha$$

Con este resultado, la diferencia entre el salario pagado y el salario de referencia es constante dado este resultado y (5.34).

$$\ln \left(\frac{W_t}{\bar{W}} \right) = \frac{e^* - \bar{e}}{e^*} \Rightarrow \ln W_t = \ln \bar{W} + \frac{\alpha - \bar{e}}{\alpha}$$

A partir de (5.35)

$$u(\ln W - \ln b) = \alpha \Rightarrow \ln W = \frac{\alpha}{u} + \ln b$$

$$N = 1 - u = 1 - \frac{\alpha}{\ln W - \ln b}$$

$$\frac{\partial \ln N}{\partial \ln W} = \frac{1}{N} \frac{\alpha}{(\ln W - \ln b)^2} = \frac{u^2}{\alpha N}$$

Esta expresión nos indica que para niveles razonables en la tasa de desempleo, la variabilidad del empleo será demasiado pequeña en relación a la variabilidad del salario.

La calibración del modelo dinámico genera unos resultados en los que la volatilidad de las horas trabajadas es muy baja en relación a la de la productividad o los salarios. De hecho, todo el ajuste se realiza a través de los salarios y no a través de la cantidad de horas trabajadas.

Collard y De la Croix (2000) extienden el análisis anterior al incluir los salarios pasados como variable explicativa del salario de referencia. Aplicando la terminología de Becker (1996), el salario de referencia podría venir explicado por dos tipos de "normas": la personal, que incluye los salarios pasados percibidos por el individuo y la "norma social", que incorpora los salarios pasados percibidos por otros trabajadores con similares características.

Veamos el planteamiento de estos autores en el caso de la norma social.

Las economías domésticas maximizan la siguiente función de utilidad:

$$\underset{\{C_t,e_t\}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t - x_j \left[e_t - b - \gamma \ln\left(\frac{W_t}{W^r}\right) - \psi \ln\left(\frac{W_t}{W^s}\right) \right]^2 \right) : b, \gamma, \psi > 0$$

donde W^r es el salario de referencia, W^s es el salario dado por la norma social que supondremos igual a W_{t-1}, x_j es una variable que toma el valor 0 ó 1, dependiendo si el trabajador está desempleado o no. La cantidad de trabajo no entra en la función de utilidad, lo que implica que está ausente el mecanismo de propagación basado en la elasticidad intertemporal de sustitución sino que la economía doméstica representativa ofrece inelásticamente una unidad de tiempo y sólo una fracción de éste será empleada por las empresas, de tal manera que el desempleo viene expresado en términos de horas. Finalmente, la variable e_t es el nivel de esfuerzo.

La restricción presupuestaria viene dada por:

$$C_t + K_{t+1} = W_t N_t + (1 + r_t - \delta) K_t + W_t(1 - u_t)$$

donde $W_t(1-u_t)$ es el salario neto del pago de un seguro por desempleo[50].

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

$$e_t = b + \gamma \ln\left(\frac{W_t}{W^r}\right) + \psi \ln\left(\frac{W_t}{W^s}\right) \tag{(5.36)}$$

[50] Al igual que en el epígrafe 2, para evitar la heterogeneidad ex-post, se asume que los indviduos contratan un seguro de desempleo con el fin de mantener un determinado nivel constante de consumo independientemente de si están o no desempleados.

$$\lambda_t = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} (\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + 1 - \delta) \right]$$

La condición de primer orden (5.36) se interpreta en el siguiente sentido: el nivel de esfuerzo que suministran las economías domésticas depende del ratio entre el salario percibido con respecto a su salario de referencia y del salario percibido en relación al salario pasado.

En el caso de considerar la norma "social", el salario de referencia es totalmente exógeno a la empresa, mientras que si considerásemos la norma personal, el salario pagado hoy afecta al nivel de esfuerzo de los trabajadores en el futuro, con lo que la política salarial de la empresa es totalmente distinta.

En el caso más sencillo de norma social, la empresa maximiza su beneficio

$$\underset{\{W_t, N_t, K_t\}}{Max} Z_t \left(e_t N_t \right)^{1-\alpha} K_t^{\alpha} - W_t N_t$$

sujeto a (5.36).

$$e_t = b - \gamma \ln \left(\frac{W_t}{W^r} \right) - \psi \ln \left(\frac{W_t}{W_{t-1}} \right)$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$(1-\alpha) \frac{Y_t}{N_t} = W_t \qquad ((5.37))$$

$$(1-\alpha) \frac{Y_t}{e_t} \left(\frac{\gamma + \psi}{W_t} \right) = N_t \qquad ((5.38))$$

$$r_t = \alpha \frac{Y_t}{N_t}$$

Combinando (5.37) y (5.38), obtenemos la conocida condición de Solow (1979).

$$e_t = \gamma + \psi$$

Al igual que en Danthine y Donaldson (1990) el nivel de esfuerzo es constante. Finalmente, el salario de referencia es una media aritmética entre el salario percibido y las posibles compensaciones por desempleo, que son cero en el modelo.

$$W_t^r = W_t N_t$$

Uniendo las condiciones para las economías domésticas y las empresas, el sistema queda finalmente:

$$e = \gamma + \psi = b - \gamma \ln N_t + \psi \left(\ln W_t - \ln W_{t-1} \right) \qquad ((5.39))$$

$$(1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t} = W_t$$

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} (\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + 1 - \delta) \right]$$

$$Y_t = Z_t \left(e N_t \right)^{1-\alpha} K_t^{\alpha}$$

$$Y_t = C_t + K_{t+1} + (1-\delta) K_t$$

El valor calibrado para b se obtiene a partir de la tasa de desempleo de estado estacionario, mientras que para ψ se realiza un análisis de sensibilidad debido a que no tiene contrapartida empírica. Dicho análisis se realiza generando series para las variables del modelo bajo distintos valores de ψ y comparando los momentos (desviación típica y coeficientes de correlación) teóricos con los observados en las series reales. Se estima que ψ puede variar entre 0 y 5 (a partir de este valor el modelo no presenta estabilidad de punto de silla).

Un shock de productividad positivo tiende a elevar los salarios en orden a compensar la potencial caída en el esfuerzo ligada a la reducción en el desempleo, ya que el nivel óptimo de esfuerzo es constante.

Si sustituimos la ecuación de demanda de trabajo, ecuación (5.37) en (5.39), función de esfuerzo, obtenemos:

$$\ln \left(\frac{Y_t}{N_t} \right) = 1 - \frac{b}{\gamma + \psi} + \frac{\gamma}{\gamma + \psi} \ln Y_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma + \psi} \right) \ln \left(\frac{Y_{t-1}}{N_{t-1}} \right)$$

o bien

$$\ln N_t = \frac{b}{\gamma + \psi} - 1 + \frac{\gamma}{\gamma + \psi} (\ln Y_t - \ln Y_{t-1} + \ln N_{t-1})$$

Estas expresiones nos permiten observar que conforme aumenta ψ la volatilidad de las horas aumenta mientras que la volatilidad de los salarios disminuye.

$$Var(\ln W_t) = Var\left[\ln\left(\frac{Y_t}{N_t}\right)\right] = \frac{1}{1-\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\psi}\right)^2} Var\left[\ln Y_t\right] +$$

$$+2\frac{\gamma}{\gamma+\psi}\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+\psi}\right) Cov\left(\ln\left(\frac{Y_t}{N_t}\right), \ln Y_t\right)$$

Para $\psi = 0$ la volatilidad de la productividad o el salario es igual a la volatilidad de la producción, y conforme ψ aumenta, la volatilidad de los salarios disminuye pero la volatilidad de las horas aumenta.

Conforme dicho parámetro aumenta, el peso de los salarios pasados aumenta, con lo que la determinación de las horas de trabajo no depende únicamente del salario corriente, sino también de los salarios pasados; la consecuencia es que la correlación entre horas y producción disminuye.

Así mismo la correlación entre horas de trabajo y producción es una función creciente de ψ, y por contra la volatilidad entre salarios y producción disminuye conforme ψ aumenta.

La elasticidad del crecimiento de los salarios a la tasa de desempleo puede obtenerse a partir de la misma ecuación (5.39):

$$e = \gamma + \psi = b - \gamma \ln N_t + \psi\left(\ln W_t - \ln W_{t-1}\right)$$

$$\frac{\Delta \ln\left(\frac{W_t}{W_{t-1}}\right)}{\Delta \ln(1-u_t)} = \frac{\gamma}{\psi} \Rightarrow \frac{\Delta \ln\left(\frac{W_t}{W_{t-1}}\right)}{\Delta \ln u_t} = -\frac{\gamma}{\psi}\frac{u_t}{1-u_t} < 0$$

A partir de esta expresión dados los valores de calibración para γ y u y conforme a estimaciones de la elasticidad de la variación en los salarios y el empleo[51], ψ debe ser mayor que 1. La explicación es que conforme el peso de los salarios pasados aumenta, la determinación de las horas trabajadas no depende sólo del salario corriente, de tal manera que la introducción de esta "norma social" actuaría como un mecanismo que suaviza las subidas de los salarios ante los shocks de productividad.

[51] Los autores citan a Blanchflower y Oswald (1994).

Collard y De la Croix comparan los resultados de su modelo con el modelo con trabajo indivisible de Hansen, eligiendo para el parámetro $\psi = 2.8$ que reproduce exactamente la correlación entre horas y producción.

La siguiente tabla reproduce las volatilidades relativas de salarios y empleo con respecto a la producción en ambos modelos y en relación a la economía americana.

Tabla 5.1			
	$EEUU$	$Hansen$	$Col - D.Croix$
N	0.92	0.77	0.74
W	0.44	0.28	0.52

El modelo de salarios de eficiencia predice mejor la volatilidad relativa de los salarios y para las horas trabajadas genera un valor similar al modelo de Hansen.

Finalmente, para la correlación entre horas trabajadas y salarios, el modelo predice mejor que el de Hansen y el de Christiano y Eichenbaum (1992).

Tabla 5.2				
	$EEUU$	$Hansen$	$C - Eich$	$Col - D.Croix$
$\rho(W, N)$	0.19	0.74	0.57	0.23

5.7. Costes de ajuste en el trabajo, salarios nominales rígidos y cash in advance.

Los costes de ajuste cuadráticos fueron introducidos por Sargent (1978) en un modelo de ajuste parcial y han sido incorporados a modelos de ciclo real por Kydland y Prescott (1991), Mendoza (1991) y Fairise y Langot (1994).

La idea implícita en tal concepto se basa en las dificultades que pueden tener las empresas para ajustar rápidamente el nivel de empleo a cambios en la demanda ya que se enfrentan tanto a costes de despido como a costes de contratación, y juegan un papel importante en las decisiones de las empresas acerca de sus niveles óptimos de demanda de trabajo según han constatado economistas laborales. La formulación habitual en Macroeconomía es introducir costes de ajuste cuadráticos que dependen de un solo parámetro.

Consideremos el siguiente ejemplo tomado de Sargent (1978) en el que una empresa maximiza su beneficio y donde el único factor variable es el trabajo.

$$Max\ V\ \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t}(z_tN_t-\frac{b}{2}N_t^2-W_tN_t-\frac{\eta}{2}(N_t-N_{t-1})^2):\eta>0$$

donde la función de producción viene dada por $Y_t = aN_t - \frac{b}{2}N_t^2$ y los costes de ajuste por la función $\frac{\eta}{2}(N_t - N_{t-1})^2$.

El problema de la elección del nivel de empleo para la empresa se resuelve a partir de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial V}{\partial N_t} = a - bN_t - W_t - \eta(N_t - N_{t-1}) + \frac{\eta}{1+r}(E_tN_{t+1} - N_t) = 0$$

$$E_tN_{t+1} - (2 + r + \frac{b(1+r)}{\eta})n_t + (1+r)n_{t-1} = \frac{1+r}{\eta}(W_t - z_t)$$

La ecuación en expectativas tiene una raíz estable y otra inestable y por tanto presenta estabilidad de punto de silla.

Factorizando la misma, obtenemos:

$$(F-\lambda_1)(F-\lambda_2)N_{t-1} = -\frac{1+r}{\lambda_2\eta}(W_t - z_t)$$

$$N_t = \lambda_1 N_{t-1} + \frac{1+r}{\lambda_2\eta}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t(z_{t+i} - W_{t+i})$$

Una perturbación que eleve el salario real disminuirá la demanda de trabajo, y un shock de productividad, elevará la demanda de trabajo.

Sin embargo, tanto el ajuste dinámico de la misma como el efecto a corto plazo dependen del parámetro η. Si los costes de ajuste son altos, la demanda de trabajo se ajusta más suavemente que si éstos son bajos. La introducción de costes de ajuste por tanto implica que ante perturbaciones positivas de oferta, la demanda de trabajo se desplaza en una cuantía mucho menor a corto plazo que en ausencia de tales costes[52].

Cho y Cooley (1995) y Cooley y Hansen (1998) incorporan rigidez de salarios nominales à la Taylor en un modelo de Ciclo Real y aunque la modelización con rigideces nominales mejora el mecanismo de transmisión monetaria, también produce altas volatilidades en las variables reales además de generar un resultado anómalo, una productividad contracíclica.[53]

La subida del nivel de precios ante un aumento en la oferta monetaria, provoca que con salarios rígidos la demanda de trabajo aumente, dando lugar a un aumento en la producción, el nivel de empleo y una caída en los salarios reales. Con una función de producción con rendimientos decrecientes la productividad del trabajo disminuye.

La introducción de costes de ajuste en las horas trabajadas permite reducir la volatilidad de las horas en relación a un modelo sin costes de ajuste y además limita el mecanismo de transmisión monetaria, dando lugar a que las volatilidades en las variables macroeconómicas no sea excesiva.

Sin embargo, el supuesto de cash in advance junto a la rigidez nominal no mejora las correlaciones de la tasa de crecimiento monetario con el resto

[52] Una derivación alternativa puede encontrarse en Wickens (2008).

[53] El modelo New-Keynesian también genera altas volatilidades en las variables reales, como documentan Yun (1996), Ireland (2003) o Kim (2003).

de las variables, aunque la introducción de costes de ajuste mejora en alguna medida esta deficiencia.

El mecanismo de fijación de salarios consiste en que las empresas y economías domésticas firman contratos de tal forma que el valor esperado de la productividad marginal del trabajo es igual al valor esperado de la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio.

Veamos una versión del modelo que presenta Janko (2008) y los resultados a los que llega.

Las empresas producen con una función de producción estandar dónde los costes de ajuste disminuyen el output total.

$$Y_t = \exp\left(Z_t\right) K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - \eta \left(\frac{N_t}{N_{t-1}} - 1\right)^2 N_t : \eta \geq 0$$

Las características de la función de costes de ajuste es que la utilización del factor trabajo en un periodo afecta a los costes de ajuste del periodo siguiente, esto es, las empresas al determinar hoy la demanda de trabajo tienen en cuenta el impacto que tendrá esta decisión sobre los costes de ajuste futuros.

El problema por tanto para la empresa es maximizar su beneficio pero no en un contexto estático, sino dinámico.

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon^t (P_t Y_t - W_t^c N_t - r_t K_t)$$

donde W_t^c es el salario negociado para el periodo t, exógeno a la empresa y υ^t el factor de descuento.

Las condiciones de óptimo de primer orden para la empresa vienen dadas por:

$$\frac{W_t^c}{P_t} = (1-\alpha) \exp\left(Z_t\right) K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} - \eta \left(\frac{N_t}{N_{t-1}} - 1\right)^2 N_t +$$

$$-2\eta \left(\frac{N_t}{N_{t-1}} - 1\right) \frac{N_t}{N_{t-1}} + E_t 2\upsilon\eta \left(\frac{N_t}{N_{t-1}} - 1\right) \frac{N_{t+1}^2}{N_t}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha \exp\left(Z_t\right) K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

En segundo lugar, las economías domésticas maximizan la siguiente función de utilidad:

$$Max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t^i - \theta N_t^i \right)$$

y se enfrentan a dos restricciones, una restricción "cash-in advance" junto a su restricción presupuestaria.

$$P_t C_t^i = m_{t-1}^i + T_t$$

$$C_t^i + K_{t+1}^i - (1-\delta) K_t^i + \frac{m_t}{P_t} = \frac{W_t^c}{P_t} N_t^i + r_t K_t^i + \frac{m_{t-1}}{P_t} + \frac{T_t}{P_t}$$

En tercer lugar, el gobierno inyecta dinero a las economías domésticas a través de transferencias, T_t y sujeto a su restricción presupuestaria.

$$-\frac{T_t}{P_t} = \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$$

donde

$$\mu_t = \ln M_t - \ln M_{t-1}$$

La tasa de crecimiento montario sigue el siguiente proceso estocástico:

$$\mu_t = (1-\rho_m)\mu + \rho_m \mu_{t-1} + \varepsilon_t^m : 0 \leq \rho_m \leq 1$$

La determinación de los salarios es la siguiente. Al comienzo de cada periodo, economías domésticas y empresas negocian un salario nominal que se hará efectivo en el momento del tiempo para el cual se haya acordado. Dado este salario acordado, el equilibrio para las economías domésticas implica que el producto marginal del trabajo esperado es igual a la relación de sustitución esperada entre ocio y consumo. La empresa, dado este salario y una vez que observa los shocks, elige la cantidad de horas de trabajo cada periodo.

Por ejemplo, supongamos que en $t-2$ se negocian los salarios que se pagarán en el momento t; en el periodo siguiente, $t+1$, se negocia el salario para $t+3$ y se paga el salario acordado en $t-1$ y así sucesivamente.

Si en general los salarios se negocian en $t-j$ y se hacen efectivos j periodos más tarde, la condición de primer orden está condicionada al conjunto de información disponible en el momento en el que se negocian los salarios.

La ecuación log-linealizada para el salario negociado viene dada por:

$$\hat{W}_t^c = \alpha E_{t-j}\hat{K}_t - \alpha E_{t-j}\hat{N}_t + E_{t-j}\hat{Z}_t + E_{t-j}\hat{P}_t - \frac{2\eta P}{W^c}E_{t-j}\hat{N}_t$$

$$+\frac{2\eta P}{W^c}E_{t-j}\hat{N}_{t-1} - \frac{2\eta \upsilon P}{W^c}E_{t-j}\hat{N}_t + E_{t-j}\frac{2\eta \upsilon P}{W^c}E_t\hat{N}_{t+1}$$

La demanda de trabajo en t es elegida por las empresas, teniendo en cuenta el salario nominal que se comprometieron a pagar j periodos antes, igualando el producto marginal del trabajo al salario real. Por tanto, log-linealizando la condición de primer orden.

$$\hat{W}_t^c = \alpha\hat{K}_t - \alpha\hat{N}_t + \hat{Z}_t + \hat{P}_t - \frac{2\eta P}{W^c}\hat{N}_t + \frac{2\eta P}{W^c}\hat{N}_{t-1} - \frac{2\eta \upsilon P}{W^c}\hat{N}_t + \frac{2\eta \upsilon P}{W^c}E_t\hat{N}_{t+1}$$

Igualando el salario en las dos expresiones, obtenemos la demanda de horas de trabajo en el periodo t, dado el salario acordado j periodos antes.

$$\hat{N}_t = E_{t-j}\hat{N}_t + \alpha\psi\left(\hat{K}_t - E_{t-j}\hat{K}_t\right) + \psi\left(\hat{Z}_t - E_{t-j}\hat{Z}_t\right) + \psi\left(\hat{P}_t - E_{t-j}\hat{P}_t\right) +$$

$$+\frac{2\eta P}{W^c}\left(\hat{N}_{t-1} - E_{t-j}\hat{N}_{t-1}\right) + \frac{2\eta \upsilon P}{W^c}\left(E_t\hat{N}_{t+1} - E_{t-j}E_t\hat{N}_{t+1}\right) \qquad ((5.40))$$

donde $\psi = \left(\alpha + \frac{2\eta}{W^c} + \frac{2\eta\upsilon}{W^c}\right)^{-1}$.

Para asegurar la existencia de un estado estacionario para las variables nominales para una tasa de crecimiento monetario distinta de cero debemos normalizar las variables tal y como hicimos en el capítulo 4. Definiendo:

$$\tilde{m}_t = \frac{m_t}{M_t} : \tilde{P}_t = \frac{P_t}{M_t}$$

las restricciones para las economías domésticas junto a la condición de primer orden vienen dadas por:

$$\tilde{P}_t C_t^i = \frac{\tilde{m}_{t-1}^i + \mu_t}{\mu_t - 1}$$

$$C_t^i + K_{t+1}^i - (1-\delta)K_t^i + \frac{\tilde{m}_t}{\tilde{P}_t} = W_t^c N_t^i + r_t K_t^i + \frac{\tilde{m}_{t-1} + \mu_t}{(\mu_t - 1)\tilde{P}_t}$$

$$\frac{1}{C_t^i} = \beta E_t \left[\frac{1}{C_{t+1}^i} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right]$$

Las condiciones de agregación entre todos los individuos vienen dadas por:

$$K_t = K_t^i : N_t = N_t^i : \tilde{M}_t = \tilde{m}_t = 1$$

Teniendo en cuenta el mecanismo de fijación de salarios, la economía doméstica no decide sobre el número de horas que ofrece, ya que llegado el momento t, se compromete a ofrecer elásticamente todo el trabajo demandado por las empresas al salario negociado j periodos antes.

El procedimiento de solución del modelo se hace en dos etapas: en primer lugar se resuelve el problema agregando las economías domésticas y se deducen las funciones óptimas para el stock de capital y el nivel de precios que dependen de las variables de estado y tendrían éstas expresiones.

$$\tilde{P}_t = \eta_{pk} \hat{K}_t + \eta_{pz} \hat{Z}_t + \eta_{p\mu} \hat{\mu}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk} \hat{K}_t + \eta_{kz} \hat{Z}_t + \eta_{k\mu} \hat{\mu}_t$$

Con éstas expresiones calculamos la solución para $\hat{N}_t$ en (5.40) e $\hat{Y}_t$ a partir de la función de producción.

Los resultados más relevantes que se obtienen de la solución del mismo son los siguientes: la introducción de costes de ajuste provoca una reducción en la volatilidad de horas trabajadas, producción y productividad con respecto al modelo sin costes de ajuste. En este esquema de fijación de salarios, éstos, cuando son negociados dependen de las expectativas sobre los posibles shocks futuros en las variables exógenas. Cuando llega el momento de contratar, las empresas observan dichos shocks y determinan la cantidad de trabajo de equilibrio dado el salario fijado con anterioridad, por tanto, las empresas pueden cambiar sus expectativas a la luz de las realizaciones de las perturbaciones. Esto genera una alta volatilidad en las horas trabajadas y en la producción. Si por contra existen costes de ajuste importantes, el grado de ajuste en el empleo ante las perturbaciones es bastante menor.

5.8. Utilización variable del capital.

En el modelo estándar se asume que el flujo de producción depende del stock de capital existente como si éste estuviese siendo utilizado en su totalidad, sin embargo, las empresas pueden decidir modificar la producción alterando su intensidad de uso. A corto plazo, la oferta de capital es fija, y por tanto, ante un shock de oferta, la única forma de producir más es elevando la demanda de capital. Sin embargo, al introducir utilización variable del capital diferenciamos entre el flujo de servicios que ofrece un determinado stock de capital y el propio stock instalado.

La magnitud del shock tecnológico requerido para replicar la variabilidad de la producción disminuye si permitimos que la tasa de utilización del capital varíe. Un shock tecnológico induce menos inversión cuando las empresas tienen capital ocioso y por tanto, se produce un menor aumento en la demanda de capital y un menor incremento en el tipo de interés real necesario para equilibrar el mercado de capital.

Los datos sugieren que la utilización de la capacidad del capital exhibe una pronunciada variabilidad cíclica, es decir, el equipo industrial es utilizado más intensivamente en las etapas de expansión. Burnside, Eichenbaum y Rebelo (1995) corroboran el caracter procíclico de la utilización del capital a partir de la variable proxy, consumo de energía eléctrica en un conjunto de industrias manufactureras.

Varios autores han extendido el modelo básico para incorporar la utilización variable del capital. Kydland y Prescott (1988) demuestran que la introducción de utilización variable mejora la capacidad de amplificación en el modelo "Time to build" mientras que Greenwood, Hercowitz y Huffman (1988) la incorporan en un modelo en el que los shocks de productividad proceden de los nuevos bienes de inversión.

King y Rebelo (1999) sostienen que dos ingredientes básicos para conseguir que el modelo de Ciclo Real pueda mejorar la capacidad de explicar el comportamiento observado en las series ante pequeñas variaciones en la productividad de los factores son la utilización conjunta del modelo de trabajo indivisible y la utilización variable del capital que provoca que la oferta de servicios de capital responda de manera importante a cambios en el nivel de horas trabajadas.

La mayor parte de los estudios que introducen utilización variable del capital asumen que la depreciación es una función creciente de la tasa de utilización del capital[54] y como consecuencia es una variable de elección por parte de las empresas.

La forma de introducir esta nueva variable es modificando ligeramente la función de producción de la siguiente manera.

$$Y_t = Z_t F(u_t K_t, A_t N_t) = (u_t K_t)^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

donde u_t es la tasa de utilización, $Z_t = Z_{t-1} \exp\{\varepsilon_t\}$ y donde hemos asumido progreso tecnológico neutral en el sentido de Harrod.

Los costes de la utilización variable del capital deben además ser incorporados a la ley de movimiento del stock de capital, lo cual implica ahora que la tasa de depreciación no es constante sino que depende de dicha tasa de utilización.

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta(u_t))K_t$$

donde $\delta(\bullet)$ es una función creciente y convexa de la tasa de utilización, esto es:

$$\frac{d\delta(u_t)}{du_t} > 0 : \frac{d^2\delta(u_t)}{du_t^2} > 0$$

Para determinar la tasa óptima de utilización, una empresa representativa maximiza sus beneficios, de tal forma que el coste marginal de una tasa de utilización determinada debe ser igual al ingreso marginal derivada de aquélla.

El ingreso marginal derivado de una tasa de utilización mayor es el output adicional que puede obtenerse y que viene dado por:

$$IMa = \frac{\partial F(u_t K_t, A_t N_t)}{\partial u_t} = \alpha (u_t)^{\alpha-1} K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}$$

[54] Una excepción es Kydland y Prescott (1988), donde las horas trabajadas dependen del grado de utilización del capital.

Por otra parte, el coste marginal depende de la tasa de utilización del capital ya que mientras mayor sea ésta, mayor será la depreciación del stock de capital existente y más rápidamente se tendrá que reemplazar dicho capital.

$$CMa = dI_t = \frac{d\delta(u_t)}{du_t} K_t$$

Este típico análisis microeconómico supone que la tasa de utilización óptima debe verificar:

$$\alpha Z_t {u_t}^{\alpha-1} K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha} = \frac{d\delta(u_t)}{du_t} K_t = \delta_u K_t \qquad ((5.41))$$

Consecuencias de la utilización variable del capital.

La utilización del capital es una variable no observable, lo que da lugar al problema de la identificación de los parámetros que incluyamos en la función $\delta(u_t)$.

En primer lugar, incluir tasas de utilización variable del capital obliga a reestimar el residuo de Solow.

A partir de la función de producción, tenemos que:

$$\ln Y_t = \ln Z_t + \alpha(\ln u_t + \ln K_t) + (1-\alpha)(\ln A_t + \ln N_t)$$

$$g_{Z_t} = g_Y - (1-\alpha) g_N - \alpha(g_u + g_K)$$

Para un periodo muestral de T periodos, ahora tenemos $3T$ incógnitas, porque ahora desconocemos tanto el crecimiento del stock de capital como la variación en la tasa de utilización del capital, ya que el stock de capital medio o las series de inversión asumen que la tasa de depreciación es constante e independiente de la tasa de utilización del capital. La forma funcional utilizada con mayor frecuencia en la literatura para modelizar la tasa de depreciación viene dada por:

$$\delta(u_t) = \delta_0 u^{1+\xi} : \xi \geq 0$$

donde el parámetro ξ es la elasticidad de $\delta_u = \frac{d\delta}{du}$ con respecto a u.

$$\xi = \frac{d\ln\delta_u}{d\ln u} \Rightarrow g_u = \frac{d\ln\delta_u}{\xi}$$

A partir del óptimo calculado, ecuación (5.41) tenemos que, linealizada:

$$\ln\alpha + \ln Z_t + (\alpha - 1)u_t + \alpha\ln K_t + (1-\alpha)\ln A_t + \ln N_t = \ln\delta_u + \ln K_t \quad ((5.42))$$

Diferenciando:

$$g_{Z_t} + (\alpha - 1)g_u + \alpha g_K + (1-\alpha)g_N = d\ln\delta_u + g_K \Rightarrow g_Y - g_K = (1+\xi)\, g_u$$

$$g_{Z_t} = g_Y - (1-\alpha)g_N - \alpha g_K - \frac{\alpha}{1+\xi}(g_Y - g_K)$$

$$g_{Z_t} = \frac{1-\alpha+\xi}{1+\xi}g_Y - (1-\alpha)g_N - \frac{\alpha\xi}{1+\xi}g_K \quad ((5.43))$$

En los dos casos extremos $\xi = 0$ y $\xi \to \infty$, el residuo de Solow, viene dado respectivamente por:

$$g_{Z_t} = (1-\alpha)(g_Y - g_N)$$

$$g_{Z_t} = g_Y - (1-\alpha)g_N - \alpha g_K$$

Para estudiar cómo la tasa eficiente de utilización del capital afecta al resto de las variables del modelo, linealizaremos la función de producción y la condición de tasa de utilización óptima.

Definiendo las variables en unidades de eficiencia.

$$\tilde{Y} = \frac{Y}{A} : \tilde{K} = \frac{K}{A}$$

la función de producción viene expresada como:

$$\tilde{Y}_t = Z_t(u_t\tilde{K}_t)^{\alpha}{N_t}^{1-\alpha}$$

y log-linealizada:

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha(\hat{u}_t + \hat{K}_t) + (1-\alpha)\hat{N}_t$$

La linealización de la condición de optimización para la tasa de utilización del capital viene dada por la ecuación (5.42).

$$\ln \alpha + \ln Z_t + (\alpha - 1) \ln u_t + \alpha \ln \tilde{K}_t + (1 - \alpha) \ln N_t = \ln \delta_u + \ln \tilde{K}_t$$

Diferenciando totalmente:

$$\hat{Z}_t + (\alpha - 1)\hat{u}_t - (1 - \alpha)\hat{K}_t + (1 - \alpha)\hat{N}_t = \hat{x}_t \tag{(5.44)}$$

$$\hat{x}_t = d \ln \delta_u = d\left(\ln \delta_0 + \ln(1 + \xi) + \xi \ln u\right) = \xi \hat{u}_t$$

Despejando la tasa de utilización del capital en (5.44).

$$\hat{u}_t = \frac{(1 - \alpha)\hat{N}_t + \hat{Z}_t - (1 - \alpha)\hat{K}_t}{1 - \alpha + \xi}$$

e introduciéndola en la función de producción.

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t + \alpha \frac{(1 - \alpha)\hat{N}_t + \hat{Z}_t - (1 - \alpha)\hat{K}_t}{1 - \alpha + \xi} + (1 - \alpha)\hat{N}_t$$

$$\hat{Y}_t = \frac{1 + \xi}{1 - \alpha + \xi}\hat{Z}_t + \frac{\alpha \xi}{1 - \alpha + \xi}\hat{K}_t + \frac{(1 - \alpha)(1 + \xi)}{1 - \alpha + \xi}\hat{N}_t$$

Dados los valores extremos de ξ, los resultados son análogos al estudio del residuo de Solow. Para $\xi = 0$, la función de producción linealizada es:

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{1 - \alpha}\hat{Z}_t + \hat{N}_t$$

lo que da lugar a que la función de producción a corto plazo sea lineal en el factor trabajo.

Por contra, si $\xi \to \infty$, esto es, si $\delta_u \to 0$, la cantidad de servicios del capital no responde a cambios en la tasa de utilización del mismo o dicho de otra forma, la tasa de depreciación es independiente de la tasa de utilización del capital.

En este caso, la función de producción linealizada es:

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t$$

La introducción del supuesto de utilización variable del capital conduce a otro resultado interesante y es que altera el producto marginal del trabajo, con lo que el salario real, responde en mayor cuantía a los cambios en la demanda de trabajo mientras menor sea ξ, esto es, conforme menor es ξ, más elástica es la curva de demanda de trabajo.

A partir de la condición de primer orden de optimización tenemos que:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\partial\tilde{Y}_t}{\partial N_t} = Z_t(u_t\tilde{K}_t)^{\alpha}(1-\alpha)N_t^{-\alpha}$$

Aplicando logaritmos a la expresión anterior:

$$\ln W_t - \ln P_t = \ln Z_t + \alpha\ln u_t + \alpha\ln\tilde{K}_t + +\ln(1-\alpha) - \alpha\ln N_t$$

Y diferenciando:

$$\hat{W}_t - \hat{P}_t = \hat{\omega}_t = \hat{Z}_t + \alpha\hat{u}_t + \alpha\hat{K}_t - \alpha\hat{N}_t$$

Sustituyendo la expresión para la tasa de utilización.

$$\hat{\omega}_t = \hat{Z}_t + \alpha\frac{(1-\alpha)\hat{N}_t + \hat{Z}_t - (1-\alpha)\hat{K}_t}{1-\alpha+\xi} + \alpha\hat{K}_t - \alpha\hat{N}_t$$

$$\hat{\omega}_t = \frac{1+\xi}{1-\alpha+\xi}\hat{Z}_t + \frac{\alpha\xi}{1-\alpha+\xi}\hat{K}_t - \frac{\alpha\xi}{1-\alpha+\xi}\hat{N}_t$$

Ceteris paribus, la elasticidad del salario a las perturbaciones tecnológicas viene dado por:

$$\frac{\partial\hat{\omega}_t}{\partial\hat{Z}_t} = \frac{1+\xi}{1-\alpha+\xi} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha+\xi} > 1$$

Cuando $\xi = 0$

$$\frac{\partial \hat{\omega}_t}{\partial \hat{Z}_t} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} > 1$$

y la curva de demanda de trabajo en el espacio $(\hat{\omega}_t, \hat{N}_t)$ es totalmente horizontal.

$$\hat{\omega}_t = \frac{1}{1-\alpha}\hat{Z}_t$$

y por tanto mayor es el desplazamiento de la curva de demanda de trabajo ante una perturbación tecnológica.

Por otra parte, la utilización variable del capital no afecta a la oferta de trabajo y dado el mecanismo de amplificación generado por u_t, disminuye la necesidad de una alta elasticidad de la oferta de trabajo para que los shocks de productividad tengan un gran papel en generar fluctuaciones en las horas trabajadas.

En el epígrafe 1, la oferta de trabajo venía dada por:

$$\hat{N}_t = \sigma_n(\hat{W}_t + \hat{\lambda}_t)$$

Con una función logarítmica en el consumo, $\hat{\lambda}_t = -\hat{C}_t$.

$$\hat{N}_t = \sigma_n(\hat{\omega}_t - \hat{C}_t)$$

El cambio en las horas de trabajo, ante la perturbación tecnológica viene dado por

$$\frac{\partial \hat{N}_t}{\partial \hat{Z}_t} = \frac{\partial \hat{N}_t}{\partial \hat{\omega}_t}\frac{\partial \hat{\omega}_t}{\partial \hat{Z}_t} = \sigma_n\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha+\xi}\right)$$

que es igual a σ_n cuando $\xi \to \infty$ y $\sigma_n\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$ cuando $\xi \to 0$.

Por tanto, la tasa de utilización del capital permite una mayor fluctuación de las horas trabajadas ante una perturbación tecnológica.

Un problema importante es cómo cuantificar la tasa de utilización del capital. A este respecto se han utilizado dos estrategias, en la primera se asume que u_t es no observable y se trata de estimar ξ a partir del propio modelo, mientras que en la segunda se utilizan variables que puedan aproximarnos dicha tasa (tales proxies incluyen por ejemplo los datos sobre consumo eléctrico).

Burnside y Eichenbaum (1996) estiman $\xi = 0.54$.

En primer lugar, obtenemos una relación que nos permite recalcular las series de capital con utilización variable del capital. El problema puede ser abordado a partir de la dinámica del stock de capital y de la función que define la tasa de depreciación en función de la tasa de utilización del capital. Esta puede expresarse como:

$$\delta(u_t) = \delta_0 u^{1+\xi} \Rightarrow \delta_u(u_t) = \frac{\delta_0(1+\xi)u^{1+\xi}}{u} \Rightarrow \delta(u_t) = \frac{1}{1+\xi}\delta_u(u_t)u$$

Y por tanto la dinámica del stock de capital es:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta(u_t))K_t = I_t + \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\delta_u(u_t)u_t\right) K_t$$

Teniendo en cuenta (5.41), expresada como:

$$\alpha\frac{Y_t}{K_t} = \delta_u u_t$$

$$K_{t+1} = I_t + \left(1 - \frac{\alpha}{1+\xi}\frac{Y_t}{K_t}\right) K_t$$

Con esta expresión podemos obtener a partir de las series de inversión y producción, dado un valor inicial del stock de capital, una serie modificada para el stock de capital con tasa de utilización variable. Como proceso previo es preciso estimar ξ.

La identificación de ξ puede realizarse a partir de la ecuación de Euler del problema de optimización de las economías domésticas.

$$\frac{C_{t+1}/A_{t+1}}{C_t/A_t} = \beta E_t \left(1 + \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}\frac{A_t}{A_{t+1}} - \delta(u_t)\frac{A_t}{A_{t+1}}\right)$$

En estado estacionario.

$$1 = \beta E_t \left(\alpha\frac{Y^*}{K^*} + 1 - \delta(u^*)(1 + g_{Z_t})^{-1}\right)$$

obtenemos $\delta(u^*)$.

A partir de la condición de óptimo para u_t

$$\frac{\partial F}{\partial u_t} = \delta_{u_t}(u_t)K_t \Rightarrow \alpha\frac{Y_t}{K_t} = \frac{(1+\xi)\,\delta(u_t)}{u_t}u_t$$

que en estado estacionario

$$\alpha\frac{Y^*}{K^*} = (1+\xi)\,\delta(u^*)$$

Nos da la expresión utilizada para estimar ξ.

Con esta estimación del parámetro de la función de depreciación pueden obtenerse series para el stock de capital y a partir de (5.43) conseguir una nueva estimación del residuo de Solow.

$$g_{Z_t} = \frac{1-\alpha+\xi}{1+\xi}g_Y - (1-\alpha)g_N - \frac{\alpha\xi}{1+\xi}g_K$$

5.9. Shocks específicos a la inversión.

Los trabajos de Greenwood, Hercowitz y Huffman (1988) y Greenwood, Hercowitz y Krusell (1997, 2000) centran su atención en el papel del cambio tecnológico específico en la inversión como un elemento importante para explicar tanto el crecimiento económico como las fluctuaciones cíclicas fundamentados en dos hechos estilizados: el precio relativo de los bienes de inversión ha experimentando una tendencia decreciente desde 1950 y la caída en el precio relativo del capital es más rápido durante las expansiones que durante las recesiones.

La idea es que la incorporación de nuevo capital a través de la inversión implica que la tasa de depreciación tecnológica, no de uso, del capital instalado es mayor ya que el nuevo capital es más productivo. La introducción de shocks específicos a la inversión en un modelo de Ciclo Real se materializa a partir de la modificación de la modificación de la restricción de recursos.

En este epígrafe presentamos un modelo con depreciación completa del 100 %, basado en Fisher (2003) y Fernández-Villaverde y Rubio Ramírez (2004).

Nuestro agente representativo maximiza una función de utilidad tal como:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln C_t + a \ln(1 - N_t))$$

La restricción de recursos y la función de producción vienen dadas por:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = C_t + I_t$$

La variable V_t determina la cantidad de capital que puede ser comprada con una unidad de inversión. En el modelo estandar dicha variable es constante e igual a 1. Por tanto, una unidad de inversión es transformada en V_t unidades de capital, donde V_t no es constante y seguiría un proceso estocástico que representa dicho progreso tecnológico específico en la inversión. De esta forma, la ley dinámica del capital viene dada por:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + V_t I_t$$

En equilibrio, $1/V_t$ será igual al precio relativo del capital en términos de consumo o el precio de los activos de capital corregidos por su calidad.

Para obtener una medida de dicho progreso tecnológico específico es necesario disponer de precios en los activos de capital, ajustados a la calidad (precios hedónicos).

Los procesos estocásticos siguen las siguientes leyes de movimiento.

$$\ln Z_t = g_z + \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t^z$$

$$\ln V_t = g_v + \ln V_{t-1} + \varepsilon_t^v$$

Esto es, siguen paseos aleatorios con deriva.

En primer lugar, transformamos el modelo para convertirlo en estacionario.

La restricción de recursos viene dada por la siguiente expresión:

$$C_t + \frac{K_{t+1}}{V_t} = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)\frac{K_t}{V_t}$$

Dividimos toda la ecuación por el factor $Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}$, y tomamos en primer lugar la función de producción, procediendo a reescalar el stock de capital, donde x e y son coeficientes indeterminados.

$$\frac{Y_t}{Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} = \frac{Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}{Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \frac{K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}{Z_{t-1}^{x-1} V_{t-1}^{y}} = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \frac{K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}{\left(Z_{t-1}^{\frac{x-1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{y}{\alpha}}\right)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \left(\frac{K_t}{Z_{t-1}^{\frac{x-1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{y}{\alpha}}}\right)^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Para que el término $\frac{K_{t+1}}{V_t}$, para que sea consistente con el reescalamiento de K_t:

$$\frac{K_{t+1}}{V_t} = \frac{K_{t+1}}{V_t} \frac{1}{Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} \frac{Z_t^{\frac{x-1}{\alpha}} V_t^{\frac{y}{\alpha}}}{Z_t^{\frac{x-1}{\alpha}} V_t^{\frac{y}{\alpha}}} = \tilde{K}_{t+1} \frac{Z_t^{\frac{x-1}{\alpha}}}{Z_{t-1}^{x}} \frac{V_t^{\frac{y}{\alpha}-1}}{V_{t-1}^{y}}$$

Para conseguir que los ratios de las perturbaciones vengan dadas en función de los parámetros del modelo, dichos ratios deben ir elevados al mismo exponente, y por tanto debe verificarse:

$$\frac{x-1}{\alpha} = x : \frac{y}{\alpha} - 1 = y \Rightarrow x = \frac{1}{1-\alpha} : y = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\tilde{K}_{t+1} \frac{Z_t^{\frac{x-1}{\alpha}} V_t^{\frac{y}{\alpha}-1}}{Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} = \tilde{K}_{t+1} \left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \tilde{K}_{t+1} \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left(g_v + \varepsilon_t^v\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Finalmente, el término $\frac{K_t}{V_t}$.

$$\frac{K_t}{V_t Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} = \frac{K_t}{V_t Z_{t-1}^{x} V_{t-1}^{y}} \frac{Z_{t-1}^{\frac{x-1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{y}{\alpha}}}{Z_{t-1}^{\frac{x-1}{\alpha}} V_{t-1}^{\frac{y}{\alpha}}} = \tilde{K}_t \frac{V_{t-1}}{V_t} \frac{Z_{t-1}^{\frac{x-1}{\alpha}}}{Z_{t-1}^{x}} \frac{V_{t-1}^{\frac{y}{\alpha}}}{V_{t-1}^{y+1}} = \tilde{K}_t \frac{V_{t-1}}{V_t}$$

Por tanto, la restricción de recursos queda expresada como:

$$\tilde{C}_t+\tilde{K}_{t+1}\exp\left(\frac{g_z+\varepsilon_t^z+\alpha g_v+\alpha\varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right)=\exp\left(g_z+\varepsilon_t^z\right)\tilde{K}_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}+(1-\delta)\tilde{K}_t\exp\left(g_v+\varepsilon_t^v\right)$$

Solución.

Planteando la ecuación de Bellman.

$$V(\tilde{K}_t,Z_{t-1},V_{t-1})=\max\left[\ln\tilde{C}_t+a\ln(1-N_t)+\beta E_tV(\tilde{K}_{t+1},Z_t,V_t)\right]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial V}{\partial\tilde{C}_t}=\frac{1}{\tilde{C}_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}\frac{\partial\tilde{K}_{t+1}}{\partial\tilde{C}_t}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_t}=-\frac{a}{1-N_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}\frac{\partial\tilde{K}_{t+1}}{\partial N_t}=0$$

Y la condición de envolvente:

$$\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_t}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}\frac{\partial\tilde{K}_{t+1}}{\partial\tilde{K}_t}$$

Finalmente las condiciones de primer orden más la restricción de recursos nos permiten obtener las soluciones para las variables.

$$\frac{1}{\tilde{C}_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}\exp\left(\frac{g_z+\varepsilon_t^z+\alpha g_v+\alpha\varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right)^{-1}=0$$

$$-\frac{a}{1-N_t}+\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}(1-\alpha)\exp\left(g_z+\varepsilon_t^z\right)\tilde{K}_t^{\alpha}N_t^{-\alpha}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_t}=\beta E_t\frac{\partial V}{\partial\tilde{K}_{t+1}}\left[\alpha\exp\left(g_z+\varepsilon_t^z\right)\tilde{K}_t^{\alpha-1}N_t^{1-\alpha}+(1-\delta)\exp\left(g_v+\varepsilon_t^v\right)\right]*$$

$$*\exp\left(\frac{g_z+\varepsilon_t^z+\alpha g_v+\alpha\varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right)^{-1}$$

$$\tilde{C}_t + \tilde{K}_{t+1} \exp\left(\frac{g_z + \varepsilon_t^z + \alpha g_v + \alpha \varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{K}_t \exp\left(g_v + \varepsilon_t^v\right)$$

Eliminando el término $\beta E_t \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}}$ el sistema queda reducido a la ecuación de Euler, la restricción de recursos y la oferta de horas de trabajo.

$$\exp\left(\frac{g_z + \varepsilon_t^z + \alpha g_v + \alpha \varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right) \tilde{C}_t^{-1} = \qquad ((5.45))$$

$$\beta E_t \tilde{C}_{t+1}^{-1} \left[\alpha \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta) \exp\left(g_v + \varepsilon_t^v\right)\right]$$

$$a \frac{\tilde{C}_t}{1 - N_t} = (1-\alpha) \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \qquad ((5.46))$$

$$\tilde{C}_t + \tilde{K}_{t+1} \exp\left(\frac{g_z + \varepsilon_t^z + \alpha g_v + \alpha \varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right) = \qquad ((5.47))$$

$$= \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{K}_t \exp\left(g_v + \varepsilon_t^v\right)$$

Para una tasa de depreciación igual a 1, el sistema tiene solución cerrada. El argumento y la solución para el nivel de horas de trabajo está explicitado en el capítulo 3 y se fundamenta en que con una función separable y logarítmica en ambos argumentos y tasa de depreciación igual a 1, los efectos renta y sustitución de un cambio en el salario se cancelan.

La solución para el nivel de empleo tendría la siguiente expresión:

$$\bar{N} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha) + a(1-\alpha\beta)}$$

Y las soluciones a (5.46), (5.47)y (5.48) vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\tilde{C}_t = (1-\alpha\beta)\tilde{Y}_t = (1-\alpha\beta) \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\tilde{K}_{t+1} = \exp\left(\frac{g_z + \varepsilon_t^z + \alpha g_v + \alpha \varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right)^{-1} \alpha\beta \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\tilde{Y}_t = \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) \tilde{K}_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Las funciones óptimas, en sus niveles originales, (deshaciendo el reescalamiento) son:

$$\tilde{C}_t = \frac{C_t}{Z_{t-1}^{\frac{1}{1-\alpha}} V_{t-1}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = (1-\alpha\beta)\exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) Z_{t-1}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} V_{t-1}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\ln C_t = C_0 + \ln Z_{t-1} + \alpha \ln K_t + g_z + \varepsilon_t^z \Rightarrow \ln C_t = C_0 + \alpha \ln K_t + \ln Z_t$$

$$\ln C_t = C_0 + \alpha \ln K_t + \sum_{i=0}^{t} L^i (g_z + \varepsilon_i^z)$$

$$\tilde{K}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{Z_t^{\frac{1}{1-\alpha}} V_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \exp\left(-\frac{g_z + \varepsilon_t^z + \alpha g_v + \alpha \varepsilon_t^v}{1-\alpha}\right) \alpha\beta \exp\left(g_z + \varepsilon_t^z\right) Z_{t-1}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} V_{t-1}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$\ln K_{t+1} = K_0 + \alpha \ln K_t + \ln Z_{t-1} + \ln V_{t-1} + g_z + g_v + \varepsilon_t^z + \varepsilon_t^v$$

$$\ln K_{t+1} = K_0 + \alpha \ln K_t + \sum_{i=0}^{t} L^i (g_z + g_v + \varepsilon_i^z + \varepsilon_t^v)$$

$$\ln Y_t = \ln Z_{t-1} + \alpha \ln K_t + g_z + \varepsilon_t^z$$

$$\ln Y_t = Y_0 + \alpha \ln K_t + \sum_{i=0}^{t} L^i (g_z + \varepsilon_i^z)$$

Dada la modelización de los shocks, esto es, que conllevan una raíz unitaria, los efectos de la tecnología son permanentes, donde al igual que en los modelos de Ciclo Real, el parámetro α es importante para determinar la senda dinámica de las variables en el tiempo.

Dada la solución para las perturbaciones:

$$\ln Z_t = \sum_{i=0}^{t} \varepsilon_{t-i}^z + g_{z(t-i)}$$

Las soluciones anteriores pueden expresarse como:

$$\ln K_{t+1} = \frac{1}{1-\alpha L}\left[K_0 + \sum_{i=0}^{t} (g_{z(t-i)} + g_{v(t-i)} + \varepsilon_{t-i}^z + \varepsilon_{t-i}^v)\right]$$

$$\ln Y_t = Y_0 + \alpha \frac{L}{1-\alpha L}\left[K_0 + \sum_{i=0}^{t}(g_{z(t-i)} + g_{v(t-i)} + \varepsilon_{t-i}^{z} + \varepsilon_{t-i}^{v})\right] + \sum_{i=0}^{t}(g_{z(t-i)} + \varepsilon_{t-i}^{z})$$

$$\ln Y_t = C_0 + \alpha \frac{L}{1-\alpha L} K_0 + \sum_{i=0}^{t}(g_{z(t-i)} + g_{v(t-i)} + \varepsilon_{t-i}^{z} + \varepsilon_{t-i}^{v}) + \sum_{i=0}^{t}(g_{z(t-i)} + \varepsilon_{t-i}^{z})$$

De esta forma, una perturbación que eleve el nivel de V_t, afecta en primer lugar al stock de capital y no afecta ni a la producción corriente ni al consumo. Dado el proceso que hemos supuesto para el shock específico a la inversión, una perturbación eleva de forma permanente el nivel de V_t.

$$\frac{\partial \ln K_{t+1}}{\partial \varepsilon_t^v} = 1$$

El nuevo nivel de capital más productivo, eleva la producción y el consumo en el siguiente periodo. El aumento en la producción puede calcularse a partir de:

$$\ln Y_{t+k} = \alpha \left[\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \left(\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_{t+k-i-1}^{v}\right)\right]$$

Los multiplicadores dinámicos para la producción son:

$$\frac{\partial \ln Y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t^v} = \alpha \left[\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \left(\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_{t+k-i-1}^{v}\right)\right]$$

Para un horizonte temporal k, alejado del momento de la perturbación.

$$\mathop{lím}_{k \to \infty} \frac{\partial \ln Y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t^v} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

que es el aumento permanente en el output, debido a una perturbación transitoria en la inversión.

5.10. Modelo con utilización del capital variable y shocks específicos a la inversión.

Greenwood, Hercowitz y Huffman (1988) plantean el siguiente modelo en el que combinan utilización variable del capital y shocks específicos a la inversión. Uno de los obstáculos es que una perturbación de demanda como la analizada provoca un descenso en el consumo si la función de utilidad no está restringuida a la forma $u(C_t, N_t) = u(C_t - G(N_t))$. En este caso, la relación marginal de sustitución entre consumo y trabajo depende sólo de la forma funcional de $G(N_t)$[55].

El hecho de que el aumento en la tasa de rendimiento de la inversión estimule la oferta de trabajo reduciendo el ocio tambien opera reduciendo el consumo; es más, con un stock de capital fijo a corto plazo y con una función de producción que no se ve afectada en este caso, el shock específico a la inversión provocaría una disminución en la productividad media del factor trabajo.

Para evitar esta dinámica y el mecanismo de sustitución intertemporal tradicional en el modelo de Ciclo Real la función de utilidad debe tener la forma específica anterior.

Esta cuestión ya analizada por Barro y King (1994) implica que el aumento en la demanda de capital induce a un aumento en el tipo de interés real. Si el efecto riqueza domina al efecto renta las economía domésticas reducen su consumo debido a la reducción del valor actual de su riqueza. Como resultado, además del efecto sustitución las economías domésticas incrementarán su oferta de trabajo y dado que el nivel de capital es fijo a corto plazo, el aumento en la oferta de trabajo incrementa la producción pero también disminuye la productividad del trabajo. De esta forma, consumo y oferta de trabajo se moverían contracíclicamente.

[55] Una discusión general acerca de las implicaciones de utilizar preferencias separables en el tiempo en modelos de ciclo económico puede consultarse en Barro y King (1984).

Introduciendo tasa de utilización variable del capital se puede anular este efecto al no aumentar de forma considerable el tipo de interés ante el aumento en la demanda de inversión, de tal forma que el consumo no sea desplazado por un nivel mayor de inversión, dado que los servicios del capital pueden se ajustados instantáneamente y como resultado consumo y productividad se moverían de forma procíclica.

La formulación del modelo viene dada por las siguientes ecuaciones:

Las economías domésticas eligen la secuencia de consumo, horas de trabajo, tasa de utilización del capital y stock de capital que maximizan:

$$Max\ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right)^{1-\gamma}$$

sujeto a las restricción de recursos:

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta(u_t))K_t = Y_t = (u_t K_t)^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

La ley dinámica del stock de capital viene dada por:

$$K_{t+1} = (1 - \delta(u_t))K_t + I_t(1 + \varepsilon_t)$$

donde ε_t es el shock específico a la inversión que aumenta la eficiencia del nuevo capital producido.

Planteando el lagrangiano:

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, K_{t+1}, u_t, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} \left(C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right)^{1-\gamma} +$$

$$\beta^t \lambda_t \left((u_t K_t)^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta(u_t)) \frac{K_t}{1+\varepsilon_t} - C_t - \frac{K_{t+1}}{1+\varepsilon_t} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \left(C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right)^{-\gamma} - \lambda_t = 0 \qquad ((5.48))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \left(C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right)^{-\gamma} N_t^{\theta} = (1-\alpha)\lambda_t (u_t K_t)^{\alpha} N_t^{-\alpha} \qquad ((5.49))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\frac{\lambda_t}{1+\varepsilon_t} + \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\alpha(u_{t+1})^{\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + \frac{1-\delta(u_{t+1})}{1+\varepsilon_t}\right] = 0 \tag{(5.50)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \lambda_t\left(\alpha u_t^{\alpha-1} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - \delta'(u_t)\frac{K_t}{1+\varepsilon_t}\right) = 0 \tag{(5.51)}$$

A partir de (5.48) podemos observar que (5.49) la curva de oferta de trabajo viene dada por:

$$N_t^{\theta} = (1-\alpha)(u_t K_t)^{\alpha} N_t^{-\alpha} \tag{(5.52)}$$

La ecuación de oferta de trabajo es independiente del consumo o de la utilidad marginal del mismo.

La ecuación (5.50) se interpreta como es habitual, el primer sumando es la pérdida de utilidad cuando reducimos el consumo mientras que el segundo nos da la ganancia de utilidad esperada futura obtenida de aumentar la inversión en t. Nótese que un shock específico a la inversión reduce el coste en términos de utilidad de añadir una unidad adicional de capital en el momento t, es decir$\frac{\lambda_t}{1+\varepsilon_t} < \lambda_t$.

La ecuación (5.51) caracteriza la utilización eficiente del capital, esto es, el capital debe ser utilizado hasta el punto en el que el beneficio marginal del msimo sea igual a su coste marginal de uso, donde $\delta'(u_t)$ representa el coste marginal en términos de aumento en la tasa de depreciación al utilizar el capital más intensivamente mientras que $1/1+\varepsilon_t$ es el coste de reemplazar el viejo capital en términos del nuevo.

A partir de (5.50) y y (5.51) podemos calcular el efecto de los shocks a la inversión sobre la tasa de utilización del capital y sobre la oferta de horas trabajadas.

El ejercicio es típico de estática comparativa y a pesar de la no linealidad de las ecuaciones pueden ser fácilmente expresadas linealmente en logaritmos.

De esta forma, ambas quedan, (sin constantes y sin K_t) y asumiendo la función $\delta(u_t) = \delta_0 u_t^{1+\xi}$ para la tasa de depreciación.

$$(\alpha-1)\ln u_t + (1-\alpha)\ln N_t = \ln\delta'(u_t) - \ln(1+\varepsilon_t) : (\ln\delta'(u_t) = \xi \ln u_t)$$

$$\theta \ln N_t = \alpha \ln u_t - \alpha \ln N_t$$

Resolviendo el sistema lineal para $\ln N_t$ y $\ln u_t$.

$$\ln N_t = \frac{\alpha}{[\theta(1-\alpha) + \xi(\alpha+\theta)]} \ln(1+\varepsilon_t)$$

$$\ln u_t = \frac{\alpha+\theta}{[\theta(1-\alpha) + \xi(\alpha+\theta)]} \ln(1+\varepsilon_t)$$

El efecto de la perturbación es elevar tanto el nivel de horas ofrecidas como la tasa de utilización del capital.

A partir de la función de producción, obtenemos que el aumento de la tasa de utilización del capital y del número de horas, aumenta la producción y la productividad media del factor trabajo.

$$\ln Y_t = \alpha \ln u_t + (1-\alpha) N_t$$

$$\ln Y_t - \ln N_t = \alpha(\ln u_t - \ln N_t)$$

$$\ln Y_t - \ln N_t = \frac{\alpha\theta}{[\theta(1-\alpha) + \xi(\alpha+\theta)]} \ln(1+\varepsilon_t)$$

El efecto, en el impacto sobre el stock de capital, K_{t+1} puede obtenerse diferenciando la condición de primer orden (5.50), donde $\lambda_t = u'(C_t)$. Dicha condición puede expresarse como:

$$\frac{\lambda_t}{1+\varepsilon_t} = \beta E_t \Psi(K_{t+1}) :: \Psi(K_{t+1}) = \lambda_{t+1}\alpha(u_{t+1})^{\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + \frac{1-\delta(u_{t+1})}{1+\varepsilon_t}$$

donde

$$\Psi(K_{t+1}) = \lambda_{t+1}\alpha(u_{t+1})^{\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + \frac{1-\delta(u_{t+1})}{1+\varepsilon_t} : \Psi'(K_{t+1}) < 0$$

Diferenciando, obtenemos:

$$\frac{u''(C_t)}{1+\varepsilon_t} dC_t - \frac{u'(C_t)}{(1+\varepsilon_t)^2} d\varepsilon_t = \beta \Psi'(K_{t+1}) dK_{t+1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$dK_{t+1} = (1+\varepsilon_t)dI_t + Id\varepsilon_t$$

$$dC_t = -dI_t = -\frac{dK_{t+1} - Id\varepsilon_t}{1+\varepsilon_t}$$

Por tanto,

$$-\frac{u''}{1+\varepsilon_t}\left(\frac{dK_{t+1} - Id\varepsilon_t}{1+\varepsilon_t}\right) - \frac{u'}{(1+\varepsilon_t)^2}d\varepsilon_t = \beta\Psi'(K_{t+1})dK_{t+1}$$

$$\frac{dK_{t+1}}{d\varepsilon_t} = \frac{-u'}{u'' + (1+\varepsilon_t)^2\beta\Psi'(K_{t+1})} + I\frac{u''}{u'' + (1+\varepsilon_t)^2\beta\Psi'(K_{t+1})} > 0 \tag{(5.53)}$$

El efecto del shock específico sobre el stock de capital tiene dos sumandos: el primero refleja el efecto sustitución positivo que el aumento en la productividad del nuevo capital tiene sobre K_{t+1} mientras que el segundo representa el efecto renta asociado a la perturbación que es positivo para $I > 0$.

De forma análoga, el efecto sobre el nivel de consumo puede obtenerse a partir de la restricción de recursos:

$$C_t = F(u_t K_t, N_t) - I_t$$

Diferenciando y teniendo en cuenta que las decisiones de consumo y oferta de trabajo están relacionadas.

$$dC_t = \frac{\partial F}{\partial N_t}dN_t - \frac{dK_{t+1} - Id\varepsilon_t}{1+\varepsilon_t}$$

Utilizando (5.53)

$$\frac{dC_t}{d\varepsilon_t} = \frac{\partial F}{\partial N_t}\frac{dN_t}{d\varepsilon_t} + \frac{u'/1+\varepsilon_t}{u'' + (1+\varepsilon_t)^2\beta\Psi'(K_{t+1})} + I\frac{(1+\varepsilon_t)\beta\Psi'(K_{t+1})}{u'' + (1+\varepsilon_t)^2\beta\Psi'(K_{t+1})}$$

El efecto sobre el consumo tiene tres sumandos, el primero ilustra el efecto sobre el mismo del cambio en las horas trabajadas, el segundo que es negativo muestra el efecto de sustitución intertemporal asociado al aumento de productividad del nuevo capital, debido al aumento en el rendimiento de la nueva inversión que ejerce un efecto disuasorio sobre el nivel de consumo mientras que el tercero es el efecto renta que es positivo.

Si no existise el primer sumando, el efecto de la perturbación de demanda supondría un efecto negativo sobre el consumo dado que el efecto sustitución dominaría cuantitativamente al efecto renta. Sin embargo, este primer sumando induce a una una sustitución intratemporal entre consumo y ocio, debido a que la perturbación al elevar la tasa de utilización del capital incrementa la productividad del trabajo, eleva el salario real y por tanto que representa un coste de oportunidad del ocio en términos de consumo.

5.11. El papel del gasto público en los modelos de Ciclo Real.

En este epígrafe introducimos la política fiscal en un modelo sencillo de Ciclo Real, materializada en cambios en el gasto público. Entre las contribuciones pioneras que introducen el papel de la política fiscal dentro de un modelo de equilibrio general podemos nombrar a Barro (1989), Aschauer (1988) y Baxter y King (1993). Lo que tienen en común estos enfoques es el énfasis en la respuesta de la oferta de trabajo y del stock de capital ante cambios en el gasto público y en los tipos impositivos.

Si los primeros modelos RBC descansaban en la hipótesis de que sólo shocks tecnológicos persistentes pueden explicar los cambios y las correlaciones propias del ciclo económico, podemos preguntarnos si el mismo comportamiento puede surgir si el modelo de Ciclo Real es ampliado para incluir otras fuentes de shocks. Lógicamente, las perturbaciones de carácter monetario y fiscal siempre han sido sospechosas de causar fluctuaciones económicas, con lo que es natural preguntarse qué efectos tendrían estos shocks si los incluimos en un modelo de corte clásico.

Sin embargo, debido a que las fluctuaciones cíclicas del gasto público y de los impuestos son pequeñas, las variables fiscales no son candidatos a explicar el ciclo económico. En el modelo de Ciclo Real, cuando van unidas a perturbaciones tecnológicas sí ayudan a mejorar la predicción acerca de la volatilidad del consumo y de las horas trabajadas.

El modelo de Ciclo Real, como extensión del modelo de Ramsey, puede ser expuesto en tiempo continuo y con esta formulación estudiaremos los efectos de la política fiscal siguiendo la aportación pionera de Baxter y King (1993) en el caso del efecto de los impuestos a tanto alzado sobre las variables del modelo.

5.11.1. Efectos del gasto público con impuestos a tanto alzado.

El modelo, formulado en tiempo contínuo viene dado por la siguiente función de utilidad:

$$\int_0^\infty \exp^{-\rho t}\left(a\ln C + (1-a)\frac{\ell^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)dt$$

donde ρ es la tasa subjetiva de descuento. La restricción presupuestaria es:

$$\dot{A}(t) = r(t)A(t) + W(t)N(t) - T(t) - C(t)$$

donde $A(t)$ es el nivel de activos financieros, y $T(t)$ son impuestos a tanto alzado.

Resolviendo la ecuación diferencial para $A(t)$ hacia delante obtenemos la condición de transversalidad o condición No-Ponzi.

$$\left[\dot{A}(t) - r(t)A(t)\right]\exp(-R(t)) = (W(t)N(t) - T(t) - C(t))\exp(-R(t)) : \frac{dR(t)}{dt} = r(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[A(t)\exp(-R(t))\right] = (W(t)N(t) - T(t) - C(t))\exp(-R(t))$$

$$A(t) = \int_0^\infty \left[(W(t)N(t) - T(t) - C(t))\exp(-R(t))\right]dt + \lim_{t\to\infty} A(t)\exp(-R(t))$$

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\exp(-R(t)) = 0 : R(t) = \int_0^s r(t)dt$$

Las condiciones de primer orden se obtienen planteando el hamiltoniano.

$$\mathcal{H} = a\ln C + (1-a)\frac{\ell^{1-\theta}-1}{1-\theta}\ln\ell + \mu\left[rA + WN - T - C\right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \frac{a}{C} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial N} = \frac{1-a}{\ell^\theta} - \mu W = 0$$

$$-\frac{\partial H}{\partial A} = \dot{\mu} - \rho\mu \Rightarrow -\mu r = \dot{\mu} - \rho\mu \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - r$$

que pueden ser reducidas a dos, eliminando el multiplicador.

$$\frac{\dot{C}}{C} = r - \rho : W = \frac{1-a}{a}\frac{C}{(1-N)^{\theta}} : \ell = 1 - N$$

Las condiciones de primer orden para las empresas son las habituales.

Con la función de producción Cobb-Douglas vienen dadas por:

$$Y = ZK^{\alpha}N^{1-\alpha} : \frac{\partial Y}{\partial N} = W = (1-\alpha)\frac{Y}{N} : \frac{\partial Y}{\partial K} = r + \delta = \alpha\frac{Y}{K}$$

La restricción de recursos viene dada por:

$$Y = C + I + G$$

y el gasto público se financia con impuestos de cuantía fija (lump-sum taxes).

$$G = T$$

Multiplicadores a largo plazo.

Veamos en primer lugar el efecto a largo plazo de un cambio en el gasto público.

En el estado estacionario, tanto la variación del stock de capital y como la del consumo son nulos con lo que:

$$r = \rho : \frac{I}{K} = \delta : \frac{Y}{K} = \frac{\rho + \delta}{\alpha} : \frac{I}{Y} = \delta\frac{K}{Y}$$

El que los grandes ratios sean constantes en estado estacionario nos permite calcular el efecto a largo plazo de un aumento del consumo público.

Diferenciando el equilibrio en el mercado de bienes o restricción de recursos:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{C}{Y}\frac{dC}{C} + \frac{I}{Y}\frac{dI}{I} + \frac{G}{Y}\frac{dG}{G}$$

donde

$$\frac{C}{Y} + \frac{I}{Y} + \frac{G}{Y} = 1$$

A lo largo de la senda de crecimiento equilibrado sabemos que:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dK}{K} = \frac{dI}{I} = \frac{dN}{N} = \frac{dW}{W}$$

y por tanto, a partir de las condiciones de primer orden, obtenemos:

$$\frac{dC}{C} = -\theta\frac{N}{1-N}\frac{dN}{N} = -\left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{dY}{Y}$$

donde

$$\frac{N}{1-N} = s_n^{\ell} : \sigma_n = \frac{1}{\theta}$$

que sustituida en la variación de la producción:

$$\frac{dY}{Y} = -\left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}\frac{dY}{Y} + \frac{I}{Y}\frac{dY}{Y} + \left(1 - \frac{C}{Y} - \frac{I}{Y}\right)\frac{dG}{G}$$

$$\left(1 + \left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y} - \frac{I}{Y}\right)\frac{dY}{Y} = \left(1 - \frac{C}{Y} - \frac{I}{Y}\right)\frac{dG}{G}$$

Y en forma de multiplicador:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{\frac{Y}{G}\left(1 - \frac{C}{Y} - \frac{I}{Y}\right)}{\left(1 - \frac{I}{Y} + \left(s_N^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{I}{Y} + \left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}} > 0$$

De igual forma, para el consumo y para el stock de capital obtenemos los siguientes multiplicadores a largo plazo:

$$-1 < \frac{dC}{dG} = -\frac{\left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}}{1 - \frac{I}{Y} + \left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}} < 0$$

$$\frac{dK}{dG} = \frac{1}{\delta}\frac{dI}{dG} = \frac{1}{\delta}\frac{\frac{I}{Y}}{1 - \frac{I}{Y} + \left(s_n^{\ell}\sigma_n\right)^{-1}\frac{C}{Y}} > 0$$

Los resultados anteriores dependen crucialmente de la relación horas de trabajo/ocio de estado esacionario, s_N^{ℓ} y de la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo, σ_n. Si la oferta de trabajo fuese exógena, y no entrase en la función de utilidad, $a = 1$, $s_n^{\ell} = 0$, obtendríamos a largo plazo el resultado clásico estándar en el que las variaciones del gasto público no afectarían al output y sólo darían lugar al conocido efecto expulsión total (crowding out) en el que el consumo privado cae en la misma cuantía que aumenta el gasto público. Por otra parte, mientras mayor sea σ_n, (más elástica es la curva de oferta de trabajo) mayor es el efecto a largo plazo del aumento del gasto público en el output, la inversión y el stock de capital y más pequeño es el efecto expulsión sobre el consumo.

La dinámica a corto plazo.

El modelo log-linealizado viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\hat{K} = \delta(\hat{I} - \hat{K}) \tag{(5.54)}$$

$$\Delta\hat{C} = \rho\hat{r} \tag{(5.55)}$$

$$\hat{G} = \hat{T}$$

$$\hat{W} = \hat{Y} - \hat{N}$$

$$\rho\hat{r} = (\rho + \delta)\left(\hat{Y} - \hat{K}\right) \tag{(5.56)}$$

$$\hat{Y} = \hat{z}_t + \alpha\hat{K} + (1-\alpha)\hat{N}$$

$$\hat{Y} = s_c\hat{C} + s_I\hat{I} + s_G\hat{G} \tag{(5.57)}$$

$$\hat{N} = s_n^{\ell}\sigma_n\left(\hat{W} - \hat{C}\right)$$

El sistema anterior presenta dos ecuaciones dinámicas, ecuaciones (5.54) y (5.55), en las variables de estado, K y C, siendo el stock de capital la variable predeterminada. Reduciremos el sistema anterior a uno dinámico en K y C.

En orden a escribir el sistema dinámico en términos de las dos variables anteriores comenzamos por expresar $\hat{Y}$, $\hat{W}$ y $\hat{N}$ en función de del stock de capital y del consumo. Por tanto, a partir de

$$\hat{W} - \hat{Y} + \hat{N} = 0$$

$$\hat{Y} - (1-\alpha)\hat{N} = \alpha\hat{K}$$

$$-\hat{N} + \sigma_n s_n^\ell \hat{w} = \sigma_n s_n^\ell \hat{C}$$

Resolvemos el sistema estático aplicando Cramer, para obtener:

$$(1-\alpha)\hat{N} = (1-\phi)\hat{C} + \alpha(\phi - 1)\hat{K} \qquad ((5.58))$$

$$(1-\alpha)\hat{W} = \alpha(\phi - 1)\hat{C} + \alpha(1-\alpha\phi)\hat{K} \qquad ((5.59))$$

$$\hat{Y} = \alpha\phi\hat{K} + (1-\phi)\hat{C} \qquad ((5.60))$$

donde

$$\phi = \frac{1+\sigma_n s_n^\ell}{1+\alpha\sigma_n s_n^\ell} > 1 \Rightarrow \sigma_n s_n^\ell = \frac{\phi - 1}{1-\alpha\phi} > 0$$

Sustituyendo (5.60) en (5.57).

$$s_I\hat{I} = \hat{Y} - s_c\hat{C} - s_G\hat{G}$$

$$s_I\hat{I} = \alpha\phi\hat{K} - (s_C + \phi - 1)\hat{C} - s_G\hat{G}$$

Y a partir de (5.56) y (5.60).

$$\frac{\rho}{\rho+\delta}\hat{r} = (\alpha\phi - 1)\hat{K} + (1-\phi)\hat{C}$$

obtenemos el sistema a resolver:

$$\Delta\hat{K} = \delta(\hat{I} - \hat{K}) = \frac{Y}{K}\left[(\alpha\phi - s_I)\hat{K} - (s_C + \phi - 1)\hat{C}\right] - \frac{Y}{K}s_G\hat{G}$$

$$\Delta\hat{C} = (\rho+\delta)\left[(\alpha\phi - 1)\hat{K} + (1-\phi)\hat{C}\right]$$

Expresado de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{K} \\ \Delta\hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{Y}{K}s_G \\ 0 \end{bmatrix} \hat{G}$$

La traza y el determinante de la matriz de coeficientes del sistema vienen dados por:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} = \frac{Y}{K}(\alpha\phi - s_I) + (\rho + \delta)(1 - \phi) = \frac{Y}{K}\left[\alpha\phi - s_I + \alpha(1 - \phi)\right] =$$

$$= \frac{Y}{K}(-s_I + \alpha) = \rho > 0 : |A| = -(\rho + \delta)\frac{Y}{K}\left[s_I(\phi - 1) + \phi s_C(1 - \alpha)\right] < 0$$

Las raíces características son reales y alternas en signo. Denotaremos la raíz estable como $-\lambda_1 > 0$ y la inestable como $\lambda_2 > 0$.

La relación de estado estacionario entre el stock de capital y el gasto público viene dada por las dos ecuaciones siguientes.

$$\hat{C} = \frac{\alpha\phi - s_I}{s_C + \phi - 1}\hat{K} - \frac{s_G}{s_C + \phi - 1}\hat{G} : \hat{C} = -\frac{1 - \alpha\phi}{\phi - 1}\hat{K}$$

La perturbación de gasto público puede expresarse de forma general como:

$$\xi_t^G = -\frac{Y}{K}s_G\hat{G}\exp\{-\varepsilon t\} = g\exp\{-\varepsilon t\}$$

Si

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow \xi_t^G = -\frac{Y}{K}s_G\hat{G} = g$$

el incremento no esperado del gasto público es permanente.

Por contra, si

$$\varepsilon < 0 \Rightarrow \xi_t^G = -\frac{Y}{K}s_G\hat{G}\exp\{-\varepsilon t\} : \lim_{t\to\infty}\xi_t^G = 0$$

el shock de gasto público es transitorio pues conforme nos alejamos en el tiempo del momento en el que se produce la perturbación, los efectos del mismo van desapareciendo. De esta forma, el parámetro ε nos indica el grado de persistencia del shock.

Shock permanente de gasto público ($\varepsilon = 0$).

En el apéndice 5.3 desarrollamos la solución del sistema.

La dinámica de transición y el equilibrio a largo plazo vienen dados por la solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C(0) \end{bmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + \frac{g}{\lambda_1\lambda_2}\left(1 - \exp\{\lambda_1 t\}\right) \begin{bmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}(t) \\ \hat{C}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}(0) \end{bmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} - \left(1 - \exp\{\lambda_1 t\}\right) \begin{bmatrix} (\rho+\delta)(1-\phi) \\ (\rho+\delta)(1-\alpha\phi) \end{bmatrix} \frac{\frac{Y}{K} s_G \hat{G}}{\lambda_1\lambda_2}$$

Para calcular el multiplicador de impacto sobre el consumo, recurrimos a la condición de estabilidad cuando una de las raíces es positiva:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(0) + \mathcal{L}\{g_K, \lambda_2\} \\ C(0) + \mathcal{L}\{g_C, \lambda_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\frac{Y}{K} s_G \hat{G}}{\lambda_2} \\ C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cambio en el momento en el que se produce la perturbación o multiplicador de impacto viene dado por:

$$\hat{C}(0) = -\left(\frac{\lambda_2 + (\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2(\phi + s_c - 1)}\right) s_G \hat{G} < 0$$

A largo plazo, los multiplicadores para el consumo y el stock de capital vienen dados por:

$$\hat{C}(\infty) = -\left(\frac{Y}{K}\frac{(\rho+\delta)(1-\alpha\phi)}{\lambda_1\lambda_2}\right) s_G \hat{G} < 0$$

$$\hat{K}(\infty) = \left(\frac{Y}{K}\frac{(\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_1\lambda_2}\right) s_G \hat{G} > 0$$

Sustituyendo en sus expresiones correspondientes, ecuaciones (5.56), (5.57) y (5.58) obtenemos los multiplicadores de impacto para cada una de las variables.

$$\hat{W}(0) = -\frac{\alpha}{1-\alpha}(\phi-1)\left(\frac{\lambda_2 + (\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2(\phi + s_c - 1)}\right) s_G \hat{G} < 0$$

$$\hat{Y}(0) = \left(\frac{(\phi-1)(\lambda_2 + (\rho+\delta)(\phi-1))}{\lambda_2(\phi + s_c - 1)}\right) s_G \hat{G} > 0$$

$$\hat{N}(0)=\frac{1-\phi}{1-\alpha}\hat{C}(0)=\frac{1-\phi}{1-\alpha}\left(\frac{\lambda_2+(\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2(\phi+s_c-1)}\right)s_G\hat{G}>0$$

El tipo de interés real lo podemos calcular obteniendo la curva frontera de los precios de los factores:

$$\hat{W}=\hat{Y}-\hat{N}=(\hat{Y}-\hat{K})+(\hat{K}-\hat{N})=\frac{\rho}{\rho+\delta}\hat{r}+\frac{1}{\alpha}\hat{W}$$

$$\hat{r}(0)=\frac{(\phi-1)(\rho+\delta)}{\rho}\left(\frac{\lambda_2+(\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2(\phi+s_c-1)}\right)s_G\hat{G}>0$$

Finalmente el multiplicador de impacto para la inversión viene dado por:

$$s_I\hat{I}(0)=-(s_c+\phi-1)\hat{C}(0)-s_G\hat{G}=\left(\frac{(\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2}\right)s_G\hat{G}=\lambda_1\frac{K}{Y}\hat{K}(\infty)$$

$$\hat{I}(0)=\frac{\lambda_1}{\delta}\hat{K}(\infty)$$

Esta ecuación nos muestra el denominado mecanismo del acelerador, esto es, el impacto en la inversión es proporcional al efecto a largo plazo sobre el stock de capital, donde la raíz estable juega el papel de velocidad del ajuste.

El aumento en el gasto público da lugar a una disminución en la demanda de consumo y una caída en el salario real.

Calibración.

Siguiendo a King y Rebelo (1999) podemos callibrar el modelo con los siguientes parámetros:

$r=\rho$	δ	α	s_I	s_G	s_C	a	N
0.016	0.024	1/3	0.20	0.20	0.6	0.183	0.2

A partir de

$$W(1-N)=\frac{1-a}{a}:W=(1-\alpha)\frac{Y}{N}$$

obtenemos

$$\frac{1-N}{N}=\frac{1-a}{a}\frac{s_C}{1-\alpha}$$

King y Rebelo estiman que el tiempo dedicado a trabajar es del 20% , con lo que $N = 0.2$ y $s_N^\ell = 4$.

Dado que

$$a = \frac{s_C}{s_C + (1-\alpha)s_N^\ell} = 0.183$$

Finalmente, Z es un parámetro que nos fija la escala de la economía. Podemos normalizarlo de tal forma que $Y = 1$. A partir de la función de producción:

$$Z = N^{-\alpha}\left(\frac{Y}{K}\right)^{1-\alpha} = 1.442$$

Con esta parametrización, el consumo, la inversión y el gasto público agregado coinciden con sus participaciones respectivas en la producción.

La matriz jacobiana del sistema viene dada por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.0615 & -0.209 \\ -0.0114 & -0.04569 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \xi_t^G \\ \xi_t^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.024 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y las raíces del sistema por $\lambda_1 = 0.0646$ y $\lambda_2 = 0.08$.

Los multiplicadores de impacto y de largo plazo vienen resumidos en la tabla 5.3.

Tabla 5.3		
Variable	Multiplador de impacto	Multiplicador a largo plazo
$\frac{dY}{dG}$	1.029	1.054
$\frac{dC}{dG}$	-0.54	-0.16
$\frac{dI}{dG}$	0.57	0.21
E_G^K	0	0.21
E_G^N	0.31	0.21
E_G^r	0.52	0
E_G^W	-0.10	0

Shock temporal de gasto público ($\varepsilon = 0$).

La solución del sistema dinámico en $K(t)$ y $C(t)$ viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}(t) \\ \hat{C}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}(0) \end{bmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + \frac{g}{\lambda_2 + \varepsilon} \begin{bmatrix} a_{22} + \varepsilon \\ -a_{21} \end{bmatrix} \frac{\exp\{\lambda_1 t\} - \exp\{-\varepsilon t\}}{\lambda_1 + \varepsilon} : (\varepsilon \neq \lambda_1)$$

$$\left[\begin{array}{c} \hat{K}(t) \\ \hat{C}(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hat{C}(0) \end{array}\right] \exp\{\lambda_1 t\} - \left[\begin{array}{c} (\rho+\delta)(1-\phi)+\varepsilon \\ (\rho+\delta)(1-\alpha\phi) \end{array}\right] \frac{\exp\{\lambda_1 t\} - \exp\{-\varepsilon t\}}{(\lambda_1+\varepsilon)(\lambda_2+\varepsilon)} \frac{Y}{K} s_G \hat{G}$$

Los multiplicadores de impacto sobre el consumo y la producción son:

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda_2 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda_2 - a_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{g}{\lambda_2+\varepsilon} \\ C(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{C}(0) = -\left(\frac{\lambda_2 + (\rho+\delta)(\phi-1)}{\lambda_2(\phi+s_c-1)}\right) \frac{s_G}{\lambda_2+\varepsilon} \hat{G} < 0$$

$$\left[\hat{Y}(0)\right]_{\varepsilon>0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\varepsilon} \left(\frac{(\phi-1)(\lambda_2+(\rho+\delta)(\phi-1))}{(\phi+s_c-1)\lambda_2}\right) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\varepsilon}\right) \left[\hat{Y}(0)\right]_{\varepsilon=0} > 0$$

El impacto sobre la producción es más pequeño cuanto menos persistente sea el shock de gasto público, esto es, mientras más alto sea ε.

Es interesante calcular el impacto inicial sobre la inversión neta. Diferenciando la solución con respecto al tiempo y haciendo $t = 0$.

$$\frac{d\hat{K}(0)}{dt} = \frac{(\rho+\delta)(\phi-1) - \varepsilon}{\lambda_2+\varepsilon} \frac{Y}{K} s_G \hat{G}$$

El cambio en la inversión neta depende de dos mecanismos que operan en direcciones opuestas: por una parte si la oferta de trabajo es muy elástica (ϕ alto) y el shock es muy persistente, (ε bajo), entonces el numerador de la expresión anterior será positivo y la inversión aumenta. Intuitivamente esto significa que aunque el consumo cae pero la producción aumenta considerablemente dada la alta elasticidad de la oferta de trabajo, el incremento en el gasto público no provoca ningún tipo de efecto desplazamiento sobre la inversión (no existe crowding-out sobre la inversión).

Si la oferta de trabajo es inelástica, ($\phi = 1$), o la perturbación de gasto es poco persistente, el impacto sobre la inversión es negativo, aunque a largo plazo retorna a su valor de equilibrio inicial.

En resumen, una perturbación de gasto público financiada con impuestos a tanto alzado provoca una disminución en el consumo, independientemente de la persistencia de la perturbación del gasto, una caída en el salario real, un aumento en el número de horas trabajadas y un aumento en la producción.

El mecanismo de transmisión que opera aquí es muy distinto al del modelo IS-LM tradicional. Mientras que en éste, el gasto eleva la demanda agregada y la producción directamente y a través del efecto inducido en el consumo predice que el multiplicador del gasto será mayor a uno, en el modelo de Ciclo Real, el aumento del gasto tiene que ser financiado con mayores impuestos en el futuro con lo cual los individuos experimentan una disminución en el valor actual de su riqueza, lo que induce a sustituir horas de ocio por horas de trabajo.

El multiplicador de la producción con respecto al gasto depende de los valores de calibración y de las función de preferencias utilizada. Por ejemplo, Greenwood y Huffman (1988) proponen la siguiente función de preferencias.

$$u(C_t, N_t) = \ln\left(C_t - \frac{a}{1+\theta}N^{1+\theta}\right)$$

Las condiciones de primer orden del problema para las economías domésticas vendrían dadas por:

$$\frac{1}{C_t - \frac{a}{1+\theta}N^{1+\theta}} = \lambda_t : \frac{aN^\theta}{C_t - \frac{a}{1+\theta}N^{1+\theta}} = \lambda_t W_t$$

La curva de oferta de trabajo por tanto serían independiente del consumo:

$$\ln a + \theta \ln N = \ln W_t$$

En este caso, un aumento del gasto público no desplaza la función de oferta de trabajo, con lo que la política fiscal no afecta al output ni al stock de capital, provocando únicamente un efecto expulsión sobre el consumo de igual cuantía al aumento del gasto público.

5.11.2. Gasto público en la función de utilidad.

La cuestión de los efectos del gasto público sobre las variables reales ha sido extensamente estudiada y estimada sobre todo en relación a dos cuestiones: el tamaño del multiplicador del gasto y el efecto del gasto público sobre el consumo.

Planteamos un modelo de Ciclo Real en el que la función de utilidad incluye gasto público, pudiendo ser como veremos complementario o sustitutivo del consumo privado. Siguiendo los trabajos de Linneman (2006), Ganelli y Tervala (2009), Amano y Wirjanto (1998), Bouakez y Rebei (2007) y Christiano y Eichenbaum (1992), supondremos que la función de utilidad es separable en consumo (desglosado en consumo privado y gasto público) y ocio.

Consideremos de nuevo la función instantánea de utilidad[56]:

$$u(C_t,\ell_t)=\sum_{t=0}^{\infty}\exp\{-\rho t\}\left(u(C_t,G_t)+a\frac{(1-N_t)^{1-\theta}}{1-\theta}\right):a,\theta>0$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$u_C(C_t,G_t)=\lambda_t$$

$$\frac{C}{u_C}\frac{\partial u_C}{\partial C}\hat{C}_t+\frac{G}{u_C}\frac{\partial u_C}{\partial G}\hat{G}_t=\hat{\lambda}_t$$

Dado que en estado estacionario $\lambda=u_C(C,G)$, dicha condición log-linealizada

[56]La forma habitual de expresar la tasa de descuento subjetiva es $\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t=\beta^t$.Sin embargo la estructura log-lineal del modelo permite que resulte también apropiada la formulación exponencial aunque entre ellas no existe prácticamente ninguna diferencia.

Si realizamos la aproximación de Taylor de primer orden a $exp\,\{\rho\}$ en el entorno de $\rho^*=0$ obtenemos:

$$\exp\{\rho\}\simeq\exp\{\beta^*\}+\exp\{\rho^*\}(\rho-\rho^*)$$

$$\exp\{\rho\}\simeq 1+\rho$$

Y por tanto

$$(1+\rho)^{-t}=\exp\{-\rho t\}$$

O bien a partir de $\ln(1+x)\cong x$, entonces $\ln(1+\rho)^{-1}\cong-\rho$ y $\exp\{-\rho\}=(1+\rho)^{-1}=\beta$

tiene la siguiente expresión:

$$\hat{\lambda}_t = \varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t \tag{(5.61)}$$

El signo de η_{cG} depende de como consideremos el gasto público en relación al consumo privado. En concreto, si asumimos complementariedad en ambos, tenemos que:

$$\eta_{cG} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_C}{\partial G} > 0$$

esto es, un aumento del gasto público eleva la utilidad marginal del consumo, dado un nivel de éste.

Veamos en primer lugar el efecto de un incremento del gasto público sobre el nivel de consumo.

Las condiciones de primer orden relevantes para calcular dicho efecto son la restricción de recursos, la función de producción y la condición de primer orden con respecto a la oferta de trabajo. Dado que deseamos ver bajo que condiciones de la función de utilidad propuesta el efecto del gasto público sobre el consumo es positivo o negativo, supondremos que a corto plazo el efecto del gasto público sobre el stock de capital es pequeño y por tanto, la respuesta de la inversión es nula; como además no estamos interesados en los efectos de la perturbación de oferta, la suprimimos de igual manera. De esta forma, en lo que sigue $\frac{I}{Y}\hat{I}_t = 0$, $\hat{Z}_t = 0$ y $\hat{K}_t = 0$.

A partir de la restricción de recursos y de la función de producción log-linealizadas.

$$\hat{Y}_t = \frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{G}{Y}\hat{G}_t = (1-\alpha)\hat{N}_t$$

$$\hat{N}_t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{G}{Y}\hat{G}_t\right)$$

La oferta de trabajo viene dada por:

$$\hat{\lambda}_t = \left(\sigma_N s_N^{\ell}\right)^{-1}\hat{N}_t - \hat{W}_t : \hat{W}_t = (\hat{Y}_t - \hat{N}_t)$$

Utilizando (5.61):

$$\varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t = \left(\sigma_N s_N^{\ell}\right)^{-1}\hat{N}_t - (\hat{Y}_t - \hat{N}_t)$$

$$\varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\left(\sigma_N s_N^{\ell}\right)^{-1} + 1\right)\left(\frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{G}{Y}\hat{G}_t\right) - \left(\frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{G}{Y}\hat{G}_t\right)$$

$$\left[\varepsilon_{CC} + \frac{C}{Y}\left(1 - \frac{\left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1} + 1}{1-\alpha}\right)\right]\hat{C}_t =$$

$$\left[-\varepsilon_{CG}\hat{G}_t + \frac{G}{Y}\left(\left(\left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1} + 1\right)\frac{1}{1-\alpha} - 1\right)\right]\hat{G}_t$$

Finalmente el multiplicador del consumo con respecto al gasto público viene dado por:

$$\frac{d\hat{C}_t}{d\hat{G}_t} = \frac{-\varepsilon_{CG}(1-\alpha) + \left(\alpha + \left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1}\right)\frac{G}{Y}}{(1-\alpha)\varepsilon_{CC} - \left(\alpha + \left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1}\right)}$$

Dado que el denominador es negativo, un aumento en el gasto público provocará un efecto positivo en el consumo si se verifica:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\alpha + \left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1}\right)\frac{G}{Y} < \varepsilon_{CG}$$

Christiano y Eichenbaum (1992) proponen la siguiente función de utilidad.

$$u(C_t, G_t) = \ln(C_t + \beta G_t)$$

La condición de primer orden para el consumo es $\frac{\partial u_C}{\partial G}$

$$u_C(C_t, G_t) = \frac{1}{C_t + \beta G_t} = \lambda_t \Rightarrow \varepsilon_{CC} = \frac{\partial \lambda_t}{\partial C_t}\frac{C}{\lambda} = -\frac{C}{C + \beta G}$$

$$\varepsilon_{CG} = \frac{\partial \lambda_t}{\partial G_t}\frac{G}{\lambda} = -\frac{\beta}{(C+\beta G)^2}\frac{G}{\lambda}$$

Para $\beta = 0$ tendríamos el modelo básico mientras que si $\beta > 0$, entonces el consumo y el gasto público no serían complementarios.

Otras formas funcionales utilizadas en la literatura son:

$$u(C_t, G_t) = C_t^{-\sigma} G_t^{\gamma(1-\sigma)} \Rightarrow \varepsilon_{CC} = \frac{\partial u_C}{\partial C_t}\frac{C}{u_C} = -\sigma$$

Amano y Wirjanto (1998) suponen que la relación entre consumo privado y público viene dado por una función constante elasticidad de sustitución.

$$u_C(C_t, G_t) = \frac{1}{1-\sigma}\left[\left(\phi C_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + (1-\phi)G_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{1-\sigma}$$

Para $\alpha \to \infty$, el consumo público privado y el consumo público son sustitutos perfectos, mientras que para $\alpha = 0$, ambos son complementarios perfectos.

La modificación de la función de utilidad al introducir el gasto público en la función de utilidad, asumiendo separabilidad con el ocio da lugar a las siguientes condiciones de primer orden:

$$u_C(C_t, G_t) = \lambda_t$$

$$\theta(1-N_t)^{-\theta} = \lambda_t(1-\alpha)Z_t N_t^{-\alpha} K_t^{\alpha}$$

$$u_C(C_t, G_t) = \beta E_t\left(U_C(C_{t+1}, G_{t+1})(1+r_{t+1})\right)$$

$$r_{t+1} = \alpha\left(\frac{Z_{t+1}N_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{1-\alpha} - \delta$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Z_t^{1-\alpha}N_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} - C_t - G_t$$

El modelo log-linealizado viene dado por las siguientes ecuaciones.

$$\hat{\lambda}_t = \varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t$$

$$\hat{\lambda}_t = \left[\left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1} + \alpha\right]\hat{N}_t - \alpha\hat{K}_t - \hat{Z}_t$$

$$\hat{\lambda}_t = E_t\hat{\lambda}_{t+1} + E_t\left[\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\hat{N}_{t+1} - \hat{K}_{t+1} + \hat{Z}_{t+1}\right)\right]$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + \lambda_2\hat{N}_t + \lambda_3\hat{G}_t + (1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\hat{C}_t$$

donde los parámetros verifican las siguientes relaciones de estado estacionario.

$$\lambda_1 = 1+r : \lambda_2 = (1-\alpha)\frac{Y}{K} : \lambda_3 = -\frac{r+\delta}{\alpha}\frac{G}{Y} : \frac{Y}{K} = \frac{(r+\delta)}{\alpha} : \alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r}$$

Sustituyendo el multiplicador de Lagrange, las tres ecuaciones lineales que nos quedan permiten calcular la solución para el consumo, el nivel de empleo y el stock de capital futuro.

$$\varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t = \left[\left(\sigma_n s_N^\ell\right)^{-1} + \alpha)\right]\hat{N}_t - \alpha\hat{K}_t - \hat{Z}_t \tag{(5.62)}$$

$$\varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t =$$

$$= E_t\left(\varepsilon_{CC}\hat{C}_{t+1} + \varepsilon_{CG}\hat{G}_{t+1}\right) + E_t\left[\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\hat{N}_{t+1} - \hat{K}_{t+1} + \hat{Z}_{t+1}\right)\right] \tag{(5.63)}$$

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + \lambda_2\hat{N}_t + \lambda_3\hat{G}_t + (1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\hat{C}_t \tag{(5.64)}$$

Solución.

Utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados. La solución para las variables endógenas es función lineal de la variable predeterminada y de las variables exógenas, por lo que debemos determinar las elasticidades η_{ij}, donde i denota la variable endógena correspondiente y j es o bien la variable predeterminada o bien la exógena.

$$\hat{C}_t = \eta_{ck}\hat{K}_t + \eta_{cz}\hat{Z}_t + \eta_{cG}\hat{G}_t$$

$$\hat{N}_t = \eta_{nk}\hat{K}_t + \eta_{nz}\hat{Z}_t + \eta_{nG}\hat{G}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{k}\hat{Z}_t + \eta_{kG}\hat{G}_t$$

Sustituyendo el consumo y las horas de trabajo en (5.62):

$$\varepsilon_{CC}\left(\eta_{ck}\hat{K}_t + \eta_{cz}\hat{Z}_t + \eta_{cG}\hat{G}_t\right) + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t =$$

$$= \left[\left(\sigma_n s_N^\ell\right)^{-1} + \alpha\right]\left(\eta_{nk}\hat{K}_t + \eta_{nz}\hat{Z}_t + \eta_{nG}\hat{G}_t\right) - \hat{Z}_t - \alpha\hat{K}_t)$$

Identificando los términos correspondientes:

$$\varepsilon_{CC}\eta_{ck} - \left[\left(\sigma_n s_N^\ell\right)^{-1} + \alpha\right]\eta_{nk} = -\alpha$$

$$\varepsilon_{CC}\eta_{cz} - \left[\left(\sigma_n s_N^\ell\right)^{-1} + \alpha\right]\eta_{nz} = -1$$

$$\varepsilon_{CC}\eta_{cG} + \varepsilon_{CG} - \left[\left(\sigma_n s_N^{\ell}\right)^{-1} + \alpha\right]\eta_{nG} = 0 \tag{(5.65)}$$

Podemos interpretar cualitativamente la última de estas ecuaciones. Si $\varepsilon_{CG} = 0$, hemos visto que el aumento del gasto público eleva la oferta de trabajo $\eta_{nG} > 0$, con lo que aumenta la desutilidad marginal a trabajar; en el óptimo, la utilidad marginal del consumo debe aumentar o lo que es lo mismo el nivel de consumo debe ser menor, por lo tanto, consumo y oferta de trabajo se moverían en direcciones opuestas. Si $\varepsilon_{CG} > 0$, y el gasto público eleva la utilidad marginal de los individuos ya no es necesario que la utilidad marginal derivada del consumo privado aumente, con lo que no se tiene porqué dar una disminución en el consumo privado ante el aumento del gasto público.

De igual manera, la identificación para (5.63):

$$\varepsilon_{CC}\hat{C}_t + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t = E_t\left(\varepsilon_{CC}\hat{C}_{t+1} + \varepsilon_{CG}\hat{G}_{t+1}\right) + E_t\left[\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\hat{N}_{t+1} - \hat{K}_{t+1} + \hat{Z}_{t+1}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{CC}\left(\eta_{ck}\hat{K}_t + \eta_{cz}\hat{Z}_t + \eta_{cG}\hat{G}_t\right) + \varepsilon_{CG}\hat{G}_t =$$

$$= \varepsilon_{CC}\left[\eta_{ck}\left(\eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}\hat{Z}_t + \eta_{kG}\hat{G}_t\right) + \eta_{cz}\hat{Z}_{t+1} + \eta_{cG}\hat{G}_{t+1}\right] + E_t\varepsilon_{CG}\hat{G}_{t+1}$$

$$-\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}\hat{Z}_t + \eta_{kG}\hat{G}_t\right) + \alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}E_t\hat{Z}_{t+1}$$

$$+\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}E_t\left[\eta_{nk}\left(\eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}\hat{Z}_t + \eta_{kG}\hat{G}_t\right) + \eta_{nz}\hat{Z}_{t+1} + \eta_{nG}\hat{G}_{t+1}\right]$$

$$\varepsilon_{CC}\eta_{ck}(1-\eta_{kk}) = -\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\eta_{kk} + \alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\eta_{nk}\eta_{kk} \Rightarrow \eta_{ck} = -\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\eta_{kk}(1-\eta_{nk})}{\varepsilon_{CC}\left(1-\eta_{kk}\right)}$$

$$\varepsilon_{CC}\eta_{cz} = \varepsilon_{CC}\left(\eta_{ck}\eta_{kz} + \eta_{cz}\rho_z\right) - \alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\eta_{kz} - \eta_{nk}\eta_{kz} - \eta_{nz}\rho_z - \rho_z)$$

$$\varepsilon_{CC}\eta_{cG} + \varepsilon_{CG} = \varepsilon_{CC}\left(\eta_{ck}\eta_{kG} + \eta_{cG}\rho_g\right) - \alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\eta_{kG} - \eta_{nk}\eta_{kG} - \eta_{nG}\rho_g\right) \tag{(5.66)}$$

Y finalmente, para (5.64).

$$\hat{K}_{t+1} = \lambda_1\hat{K}_t + \lambda_2(\hat{Z}_t + \hat{N}_t) + \lambda_3\hat{G}_t + (1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\hat{C}_t$$

$$\eta_{kk}\hat{K}_t + \eta_{kz}\hat{Z}_t + \eta_{kG}\hat{G}_t =$$

$$\lambda_1\hat{K}_t + \lambda_2\hat{Z}_t + \lambda_2\left(\eta_{nk}\hat{K}_t + \eta_{nz}\hat{Z}_t + \eta_{nG}\hat{G}_t\right) + \lambda_3\hat{G}_t +$$

$$+(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\left(\eta_{ck}\hat{K}_t + \eta_{cz}\hat{Z}_t + \eta_{cG}\hat{G}_t\right)$$

$$\eta_{kk} = \lambda_1 + \lambda_2\eta_{nk} + (1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\eta_{ck}$$

$$\eta_{kz} = \lambda_2(1+\eta_{nz}) + \eta_{cz}(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)$$

$$\eta_{kG} = \lambda_3 + \lambda_2\eta_{nG} + \eta_{cG}(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3) \qquad ((5.67))$$

El sistema no lineal anterior puede resolverse calibrando el modelo. Podemos considerarse por ejemplo, los siguientes valores.

$$\alpha = \frac{1}{3} : \delta = 0.025 : \rho_z = \rho_g = 0.95 : r = 0.015 : \frac{G}{Y} = 0.2$$

$$N = \frac{1}{4} : \sigma_n = 1 : \varepsilon_{CC} = -1.5$$

Para ε_{CC} tomamos el valor de -1.5. Dicho parámetro nos da una medida de la aversión al riesgo y las estimaciones empíricas lo sitúan en un rango entre -1 y -2. Con un valor igual a -1,frecuentemente utilizado, perderíamos la propiedad de complementariedad entre consumo privado y público.

Sustituyendo estos valores en nuestras ecuaciones obtenemos:

$$\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{1+r} \cong 0.027$$

$$\lambda_1 \cong 1.015;\ \lambda_2 \cong 0.08;\ \lambda_3 \cong -0.024 : 1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = -0.071$$

Resolviendo el sistema lineal obtendríamos el impacto de las variables exógenas sobre las endógenas. Aquí seguiremos una estrategia distinta, fijándonos en las siguientes ecuaciones que nos dan la magnitud del cambio en las variables endógenas cuando cambia el gasto público.

Las ecuaciones son las que nos miden el impacto del gasto público son (5.65), (5.66) y (5.67) y con los parámetros calibrados y realizando el supuesto $\eta_{kG} = 0$. Dicha simplifación obedece a que en el modelo de Ciclo Real con gasto público, Romer (2002, pag 184) con los parámetros anteriores calcula que la respuesta del stock de capital al gasto público es igual a -0.004.

$$-1.5\eta_{cG} + \varepsilon_{CG} - 0.76\eta_{nG} = 0 \tag{(5.65)}$$

$$-1.5\eta_{cG} + \varepsilon_{CG} = -1.5\rho_g\eta_{cG} + 0.027\eta_{nG}\rho_g \tag{(5.66)}$$

$$0 = -0.024 + 0.08\eta_{nG} - 0.071\eta_{cG} \tag{(5.67)}$$

Si $\varepsilon_{CG} = 0$, no existe complementariedad entre consumo privado y gasto público, y consumo privado y horas de trabajo se mueven en direcciones contrarias sólo con ver (5.63) y (5.64), esto es, las horas trabajadas aumentarían y el consumo privado disminuiría.

Sustituyendo (5.65) en (5.63) obtenemos

$$-2.17\eta_{cG} + \varepsilon_{CG} = 0.22$$

Por tanto para que $\eta_{cG} > 0$, es necesario que como mínimo ε_{CG} sea igual a 0.22, ya que:

$$\eta_{cG} = \frac{\varepsilon_{CG} - 0.22}{2.17}$$

Por tanto, mientras mayor sea el grado de complementariedad entre consumo privado y gasto público mayor será la respuesta positiva del consumo ante incrementos del gasto público.

En el gráfico 5.4. observamos el efecto conjunto del aumento del gasto público y de la perturbación tecnológica en el mercado de trabajo clásico. El shock tecnológico desplaza la demanda de trabajo hacia la derecha y el shock de gasto público desplaza la curva de oferta hacia la derecha, debido al efecto riqueza adverso. Dos consecuencias se extraen de la introducción de complementariedad entre gasto público y consumo privado. En primer lugar, la correlación entre horas trabajadas y salario real se acerca a la evidencia empírica, esto es, las perturbaciones provocan un aumento notable en el factor trabajo utilizado y una variación pequeña en el salario real y en segundo lugar, el aumento del gasto público no supone una disminución del consumo lo cual estaría de acuerdo con la evidencia empírica, ya que éste tiene un comportamiento procíclico.

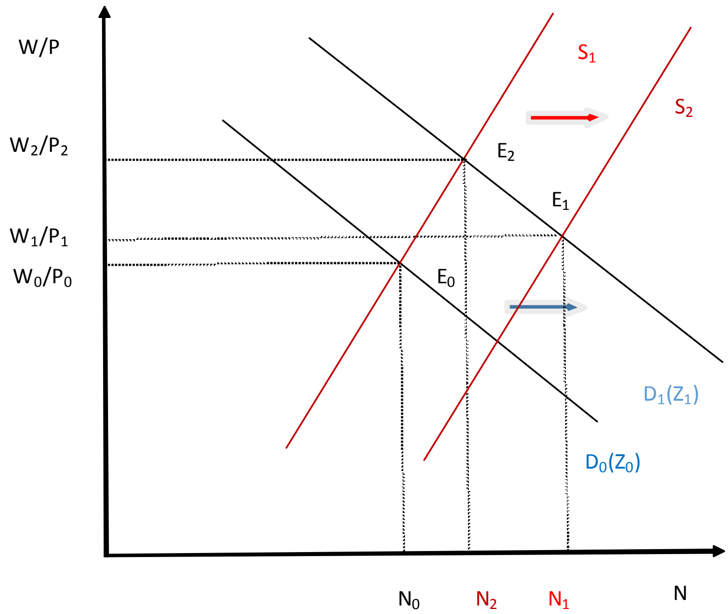

Gráfico 5.4

5.11.3. Deuda e impuestos en el modelo de crecimiento neoclásico.

En este epígrafe ampliamos el modelo de Campbell (1994) y estudiamos, siguiendo la aportación de Ludvigson (1996) cómo afecta un aumento del déficit presupuestario debido a una reducción de impuestos al output a la inversión, al consumo y al nivel de horas trabajadas.

Algunos autores, Dotsey (1990) o McGrattan (1994) muestran evidencia de que un déficit provocado por reducciones de impuestos sobre el capital tiene un efecto expansivo sobre la producción y la inversión si dicho déficit es pagado en el futuro con impuestos a tanto alzado. Dotsey (1994), a partir de un modelo con oferta de trabajo inelástica concluye que tipos impositivos más bajos y déficits presupuestarios más altos conducen a reducciones en la inversión y la producción si dicho déficit debe ser pagado a partir de impuestos sobre la renta, con lo que la estructura impositiva juega un papel decisivo para determinar los efectos de la política fiscal.

El modelo básico de Ciclo Real con oferta de trabajo variable demuestra que la elasticidad de sustitución intertemporal en las horas de trabajo en respuesta a cambios en el salario después de impuestos es el principal factor determinante para explicar la respuesta de la producción y la inversión a un aumento en la deuda del Estado.

Un aumento del déficit hoy, debido a una reducción de impuestos, supone que aunque los tipos impositivos son hoy más bajos, en el futuro serán más altos. La reducción de tipos impositivos conduce a una sustitución de ocio por horas de trabajo pero el aumento futuro de los impuestos reduce el rendimiento del ahorro después de impuestos, provocando que el consumo aumente. La inversión lo hará en la medida que la producción aumente más que el consumo.

Por tanto, la cuestión es si un déficit provocado por una disminución de impuestos reduce la inversión o la producción o por contra los tipos más bajos tienen un efecto estimulante sobre las mismas.

En segundo lugar, podemos preguntarnos si la forma en la que el Estado se financia importa. Hemos visto que un aumento del gasto público financiado con impuestos a tanto alzado tienen un efecto expansivo sobre la producción y la inversión debido al impacto negativo sobre la riqueza y por tanto al aumento en las horas trabajadas. Un aumento del gasto financiado con deuda puede también aumentar la oferta de trabajo y la producción, resultado que como veremos depende de los parámetros del modelo.

Por otra parte, los resultados del modelo son consistentes con el hecho de que un aumento en los tipos impositivos tienen un efecto contractivo sobre la actividad económica.

El modelo de Ciclo Real que planteamos tiene como novedad la ecuación dinámica para la deuda pública.

Las economías domésticas maximizan la siguiente función de utilidad sujetas a la restricción presupuestaria.

$$Max \quad \sum_{t=0}^{\infty} \ln C_t + \frac{(1-N_t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

La restricción de recursos es como habitualmente:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t - C_t - G_t$$

La acumulación de deuda viene dada por:

$$D_{t+1} = R^g_{t+1} D_t + G_t - \tau_t Y_t$$

donde D_t es la deuda pública y $R^g_{t+1} = 1 + r_{t+1}$ es el tipo de interés que paga dicha deuda a sus poseedores y τ_t el tipo impositivo medio sobre la renta. Asumimos que dicho tipo se conoce con certeza en el periodo en el que se emite dicha deuda.

Las dos restricciones pueden ser condensadas en una sola, sustituyendo el gasto público.

$$C_t + K_{t+1} + D_{t+1} = (1-\delta)K_t + R^g_{t+1} D_t + (1-\tau_t)Y_t$$

Las variables de decisión del problema son $\{C_t, N_t, K_{t+1}, D_{t+1}\}$.

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$C_t = \beta E_t \left(C_{t+1} R_{t+1}\right) : C_t = \beta E_t \left(C_{t+1} R^g_{t+1}\right)$$

$$(1-N_t)^{-\theta} = (1-\tau_t)\frac{(1-\alpha)}{C_t}\left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\alpha}$$

$$R_{t+1} = \alpha(1-\tau_{t+1})\left(\frac{Z_{t+1}N_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{1-\alpha} + (1-\delta)$$

donde hemos asumido que el rendimiento del capital está sujeto a imposición.

Las ecuaciones que nos dan el estado estacionario vienen dadas por:

$$\frac{1}{\beta} = R = R^g$$

$$\frac{N}{K} = \left(\frac{r+\delta}{\alpha(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} : R \simeq 1 + r$$

$$\frac{Y}{K}=\frac{r+\delta}{\alpha(1-\tau)}:\frac{C}{K}=\frac{(r+\delta)\left(1-\frac{X}{Y}\right)}{\alpha(1-\tau)}-\delta$$

$$\tau=\frac{D}{Y}(R-1)+\frac{G}{Y}$$

Las variable exógena del modelo, el gasto público, G_t, viene representada por el siguiente proceso:

$$\ln G_{t+1}=(1-\rho_g)\ln G+\rho_g\ln G_t+\varepsilon_{t+1}:\left|\rho_g\right|\leq 1$$

Por otra parte, la deuda D_t sigue el siguiente proceso:

$$\ln D_{t+1}=(1-\rho_d)\ln D+\rho_d\ln D_t+u_t:|\rho_d|\leq 1$$

Analizar un aumento en la deuda, provocada por una reducción en el tipo impositivo, implica que en t se produce una perturbación que aumenta el nivel de deuda futuro, manteniendo constante tanto el nivel de gasto público como el nivel de deuda presente. Dicha innovación viene dada por u_t que suponemos es distinta de cero en t pero es igual a cero en los siguientes periodos, esto es, $u_{t+i}=0\ \forall i>0$.

Desde el punto de vista de la solución del modelo, dicha perturbación es una variable de estado adicional.

La solución del modelo ha sido determinada por el método de los coeficientes indeterminados y está incluida en el apéndice 5.2.

Los parámetros η_{ij} son las elasticidades que miden la respuesta de un cambio en la variable j a la variable i.

Todas estas elasticidades que nos dan la respuesta de las variables endógenas a las variables dependen de la elasticidad de sustitución intertemporal en el ocio, dado por σ_ℓ, que nos da una medida de la elasticidad de la curva de oferta de trabajo. Mientras mayor sea σ_ℓ, más elástica es dicha curva, y las elasticidades serán también mayores en valor absoluto.

La solución para las variables endógenas tendrá por tanto la siguiente estructura.

$$c_t=\eta_{ck}k_t+\eta_{cg}g_t+\eta_{cd}d_t+\eta_{cu}u_t$$

$$k_{t+1} = \eta_{kk}k_t + \eta_{kg}g_t + \eta_{kd}d_t + \eta_{ku}u_t$$

$$y_t = \eta_{yk}k_t + \eta_{yg}g_t + \eta_{yd}d_t + \eta_{yu}u_t$$

$$n_t = \eta_{nk}k_t + \eta_{ng}g_t + \eta_{nd}d_t + \eta_{nu}u_t$$

Los tipos impositivos sobre la renta influyen en las decisiones óptimas de los individuos, esto es, distorsionan la elección entre horas de ocio y horas de trabajo. La cantidad de horas de trabajo viene dada por:

$$(1 - N_t)^{-\theta} = (1 - \tau_t)\frac{W_t}{C_t}$$

Cambios en el tipo impositivo afectan al salario real después de impuestos, y por tanto alteran la cantidad de horas que el individuo desea ofrecer, dado un nivel de consumo. Pero también, las horas de trabajo son proporcionales al nivel de consumo. Un nivel de consumo más alto, disminuye la utilidad marginal de la renta y por tanto tiende a reducir las horas de trabajo. De esta forma, variaciones en los tipos impositivos no sólo afectan a la renta del individuo sino también a su nivel óptimo de consumo y ahorro.

El parámetro de persistencia en la dinámica de la deuda afecta directamente a la senda de ajuste de los tipos impositivos futuros. En el momento en el que aumenta la deuda debido a la reducción de impuestos, éstos disminuyen pero ρ_d marca cuantos periodos futuros estarán los tipos impositivos más altos de su nivel de estado estacionario. Si $\rho_d = 0$, los tipos sólo estarán un periodo futuro más altos, sin embargo si $\rho_d = 1$, los tipos impositivos futuros estarán de forma permanente más altos en el futuro.

Las elasticidades calculadas cuando cambia el gasto público dependen del parámetro de persistencia del gasto del Estado, ρ_g, pero no del parámetro de persistencia del proceso que siga la deuda.

Finalmente, el aumento de la deuda financiada con una redución de tipos impositivos altera la decisión ocio-trabajo pero no genera ningún efecto renta, ya que aunque los tipos impositivos son más bajos hoy, serán más altos en el futuro. Esto es, la deuda no constituye riqueza, sólo es un préstamo que los individuos realizan al Estado y que será devuelto con sus intereses correspondientes en el futuro. De esta forma, el efecto sustitución domina en la elección de la combinación óptima oferta de trabajo-ocio.

Esto contrasta con una variación en el gasto corriente del Estado que sí produce un efecto renta considerable.

Calibración.

Calcular las elasticidades y por tanto la solución numérica del modelo implica asignarle valores a los parámetros que definen el estado estacionario. Los valores asignados para la calibración, consistentes con el estado estacionario, vienen dados en la siguiente tabla:

r	G/Y	α	δ	D/Y	G/D	τ	β	N	K/Y
0.015	0.20	0.30	0.025	2	0.1	0.23	0.985	0.2	9.75

Con estos datos podemos calcular las elasticidades solución del problema, variando la elasticidad de sustitución intertemporal del ocio y los parámetros de persistencia de las perturbaciones.

Consideremos en primer lugar los efectos de un déficit presupuestario provocado como consecuencia de una reducción de impuestos.

Las dos siguientes tablas nos resumen los resultados obtenidos para cuatro valores distintos de σ_ℓ y del parámetro de persistencia ρ_d.

Tabla 5.4					Tabla 5.5				
		η_{cu}					η_{yu}		
ρ_d		σ_ℓ			ρ_d		σ_ℓ		
	0.5	1	10	∞		0.5	1	10	∞
0	0.1	0.2	0.6	0.8	0	1.2	2.6	7.1	10
0.5	0.3	0.5	1.3	1.7	0.5	0.7	1.2	6.2	8.7
1	1.8	2.6	5.2	6.5	1	0.4	0.3	-2.1	-6.5

Tabla 5.6					Tabla 5.7				
		η_{ku}					η_{nu}		
ρ_d		σ_ℓ			ρ_d		σ_ℓ		
	0.5	1	10	∞		0.5	1	10	∞
0	0.9	0.2	1.1	1.4	0	1	4	9.5	15
0.5	0.07	0.3	0.8	1.2	0.5	1	3.7	8.7	12.5
1	-0.04	-0.19	-0.9	-1.5	1	0.7	0.5	-3.5	-10

Excepto para un aumento permanente en el déficit, $\rho_d = 1$, en cuyo caso, los tipos impositivos tendrían que tener un nivel permanentemente más alto, las elasticidades nos dan valores positivos. La interpretación es la siguiente: una reducción de impuestos hoy estimula la oferta de trabajo, el efecto sustitución o efecto salario opera en el sentido de reducir el tiempo de ocio y elevar el tiempo de trabajo. Como resultado, la producción aumenta. Por otra parte, el consumo aumenta debido a la reducción futura en el rendimiento en el ahorro después de impuestos. Finalmente, la inversión aumenta porque el aumento en la producción es mayor que el aumento en el consumo.

Conforme aumenta el parámetro de persistencia el efecto expulsión sobre la inversión es más que probable, reflejado en los valores negativos que toma η_{ku}, mientras ocurre todo lo contrario con el consumo. La razón estriba en la reducción futura del rendimiento del capital después de impuestos que será mayor cuanto más persistente sea el déficit.

Si el shock de deuda es transitorio, el efecto sustitución en la oferta de trabajo es cuantitativamente importante mientras que si la perturbación es persistente, el impacto negativo de unos impuestos permanentemente más altos provocan una reducción del ahorro, un aumento del consumo y una reducción en la cantidad de horas trabajadas de equilibrio y por tanto a una reducción en la producción, efectos que se producen cuando la elasticidad de sustitución intertemporal en el trabajo es alta.

De manera análoga podemos discutir los efectos de un déficit provocado por un mayor gasto público, que puede ser financiado con más impuestos o más deuda.

En este caso, los efectos sobre las variables se calculan como una combinación de las respectivas elasticidades con respecto al déficit y al gasto público. Ahora tanto el gasto público como un nivel de deuda más alto afectan conjuntamente a las variables. Un 1 % de aumento del gasto, eleva la deuda en:

$$\Delta D_{t+1} = \Delta G_t \Rightarrow \frac{\Delta D_{t+1}}{D} = \frac{G}{D}\frac{\Delta G_t}{G}$$

De esta forma, el efecto sobre el consumo, por ejemplo, viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta C}{C} = \eta_{cu}\frac{\Delta D}{D} + \eta_{cg}\frac{\Delta G}{G} = \left(\eta_{cu}\frac{G}{D} + \eta_{cg}\right)\frac{\Delta G}{G}$$

El efecto sobre las variables del modelo, calculado a partir de sus soluciones, viene dado como una combinación lineal del aumento en el nivel de deuda y del aumento en el nivel de gasto. Mientras que un aumento del gasto público financiado con impuestos futuros distorsionadores implica una reducción en las horas trabajadas, en la producción, consumo y formación de capital, mientras que el aumento del gasto financiado sólo con deuda puede tener efectos positivos sobre dichas variables.

El único efecto común es una disminución de la inversión en ambos casos.

En la tabla 5.8 podemos observar los efectos de ambas formas de financiar un aumento de gasto, dados unos valores para la elasticidad intertemporal en el oferta de trabajo y unos parámetros de persistencia de la deuda y del gasto.

Tabla 5.8				
	η_n	η_y	η_c	η_k
$\sigma_\ell = 1 : \rho_d = \rho_g = 0.5$				
Deuda+Gasto	0.06	0.04	0.02	-0.03
Gasto+Impuestos	-0.29	-0.19	-0.05	-0.06

Mientras que un aumento en la deuda provocado por una reducción de impuestos tiene efectos positivos, cuando dicho aumento de deuda es combinado con un incremento de gasto público el efecto sobre las variables del modelo es muy débil, resultado de los efectos contrapuestos sobre la oferta de trabajo de ambos.

Valores más altos de los parámetros de persistencia de la deuda y del gasto público dan lugar a que el efecto del aumento del gasto público aunque sea financiado con deuda, provoque un efecto negativo sobre las horas trabajadas, la producción y el stock de capital y un efecto positivo mayor sobre el consumo.

5.12. Costes de ajuste en el factor trabajo y labor hoarding.

Burnside, Eichenbaum y Rebelo (1993) sugieren que introduciendo un retardo entre los ajustes en el empleo y los ajustes en el esfuerzo laboral podría explicarse el denominado ciclo de la productividad del trabajo, entendiendo éste como el hecho consistente en que la productividad es un indicador adelantado de las fluctuaciones en el empleo.

El modelo de Ciclo Real predice que la correlación entre productividad y horas trabajadas es positiva pero muy alta, mientras que un hecho estilizado de los mercados de trabajo es que su correlación es cero o negativa.

El denominado "labor hoarding" es una explicación que se remonta a Okun (1962) y Solow (1964) para intentar comprender el comportamiento procíclico de la productividad del trabajo y consiste en que las empresas no varían a corto plazo sus niveles de empleo ante cambios en la demanda sino que más bien mantienen sus plantillas aumentando o disminuyendo el nivel de esfuerzo de sus trabajadores.

Mientras que en todos los modelos de Ciclo Real se asume que el empleo es un input flexible en el sentido de que puede cambiar rápidamente cuando las necesidades de las empresas así lo requieran, esto puede que a corto plazo no sea exactamente así ya que como subrayó Oi (1962, pag 538).

> "the concept of labor as a quasi-fixed factor is, in my opinion, the relevant one for a short-run theory of employment"

Por tanto, el impacto de los cambios en la tasa de utilización de utilización del factor trabajo en la dinámica de las fluctuaciones del desempleo puede ser esencial para explicar tanto el denominado ciclo de la productividad como el hecho de que ésta sea moderadamente procíclica.

Brechling (1965, pag 188) señala que:

> "it must be emphasized that the degree to which empleoyee are utilized consists not only of the average number of hours worked per man, but also of the intensity and continuity of his effort".

Estas citas sugieren que sería útil para replicar el denominado ciclo de la productividad del trabajo tanto la introducción de costes de ajuste en el trabajo como la distinción entre horas, esfuerzo y número de empleados.

Burnside, Eichenbaum y Rebelo (1993) incorporan además un supuesto adicional y es una especificación concreta para el conjunto de información del que disponen las empresas. Si las perturbaciones exógenas fuesen observadas antes de la elección de los niveles de empleo y esfuerzo el modelo sería observacionalmente equivalente a un modelo típico de Ciclo Real. Por tanto el modelo incorpora el hecho de que el nivel de empleo debe ser elegido antes de la observación de las perturbaciones, de tal manera que una vez observadas éstas el ajuste en el nivel del factor trabajo se produce a corto plazo fundamentalmente por un cambio en el esfuerzo por trabajador.

De esta forma el modelo básico se ve ampliado por dos fuentes de "labor hoarding", por una parte la introducción de costes de ajuste en el factor trabajo da lugar a que las decisiones de contratación se hagan más homogéneas en el tiempo y por otra que el ajuste a corto plazo no se produzca en el empleo sino en el margen intensivo o nivel de esfuerzo por trabajador.

El modelo completo viene dado por las siguientes ecuaciones.

La función de producción es del tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} (N_t^p)^{1-\alpha}$$

$$N_t^p = e_t \gamma^t N_t H(1 - \phi(Q))$$

donde N_t^p es el nivel de empleo productivo utilizado por las empresas, que depende del esfuerzo e_t, del número total de trabajadores, N_t, del número de horas trabajadas que es fijado exógenamente al nivel H y del crecimiento del progreso tecnológico γ que aumenta la eficiencia del factor trabajo. Los costes de ajuste reducen el nivel de empleo productivo, esto es, una parte de los trabajadores no están dedicados a producir directamente sino que están implicados en las tareas administrativas de contratar o despedir.

Estos costes vienen modelizados por la función $\phi(Q)$, que viene dada por:

$$\phi(Q) = \frac{1}{2}\ln(Q_t)^2 : \phi' > 0 : \phi'' > 0$$

$$Q_t = \frac{N_t}{N_{t-1}}$$

Con estos supuestos, la función de producción viene dada por:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} \left(e_t N_{t-1} Q_t H \left(1 - \frac{1}{2}\ln(Q_t)^2 \right) \right)^{1-\alpha}$$

El factor tecnológico sigue el proceso autorregresivo de orden 1 en logaritmos:

$$\ln Z_t = (1-\rho)\ln Z + \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

La ecuación de acumulación del capital es

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

Las economías domésticas maximizan una función de utilidad con trabajo indivisible donde cada individuo representativo puede estar laboralmente en dos situaciones, bien trabajando o bien desempleado según lo expuesto en el epígrafe 5.2. Las probabilidades respectivas de los dos estados son p y $1-p$.

En el caso de que el individuo esté trabajando su utilidad viene dada por:

$$u(C, e, p) = \ln C + \theta \ln(T - \xi - eH)$$

mientras que si se encuentra en desempleo tendrá.

$$u(C, p) = \ln C + \theta \ln T$$

Normalizando la población a 1, la probabilidad de estar trabajando es:

$$p_t = \frac{N_t}{N} = N_t$$

donde N_t es el número de empleados.

De esta forma la función de utilidad viene dada por:

$$u(c, e, \pi) = \ln C + p\theta \ln(T - \xi - eH) + (1 - p)\theta \ln T$$

$$u(c, e, N_t) = \ln C + N_t\theta \ln(T - \xi - eH) + (1 - N_t)\theta \ln T$$

La función de utilidad a maximizar es:

$$u = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t + \theta N_t \ln(T - \xi - e_t H) + (1 - N_t)\theta \ln T$$

Finalmente, podemos añadir el gasto público, que viene dado por:

$$\ln G_t = (1 - \rho) \ln G + \rho \ln G_{t-1} + \varepsilon_t$$

Para cerrar el modelo necesitamos introducir la restricción de recursos.

$$K_{t+1} = A_t F(K_t, N_t^p) + (1 - \delta)K_t - G_t - C_t$$

Dado que hemos incluido progreso técnico incorporado que aumenta la eficiencia del factor trabajo, debemos definir las variables como:

$$\tilde{C}_t = \frac{C_t}{\gamma_n^t} : \tilde{K}_t = \frac{K_t}{\gamma_n^t} : \tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{\gamma_n^t} : \tilde{G}_t = \frac{G_t}{\gamma_n^t}$$

La restricción de recursos puede escribirse:

$$\frac{K_{t+1}}{\gamma^t} = \frac{A_t F(K_t, N_t^p) + (1 - \delta)K_t - G_t - C_t}{\gamma^t}$$

$$\gamma \tilde{K}_{t+1} = A_t F(\tilde{K}_t, N_t^P) + (1 - \delta)\tilde{K}_t - \tilde{G}_t - \tilde{C}_t$$

Y la función de utilidad:

$$u = \varkappa + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln \tilde{C}_t + \theta N_t \ln \left(\frac{T - \xi - e_t H}{T} \right)$$

donde $\varkappa = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln \gamma_n^t + \theta \ln T$.

Una guía para solucionar el modelo.

La primera decisión del planificador es elegir el nivel de contratación, sin conocer ninguno de los shocks Z_t o G_t. Por tanto, esta decisión es relativa al vector de estado $(\tilde{K}_t, N_{t-1}, Z_{t-1}, G_{t-1})$ mientras que las decisiones de consumo y esfuerzo están relacionadas con el vector de estado $(\tilde{K}_t, N_t, Z_t, G_t)$.

Las reglas de decisión son la solución de la función de valor:

$$V_0(\tilde{K}_t, N_{t-1}, Z_{t-1}, G_{t-1}) = \max_{\{Q_t\}} E \left[V_1(\tilde{K}_t, N_t, Z_t, G_t) \right]$$

con:

$$N_t = Q_t N_{t-1}$$

y

$$V_1(k_t, N_t, Z_t, G_t) = \max_{\left\{\tilde{C}_t, e_t, \tilde{K}_{t+1}\right\}} E \left[u(\tilde{C}_t, e_t, N_t) + \beta V(\tilde{K}_{t+1}, N_{t+1}) \right]$$

sujeto a:

$$\gamma \tilde{K}_{t+1} = Z_t F(\tilde{K}_t, N_t^P) + (1 - \delta)\tilde{K}_t - \tilde{G}_t - \tilde{C}_t$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{C}_t} = \frac{\partial u}{\partial c_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial \tilde{C}_t} = 0 \quad ((5.68))$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial e_t} = \frac{\partial u}{\partial e_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial e_t} = 0 \quad ((5.69))$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_t} = \frac{\partial u}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial Q_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial Q_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial Q_t} = 0 \quad ((5.70))$$

junto a las condiciones de envolvente:

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_t} = \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial K_t} \tag{(5.71)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_{t-1}} = \frac{\partial u}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial N_{t-1}} + \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial N_{t-1}} + \beta \frac{\partial V}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial N_{t-1}} \tag{(5.72)}$$

$$\lambda_t = E_t \left[\frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \right] : \mu_t = E_t \left[\beta \frac{\partial V}{\partial N_t} \right] \tag{(5.73)}$$

adelantando un periodo (5.71) y (5.72):

$$E_t \left[\frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \right] = \lambda_t = \beta E_t \left[\frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+2}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+2}}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \right] = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(1 - \delta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \right) \right] \tag{(5.74)}$$

$$E_t \left(\frac{\partial V}{\partial N_t} \right) = E_t \left[\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial N_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+2}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+2}}{\partial N_t} + \beta \frac{\partial V}{\partial N_{t+1}} \frac{\partial N_{t+1}}{\partial N_t} \right] \tag{(5.75)}$$

$$\frac{\mu_t}{\beta} = E_t \left[\frac{\partial u}{\partial N_{t+1}} Q_{t+1} + \lambda_{t+1} \frac{\partial F}{\partial N_{t+1}^p} \frac{\partial N_{t+1}^p}{\partial N_t} + \mu_{t+1} Q_{t+1} \right]$$

En función del empleo efectivo tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial e_t} = \lambda_t Z_t \frac{\partial F}{\partial N_t^p} \frac{\partial N_t^p}{\partial e_t}$$

donde

$$\frac{\partial K_{t+1}}{\partial e_t} = Z_t \frac{\partial F}{\partial N_t^p} \frac{\partial N_t^p}{\partial e_t}$$

y por tanto (5.69) viene dada por la siguiente expresión en la cual hemos aplicado expectativas:

$$E_{t-1} \left[- \frac{\partial u}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial Q_t} \right] = E_{t-1} \left[\lambda_t Z_t \frac{\partial F}{\partial N_t^p} \frac{\partial N_t^p}{\partial Q_t} + \mu_t N_{t-1} \right]$$

y hemos aplicado:

$$\beta \frac{\partial V}{\partial \tilde{K}_{t+1}} \frac{\partial \tilde{K}_{t+1}}{\partial Q_t} = \lambda_t z_t \frac{\partial F}{\partial N_t^p} \frac{\partial N_t^p}{\partial Q_t} : \beta \frac{\partial V}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial Q_t} = \mu_t N_{t-1}$$

En el caso de las funciones propuestas en el modelo, tanto las condiciones de primer orden como las de envolvente del problema vienen dadas por:

La ecuación (5.68) es:

$$\frac{1}{\tilde{C}_t} = \lambda_t \tag{(5.76)}$$

(5.69):

$$\frac{\theta N_t H e_t}{T - \xi - e_t H} = \lambda_t Z_t (1-\alpha) \tilde{K}_t^{\alpha} \left(N_t^p\right)^{1-\alpha} \tag{(5.77)}$$

(5.70):

$$-\theta \ln \left(\frac{T - \xi - e_t H}{T} \right) = \lambda_t Z_t (1-\alpha) \tilde{K}_t^{\alpha} (N_t^p)^{-\alpha} e_t H \left(1 - \frac{\gamma}{2} (\ln Q_t)^2 - \gamma \ln Q_t \right) + \mu_t \tag{(5.78)}$$

(5.71)

$$\lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left(1 - \delta + A_{t+1} \alpha \tilde{K}_{t+1}^{\alpha-1} \left(e_t N_{t+1} H (1 - \frac{\gamma}{2} (\ln Q)^2 \right)^{1-\alpha} \right) \tag{(5.79)}$$

(5.72)

$$\frac{\mu_t}{\beta} = E_t \left(\theta \ln \left(\frac{T - \xi - e_{t+1} H}{T} \right) Q_{t+1} \right) + \tag{(5.80)}$$

$$+ E_t \left(\lambda_{t+1} A_{t+1} (1-\alpha) \tilde{K}_{t+1}^{\alpha} \left(N_{t+1}^p \right)^{-\alpha} \gamma^{t+1} e_{t+1} Q_{t+1} \left(1 - \frac{1}{2} (\ln Q)^2 \right) + \mu_{t+1} Q_{t+1} \right)$$

Y las dos restricciones del problema:

$$\gamma \tilde{K}_{t+1} = A_t^{\alpha} \tilde{K}_t \left(N_t^P \right)^{1-\alpha} + (1-\delta) \tilde{K}_t - G_t - c_t \tag{(5.81)}$$

$$N_t = Q_t N_{t-1} \tag{(5.82)}$$

Resolviendo para el periodo $t-1$, aplicamos expectativas a las condiciones de primer orden para resolver el nivel de empleo, N_t, que depende de las variables de estado $\tilde{K}_t, N_{t-1}, Z_{t-1}, G_{t-1}$.

El estado estacionario.

El estado estacionario $(c, k, N, q, e, \lambda, \mu)$ es la solución del sistema determinista formado por las condiciones de primer orden donde las perturbaciones son constantes y normalizadas a la unidad.

$$q = 1 : \mu = 0$$

$$\frac{1}{c} = \lambda$$

$$-\theta \ln \left(\frac{T - \xi - eH}{T} \right) = \lambda (1 - \alpha) k^{\alpha} (eNH)^{-\alpha} eH + \mu$$

$$\frac{\theta}{T - \xi - eH} = \lambda (1 - \alpha) k^{\alpha} (eNH)^{-\alpha}$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = 1 - \delta + \alpha k^{\alpha - 1} (eNH)^{1-\alpha}$$

$$\mu (1 - \beta) = \beta \theta \ln \left(\frac{T - \xi - eH}{T} \right) + \lambda \beta (1 - \alpha) k^{\alpha} (eNH)^{-\alpha}$$

$$k^{\alpha} (eHN)^{1-\alpha} = c + g + (g_A - 1 + \delta) k$$

La variable e puede aproximarse a partir de la ecuación no lineal siguiente:

$$e = -\left(\frac{T - \xi - eH}{H} \right) \ln (T - \xi - eH)$$

Para valores particulares de los parámetros podemos computar su valor de estado estacionario.

El resto de las variables vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\tilde{K}}{N} = \left\{ \frac{\frac{g_A}{\beta} - 1 + \delta}{(1 - \alpha)(eH)} \right\} : \lambda = \frac{1}{c} = -\frac{\theta \ln \left(\frac{T - \xi - eH}{T} \right)}{\alpha (eH)^{1-\alpha} \left(\frac{k}{n} \right)^{\alpha}}$$

$$k = \frac{c + G}{(eH)^{1-\alpha} \left(\frac{k}{n} \right)^{\alpha - 1} - g_A + 1 - \delta} : N = \left(\frac{\tilde{K}}{N} \right)^{-1} k$$

La loglinealización de (5.76), (5.77), (5.78), (5.79) y (5.80):

$$\hat{c}_t = -\hat{\lambda}_t$$

$$\left(\alpha + \frac{1 - \alpha}{\theta N s_c} \right) \hat{e}_t + \alpha \hat{Q}_t = -\alpha \hat{N}_{t-1} + \alpha \hat{k}_t + \hat{\lambda}_t + \hat{z}_t$$

$$\alpha\hat{e}_t + (\alpha+\gamma)\hat{Q}_t = \alpha\hat{k}_t - \alpha\hat{N}_{t-1} + \hat{a}_t + \hat{\lambda}_t + \frac{N}{(1-\alpha)s_c}\hat{\mu}_t$$

$$\frac{\phi s_i}{\alpha\beta}\hat{\lambda}_t = \frac{\phi s_i}{\alpha\beta}\hat{\lambda}_{t+1} + \hat{z}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{k}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_t$$

$$\alpha\hat{k}_{t+1} - \alpha\hat{N}_t + \hat{\lambda}_{t+1} + \frac{Ns_c}{1-\alpha}\hat{\mu}_{t+1} - \frac{Ns_c}{(1-\alpha)\,\beta}\hat{\mu}_t = \alpha\hat{Q}_{t+1} + \alpha\hat{e}_{t+1} - \hat{z}_{t+1}$$

y las dos restricciones del problema, (5.81) y (5.82):

$$\phi s_i\hat{k}_{t+1} = (s_i(\phi-1)+\alpha)\hat{k}_t + \hat{z}_t + (1-\alpha)\hat{N}_{t-1} - s_g\hat{g}_t - s_c\hat{c}_t$$

$$\hat{N}_t = \hat{N}_{t-1} + \hat{Q}_t$$

El modelo se resuelve en dos etapas. En primer lugar, se condicionan las ecuaciones al momento $t-1$, en el que se toma la decisión sobre el empleo en el momento posterior $\hat{N}_t$ antes de que se observen tanto $\hat{z}_t$ como $\hat{g}_t$.

De dichas condiciones se obtiene la decisión óptima en función de las variables de estado.

$$\hat{N}_t = \eta_{nk}\hat{k}_t + \eta_{nn}\hat{N}_{t-1} + \eta_{nn}\hat{z}_{t-1} + \eta_{ng}\hat{g}_{t-1}$$

La resolución para el momento t implica sustituir ésta y considerar como variables de decisión el consumo y el nivel de esfuerzo donde las variables de estado son el stock de capital, el nivel de empleo en t y el multiplicador de Lagrange.

El efecto de las perturbaciones tecnológicas es el esperado dados los supuestos introducidos en el mismo. Con "labor hoarding", en sus dos vertientes, con costes de ajuste en el empleo y con la introducción del nivel de esfuerzo, la correlación entre horas trabajadas y salarios reales es baja, debido a que el shock tecnológico incide a corto plazo sobre el esfuerzo y no sobre el nivel de empleo que viene predeterminado antes de la observación de la perturbación.

Un aumento del gasto público, eleva así mismo el nivel de esfuerzo a corto plazo y mientras más altos sean los costes de ajuste mayor es la respuesta

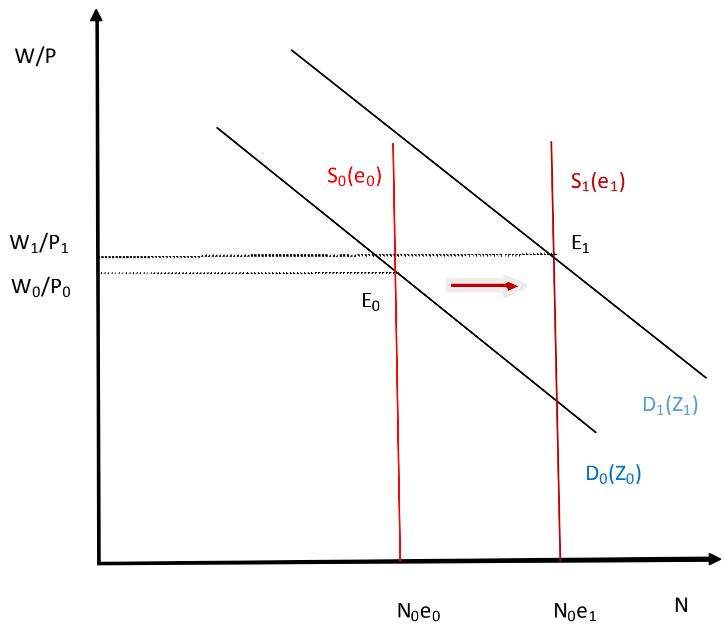

Gráfico 5.5.

del esfuerzo.

Con respecto al denominado ciclo de la productividad, si los costes de ajuste son bajos el modelo es incapaz de generar que la productividad sea un indicador adelantado del ciclo. Sin embargo, la inclusión del nivel de esfuerzo sí es capaz de reproducir el ciclo de la productividad aunque a su vez aumenta la variabilidad de la misma. La introducción de gasto público reduce la correlación entre productividad y empleo aún más y por tanto mejora la predicción del modelo en relación a la evidencia empírica.

La introducción del nivel de esfuerzo explica mejor el ciclo de la productividad mientras que la introducción de costes de ajuste en el empleo sólo sirve para reforzar la inercia en el nivel de empleo. En el gráfico 5.5 observamos el efecto del shock de productividad. La variable que cambia a corto plazo es el nivel de esfuerzo por trabajador y no el empleo total que permanece inalterado aunque el número total de horas trabajadas sí aumenta.

5.13. Ciclo Real y Producción doméstica.

Los modelos de Ciclo Real se centran en las actividades de mercado tanto de economías domésticas como de empresas, sin embargo, el tiempo empleado y el capital utilizado por los individuos en el trabajo doméstico no es despreciable. La importancia del trabajo doméstico en la actividad económica ha sido reconocido tanto por economistas que han estudiado el mercado de trabajo como Pollak y Wachter (1975) o Gronau (1985) como por aquellos que han intendado medir su aportación al PIB como Eisner (1988), estimándose que entre el tiempo dedicado a tareas domésticas como a la inversión en capital doméstico (compras de bienes duraderos o viviendas) pueden representar entre un 20 a un 50 % de la producción total.

La introducción del trabajo doméstico dentro de modelos de Ciclo Real ha sido estudiado por Benhabib, Rogerson y Wright (1991), Greenwood y Hercowitz (1991), o McGrattan, Rogerson y Wright (1992).

Introducir producción doméstica en un modelo de Ciclo Real equivale a introducir un sector adicional, sólo tenemos que añadir una función de producción que transforme capital y trabajo en casa en producción doméstica, de la misma forma que la función de producción de mercado transforma capital y trabajo de mercado en producción de mercado.

Ahora, la economía doméstica puede asignar su tiempo entre ocio, trabajo en el mercado y trabajo en casa. De la misma manera, el output puede ser producido en actividades de mercado y en actividades de no mercado y la inversión puede materializarse en capital para el mercado o capital doméstico.

Al enriquecer el conjunto de elecciones posibles estamos permitiendo un grado mayor de sustituibilidad entre actividades de mercado y de no mercado en respuesta al estado de la economía. La cuestión es si esta extensión del modelo nos puede ayudar a mejorar el modelo básico a la hora de explicar algunos aspectos como como la volatilidad del output y las relativas del consumo y la inversión respecto a éste, o la correlación entre horas y productividad, entre otras.

El modelo de Ciclo Real básico que incluye producción doméstica supone de nuevo que existe un gran número de economías domésticas idénticas cuyas preferencias vienen dadas por:

$$u = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[b \ln C_t + (1-b) \ln \ell_t \right]$$

El consumo total es un bien compuesto de bienes y servicios adquiridos en el mercado, C_{Mt} o bien producidos en casa, C_{Ht}.En concreto podemos suponer que el consumo agregado total viene dado por una función CES de la forma:

$$C_t = \left[aC_{Mt}^{\theta} + (1-a) C_{Ht}^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}}$$

donde el parámetro $\theta \leq 1$ nos mide la capacidad o el deseo de la economía doméstica para sustituir entre los dos tipos de consumo. Mientras mayor es el parámetro, mayor es esta capacidad de sustitución, ya que la elasticidad de sustitución entre C_{Mt} y C_{Ht} es igual a $1/1-\theta$. Para $\theta = 1$,la elasticidad de sustitución es máxima (hablaríamos de sustitutos perfectos) mientras que si $\theta = 0$, la elasticidad de sustitución es igual a uno.

El ocio es igual al tiempo total, normalizado a la unidad, menos las horas trabajadas en el mercado N_{Mt} menos las horas trabajadas en casa N_{Ht}.

$$\ell_t = 1 - N_{Mt} - N_{Ht}$$

Con estas variantes, la función de utilidad, expresada en función de las nuevas variables viene dada por la siguiente expresión:

$$u(C_{Mt}, C_{Ht}, N_{Mt}, N_{Ht}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{b}{\theta} \ln(aC_{Mt}^{\theta} + (1-a)C_{Ht}^{\theta}) + (1-b) \ln(1 - N_{Mt} - N_{Ht}) \right]$$

En cada momento del tiempo, las economías domésticas están sujetas a dos tipos de restricciones: una es la restricción presupuestaria "de mercado" en la que podemos incluir los tipos impositivos sobre el rendimiento del trabajo y del capital, y que viene dada por:

$$C_{Mt} + I_{Mt} + I_{Ht} = W_t(1-\tau_n)N_{Mt} + r_t(1-\tau_k)K_{Mt} + \delta_M \tau_k K_{Mt} + T_t$$

Esto es, las rentas brutas, netas de impuestos, del trabajo y del capital más las transferencias procedentes generalmente del sector público pueden ser destinadas a consumir o comprar bienes y servicios en el mercado, invertir en capital empresarial o invertir en capital doméstico.

La segunda restricción es la que se deriva de la tecnología, esto es, de la función de producción, que supondremos tiene la forma Cobb-Douglas.

$$C_{Ht} = K_{Ht}^{\eta}(Z_{Ht}N_{Ht})^{1-\eta}$$

Esta nos da el consumo de bienes y servicios de casa como una función del tiempo dedicado a trabajar en ella, del stock de capital de la economía doméstica más un término de productividad. En este caso, la única utilización que tiene el output producido en casa no es otro que su consumo ya que ni puede ser transformado en capital ni vendido en el mercado.

Esta es una asimetría fundamental entre los sectores de mercado y de no mercado, ya que sólo los primeros pueden producir capital.

Para completar el modelo la producción de mercado se ajusta a una función de producción similar a la anterior.

$$Y_{Mt} = K_{Mt}^{\alpha}(Z_{Mt}N_{Mt})^{1-\alpha}$$

Por último, asumimos que los procesos que representan los shocks de productividad vienen dados por:

$$\ln Z_{Mt+1} = (1-\rho_m)\ln Z + \rho_m \ln Z_{Mt} + \varepsilon_{Mt+1}$$

$$\ln Z_{Ht+1} = (1-\rho_h)\ln Z + \rho_h \ln Z_{Ht} + \varepsilon_{Ht+1}$$

Las innovaciones ε_{Mt+1} y ε_{Ht+1} son independientes e idénticamente distribuidas en el tiempo, con desviaciones estándar σ_M y σ_H respectivamente. La correlación contemporánea entre los dos tipos de shocks viene dada por $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$. Los parámetros ρ_m y ρ_h nos miden la persistencia de ambos tipos de shocks.

La interpretación de la correlación entre las perturbaciones, $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$, es la siguiente: mientras menor sea $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$, mayor es el incentivo a sustituir consumo doméstico por consumo de mercado; por ejemplo, para $\rho_{\varepsilon\varepsilon} = 0$ las perturbaciones están incorreladas lo que indica que una pertubación tecnológica a Z_{Mt+1} no tiene ninguna influencia sobre Z_{Ht+1} y viceversa, por tanto el incentivo a sustituir ambos tipos de producción es mayor.

La ecuación dinámica del stock de capital es una particularización de la ley general que hemos aplicado en otros modelos. Ahora la inversión total tiene dos componentes, inversión de mercado e inversión en casa.

$$I_t = I_{Ht} + I_{Mt}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta_M)K_{Mt} + (1 - \delta_H)K_{Ht} + I_t$$

$$K_t = K_{Ht} + K_{Mt}$$

Normalmente se asume que el capital puede ser transformado libremente entre sus dos usos, aunque a tasas de depreciación diferentes. La inversión en cada caso la definimos de forma residual como:

$$I_{Mt} = K_{Mt+1} - (1 - \delta_M)K_{Mt}$$

$$I_{Ht} = K_{Ht+1} - (1 - \delta_H)K_{Ht}$$

En cualquier periodo, el gobierno recauda impuestos sobre el trabajo y el capital y transfiere rentas a los consumidores, manteniendo el presupuesto equilibrado.

$$G_t = W_t N_t \tau_n + r_t K_{Mt} \tau_k - \tau_k \delta_k K_{Mt} - T_t$$

Finalmente, la restricción de recursos incluye la producción doméstica.

$$Y_t = C_{Mt} + I_t + G_t$$

Debido a la presencia de impuestos que distorsionan las asignaciones óptimas, dichas asignaciones óptimas no son Pareto óptimas por lo que la resolución no puede realizarse a partir del enfoque del planificador social sino directamente a partir del equilibrio competitivo.

El equilibrio competitivo se define como habitualmente, las empresas maximizan beneficios dados los precios y la perturbación tecnológica, mientras que las economías domésticas maximizan su utilidad esperada, dados los precios de los factores. Dado el stock de capital inicial, y el proceso que sigue la variable exógena, el equilibrio es el conjunto de procesos estocásticos para los precios y las cantidades que resuelven el problema de las empresas y de las economías domésticas.

Planteamiento y resolución.

Las economías domésticas maximizan su utilidad esperada dados los precios los factores. Las variables de elección son C_{M_t}, C_{Ht}, N_{M_t},.N_{H_t}, K_{Mt} y K_{Ht}. Las restricciones a las que se enfrenta son la propia restricción presupuestaria y la función de producción doméstica.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [b \ln \left[aC_{Mt}^{\theta} + (1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}} + (1-b)\ln(1 - N_{Mt} - N_{Ht}) +$$

$$\beta\lambda_t \left(-C_{Mt} - K_{Mt+1} - (1-\delta_M)K_{Mt} - K_{Ht+1} - (1-\delta_H)K_{Ht}\right) +$$

$$W_t(1-\tau_n)N_{Mt} + r_t(1-\tau_k)K_{Mt} + \delta_M\tau_k K_{Mt} + T_t) + \mu_t(K_{Ht}^{\eta}(Z_{Ht}N_{Ht})^{1-\eta} - C_{Ht})]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{M_t}} = \frac{abC_{Mt}^{\theta-1}}{\left[aC_{Mt}^{\theta} + (1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{H_t}} = \frac{b(1-a)}{\left[aC_{Mt}^{\theta} + (1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]} C_{Ht}^{\theta-1} = \mu_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_{M_t}} = -\frac{1-b}{1 - N_{Mt} - N_{Ht}} + \lambda_t W_t(1-\tau_n) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_{H_t}} = -\frac{1-b}{1 - N_{Mt} - N_{Ht}} + \mu_t(1-\eta)\frac{C_{H_t}}{N_{Ht}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{M_{t+1}}} = \lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1}(r_{t+1}(1-\tau_k) + 1 - \delta_M + \delta_M\tau_k)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{H_{t+1}}} = \lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1}(1-\delta_H) + \mu_{t+1}\eta K_{Ht}^{\eta-1}(Z_{Ht}N_{Ht})^{1-\eta}\right] = 0$$

y aplicando la función de utilidad y las funciones de producción respectivas vienen dadas por:

$$\frac{1-b}{\ell_t} = \frac{b}{C_t} a C_{Mt}^{\theta-1}(1-\alpha)(1-\tau_n)\frac{Y_t}{N_{Mt}}$$

$$\frac{1-b}{\ell_t} = \frac{b(1-a)}{\left[aC_{Mt}^{\theta}+(1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]} C_{Ht}^{\theta}(1-\eta)$$

$$\frac{abC_{Mt}^{\theta-1}}{\left[aC_{Mt}^{\theta}+(1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]} =$$

$$= \beta E_t\left[abC_{Mt+1}^{\theta-1}\frac{\alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}(1-\tau_k)+1-\delta_M+\delta_M\tau_k}{\left[aC_{Mt+1}^{\theta}+(1-a)C_{Ht+1}^{\theta}\right]}\right]$$

$$\frac{abC_{Mt}^{\theta-1}}{\left[aC_{Mt}^{\theta}+(1-a)C_{Ht}^{\theta}\right]} =$$

$$= \beta E_t\left[\frac{abC_{Mt+1}^{\theta-1}(1-\delta_H)}{\left[aC_{Mt+1}^{\theta}+(1-a)C_{Ht+1}^{\theta}\right]} + b(1-a)\frac{\eta C_{Ht+1}^{\theta-1}K_{Ht+1}^{\eta-1}(Z_{Ht+1}N_{Ht+1})^{1-\eta}}{\left[aC_{Mt+1}^{\theta}+(1-a)C_{Ht+1}^{\theta}\right]}\right]$$

El estado estacionario.

$$\frac{(1-b)\,N_M}{\ell} = \frac{ab}{C^{\theta}} C_{Mt}^{\theta-1}(1-\alpha)(1-\tau_n)Y$$

$$N_H\frac{1-b}{\ell_t} = \frac{b\,(1-a)}{C^{\theta}} C_H^{\theta}(1-\eta)$$

$$\alpha\frac{Y}{K_M}(1-\tau_k) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta_M(1-\tau_k)$$

$$\frac{\eta(1-a)C_H^{\theta}C_M^{1-\theta}}{aK_H} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta_H$$

Calibración.

Siguiendo a Greenwood, Rogerson y Wright (1993), los parámetros calibrados vienen dados por los siguientes valores. La tasa de rendimiento del capital es del 6 % anual lo que da lugar a un factor de descuento $\beta = 0.9898$. El tipo impositivo medio sobre la renta, τ_n, es fijado en 0.25, tomado de McGrattan, Rogerson y Wright (1992). El tipo de impuesto sobre las rentas del capital está entre 0.50 y 0.85[57], eligiendo en este caso $\tau_k = 0.70$ que se ajusta mejor a un valor de α consistente con la evidencia de la participación de las rentas del capital en la renta nacional.

A partir de los datos de renta nacional norteamericana la relación entre el stock de capital por unidad de producción y el ratio inversión bruta con respecto a la producción tienen unos valores medios:

$$\frac{K_H}{Y} = 5 : \frac{K_M}{Y} = 4 : \frac{I_M}{Y} = 0.12 : \frac{I_H}{Y} = 0.135$$

El porcentaje de horas dedicadas a la producción doméstica y a trabajar fuera del hogar son $N_H = 1/4$ y $N_M = 1/3$ respectivamente.

Con estas observaciones determinamos en el sistema anterior, las tasas de depreciación, la participación de las rentas del capital en la renta nacional y el parámetro de la función de producción de bienes domésticos, dando los siguientes valores $\delta_H = \delta_M = 0.0235$, $\alpha = 0.29$ y $\eta = 0.32$.

Quedan por determinar a, b y θ. La estrategia que habitualmente se sigue es realizar un análisis de sensibilidad consistente en ir eligiendo distintos valores de θ que a su vez darán lugar a distintos valores de a y b.Por otra parte McGrattan, Rogerson y Wright (1992) estiman θ igual a 0.4. La siguiente

[57] El artículo toma como referencia las estimaciones para la economía norteamericana de Feldstein, Poterba y Dicks-Mireaux (1983),

tabla refleja los resultados básicos de la simulación para dos valores de $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$.

	Tabla 5.9			
	Datos EEUU	$\theta = 0 \quad \rho_{\varepsilon\varepsilon} = 2/3$	$\theta = 2/3 \quad \rho_{\varepsilon\varepsilon} = 2/3$	$\theta = 0.4 \quad \rho_{\varepsilon\varepsilon} = 0$
σ_Y	1.96	1.36	1.60	1.59
σ_c/σ_Y	0.54	0.41	0.61	0.53
σ_I/σ_Y	2.61	2.82	2.34	2.44
σ_N/σ_Y	0.78	0.41	0.52	0.48
σ_N/σ_W	1.06	0.68	1	0.91
ρ_{NW}	-0.12	0.96	0.86	0.95

Mientras mayor sea el grado de sustitución entre consumo doméstico y consumo en el mercado, dado un valor de $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$, mejor replica el modelo los datos, y para un valor de éste mejor se ajustan las volatilidades relativas del modelo con respecto a las correspondientes en los datos si aumenta el parámetro θ. Por tanto, mientras mayor es la posibilidad de sustituir trabajo doméstico por trabajo de mercado y más alta sea la correlación de ambas perturbaciones mejor se ajustan las volatilidades relativas del modelo a los datos a sus correspondientes en los datos. Sin embargo, comparando la segunda con la tercera columna en la tabla 5.9 el efecto de suponer correlación positiva en ambos shocks no altera significativamente los resultados.

5.14. Ciclos económicos y expectativas (news).

A partir de los trabajos de Beaudry y Portier (2004 y 2007) y de Jaimovich y Rebelo (2007) ha tomado cuerpo la hipótesis consistente en que las expectativas sobre futuros shocks tecnológicos puede generar ciclos económicos, sin importar si dichas expectativas se cumplen o no en el futuro. Esta hipótesis ya había sido explorada en modelos con sunspot donde el papel central lo ocupan expectativas que se autocumplen como un resultado de equilibrio dentro de los modelos de expectativas racionales.

Sin embargo este nuevo enfoque no requiere suponer que existan expectativas que se autocumplan, sólo necesita una estructura de información bajo la cual los shocks futuros son anticipados.

Los individuos, en un marco con expectativas racionales, tienen en cuenta las expectativas futuras sobre determinadas variables cuando toman sus decisiones en el momento actual, por tanto tienen un incentivo a reaccionar hoy ante noticias acerca de futuros shocks aun antes de que éstos se hayan realizado.

La cuestión es si las reacciones anticipadas pueden generar comovimientos dinámicos y cíclicos entre las variables. El modelo estandar de Ciclo Real con una variable de estado como es el stock de capital es casi imposible que genere el comportamiento cíclico observado ante futuros shocks anticipados; más específicamente, el modelo genera comovimientos negativos entre consumo, horas trabajadas e inversión como demuestran Beaudry y Portier (2007).

Jaimovich y Rebelo (2007) muestran que es posible generar ciclos económicos en este contexto si se introducen en el modelo tres características: considerar una función de utilidad que exhiba pequeños o nulos efectos renta, lo que supone asumir complementariedad entre consumo y oferta de trabajo, o lo que es lo mismo, considerar al ocio como un bien inferior, costes de ajuste en la inversión y utilización variable del capital.

Lo siguiente es un esbozo de las condiciones bajo las cuales noticias, conocidas en el presente, sobre futuros shocks tecnológicos pueden generar los comovimientos observados en las series macroeconómicas bajo el supuesto convencional de una función de producción con rendimientos constantes a escala.

Hay que considerar tres cuestiones fundamentales.

1) un shock tecnológico futuro tendría las mismas consecuencias que un aumento esperado en la renta. Bajo las hipótesis de la Renta Permanente o del Ciclo Vital los consumidores reaccionan, esto es, cambian su consumo ante futuros shocks en su renta. Dado que estos shocks no se han producido aún, la reacción del consumo presente es equivalente a un cambio autónomo en la demanda de consumo, aunque los fundamentales no hayan variado en absoluto.

2) dada la restricción de recursos, los movimientos conjuntos entre consumo e inversión, automáticamente implican comovimientos entre consumo y producción y entre inversión y producción. Ya que el output se relaciona con las horas trabajadas, también implica comovimientos entre output y trabajo.

Sin embargo, el movimiento procícilico de consumo y producción no necesariamente implica que la inversión también lo sea, debido a que el consumo puede desplazar al ahorro. Esto sugiere que para garantizar la correlación observada entre las variables es necesario asumir que la inversión y el consumo son complementarios.

3) la correlación positiva entre consumo, trabajo e inversión no necesariamente implica una respuesta positiva a shocks favorables futuros.

Si el consumo y el ocio son son bienes normales, un aumento autónomo en el consumo también supone un aumento en el tiempo de ocio y a un descenso en la oferta de trabajo. A menos que las empresas incrementen la demanda significativamente para inducir un fuerte efecto sustitución sobre el ocio, es imposible generar movimientos conjuntos entre consumo y oferta de trabajo o producción.

Una posibilidad para resolver este problema es abandonar el supuesto de que el ocio es un bien normal o inducir un incremento en la demanda de trabajo y por tanto en el salario real que provoque un fuerte efecto sustitución en el ocio.

En el modelo estandar de Ciclo Real, la curva de demanda de trabajo viene dada por la productividad marginal igual al salario real, dado un volumen de capital predeterminado mientras que la curva de oferta de trabajo es creciente en el salario real. Dado un nivel de consumo, salarios más altos inducen a un aumento en la oferta de trabajo ya que asumimos que el efecto sustitución domina cuantitativamente al efecto renta. En este caso, un aumento en el nivel de consumo autónomo desplaza la curva de oferta de trabajo hacia la izquierda y al mismo tiempo la curva de demanda no se desplaza, dado el nivel de stock de capital. El resultado es un equilibrio en el que las horas de trabajo, el output y la inversión disminuyen.

De esta forma, el modelo de Ciclo Real no puede predecir los comovimientos observados entre las variables cuando se produce un aumento en el consumo autónomo.

El reto sería por tanto cómo alterar el equilibrio anterior ya que las noticias favorables sobre el futuro afectarían a la demanda de consumo hoy.

La solución viene dada por provocar que el aumento en la demanda de trabajo genere una respuesta de la oferta de trabajo tal, que ésta se acabe desplazando hacia la derecha.

Dos formas alternativas de hacer que la demanda de trabajo se desplace ante cambios autonómos en el consumo es o bien introduciendo utilización variable del capital y hacer depender ésta positivamente del consumo o bien introducir competencia imperfecta de tal forma que la curva de demanda dependa de los costes marginales de las empresas.

Lo que sigue es una versión sencilla del modelo de Jaimovich y Rebelo (2007).

El planificador social resuelve:

$$Max \ E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln \left[C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right]$$

sujeto a las restricciones de recursos y a la dinámica del capital ampliada con costes de ajustes en la inversión y con utilizacion variable del capital.

$$C_t + I_t = (u_t K_t)^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \tag{(5.83)}$$

$$K_{t+1} = I_t \left[1 - \varphi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] + [(1 - \delta(u_t)] \, K_t \tag{(5.84)}$$

Lo más resaltable de la formulación es que la función de utilidad no genera efecto renta en el consumo y por tanto un aumento en el consumo no desplaza la curva de oferta de trabajo. Los costes de ajuste en la inversión implican que ésta no cambia drásticamente ante cambios en la demanda, esto es, supone que las empresas desean suavizar la demanda de inversión intertemporalmente.

Ante un cambio anticipado en el nivel tecnológico futuro, las empresas anticipan o esperan que la inversión aumentará en el futuro, lo que da lugar a un deseo de aumentar la inversión hoy, proceso que viene suavizado por la existencia de dichos costes de ajuste, esto es, la inversión en un periodo no ajusta la diferencia existente entre el stock de capital existente y el deseado. Esta característica hace que la capacidad de utilización del capital aumente en respuesta al cambio en el consumo autónomo actual y desplace la demanda de trabajo hacia la derecha.

Formalmente el problema viene planteado en los términos usuales. Planteando el lagrangiano, el planificador social maximiza la función de utilidad sujeta a las restricciones:

$$\mathcal{L}(C_t, N_t, K_{t+1}, u_t, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln \left[C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right] + \lambda_t \left[(u_t K_t)^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - C_t - I_t \right] +$$

$$+\beta^t \mu_t \left[I_t \left[1 - \varphi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] + \left[(1 - \delta(u_t) \right] K_t - K_{t+1} \right]$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta}} = \lambda_t \qquad ((5.85))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0 \Rightarrow \frac{N_t^{\theta}}{C_t - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta}} = \lambda_t (1-\alpha)(u_t K_t)^{\alpha} N_t^{-\alpha} = \lambda_t W_t \qquad ((5.86))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow \alpha \lambda_t u_t^{\alpha-1} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = \mu_t \delta'(u_t) K_t \qquad ((5.87))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = 0 \Rightarrow \mu_t = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \alpha u_{t+1}^{\alpha} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + \mu_{t+1} (1 - \delta(u_{t+1}) \right] \qquad ((5.88))$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \mu_t \left[1 - \varphi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) - \varphi'\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\frac{I_t}{I_{t-1}}\right] \tag{(5.89)}$$

$$+E_t\left[\beta\mu_{t+1}\varphi'\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)\left(\frac{I_{t+1}}{I_t}\right)^2\right]$$

que junto a las dos restricciones nos permiten calcular la solución del problema.

Log-linealización.

A partir de las condiciones de optimización estáticas para el consumo y el número de horas, (5.85) y (5.86) obtenemos la oferta de trabajo.

$$\hat{\lambda}_t + \lambda C\hat{C}_t - \lambda N^{\theta 1+\theta}\hat{N}_t = 0$$

$$\theta N^{\theta}\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t + \hat{W}_t + \lambda C\hat{C}_t - \lambda N^{\theta 1+\theta}\hat{N}_t$$

La función de oferta de trabajo simplemente queda como

$$W_t = N_t^{\theta} \Rightarrow \hat{W}_t = \theta\hat{N}_t$$

Para obtener la demanda de trabajo, linealizamos (5.86), (5.87) y (5.89):

$$\hat{W}_t = \alpha\hat{u}_t + \alpha\hat{K}_t - \alpha\hat{N}_t \tag{(5.90)}$$

$$\hat{\lambda}_t + (\alpha - 1)\,\hat{u}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t = \hat{\mu}_t + \frac{\delta'(u)}{\delta''(u)}u\hat{u}_t + \hat{K}_t$$

$$\hat{u}_t = \frac{1}{\alpha - 1 - \phi}\left[(1-\alpha)\hat{K}_t - (1-\alpha)\hat{N}_t - \left(\hat{\lambda}_t - \hat{\mu}_t\right)\right] : \phi = \frac{\delta'(u)}{\delta''(u)}u \tag{(5.91)}$$

A partir de la restricción de recursos, (5.83):

$$\frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{I}{Y}\hat{I}_t = \alpha\hat{u}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t = \hat{W}_t + \hat{N}_t$$

A partir de la condición de óptimo para la inversión, (5.89):

$$\hat{\lambda}_t - \hat{\mu}_t = -\varphi''(1)(1+\beta)\hat{I}_t + \beta\varphi''(1)\hat{I}_{t+1} : \varphi(1) = \varphi'(1) = 0$$

Introduciendo ésta en la expresión para la utilización del capital, (5.91):

$$\hat{u}_t = \frac{1}{\alpha - 1 - \phi}\left[-(1-\alpha)\hat{N}_t + \varphi''(1)(1+\beta)\hat{I}_t - \beta\varphi''(1)\hat{I}_{t+1}\right] \qquad ((5.92))$$

Despejando la inversión de la restricción de recursos e introduciéndola en la expresión para la utilización variable del capital, (5.92).

$$\hat{u}_t = \frac{1}{\alpha - 1 - \phi}\left[-(1-\alpha)\hat{N}_t + \varphi''(1)(1+\beta)\frac{Y}{I}\left(\hat{W}_t + \hat{N}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t\right) - \beta\varphi''(1)\hat{I}_{t+1}\right]$$

Introduciendo ésta en la expresión para el salario real, (5.90), obtenemos finalmente la curva de demanda:

$$\hat{W}_t = \frac{\alpha}{\alpha - 1 - \phi}\left[-(1-\alpha)\hat{N}_t + \varphi''(1)(1+\beta)\frac{Y}{I}\left(\hat{W}_t + \hat{N}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t\right) - \beta\varphi''(1)\hat{I}_{t+1}\right] - \alpha\hat{N}_t$$

$$\hat{W}_t\left[1 + \phi - \alpha + \alpha\varphi''(1)(1+\beta)\frac{Y}{I}\right] = \qquad ((5.93))$$

$$= \alpha\varphi''(1)(1+\beta)\frac{C}{Y}\frac{Y}{I}\hat{C}_t + \alpha\beta\varphi''(1)\hat{I}_{t+1} - \left(\alpha\varphi''(1)(1+\beta)\frac{Y}{I} + \alpha\phi\right)\hat{N}_t$$

La curva de demanda de trabajo, (5.93) tiene pendiente negativa y donde tanto el consumo actual como la inversión futura entran en el término independiente.

Supongamos ahora que los individuos anticipan un shock tecnológico futuro, hecho que incrementa $\hat{C}_t$ y desplaza la curva de demanda de trabajo hacia arriba, sin afectar a la curva de oferta de trabajo. Además, $\hat{I}_{t+1}$ también aumenta con lo que el desplazamiento de la demanda de trabajo es mayor.

La introducción de utilización variable del capital es esencial. Sin ésta, el término independiente en (5.93) desaparece y la curva de demanda no responde ante shocks futuros. Sin embargo, la tasa de utilización del capital no es suficiente para obtener una respuesta positiva de la cantidad de horas ante los shocks anticipados.

Si la función de utilidad es separable en consumo y horas de trabajo, un aumento en el consumo dará lugar a un desplazamiento de la curva de oferta de trabajo en sentido ascendente con lo que el desplazamiento de la curva de demanda deber ser aún mayor para observar un comportamiento procíclico de las horas trabajadas.

Por otra parte, si no hay costes de ajuste en la inversión, la tasa de utilización del capital sólo sería función de las horas trabajadas e independiente del consumo, con lo que el aumento en el consumo no desplaza la curva de demanda de trabajo ni tampoco la curva de oferta, dejando inalterado el número de horas de trabajo de equilibrio. Esto significa que la inversión ha sido desplazada totalmente por el consumo si no existen costes de ajuste en la inversión.

Un modelo con precios rígidos y restricción cash-in-advance.

En el capítulo 4, en el modelo New Keynesian, derivamos la ecuación que nos ligaba el coste marginal con la demanda de trabajo y el salario real.

$$\widehat{cma}_t = (w_t - p_t) - \ln\left(\frac{\partial Y_t}{\partial N_t}\right) = w_t - p_t - [(1-\alpha)z_t - \alpha n_t - \ln(1-\alpha)]$$

$$\hat{W}_t = \widehat{cma}_t - \alpha \hat{N}_t \qquad ((5.94))$$

El coste marginal está relacionado con la tasa de inflación a través de la curva de Phillips New Keynesian:

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\gamma\beta)(1-\gamma)}{\gamma} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\sigma} \widehat{cma}_t$$

La introducción de la restricción cash in advance actúa suavizando el gasto intertemporalmente. Dada esta restricción, los individuos no pueden demandar más de lo que sus saldos reales les permitan.

Consideremos una restricción cash-in-advance y la restricción de recursos log-linealizada:

$$\psi\hat{C}_t + (1-\psi)\hat{I}_t = \hat{M}_t - \hat{P}_t$$

$$\hat{Y}_t = \frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{I}{Y}\hat{I}_t = (1-\alpha)\hat{N}_t$$

Despejando el coste marginal en la curva de Phillips y calculando las tasas de inflación a partir de la restricción de liquidez.

$$\widehat{cma}_t = \frac{1}{\vartheta}(\hat{\pi}_t - \beta E_t\hat{\pi}_{t+1}) =$$

$$\frac{1}{\vartheta}\left[(1+\beta)\hat{P}_t - \beta\hat{P}_{t+1}\right](-\psi\hat{C}_t - (1-\psi)\hat{I}_t - \beta\left(\psi\hat{C}_{t+1} + (1-\psi)\hat{I}_{t+1} - \psi\hat{C}_{t+1} - (1-\psi)\hat{I}_{t+1}\right))$$

$$\widehat{cma}_t = \beta\left(\psi\hat{C}_{t+1} + (1-\psi)\hat{I}_{t+1}\right) - (1+\beta)\left(\psi\hat{C}_t + (1-\psi)\hat{I}_t\right)$$

Sustituyendo la restricción de recursos y la función de producción.

$$\widehat{cma}_t = \beta\left(\psi\hat{C}_{t+1} + (1-\psi)\hat{I}_{t+1}\right) - (1+\beta)\left(\psi\hat{C}_t + (1-\psi)\frac{Y}{I}\left((1-\alpha)\hat{N}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t\right)\right)$$

$$\widehat{cma}_t = \beta\left(\psi\hat{C}_{t+1} + (1-\psi)\hat{I}_{t+1}\right) - (1+\beta)\left(\psi\hat{C}_t + (1-\psi)\frac{Y}{I}\left((1-\alpha)\hat{N}_t - \frac{C}{Y}\hat{C}_t\right)\right)$$

$$\widehat{cma}_t = \beta\left(\psi\hat{C}_{t+1} + (1-\psi)\hat{I}_{t+1}\right) + (1+\beta)\left((1-\psi)\frac{Y}{I} - \psi\right)\hat{C}_t - (1+\beta)(1-\psi)(1-\alpha)\frac{Y}{I}\hat{N}_t \tag{(5.95)}$$

Sustituyendo (5.95) en (5.94) que es la curva de demanda de trabajo, obtenemos que un aumento en el consumo corriente junto a incrementos en la inversión y el consumo futuros desplazan la curva de demanda de trabajo hacia arriba. Mientras menor es ψ, mayor es el desplazamiento.

De nuevo, el modelo es capaz de explicar los movimientos conjuntos en consumo, horas de trabajo, inversión y output.

Modelo con desplazamiento de la oferta de trabajo.

Con una funcion de preferencias separable en consumo y horas de trabajo, la oferta de trabajo depende del consumo y aumentos de éste la desplazan hacia arriba y hacia la izquierda. Si fuese posible introducir una variable dentro de la función de oferta de trabajo que provoque cambios en sentido opuesto, podríamos explicar de nuevo los movimientos conjuntos observados en las series.

En esta línea se basa el artículo de Christiano, Motto y Rostagno (2006) en el cual la introducción de formación de hábitos en el consumo provoca que el consumo futuro entre en la función de oferta de trabajo.

El modelo básico viene dado por:

$$Max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{(C_t - \eta C_{t-1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta} \right]$$

$$C_t + I_t = K_t{}^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = (C_t - \eta C_{t-1})^{-\gamma} - \lambda_t - \beta \eta E_t (C_{t+1} - \eta C_t)^{-\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -N_t^{\theta} + \lambda_t K_t^{\alpha} (1-\alpha) N_t^{-\alpha} = 0 \Rightarrow \lambda_t W_t = N_t^{\theta}$$

Log-linealizando las dos condiciones:

$$-\gamma \left(C_t - \eta C_{t-1}\right)^{-\gamma-1} (dC_t - \eta dC_{t-1}) + \gamma \beta \eta (C_{t+1} - \eta C_t)^{-\gamma-1} (dC_{t+1} - \eta dC_t) = d\lambda_t$$

$$-\gamma \left(1-\eta\right)^{-\gamma-1} C^{-\gamma} \left[\hat{C}_t - \eta \hat{C}_{t-1} - \beta \eta (\hat{C}_{t+1} - \eta \hat{C}_t) \right] = \lambda \hat{\lambda}_t$$

En el estado estacionario.

$$\lambda = C^{-\gamma} \left(1-\eta\right)^{-\gamma} \left(1-\beta\eta\right)$$

$$\frac{\gamma}{\left(1-\eta\right)\left(1-\beta\eta\right)} \left[(1+\beta\eta^2)\hat{C}_t - \eta \hat{C}_{t-1} - \beta \eta \hat{C}_{t+1} \right] = -\hat{\lambda}_t$$

Por tanto la función de oferta de trabajo viene dada por:

$$\hat{W}_t = \theta \hat{N}_t + \frac{\gamma}{\left(1-\eta\right)\left(1-\beta\eta\right)} \left[(1+\beta\eta^2)\hat{C}_t - \eta \hat{C}_{t-1} - \beta \eta \hat{C}_{t+1} \right]$$

Debido a la formación de hábitos, el salario real está afectado negativamente por el consumo futuro. Si un aumento en el consumo hoy es seguido de un aumento mayor en el consumo mañana, la curva de oferta de trabajo se desplazará hacia la derecha y el resultado será un mayor nivel de horas trabajadas y producción en equilibrio.

5.15. Precios de activos financieros en un modelo de Ciclo Real.

El modelo de Ciclo Económico Real ha sido también utilizado como marco para explorar las implicaciones del modelo sobre los precios de los activos. Ejemplos de esta literatura son los artículos de Jermann (1998), Rouwenhorst (1995) o Boldrin, Christiano y Fisher (1995). Desde un punto de vista estrictamente metodológico los modelos con producción permiten una modelización más realista del consumo y los dividendos que en modelos de intercambio puro como el de Lucas (1978). En los trabajos citados, las predicciones obtenidas tienden a generar implicaciones que no están en consonancia con la evidencia empírica para el precio de los activos.

En este epígrafe seguimos la aportación de Lettau (2003), en la que a partir del método de coeficientes indeterminados presenta una exposición transparente de las relaciones entre el efecto de las perturbaciones tecnológicas y el rendimiento de los activos similar a la realizada en el modelo expuesto en el epígrafe 2.4.

La prima de riesgo para bonos y acciones viene determinada por la respuesta dinámica de los rendimientos futuros esperados y de los flujos de caja a los shocks tecnológicos como demuestran Campbell y Shiller (1988). Las soluciones para las primas de riesgo descomponen la respuesta en la suma de dos efectos, uno directo debido al shock tecnológico y otro indirecto debido a la acumulación de capital. De esta forma una perturbación tecnológica positiva aumenta los flujos de caja, manteniendo el stock de capital constante debido a que hace a las empresas más productivas pero también conduce a un aumento del stock de capital que disminuye dichos flujos de caja para un nivel dado de tecnología.

La solución analítica cuantifica dichos efectos y nos permite diferenciar cuantitativamente los efectos de uno o de otro, que como tendremos ocasión de comprobar dependen de la persistencia de la perturbación y de la aversión al riesgo.

Un resumen de los hechos estilizados sobre el rendimiento de activos financieros es el siguiente: la prima de riesgo en términos reales de las acciones es alrededor del 2 % trimestral, mientras que la de los bonos a largo plazo es del 0.2 %, medida dicha prima como diferencia entre el rendimiento del activo y el tipo de interés de los Treasury-Bills o deuda a corto plazo emitida por el gobierno americano.

El modelo de Ciclo Real es estandar, donde la función de preferencias de las economías domésticas viene dada por:

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

esto es, consideraremos el modelo con oferta de trabajo fija.

La solución, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, viene dada para el log del consumo y para el log del stock de capital por las siguientes expresiones:

$$c_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{cz} z_t : k_{t+1} = \eta_{kk} k_t + \eta_{kz} z_t$$

Dado el proceso para la perturbación tecnológica, dichas variables siguen procesos ARMA(2,1) y AR(2) respectivamente:

$$c_t = \frac{\eta_{cz} + (\eta_{ck}\eta_{kz} - \eta_{cz}\eta_{kk})L}{(1-\rho L)(1-\eta_{kk}L)}\varepsilon_t : k_{t+1} = \frac{\eta_{kz}}{(1-\rho L)(1-\eta_{kk}L)}\varepsilon_t$$

Aunque como sabemos el único activo en el modelo con oferta neta positiva es el stock de capital, Lucas (1978) demuestra que los precios sombra para cualquier activo cuya oferta neta sea cero pueden ser calculados utilizando la condición intertemporal de primer orden de las economías domésticas.

El rendimiento del capital será denotado como el rendimiento de una acción a corto plazo y como sabemos corresponde al producto marginal del capital neto de depreciación.

Sea $R_{t,t+1}$ el rendimiento bruto de un activo entre el periodo t y el $t+1$. Denotando con P su precio y F el flujo de caja que genera, entonces:

$$R_{t,t+1} = \frac{P_{t+1} + F_{t+1}}{P_t}$$

Los precios de activos que no entran explícitamente en el modelo pueden ser calculados a partir de la ecuación de Euler:

$$E_t\left[\beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}R_{t,t+1}\right]=1$$

Sea $R^f_{t,t+1}$ el rendimiento a un periodo de un bono, considerado como el tipo de interés sin riesgo, por tanto:

$$E_t\left[\beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}=R^f_{t,t+1}$$

Ya que los shocks tecnológicos se asume que siguen una distribución log-normal, la anterior condición de equilibrio en logaritmos viene dada por:

$$r^f_{t,t+1}=\frac{1}{\sigma}E_t\Delta c_{t+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}Var(\Delta c_{t+1})-\ln\beta$$

El modelo de consumo Capital Asset Pricing Model (CAPM) implica que la prima de riesgo de un activo, $r^{rp}_{t,t+1}$, viene definida a partir de la diferencia del mismo con respecto al tipo de interés del activo sin riesgo, $r^f_{t,t+1}$, y es igual a la covarianza de la variación del consumo y el rendimiento del activo (Campbell, 2003).

$$r^{rp}_{t,t+1}=r^e_{t,t+1}-r^f_{t,t+1}=Cov_t(\Delta c_{t+1},r^e_{t,t+1})$$

En el modelo de Ciclo Real, el crecimiento del consumo y el rendimiento del activo son funciones lineales de los shocks tecnológicos, por tanto, la prima de riesgo viene dada por:

$$r^{rp}_{t,t+1}=Cov_t(\frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\varepsilon_{t+1},\eta_{rz}\varepsilon_{t+1})=\frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\eta_{rz}\sigma^2_\varepsilon$$

Esto es, la prima de riesgo depende la aversión al riesgo y de la varianza de la perturbación tecnológica. Si ante una perturbación tecnológica, el rendimiento de un activo reacciona en la misma dirección que el consumo, entonces su prima de riesgo es positiva debido a que los individuos demandan un exceso de rendimiento para mantener el activo cuando el crecimiento en el consumo esperado es alto.

Para calcular la elasticidad de varios activos con respecto al shock tecnológico es posible descomponer el rendimiento no esperado que en su expresión log-lineal viene dado por:

$$r_{t,t+1} - E_t r_{t,t+1} = (E_{t+1} - E_t) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \Delta f_{t+i} - (E_{t+1} - E_t) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \Delta r_{t+i-1,t+i}$$

donde $\lambda = 1/1 + F/P$.

Para el tipo de interés sin riesgo tenemos que:

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma} E_t \Delta c_{t+1}$$

A partir del proceso de serie temporal que sigue la variación en el consumo:

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1-\rho L} \left[-(1-\rho)\eta_{cz} + \frac{\eta_{ck}\eta_{kz}(1-L)}{1-\eta_{kk}L} \right] \varepsilon_t$$

El shock tecnológico afecta al tipo de interés a través de dos canales. El término η_{cz} mide el efecto directo sobre el crecimiento del consumo, manteniendo K_t constante. A menos que la perturbación sea permanente, el consumo vuelve a su tendencia de crecimiento a largo plazo. El efecto indirecto a través del stock de capital provoca un aumento en el tipo de interés.

Dado que las elasticidades también dependen del parámetro de persistencia, es difícil hacer un ejercicio de estática comparativa y ver que efecto domina a cuál; sin embargo podemos ver las soluciones en los dos casos extremos.

Para $\rho = 0$ y $\eta_{kz} \simeq 0$.

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma} \left[-\eta_{cz} + \frac{\eta_{ck}\eta_{kz}(1-L)}{1-\eta_{kk}L} \right] \varepsilon_t = -\frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\varepsilon_t$$

Para $\rho = 1$

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\eta_{ck}\eta_{kz}}{1-\eta_{kk}L} \right] \varepsilon_t$$

Por tanto, dependiendo de la persistencia del shock, el tipo de interés, disminuye cuando es puramente transitorio mientras que aumenta cuando es permanente.

Para calcular la prima de riesgo de los bonos a largo plazo y de las acciones, expresaremos la expresión para $r^f_{t,t+1}$ en términos de su representación $MA(\infty)$.

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\sigma}\frac{(\rho-1)\eta_{cz} + \eta_{ck}\eta_{kz} - [(\rho-1)\eta_{cz}\eta_{kk} + \eta_{ck}\eta_{kz}]\,L}{(1-\rho L)\,(1-\eta_{kk}L)}\varepsilon_t$$

Definiendo

$$\psi = -\frac{[(\rho-1)\eta_{cz}\eta_{kk} + \eta_{ck}\eta_{kz}]}{(\rho-1)\eta_{cz}\eta_{kk} + \eta_{ck}\eta_{kz}} : \omega_t = \frac{[(\rho-1)\eta_{cz}\eta_{kk} + \eta_{ck}\eta_{kz}]}{\sigma}\varepsilon_t$$

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1+\psi L}{\sigma}\left[\frac{1}{(1-\rho L)\,(1-\eta_{kk}L)}\right]\omega_t = \frac{1+\psi L}{\sigma(\rho-\eta_{kk})}\left[\frac{\rho}{1-\rho L} + \frac{\eta_{kk}}{1-\eta_{kk}L}\right]\omega_t$$

$$r^f_{t,t+1} = \frac{1}{\rho-\eta_{kk}}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\rho^{i+1} - \eta_{kk}^{i+1} + \psi\left(\rho^i - \eta_{kk}^i\right)\right]\omega_{t-i}$$

Y por tanto, la varianza del tipo de interés viene dada por:

$$Var(r^f_{t,t+1}) = \left(\frac{[(\rho-1)\eta_{cz}\eta_{kk} + \eta_{ck}\eta_{kz}]}{\sigma(\rho-\eta_{kk})}\right)^2\left[\frac{(\rho+\psi)^2}{1-\rho^2} + \frac{(\eta_{kk}+\psi)^2}{1-\eta_{kk}^2} - 2\frac{(\eta_{kk}+\psi)(\rho+\psi)}{1-\eta_{kk}\rho}\right]\sigma^2_\varepsilon$$

Consideremos ahora un bono a largo plazo que paga un dividendo desde $t+1$ hasta el infinito. La única fuente de rendimientos no esperados es un cambio en las expectativas de dichos rendimientos futuros esperados.

$$r^{lb}_{t,t+1} - E_t r^{lb}_{t,t+1} = -(E_{t+1} - E_t)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\Delta r_{t+i-1,t+i} =$$

$$= -\frac{\lambda}{\rho-\eta_{kk}}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\left[\rho^{i+1} - \eta_{kk}^{i+1} + \psi\left(\rho^i - \eta_{kk}^i\right)\right]\omega_{t+1}$$

$$r^{lb}_{t,t+1} - E_t r^{lb}_{t,t+1} = -\frac{\lambda(1+\psi\lambda)}{(1-\lambda\rho)(1-\lambda\eta_{kk})}\omega_{t+1}$$

Simplificando esta expresión, obtenemos la elasticidad del rendimiento del bono a largo plazo ante un shock tecnológico.

$$\eta_{rz}^{lb} = \frac{\lambda}{\sigma(1-\lambda\rho)}\left[(1-\rho)\eta_{cz} - \frac{1-\lambda}{1-\lambda\eta_{kk}}\eta_{ck}\eta_{kz}\right] \qquad ((5.96))$$

La reacción del rendimiento del bono a largo plazo a la perturbación tecnológica depende de nuevo del efecto directo vía consumo y del efecto indirecto a través de la acumulación de capital. A menos que las perturbaciones sean permanentes, el efecto directo tiene el mismo signo que la variación en el consumo. Por otra parte, el incremento en el stock de capital aumenta el consumo futuro, que a su vez aumenta los tipos de interés esperados provocando una pérdida de capital. Este efecto viene reflejado en el segundo sumando en el término $\eta_{ck}\eta_{kz}$ que lleva signo negativo.

El efecto neto por tanto es ambigüo y depende de los parámetros del modelo.

La prima de riesgo para el bono a largo plazo se deduce directamete de la condición del modelo CAPM.

$$r_{t,t+1}^{lb} = Cov_t(\frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\varepsilon_{t+1}, \eta_{rz}\varepsilon_{t+1}) = \frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\eta_{rz}^{lb}\sigma_{\varepsilon}^2$$

De nuevo, las elasticidades son funciones de los parámetros con lo que no es posible llevar a cabo un ejercicio de estática comparativa. Sin embargo a partir de la expresión de la elasticidad podemos observar los cambios en la misma cuando la persistencia de la perturbación es mínima o máxima.

Para $\rho = 1$, el efecto del cambio en el consumo es nulo y por tanto sólo opera el efecto a través de la acumulación de capital.

$$\eta_{rz}^{lb} = -\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\eta_{ck}\eta_{kz}}{1-\lambda\eta_{kk}} \qquad ((5.97))$$

Un shock permanente en t eleva el consumo en $\eta_{ck}\eta_{kz}$ el siguente periodo. El factor $-\frac{\lambda}{\sigma}\frac{1}{1-\lambda\eta_{kk}}$ es el valor presente del efecto a largo plazo que un nivel de consumo permanentemente más alto tendrá sobre el tipo de interés futuro.

En el caso $\rho = 0$, el rendimiento no esperado para bono es sin ninguna duda positivo después de la perturbación tecnológica. Asumiendo $\eta_{kz} \simeq 0$.

$$\eta_{rz}^{lb} \simeq \frac{\lambda}{\sigma}\eta_{cz}$$

Un shock tecnológico positivo eleva el rendimiento no esperado en el bono a largo plazo.

Consideremos ahora la prima de riesgo para las acciones.

Para aproximar los flujos de caja que genera la posesión de una acción, supondremos que dicha acción genera un rendimiento en cada periodo igual al producto marginal del capital. Los flujos de caja, expresados en términos de los parámetros de la solución del modelo vienen dados por:

$$f_t = y_t - k_t = \eta_{yk}k_t + \eta_{yz}z_t - k_t = (\eta_{yk} - 1)k_t + \eta_{yz}z_t$$

El rendimiento no esperado de una acción presenta dos componentes, el cambio en las expectativas sobre los flujos de caja futuros y el cambio en los rendimientos futuros. Este segundo término es el mismo que para el bono a largo plazo.

De esta forma, los flujos de caja siguen el siguiente proceso ARMA (2,1):

$$f_t = \frac{\eta_{fz} + ((\eta_{yk} - 1)\eta_{kz})L}{(1 - \rho L)(1 - \eta_{kk}L)}\varepsilon_{t+1}$$

El cambio en las expectativas para los flujos de caja vienen dados por:

$$(E_{t+1} - E_t)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\Delta f_{t+i} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda\rho}\left(\eta_{fz} + \frac{\lambda}{1-\lambda\eta_{kk}}(\eta_{yk} - 1)\eta_{kz}\right)\varepsilon_t = \eta_{rz}^{f}\varepsilon_t \tag{(5.98)}$$

El shock tecnológico afecta al cambio esperado en los dividendos a través de un canal directo que es siempre positivo, dado por η_{fz}, y otro indirecto a través de la acumulación de capital que es negativo, debido a que $\eta_{yk} - 1 < 0$, debido a que la elasticidad de la producción con respecto al capital es inferior a la unidad. De nuevo, el efecto neto es ambiguo.

La prima de riesgo para las acciones viene dada por:

$$r^{eq}_{t,t+1} = Cov_t(\frac{1}{\sigma}\eta_{cz}\varepsilon_{t+1}, \eta_{fz}\varepsilon_{t+1}) = \frac{1}{\sigma}\eta_{cz}(\eta^{f}_{rz} + \eta^{lb}_{rz})\sigma^2_{\varepsilon}$$

Esto implica que la diferencia entre las primas de riesgo para una acción y un bono a largo plazo vienen determinadas por la elasticidad η^{f}_{rz}. Esta es positiva en los datos, lo que implica que $\eta^{f}_{rz} > 0$.

Para valores de calibración habituales (Campbell, 1994) la prima de riesgo del bono a largo plazo es del 0.00024 % mientras que la de las acciones es del 0.00023 % lo que implica que el modelo predice que la prima de riesgo es mayor en los bonos que en las acciones.

A partir de (5.96) o (5.97) vemos que la prima de riesgo del bono a largo plazo depende de la respuesta del tipo de interés sin riesgo, que a su vez depende de $\eta_{cz} > 0$ y $\rho < 1$ y por tanto el efecto directo del shock tecnológico sobre η^{lb}_{rz} es positivo. Sin embargo, el segundo término que opera indirectamente a través de la acumulación de capital, da lugar a que la prima de riesgo del bono a largo plazo sea pequeña. Estos efectos a su vez dependen de la dinámica del consumo y del tipo de interés sin riesgo ante la perturbación tecnológica.

A partir de (5.98) vemos que la prima de riesgo del bono a largo plazo tendrá más riesgo que las acciones si η^{f}_{rz} es negativo y depende directamente del efecto del shock sobre los flujos de caja y negativamente debido a la acumulación de capital. Para los valores de calibración el cambio en el flujo de caja esperado es positivo pero decreciente con el tiempo y a largo plazo, cuando el efecto de la perturbación va desvaneciéndose da lugar a que η^{f}_{rz} sea positivo pero cuantitativamente pequeño.

El modelo de Ciclo Real con oferta de trabajo fija predice que la diferencia en las primas de riesgo a largo plazo entre bonos y acciones es prácticamente cero lo cual está en contra de la evidencia empírica.

5.16. Shocks de demanda en el modelo de Ciclo Real.

La introducción de perturbaciones de demanda para explicar las fluctuaciones cíclicas dentro de un modelo de Ciclo Real presenta el problema de que es incapaz de generar los comovimientos observados en las series. En el caso de una perturbación que afecte a las preferencias produce un efecto expulsión sobre la inversión.

Consideremos el siguiente ejemplo, donde la función de preferencias, la función de producción y la restricción de recursos son:

$$u(C_t, N_t) = \ln(C_t - \Delta_t) - B\frac{N_t^{1+\theta}}{1+\theta}$$

donde Δ_t representa la perturbación que afecta a las preferencias del individuo.

$$\frac{Y_t}{N_t} = K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

La condición de equilibrio oferta-demanda de trabajo viene dada por:

$$B(C_t - \Delta_t)N_t^{\theta} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_t}$$

$$B(C_t - \Delta_t) = (1-\alpha)K_t^{\alpha} N_t^{-(\alpha+\theta)} \qquad ((5.99))$$

Diferenciando (5.99) y la restricción de recursos:

$$\frac{dC_t}{C_t - \Delta_t} = -(\alpha+\theta)\frac{dN_t}{N_t}$$

$$\frac{1}{Y}(dC_t + dI_t) = \frac{dY_t}{Y} = (1-\alpha)\frac{dN_t}{N_t}$$

$$\frac{1}{Y}(dC_t + dI_t) = -\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}\frac{dC_t}{C_t - \Delta_t}$$

$$dC_t\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}\right)(C_t-\Delta_t)+dI_t=0$$

Por tanto, un shock a las preferencias que eleve la utilidad marginal del consumo e induzca un consumo mayor provoca un efecto expulsión en la inversión.

Una utilidad marginal más alta para el consumo implica que el individuo reduce su demanda de ocio, dando lugar a un aumento en la oferta de trabajo y en la producción, aunque el aumento en el consumo es mayor que el aumento en la producción.

Un comportamiento contracíclico de la inversión va contra los hechos empíricos, de tal forma que o bien dichas perturbaciones no pueden ser origen de los ciclos económicos o bien es necesario modificar el modelo y comprobar si podemos cambiar el signo de la variación en la inversión.

Varias son las rutas que se han explorado en la literatura.

En primer lugar, Wen (2006) demuestra que en un modelo de Ciclo Real sencillo, con $\theta=0$, la condición necesaria para que un shock a las preferencias genere un comportamiento procíclico de la inversión viene dada por:

$$\rho>\frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)(1-\beta(1-\delta))}$$

donde ρ es la persistencia de la perturbación y β el factor de descuento intertemporal. Si la perturbación es poco persistente, el consumo aumenta, desplazando a la inversión. Mientras más persistente sea la perturbación más aumenta la utilidad marginal del consumo futuro y por tanto es óptimo para los individuos aumentar la inversión, dada la condición de Euler.

En segundo lugar, la introducción de utilización variable del capital reduce el grado de persistencia de las perturbaciones necesario para explicar la dinámica de la inversión.

En tercer lugar, si asumimos que las preferencias son no separables en consumo y ocio, mientras mayor sea la elasticidad de sustitución entre ambos, menor será la persistencia necesaria para que observemos un comportamiento procíclico en la inversión.

En cuarto lugar, la formación de hábitos en el consumo provoca el efecto de provocar una elevación permanente en el nivel de consumo ante shocks transitorios a las preferencias.

Finalmente, una vía alternativa es considerar la existencia de rendimientos crecientes a escala en la producción; éstos ya han sido explorados en artículos dedicados a la teoría del crecimiento, destacando las aportaciones de Lucas (1988) y Romer (1986). Un modelo en el que se combina, utilización variable del capital y rendimientos crecientes a escala es el planteado por Guo, Sirbu y Weder (2012).

El modelo propuesto por Baxter y King (1991) introduce un grado de externalidad moderada con el fin de generar un comportamiento cíclico en el modelo. Dicha externalidad no puede ser cuantitativamente elevada si se desea que el modelo conserve las propiedades de estado estacionario y no generar crecimiento sostenido. Por otra parte, su propia estimación del proceso de shock de demanda implica un alto grado de correlación serial.

El modelo planteado viene dado por las siguientes ecuaciones. Las preferencias de las economías domésticas, denotadas en minúscula, tienen la habitual forma logarítmica con un componente estocástico, Δ_t que afecta a las preferencias de los individuos y nos permite analizar los cambios en la demanda.

$$u(C_t, n_t) = \ln(C_t - \Delta_t) + b\ln(1 - n_t)$$

Bajo este supuesto de preferencias la condición de primer orden viene dada por:

$$C_t = \lambda_t^{-1} + \Delta_t$$

De esta forma Δ_t puede interpretarse como un elemento que desplaza la demanda de consumo, manteniendo constante la utilidad marginal de la renta.

La función de producción presenta a nivel individual rendimientos crecientes al añadir un término de externalidad, Y_t^{ϵ}.

$$y_t = Z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} Y_t^{\epsilon} : 0 < \epsilon < 1$$

La producción individual y_t depende de la producción per cápita Y_t, donde el parámetro ϵ mide la magnitud de la externalidad.

La producción agregada per cápita viene dada por la suma de las producciones individuales que forman un contínuo de agentes idénticos entre $[0,1]$:

$$Y_t = \int_0^1 Z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} Y_t^{\epsilon} \Rightarrow Y_t = \left(Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}\right)^{1/1-\epsilon}$$

En presencia de externalidades los productos marginales de los factores son distintos, esto es, la productividad marginal privada es inferior a la social, dado que $1/1-\epsilon > 1$.

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial N}\right)_p = (1-\alpha)\frac{Y}{N} < \frac{1-\alpha}{1-\epsilon}\frac{Y}{N} = \left(\frac{\partial Y}{\partial N}\right)_s$$

La elasticidad del producto marginal del trabajo con respecto a ambos factores es igual; dicha elasticidad con respecto al trabajo viene dada por.

$$\frac{d\ln\left(\frac{\partial Y}{\partial N}\right)_p}{d\ln N} = \frac{1-\alpha}{1-\epsilon} - 1$$

Finalmente, la dinámica del stock de capital y la restricción de recursos son las habituales.

Las condiciones de primer orden log-linealizadas y teniendo en cuenta la agregación de economías domésticas vienen dadas:

$$-\hat{\lambda}_t = \hat{C}_t - \hat{\Delta}_t$$

$$\frac{N}{1-N}\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t + (\hat{Y}_t - \hat{N}_t)$$

$$\hat{\lambda}_t = E_t\hat{\lambda}_{t+1} + (\beta^{-1} - (1-\delta))E_t((1+\epsilon)\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1})$$

$$\hat{Y}_t = \frac{C}{Y}\hat{C}_t + \frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1} - (1-\delta)\frac{K}{Y}\hat{K}_t$$

El sistema anterior puede reducirse a:

$$E_t\hat{C}_{t+1} = \hat{C}_t + E_t\hat{\Delta}_{t+1} - \hat{\Delta}_t +$$

$$+(\beta^{-1}-(1-\delta))E_t\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\hat{Z}_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\hat{N}_{t+1} - \frac{\alpha(1+\epsilon)-(1-\epsilon)}{1-\epsilon}\hat{K}_{t+1}\right)$$

$$\left(\frac{N}{1-N}+\frac{\alpha}{1-\epsilon}\right)\hat{N}_t=-\hat{C}_t+\hat{\Delta}_t+\frac{\alpha}{1-\epsilon}\hat{K}_t+\frac{1}{1-\epsilon}\hat{Z}_t$$

$$\frac{1}{1-\epsilon}\hat{Z}_t+\frac{(1-\alpha)}{1-\epsilon}\hat{N}_t+\left(\frac{\alpha}{1-\epsilon}+(1-\delta)\frac{K}{Y}\right)\hat{K}_t=\frac{C}{Y}\hat{C}_t+\frac{K}{Y}\hat{K}_{t+1}$$

Finalmente la perturbación de demanda sigue un proceso autorregresivo dado por:

$$\ln\Delta_t=(1-\rho)\ln\Delta+\rho\ln\Delta_{t-1}+\varepsilon_t$$

La serie artificial construida para el shock de demanda se estima a partir de la ecuación de equilibrio

$$\frac{\Delta_t}{C}\simeq\ln C_t-\ln W_t+\frac{N}{1-N}\hat{N}_t$$

Los resultados que obtienen Baxter y King comparando los supuestos de rendimientos constantes a escala $\epsilon=0$ y rendimientos crecientes $\epsilon=0.20$ ante una perturbación de demanda son los siguientes:

1. La volatilidad cíclica del output es menor en el modelo con rendimientos constantes que con rendimientos crecientes.

2. Las volatilidades relativas del consumo con respecto a la producción son demasiado altas en relación a los datos.

3. El nivel de volatilidad relativa de la inversión con respecto al output es inferior en el caso de rendimientos crecientes mientras que con rendimientos constantes a escala la respuesta es muy débil y aún peor, su correlación con la producción es negativa.

4. Debido a que la externalidad opera a nivel de función de producción individual como un shock de oferta, la respuesta de la oferta de trabajo es mayor con rendimientos crecientes debido a que el el tipo de interés real exhibe una respuesta positiva mayor ante el shock de demanda y simultáneamente el salario real baja en menor cuantía ante el shock de demanda en relación al modelo con rendimientos constantes.

Esto es consecuencia de que la elasticidad del salario real con respecto al factor trabajo es -0.42 bajo rendimientos constantes mientras que es de sólo -0.25 con rendimientos crecientes.

5. La mayor respuesta del tipo de interés real procede de que el shock

de demanda induce un aumento en la inversión, lo que provoca una mayor sustitución entre consumo y oferta de trabajo. El consumo aumenta menos en el caso de rendimientos crecientes pero la oferta de trabajo aumenta más. De hecho, el aumento de la producción bajo rendimientos crecientes es mayor que en el caso de rendimientos constantes. Esto es, explicar las características cíclicas de una economía a partir de perturbaciones de demanda en un modelo de Ciclo Real requiere una respuesta fuerte de la oferta de trabajo.

6. Aunque el modelo con rendimientos crecientes y shocks de demanda puede generar un comportamiento cíclico que se ajusta más a los datos que en el caso de rendimientos constantes, ambos modelos fallan en explicar dos características importantes del mercado de trabajo: en primer lugar, predicen que la productividad, el salario real, es fuertemente contracíclica y en segundo lugar predicen una fuerte correlación negativa entre horas trabajadas y salarios.

7. Dado que el problema del modelo de Ciclo Real con perturbaciones tecnológicas es que predice que las correlaciones anteriores son demasiado altas en relación a los datos quizá combinando shocks tecnológicos y shocks de preferencias puedan mejorarse dichas medidas. El modelo con rendimientos crecientes se ajusta mejor a los datos cuando consideramos los dos tipos de perturbación. Las correlaciones entre productividad y salarios con respecto a la producción siguen siendo positivas en ambos modelos pero con rendimientos crecientes la correlación entre horas y salarios, aún siendo negativa en ambos modelos, se ajusta más a los datos en el caso de rendimientos constantes.

5.17. Sunspot o animal spirits en el modelo de Ciclo Real.

Una cuestión que ha suscitado cierto interés, minoritario eso sí, es la cuestión de la posible indeterminación en el equilibrio en un modelo de Ciclo Real cuando introducimos externalidades en la función de producción. En este caso, cualquier perturbación aleatoria, no relacionada con los hechos fundamentales puede producir ciclos económicos. Esta aleatoriedad que no está relacionada con los fundamentos es lo que se conoce como sunspot, animal spirits o profecías que se autocumplen (self-fulfilling prophecies).

Benhabib y Farmer (1993) estudian dos modelos, uno con externalidades a nivel agregado y otro con competencia monopolística donde existen rendimientos crecientes a escala en la función de producción. Analizaremos este último.

Existe un contínuo de bienes intermedios $Y(i)$, $i \in [0,1]$, donde el output viene dado por:

$$Y = \left(\int_0^1 Y(i)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} : \sigma \geq 1$$

donde σ nos da una medida de la elasticidad de la demanda y por tanto del grado de poder de monopolio de cada empresa.

El sector de bienes finales es competitivo y sus beneficios vienen dados por:

$$\Pi = Y - \int_0^1 P(i)Y(i) = \left(\int_0^1 Y(i)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} - \int_0^1 P(i)Y(i)$$

donde $P(i)$ es el precio relativo del bien intermedio en términos del bien final. La condición de primer orden nos da la demanda de biens intermedios.

$$\frac{d\Pi}{dY(i)} = \frac{1}{\sigma}\left(\int_0^1 Y(i)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \sigma Y(i)^{\sigma-1} - P(i) = 0 \Rightarrow P(i)^{\frac{1}{\sigma-1}} Y = Y(i)$$

La tecnología para la producción de bienes intermedios viene dada por una función Cobb-Douglas con rendimientos crecientes.

$$Y(i) = K(i)^{\alpha} N(i)^{\beta} : \alpha + \beta > 1$$

La función de beneficios para un productor de bienes intermedios es:

$$\Pi(i) = \left(\frac{Y(i)}{Y}\right)^{\sigma-1} Y(i) - WN(i) - rK(i) = Y^{1-\sigma} K(i)^{\alpha\sigma} N(i)^{\beta\sigma} - WN(i) - rK(i)$$

Dicha función de beneficios será cóncava en $N(i)$ y $K(i)$ si $\sigma(\alpha+\beta) \leq 1$. De esta forma mientras más se acerque σ a cero, mayores serán los rendimientos crecientes que nos permitan obtener una solución interior al problema de optimización del productor.

Las condiciones de óptimo vienen dadas por:

$$\frac{\partial \Pi(i)}{\partial N(i)} = \beta\sigma Y^{1-\sigma} K(i)^{\alpha\sigma} N(i)^{\beta\sigma-1} = W : \frac{\partial \Pi(i)}{\partial K(i)} = \alpha\sigma Y^{1-\sigma} K(i)^{\alpha\sigma-1} N(i)^{\beta\sigma} = r$$

$$W = \frac{\beta\sigma Y(i) P(i)}{N(i)} : r = \frac{\alpha\sigma Y(i) P(i)}{K(i)}$$

Las condiciones de agregación, asumiendo simetría vienen dadas por:

$$N(i) = N : K(i) = K : P(i) = P = 1$$

Dado que el sector de bienes finales es competitivo, su beneficio es nulo y por tanto

$$\Pi = Y - \int_0^1 P(i)Y(i) = Y - \int_0^1 P(i)P(i)^{\frac{1}{\sigma-1}} Y = 0 \Rightarrow P(i) = 1 = P$$

Las participaciones de los factores en la renta nacional son:

$$a = \frac{rK}{Y} : b = \frac{WN}{Y}$$

Obtenemos que la relación entre los parámetros de la función de producción y dichas participaciones:

$$a = \alpha\sigma : b = \beta\sigma$$

Desde el punto de vista de la distribución de la renta, la suma de todas ellas son iguales al producto total.

$$\int_0^1 (\Pi(i) + WN(i) + rK(i))\, di = Y^{1-\sigma} \int_0^1 K^{\alpha\sigma} N^{\beta\sigma} di = Y$$

Las economías domésticas maximizan una función de utilidad, que en tiempo contínuo viene formulado por:

$$Max \quad \int_0^\infty \exp(-\rho t) \left[\ln C - \frac{N^{1+\theta}}{1+\theta}\right]$$

sujeta a la restricción presupuestaria

$$dK = (r-\delta)K + WN + \Pi - C$$

Planteando el Hamiltoniano, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\mathcal{H} = \ln C - \frac{N^{1-\theta}}{1-\theta} + \mu\left[(r-\delta)K + WN + \Pi - C\right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \frac{1}{C} - \mu = 0 : \frac{\partial H}{\partial N} = -N^\theta + \mu W = 0 :$$

$$C = WN^\theta$$

$$-\frac{\partial H}{\partial K} = \dot{\mu} - \rho\mu \Rightarrow -\mu(r-\delta) = \dot{\mu} - \rho\mu \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - r$$

$$\frac{dC}{C} = r - \rho - \delta$$

$$C = bYN^{\theta-1} : \frac{dC}{C} = a\frac{Y}{K} - \rho - \delta$$

Dinámica del sistema.

La condición de primer orden para el crecimiento del consumo y la restricción presupuestaria nos dan las dos ecuaciones dinámicas del sistema.

$$\frac{dK}{K} = \frac{Y}{K} - \frac{C}{K} - \delta : \frac{dC}{C} = a\frac{Y}{K} - \rho - \delta$$

Definiendo:

$$k = \ln K : y = \ln Y : c = \ln C : n = \ln N$$

Utilizando la función de producción y la condición de primer orden, ambas en logaritmos.

$$y = \alpha k + \beta n : c = \ln b + y + (\theta - 1)n$$

Sustituyendo n en la función de producción.

$$y - k = a_0 + a_1 k + a_2 c$$

donde:

$$a_0 = \frac{-\beta \ln b}{\beta + \theta - 1} : a_1 = \frac{(\theta - 1)(\alpha - 1) - \beta}{\beta + \theta - 1} : a_2 = \frac{\beta}{\beta + \theta - 1}$$

En suma, el sistema dinámico viene dado por:

$$dk = \exp\left[a_0 + a_1 k + a_2 c\right] - \delta - \exp\left[c - k\right]$$

$$dc = a \exp\left[a_0 + a_1 k + a_2 c\right] - \rho - \delta$$

Dado el stock de capital inicial $k(0)$ y la condición de transversalidad, el sistema en $k(t)$ y $c(t)$ nos da la senda de equilibrio para las variables.

En el estado estacionario, $dk = dc = 0$, tenemos que:

$$\exp\left[(a_1 + a_2) k^*\right] = \left(\frac{\rho + \delta(1-a)}{a}\right)^{-a_2} \left(\frac{\rho + \delta}{a}\right) e^{-a_0} > 0$$

$$\exp\left[c^*\right] = \left(\frac{\rho + \delta(1-a)}{a}\right) \exp\left[k^*\right]$$

El sistema linealizado en un entorno del estado estacionario tiene las siguientes raíces:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a_1 + a a_2)\left(\frac{\rho + \delta}{a}\right) + \frac{\rho + \delta(1-a)}{a}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = (\rho + \delta(1-a))\left(\frac{\rho+\delta}{a}\right)(a_1 + a_2)$$

El stock de capital es la variable predeterminada, mientras que el consumo es la variable de decisión que viene dada por las decisiones de los individuos. En el caso de no existir externalidades y los bienes intermedios son sustitutos perfectos, entonces la suma de las raíces es positiva e igual a ρ mientras que el producto de ambas depende del signo de $\frac{(\theta-1)(\alpha-1)}{\beta+\theta-1}$. Dado que también es negativo, nos encontraríamos en el caso estandar de modelo de Ciclo Real con estabilidad de punto de silla en el que hay un único nivel de consumo localmente estable.

El caso que centra nuestro interés es la posibilidad de un estado estacionario indeterminado, caso que ocurre cuando la suma de las dos raíces es negativa y el determinante es positivo. La existencia de un estado estacionario estable, implica como hemos mostrado que

$$\frac{(\theta-1)(\alpha-1)}{\beta+\theta-1} > 0$$

El numerador siempre es positivo, con lo que la condición necesaria de estabilidad viene dada por

$$\beta + \theta - 1 > 0$$

La interpretación de esta condición puede realizarse a partir del equilibrio en el mercado de trabajo. La condición de equilibrio en el mercado de trabajo viene dada a partir de la condición de primer orden por:

$$\frac{C}{N^\theta} = W = b\frac{K^\alpha N^\beta}{N} \qquad ((5.100))$$

$$\ln C - \theta \ln N = \ln W = \ln b + \alpha \ln K + (\beta - 1)\ln N$$

En presencia de rendimientos crecientes a escala la pendiente de la curva de demanda de trabajo puede tener pendiente positiva y es exactamente lo que nos dice la condición (5.100), en presencia de competencia monopolística y rendimientos crecientes a escala, el estado estacionario implica que la pendiente de la curva de demanda tiene que ser mayor que la pendiente de la curva de oferta teniendo la primera pendiente positiva.

Un aumento en el stock de capital, desplazaría la curva de demanda de trabajo hacia arriba dando lugar a un nuevo equilibrio con un salario más bajo y reducción en el empleo. Sin embargo, el nivel de consumo también aumenta con el crecimiento del stock de capital y áquel tiende a desplazar la curva de oferta en sentido ascendente, tendiendo a aumentar tanto el salario como el nivel de empleo.

Desde el punto de vista de la modelización en tiempo discreto, el supuesto de "animal spirits" implica la solución del modelo de Ciclo Real incorpora una perturbación aleatoria de media condicional cero y no relacionada con ninguna de las variables del sistema. Esto es, el sistema que debemos solucionar viene dado en términos log-linealizados por las ecuaciones siguientes, donde $\hat{V}_t$ es la variable aleatoria que representa cambios impredecibles.

$$\hat{K}_{t+1} = a_{11}\hat{K}_t + a_{12}\hat{C}_t + a_{13}\hat{Z}_t$$

$$\hat{C}_t = a_{21}\hat{K}_t + a_{22}\hat{C}_t + a_{23}\hat{Z}_t + \hat{V}_t$$

$$\hat{Z}_t = \rho\hat{Z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

Farmer y Guo (1994) comparan los resultados que generan tres modelos de Ciclo Real, el modelo de Hansen con trabajo indivisible, con el modelo de Baxter y King con externalidades positivas y competencia monopolística y un tercero que presenta el tipo de indeterminación visto anteriormente con una curva de demanda de trabajo con pendiente positiva, esto es, con un mayor grado de rendimientos crecientes. La calibración se ha realizado utilizando una medida del índice de Lerner para tener una medida del grado de poder de monopolio. Dicho índice, basado en Domovitz, Hubbard y Petersen (1988, citado en Farmer y Guo, 1994, pag 55) estima que los márgenes entre precio y coste marginal están entre 0.3 y 0.42 y viene definido como $1 - \sigma = \frac{p - cma}{cma}$.

La siguiente tabla resume los valores de calibración de los tres modelos.

Tabla 5.10					
	σ	a	b	α	β
M1 (Hansen)	1	0.36	0.64	0.36	0.64
M2 (Baxter-King)	0.7	0.3	0.63	0.43	0.9
M3 (Benhabib-Farmer)	0.58	0.23	0.7	1.4	1.21

Tanto las series para $\hat{V}_t$ como para ε_t han sido generadas aleatoriamente.

Los resultados de las simulaciones abordan varias cuestiones. En primer lugar, el modelo con sunspot genera correlaciones parecidas a los otros dos; en segundo lugar, es capaz de generar endógenamente persistencia en los datos del modelo, de orden parecido a los otros dos; en tercer lugar, tampoco existen diferencias significativas en cuanto a la senda dinámica de convergencia hacia el estado estacionario excepto en que el modelo con sunspot es capaz de generar una senda cíclica, cualitativamente similar los datos.

Lo relevante del modelo de Benhabib-Farmer es que una variable generada aleatoriamente sin persistencia alguna es capaz en un modelo con rendimientos crecientes importantes, reproducir sin mucha diferencia los resultados del modelo de Ciclo Real con shocks de productividad altamente correlacionados.

5.18. Time to build.
Kydland y Prescott, (1982).

El artículo “Time to Build and Aggregate Fluctuations” de Kydland F. y Prescott E. (1982) marca el nacimiento en la aplicación del modelo de crecimiento neoclásico con el fin de explicar las fluctuaciones económicas en las series americanas. Es por tanto la aportación pionera que contrasta las propiedades de las series artificales generadas por el propio modelo con las propiedades de las series reales.

La razón de introducirlo en este capítulo es que realmente realizan tres modificaciones en el modelo básico de Ciclo Real y por tanto podemos considerarlo como una extensión del modelo canónico de Ciclo Real.

Una de las tesis del artículo es que indispensable utilizar el supuesto basado en que la construcción de bienes de capital no se realiza en un instante sino que el proceso de inversión conlleva tiempo, lo que denominan “Time to build” o tiempo para construir.

Por tanto, la primera de las innovaciones introducidas viene explicada de la siguiente manera:

Supongamos que el tiempo necesario para construir nuevo capital es de J periodos y sea s_{jt}, el número de proyectos a los que les faltan j periodos para su finalización. De esta forma, s_{Jt} por ejemplo es el número de proyectos de inversión iniciados en t a los que les faltan J periodos para ser completados. En cada periodo se realizan nuevos proyectos de inversión que serán finalizados después de J periodos y que se añadirán al stock de capital final. Los costes de inversión por tanto se reparten durante los J periodos que dura la finalización del proyecto de inversión.

Con esta estructura tecnológica del proceso de inversión, la ley dinámica para el stock de capital vendrá dada por:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_{1t}$$

Esto es, el stock de capital en $t+1$ viene dado por el stock de capital neto anterior más los proyectos a los que en el periodo t les falta sólo un periodo para su terminación.

De esta forma, la relación temporal que existe en un proyecto de inversión en dos instantes de tiempo consecutivos es la siguiente:

$$s_{j,t+1} = s_{j+1,t}$$

esto es, a cualquier proyecto al que en el periodo t, le faltan $j+1$ periodos para terminarse, sólo le faltarán j periodos cuando nos situemos en el periodo siguiente.

La inversión viene dada por:

$$I_t = \sum_{i=1}^{J} \omega_i s_{it} + y_{t+1} - y_t$$

donde y_t[58] es el stock de existencias procedentes del periodo anterior y ω_{it} es la inversión en cada proyecto al que le faltan i periodos para su finalización.

En la calibración utilizan un periodo de tiempo medio igual a $J = 4$ periodos hasta finalizar un proyecto de inversión.

La economía tiene $J+1$ tipos de capital, existencias y_t, capital productivo finalizado k_{t+1} y los stocks de capital a los que les faltan j periodos hasta su finalización ($j = ...J-1$).

En segundo lugar, la función de producción es del tipo CES con la siguiente estructura:

$$F(z_t, k_t, n_t, y_t) = z_t n_t^{\theta} \left[(1-\sigma)k_t^{-\nu} + \sigma y^{-\nu}\right]^{-\frac{1-\theta}{\nu}}$$

donde $0 < \theta < 1, 0 < \sigma < 1$ y $0 < \nu < \infty$.

En tercer lugar, la función de preferencias para las economías domésticas presenta la siguiente estructura:

$$u(c_t, \ell_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, a(L)\ell_t)$$

[58]La introducción de existencias como factor de producción tiene una razón técnica, hacer posible la resolución numérica del modelo.

donde

$$a(L)\ell_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell_{t-i} : \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$$

y donde el tiempo total se distribuye entre ocio y horas de trabajo.

$$\ell_t + n_t = 1$$

La introducción de retardos distribuidos en el ocio dentro de la función de utilidad contribuye a que el ocio pasado afecte a la utilidad presente con la propiedad de que mientras más alejados estemos del presente menos pondera el nivel de ocio en la utilidad presente.

Desarrollemos algo más esta modelización para el ocio.

$$L_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \ell_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (1 - n_{t-i})$$

cada uno de los parámetros que acompañan al ocio pasado viene dado por la siguiente ley recursiva que permite que las ponderaciones del ocio se reduzcan en progresión geométrica.

$$a_{i+1} = (1-\eta) a_i$$

donde $0 < \eta < 1$.

El ocio ahora vendría dado por la siguiente expresión.

$$L_t = a_0(1 - n_t) + a_1 - a_1 n_{t-1} + a_2 - a_2 n_{t-2} + ...$$

$$L_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i - a_0 n_t - \left[a_1 n_{t-1} + (1-\eta) a_1 n_{t-2} + (1-\eta)^2 a_1 n_{t-3} + ...\right]$$

$$L_t = 1 - a_0 n_t - a_1 \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i L^i n_{t-i-1}$$

Definiendo:

$$h_t = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i L^i n_{t-i-1} = \frac{n_{t-1}}{1-(1-\eta)L}$$

$$h_t = (1-\eta)h_{t-1} + n_{t-1}$$

donde h_t captura el efecto del ocio pasado sobre la utilidad presente.

De esta forma, la introducción de esta forma de modelizar el ocio supone añadir dos restricciones al modelo.

$$L_t = 1 - a_0 n_t - a_0(1-\eta)h_t$$

$$h_{t+1} = (1-\eta)h_t + n_t$$

Veamos cuál es el efecto de modelizar la función de utilidad de esta forma, formulando el problema del consumidor con una función logarítmica.

Las condiciones de primer orden del problema para el consumo y el ocio serían:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda$$

$$\frac{\theta a_0}{1 - a_0 n_t - \eta(1-a_0)h_t} = w_t \lambda - \phi$$

donde λ y ϕ son los multiplicadores respectivos de la restricción de recursos y de la restricción dinámica que nos da el efecto de la oferta de trabajo pasada sobre la utilidad corriente.

La condición intratemporal quedaría como:

$$\frac{\theta a_0}{1 - a_0 n_t - \eta(1-a_0)h_t} = \frac{w_t}{c_t} - \phi$$

La log-linealización es como sigue, teniendo en cuenta que en estado estacionario:

$$h = \frac{n}{\eta} : \frac{\theta a_0}{1 - a_0 n - \eta(1-a_0)h} = \frac{\theta a_0}{1-n} = \frac{w}{c} - \phi$$

$$\frac{\theta a_0}{1-n} + \frac{a_0 n}{(1-n)^2}\hat{n}_t + \frac{\eta(1-a_0)h}{(1-n)^2}\hat{h}_t =$$

$$\left(\frac{w}{c} - \phi\right) + \frac{w}{c}\hat{w}_t - \frac{w}{c}\hat{c}_t - \phi\hat{\phi}_t$$

$$\hat{n}_t = \xi\left(\frac{w}{c}\right)(\hat{w}_t - \hat{c}_t) - \left(\frac{1-a_0}{a_0}\right)\hat{h}_t - \xi\phi\hat{\phi}_t$$

y

$$\xi = \left(\frac{(1-n)^2}{a_0 n} \right)$$

En equilibrio, la elasticidad del número de horas trabajadas con respecto al salario real es mayor que si hubiésemos tenido en cuenta la no-separabilidad del ocio.

La función de utilidad del modelo original es:

$$u(c_t, L_t) = \frac{\left[c_t^{1/3} (a(L)\ell)^{2/3} \right]^{\gamma}}{\gamma}$$

donde $\gamma < 1$ y $\gamma \neq 0$.

El suma, el modelo completo viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$Max \quad E_0 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - a_0 n_t - a_0(1-\eta) h_t)$$

sujeto a las restricciones:

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + s_{1t}$$

$$s_{j,t+1} = s_{j+1,t}$$

$$I_t = \sum_{i=1}^{J} \omega_i s_{it} + y_{t+1} - y_t$$

$$c_t + y_t = z_t n_t^{\theta} \left[(1-\sigma) k_t^{-\nu} + \sigma y^{-\nu} \right]^{-\frac{1-\theta}{\nu}}$$

$$h_{t+1} = (1-\eta) h_t + n_t$$

La estructura del shock tecnológico es más compleja, dada por un componente transitorio más un componente permanente.

$$z_t = z_{1t} + z_{2t}$$

donde

$$z_{1t+1} = \rho z_{1t} + \varepsilon_{1t} : z_{2t} = \varepsilon_{2t}$$

Finalmente combinan ambos tipos de perturbación con una tercera para definir un índice de productividad, dado por la suma de los dos anteriores más una tercera perturbación:

$$\pi_t = z_t + \varepsilon_{3t}$$

Los principales resultados de la simulación que realizan es que el modelo es consistente con la alta variabilidad de la inversión y la baja volatilidad del consumo así como las altas correlaciones que presentan con la producción.

La autocorrelación de la producción en las series generadas por el modelo replican bastante bien la autocorrelación del PNB norteamericano.

El modelo predice por otra parte una elevada correlación entre productividad y producción que no se aprecia en los datos.

La siguiente tabla recopila los resultados más significativos del modelo (Kydland y Prescott, 1982, pags 1364-1365).

Tabla 5.11				
	Desviaciones típicas		Correlaciones con PNB	
	EEUU	Modelo	EEUU	Modelo
Output	1.8	1.8	1	1
Consumo	1.3	0.63	0.74	0.94
Inversión	5.1	6.45	0.71	0.80
Horas	2	1.05	0.85	0.93
Productividad	1	0.90	0.10	0.90

5.19. Apéndice 5.1.

Aproximación lineal del sistema diferencial en el modelo de búsqueda.

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = (r+\psi)\mathcal{J} - (Z-W) : du = \psi(1-u) - \theta q(\theta)u$$

$$d\left(\frac{cZ}{q(\theta)}\right) = -\frac{cZq'(\theta)}{q(\theta)^2}d\theta = (r+\psi)\frac{cZ}{q(\theta)} - (1-\beta)(Z-x) + \beta Z c\theta$$

$$d\theta = \frac{\theta}{1-\alpha}\left[(r+\psi) - (1-\beta)(Z-x)\frac{q(\theta)}{cZ} + \beta\theta q\left(\theta\right)\right] : (1-\alpha) = -\frac{q'(\theta)}{q(\theta)}\theta$$

$$d\theta \simeq \frac{\theta}{1-\alpha}\left[-q'(\theta)(1-\beta)(Z-x)\frac{q(\theta)}{cZ} + \left[\beta\theta q\left(\theta\right)\right]'\right](\theta-\theta^*)$$

$$d\theta \simeq \left[q(\theta)(1-\beta)(Z-x)\frac{q(\theta)}{cZ} + \beta\frac{\alpha\theta}{1-\alpha}q(\theta)\right](\theta-\theta^*)$$

$$du = \psi(1-u) - \theta q(\theta)u$$

$$du \simeq \left[-\psi + \theta q(\theta)\right](u-u^*) - \left[\theta q(\theta)\right]' u^*(\theta-\theta^*)$$

5.20. Apéndice 5.2.

El modelo de Merz log-linealizado para intensidad de búsqueda constante.

La condición que nos liga el rendimiento del capital con las variaciones en el consumo.

$$\hat{C}_t = E_t\left(\hat{C}_{t+1} + \hat{R}_{t+1}\right)$$

donde $R_{t+1} = Z_{t+1}\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)$ y

$$\hat{R}_{t+1} = \frac{r+\delta}{1+r}\left(\hat{Y}_{t+1} - \hat{K}_{t+1}\right)$$

Las condiciones de primer orden para V_t y S_t vienen dadas por:

$$\frac{a}{C_tM_V} = \beta E_t\left[\frac{1}{C_{t+1}}(F_{K(t+1)} + c(S_{t+1})) - N_{t+1}^{-\theta} + \frac{a}{C_{t+1}M_V}\left[1-\psi+M_N\right]\right]$$

$$a\left(-\frac{1}{M_V C^2}dC_t - \frac{1}{CM_V^2}dM_V\right) = \beta E_t\left(-\frac{1}{C^2}(F_K+c)dC_{t+1} + \frac{1}{C}\left(dF_{K(t+1)}\right)\right) +$$

$$E_t\theta N^{-\theta-1}dN_{t+1} + a\left[1-\psi+\lambda M_N\right]E_t\left(-\frac{1}{M_V C^2}dC_{t+1} - \frac{1}{CM_V^2}dM_{V(t+1)}\right) + \frac{a}{CM_V}E_t dM_{N(t+1)}$$

$$-\frac{a}{CM_V}(\hat{C}_t + \hat{M}_{V(t)}) = -\beta\frac{(F_K+c)}{C}E_t\hat{C}_{t+1} + \frac{F_K}{C}E_t\hat{F}_{K(t+1)} + \theta N^{-\theta}E_t\hat{N}_{t+1} +$$

$$-a\left[1-\psi+\lambda M_N\right]\left(\frac{1}{M_V C}E_t\hat{C}_{t+1} + \frac{1}{CM_V}E_t\hat{M}_{V(t+1)}\right) + \frac{aM_N}{CM_V}E_t\hat{M}_{N(t+1)}$$

Las expresiones para $\hat{M}_{V(t)}$, $\hat{M}_{N(t+1)}$ y $\hat{F}_{K(t+1)}$ vienen dadas por:

$$\hat{M}_{V(t)} = -\lambda\hat{V}_t - \lambda\frac{N}{1-N}\hat{N}_t : \hat{M}_{N(t)} = (1-\lambda)\hat{V}_t + (1-\lambda)\frac{N}{1-N}\hat{N}_t$$

$$\hat{F}_{K(t+1)} = \hat{Z}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1}$$

$$-\frac{a}{CM_V}\left(\hat{C}_t - \lambda\hat{V}_t - \lambda\frac{N}{1-N}\hat{N}_t\right) = -\beta\frac{(F_K+c)}{C}E_t\hat{C}_{t+1} +$$

$$\frac{F_K}{C}\left(\hat{Z}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1}\right) +$$

$$\theta N^{-\theta}E_t\hat{N}_{t+1} - a\left[1-\psi+\lambda M_N\right]\left(\frac{1}{M_V C}E_t\hat{C}_{t+1} - \frac{1}{CM_V}\left(\lambda E_t\hat{V}_{t+1} + \lambda\frac{N}{1-N}E_t\hat{N}_{t+1}\right)\right) +$$

$$+\frac{aM_N}{CM_V}E_t\hat{M}_{N(t+1)} + \frac{aM_N}{CM_V}\left((1-\lambda)\hat{V}_t + (1-\lambda)\frac{N}{1-N}\hat{N}_t\right)$$

La restricción de recursos diferenciada tiene la siguiente expresión.

$$K_{t+1} + C_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t - c(S_t)(1-N_t) - aV_t$$

$$K\hat{K}_{t+1} + C\hat{C}_{t+1} = \alpha Y\hat{K}_t + (1-\alpha)Y\hat{N}_t + (1-\delta)K\hat{K}_t + cN\hat{N}_t - aV\hat{V}_t$$

La ecuación dinámica para el nivel de empleo, diferenciada:

$$N\hat{N}_{t+1} = (1-\psi)N\hat{N}_t + V^{1-\lambda}(S(1-N))^{\lambda}\left[(1-\lambda)\hat{V}_t + \lambda\hat{S}_t - \lambda\hat{N}_t\right]$$

5.21. Apéndice 5.3.

Resolución del sistema dinámico a través de transformadas de Laplace.

El sistema dinámico es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

donde

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta K(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \mathbf{v} = \begin{bmatrix} g_K(t) \\ g_C(t) \end{bmatrix}$$

Aplicamos la transformada de Laplace al sistema:

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathcal{L}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}(\mathbf{v})$$

Aplicando la transformada de una derivada:

$$s\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} - \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} + \mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \mathbf{x}(\mathbf{0}) + \mathcal{L}\{\mathbf{v},s\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \Lambda(s)^{-1}\left[\mathbf{x}(\mathbf{0}) + \mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}\right] : \Lambda(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

1. Consideremos el caso globalmente estable, en el que las raíces características de la matriz $\mathbf{A}$ son ambas negativas ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$).

Desarrollo de las matrices $\Lambda(s)$ y $\Lambda^{-1}(s)$.

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix} : \Lambda^{-1}(s) = \frac{adj\Lambda(s)}{|\Lambda(s)|} : adj\Lambda(s) = \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix}$$

y $|\Lambda(s)|$

$$|\Lambda(s)| = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21} = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces características de la matriz $\mathbf{A}$.

La matriz adjunta puede expresarse como:

$$\left[\begin{array}{cc} s-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s-a_{11} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} \lambda_i-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda_i-a_{11} \end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc} s-\lambda_i & 0 \\ 0 & s-\lambda_i \end{array}\right]\mathbf{I}$$

$$adj\Lambda(s)=adj\Lambda(\lambda_i)+(s-\lambda_i)\mathbf{I}$$

$$adj\Lambda(\lambda_1)+(s-\lambda_1)\mathbf{I}=adj\Lambda(\lambda_2)+(s-\lambda_2)\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}=\frac{adj\Lambda(\lambda_1)-adj\Lambda(\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}=\mathbf{B}+(\mathbf{I}-\mathbf{B}):\mathbf{B}=\frac{adj\Lambda(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

donde a las matrices $\mathbf{B}$ e $(\mathbf{I}-\mathbf{B})$ se las denomina matrices de ponderación (weighting matrices).

La matriz inversa desarrollada es:

$$\Lambda^{-1}(s)=\frac{adj\Lambda(s)}{|\Lambda(s)|}=\frac{adj\Lambda(s)}{s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$=\frac{adj\Lambda(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}=\frac{adj\Lambda(s)}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}\right]$$

dado que en una ecuación de segundo grado se verifica

$$tr\mathbf{A}=a_{11}+a_{22}=\lambda_1+\lambda_2:|\mathbf{A}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\lambda_1\lambda_2$$

y el polinomio en forma de producto puede expresarse en forma de suma como

$$\frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}\right]$$

Finalmente, la matriz $\Lambda^{-1}(s)$ puede expresarse como:

$$\Lambda^{-1}(s)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{adj\Lambda(\lambda_1)+(s-\lambda_1)\mathbf{I}}{s-\lambda_1}-\frac{adj\Lambda(\lambda_2)+(s-\lambda_2)\mathbf{I}}{s-\lambda_2}\right]$$

Aplicamos este resultado al sistema:

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{x},s\right\}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{adj\Lambda(\lambda_1)+(s-\lambda_1)\mathbf{I}}{s-\lambda_1}-\frac{adj\Lambda(\lambda_2)+(s-\lambda_2)\mathbf{I}}{s-\lambda_2}\right][\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\left\{\mathbf{v},s\right\}]$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{x},s\right\} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{adj\Lambda(\lambda_1)}{s-\lambda_1} - \frac{adj\Lambda(\lambda_2)}{s-\lambda_2}\right]\left[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\left\{\mathbf{v},s\right\}\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{x},s\right\} = \left[\frac{\mathbf{B}}{s-\lambda_1} + \frac{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{s-\lambda_2}\right]\left[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\left\{\mathbf{v},s\right\}\right]$$

Para obtener la solución supongamos el caso más sencillo en el que el vector de variables exógenas es constante:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\mathbf{v},s\right\} = \frac{g_i}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{x},s\right\} = \left[\frac{\mathbf{B}}{s-\lambda_1} + \frac{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{s-\lambda_2}\right]\mathbf{x}(\mathbf{0}) - \left[\frac{1}{\lambda_1}\frac{(-\lambda_1)\,\mathbf{B}}{s\,(s-\lambda_1)} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{(-\lambda_2)\,(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{s\,(s-\lambda_2)}\right]\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix}$$

Deshaciendo la transformada:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \left[\mathbf{B}\exp\left\{\lambda_1 t\right\} + (\mathbf{I}-\mathbf{B})\exp\left\{\lambda_2 t\right\}\right]\begin{bmatrix} K(0) \\ C(0) \end{bmatrix} -$$

$$\left[\frac{\mathbf{B}}{\lambda_1}(1-\exp\left\{\lambda_1 t\right\}) + \frac{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{\lambda_2}(1-\exp\left\{\lambda_1 t\right\})\right]\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix}$$

Aplicando la siguiente propiedad que relaciona las matrices de ponderación con la matriz Λ

$$\frac{\mathbf{B}}{\lambda_1} + \frac{\mathbf{I}-\mathbf{B}}{\lambda_2} = \frac{adj\Lambda(0)}{-\lambda_1\lambda_2} = \frac{adj\,\mathbf{A}}{\lambda_1\lambda_2} = \mathbf{A}^{-1}$$

Finalmente la solución nos da el impacto inicial, la dinámica de transición y el resultado a largo plazo.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \left[\mathbf{B}\exp\left\{\lambda_1 t\right\} + (\mathbf{I}-\mathbf{B})\exp\left\{\lambda_2 t\right\}\right]\begin{bmatrix} K(0) \\ C(0) \end{bmatrix}$$

$$-\left[\frac{\mathbf{B}}{\lambda_1}(1-\exp\left\{\lambda_1 t\right\}) + \frac{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{\lambda_2}(1-\exp\left\{\lambda_1 t\right\})\right]\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix}$$

La solución de largo plazo es:

$$\begin{bmatrix} K(\infty) \\ C(\infty) \end{bmatrix} = -\left[\frac{\mathbf{B}}{\lambda_1}+\frac{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}{\lambda_2}\right]\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix} = -\frac{adj\Lambda(0)}{-\lambda_1\lambda_2}\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} g_K \\ g_C \end{bmatrix}$$

2. Si las raíces de la ecuación característica alternan en signo ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$), partimos de:

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \frac{adj\Lambda(s)}{(s-\lambda_2)}[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}]$$

Para la raíz inestable lal única solución acotada para las variables debe verificar para $s=\lambda_2$.

$$adj\Lambda(\lambda_2)[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},\lambda_2\}] = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K(0)+\mathcal{L}\{g_K,\lambda_2\} \\ C(0)+\mathcal{L}\{g_C,\lambda_2\} \end{bmatrix}$$

$$adj\Lambda(\lambda_2)\begin{bmatrix} K(0) \\ C(0) \end{bmatrix} = -adj\Lambda(\lambda_2)\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{g_K,\lambda_2\} \\ \mathcal{L}\{g_C,\lambda_2\} \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz adjunta es 1 con lo que podemos utilizar cualquiera de las dos filas para determinar el valor inicial de la variable $C(0)$.

$$C(0) = -\mathcal{L}\{g_C,\lambda_2\} - \left(\frac{\lambda_2 - a_{22}}{a_{12}}\right)[K(0)+\mathcal{L}\{g_K,\lambda_2\}]$$

donde hemos utilizado la primera fila para su cálculo.

Sustituyendo $adj\Lambda(s) = adj\Lambda(\lambda_2) + (s-\lambda_2)\mathbf{I}$.

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \frac{adj\Lambda(\lambda_2)+(s-\lambda_2)\mathbf{I}}{s-\lambda_2}[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}]$$

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = [\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}] + \frac{adj\Lambda(\lambda_2)}{s-\lambda_2}[\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}]$$

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = [\mathbf{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\}] + \frac{adj\Lambda(\lambda_2)}{s-\lambda_2}[\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\} - \mathcal{L}\{\mathbf{v},\lambda_2\}]$$

Si de nuevo suponemos que $\mathbf{v}$ es constante:

$$\frac{\mathcal{L}\{\mathbf{v},s\} - \mathcal{L}\{\mathbf{v},\lambda_2\}}{s-\lambda_2} = -\frac{g_{\mathbf{v}}}{s\lambda_2}$$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \frac{1}{s-\lambda_1}\mathbf{x}(\mathbf{0}) - \frac{1}{\lambda_2(s-\lambda_1)}(adj\Lambda(\lambda_2) - \lambda_2\mathbf{I})\frac{g_{\mathbf{v}}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \frac{1}{s-\lambda_1}\mathbf{x}(\mathbf{0}) - \frac{1}{-\lambda_1\lambda_2}(adj\Lambda(0))\frac{-\lambda_1}{s(s-\lambda_1)}g_{\mathbf{v}}$$

$$\begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(0) \\ C(0) \end{bmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + (1 - \exp\{\lambda_1 t\}) \begin{bmatrix} K(\infty) \\ C(\infty) \end{bmatrix}$$

Si la perturbación sigue un proceso como $\xi_t^G = -\frac{Y}{K}s_G\hat{G}\exp\{-\varepsilon t\} = g\exp\{-\varepsilon t\}$.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} g_K(t) \\ g_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\exp\{-\varepsilon t\} \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{L}\{\mathbf{v},s\} = \begin{bmatrix} \frac{g}{s+\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema queda como

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \begin{bmatrix} 0 \\ C(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{g}{s+\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{adj\Lambda(\lambda_2)}{s-\lambda_2} \begin{bmatrix} \frac{g}{s+\varepsilon} - \frac{g}{\lambda_2+\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(s-\lambda_1)\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \begin{bmatrix} 0 \\ C(0) \end{bmatrix} + \frac{g}{(s+\varepsilon)(\lambda_2+\varepsilon)} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_2+\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{22} \\ a_{21} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x},s\} = \frac{1}{s-\lambda_1} \begin{bmatrix} 0 \\ C(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{(\lambda_2+\varepsilon)(s-\lambda_1)(s+\varepsilon)} \begin{bmatrix} \varepsilon + a_{22} \\ -a_{21} \end{bmatrix} g$$

En este instante podemos realizar dos supuestos acerca de la perturbación. Si $\varepsilon = 0$ entonces la perturbación es permanente, mientras que si $\varepsilon < 0$ la perturbación es transitoria.

En el caso de $\varepsilon = 0$, la transformación al dominio del tiempo es:

$$\begin{bmatrix} K(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C(0) \end{bmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + \frac{g}{\lambda_1\lambda_2}(1 - \exp\{\lambda_1 t\}) \begin{bmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{bmatrix}$$

En el caso de $\varepsilon < 0$ la solución tiene la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{c} K(t) \\ C(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ C(0) \end{array}\right] \exp\{\lambda_1 t\} + \frac{g}{\lambda_2 + \varepsilon}\left[\begin{array}{c} \varepsilon + a_{22} \\ -a_{21} \end{array}\right] \frac{\exp\{\lambda_1 t\} - \exp\{-\varepsilon t\}}{\lambda_1 + \varepsilon} : (\varepsilon \neq \lambda_1)$$

5.22. Apéndice 5.4.

Log-linealizaciones y resultados para el modelo de crecimiento con deuda.

La función de producción linealizada es:

$$y_t = (1-\alpha)n_t + \alpha k_t$$

La log-linealización de la ecuación dinámica del stock de capital es como sigue:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} - (1-\delta) = \frac{Y_t}{K_t}\left(1 - \frac{C_t}{Y_t} - \frac{G_t}{Y_t}\right)$$

Aplicando la igualdad:

$$X_t = \exp\{\ln X_t\} = \exp\{\ln x_t\}$$

$$\ln\left[\exp\{\ln \Delta k_{t+1}\} - (1-\delta)\right] = y_t - k_t + \ln\left[1 - \exp\{c_t - y_t\} - \exp\{g_t - y_t\}\right]$$

La parte de la izquierda, $f(\Delta k_{t+1}, \delta)$ aproximada a través del desarrollo de Taylor de primer orden en un entorno del estado estacionario es:

$$f(\Delta k_{t+1}, \delta) \simeq \frac{1}{\delta}(k_{t+1} - k_t) = \frac{1}{\delta}(k_{t+1} - k_t)$$

El segundo sumando de la derecha $h(c_t, y_t, g_t)$ viene dado por:

$$h(c_t, y_t, g_t) = \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{G}{Y}\right)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)\delta}\right)(c_t - y_t) - \frac{\left(\frac{G}{Y}\right)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)\delta}(g_t - y_t)$$

$$\frac{1}{\delta}(k_{t+1} - k_t) = y_t - k_t + \left(1 - \frac{\left(1 - \frac{G}{Y}\right)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)\delta}\right)(c_t - y_t) - \frac{\left(\frac{G}{Y}\right)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)\delta}(g_t - y_t)$$

Sustituyendo y_t a partir de la función de producción, obtenemos:

$$k_{t+1} = \lambda_1 k_t + \lambda_2 n_t + \lambda_3 g_t + (1 - \lambda_2 - \lambda_3) c_t$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$\lambda_1 = 1 - \delta + \frac{r+\delta}{1-\tau} : \lambda_2 = \frac{(1-\alpha)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)} : \lambda_3 = -\frac{\left(\frac{G}{Y}\right)(r+\delta)}{\alpha(1-\tau)\delta} : \lambda_4 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$$

A partir de la dinámica de la deuda pública, despejamos el tipo impositivo

$$\frac{D_{t+2}}{Y_{t+1}} = \left[R^g_{t+2} \frac{D_{t+1}}{Y_{t+1}} + \left(\frac{G_{t+1}}{Y_{t+1}} - \tau_{t+1} \right) \right]$$

$$\tau_{t+1} = \exp\left\{ r^g_{t+2} + d_{t+1} - y_{t+1} \right\} + \exp\left\{ g_{t+1} - y_{t+1} \right\} - \exp\left\{ d_{t+2} - y_{t+1} \right\}$$

que sustituido en la ecuación del rendimiento bruto del capital.

$$\ln R_{t+1} = \ln\left[(1-\delta) + ab\right]$$

$$a = \left(1 - \exp\left\{ r^g_{t+2} + d_{t+1} - y_{t+1} \right\} - \exp\left\{ g_{t+1} - y_{t+1} \right\} + \exp\left\{ d_{t+2} - y_{t+1} \right\}\right)$$

$$b = \alpha \exp\left\{ (1-\alpha)(n_{t+1} - k_{t+1}) \right\}$$

La aproximación lineal viene dada por:

$$r_{t+1} = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left[\theta_1 g_{t+1} + \theta_2 n_{t+1} + \theta_3 k_{t+1} + \theta_4 (r^g_{t+2} + d_{t+1}) + \theta_5 d_{t+2} \right]$$

donde los parámetros vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\theta_1 = -\left(\frac{G}{Y}\right) : \theta_2 = \psi - (1-\alpha)\left(\frac{D}{Y} - \frac{G}{Y} - R\frac{D}{Y}\right) : \theta_3 = \psi + \alpha\left(\frac{D}{Y} - \frac{G}{Y} - R\frac{D}{Y}\right)$$

$$\psi = (1-\alpha)\left(1 - R\frac{D}{Y} - \frac{G}{Y} + \frac{D}{Y}\right) : \theta_4 = -R\frac{D}{Y} : \theta_5 = \frac{D}{Y}$$

La aproximación lineal de la condición de primer orden para la oferta de trabajo viene dada por:

$$n_t = \nu(\sigma_\ell)\left[a_1k_t + a_2(r^g_{t+1} + d_t) + a_3d_{t+1} + a_4g_t + a_5c_t\right]$$

donde los parámetros son:

$$\nu(\sigma_\ell) = \frac{(1-N)\sigma_\ell}{N - \frac{1-N}{1-\tau}\sigma_\ell\left[(1-\alpha)(\frac{G+rD}{Y}) - \alpha(1-\tau)\right]} : \frac{\partial\nu(\sigma_\ell)}{\partial\sigma_\ell} > 0$$

$$a_1 = \alpha + \frac{\alpha}{1-\tau}\left(\frac{G+rD}{Y}\right) : a_2 = -\frac{R}{1-\tau}\frac{D}{Y}$$

$$a_3 = \frac{1}{1-\tau}\frac{D}{Y} : a_4 = -\frac{1}{1-\tau}\frac{G}{Y} : a_5 = -1$$

Y finalmente, la ecuación de Euler para el consumo:

$$E_tc_{t+1} - c_t = E_tr_{t+1}$$

Solución.

El sistema log-linealizado viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$k_{t+1} = \lambda_1k_t + \lambda_2n_t + \lambda_3g_t + (1-\lambda_2-\lambda_3)c_t$$

$$r_{t+1} = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)}\left[\theta_1g_{t+1} + \theta_2n_{t+1} + \theta_3k_{t+1} + \theta_4(r^g_{t+2} + d_{t+1}) + \theta_5d_{t+2}\right]$$

$$n_t = \nu(\sigma_\ell)\left[a_1k_t + a_2(r^g_{t+1} + d_t) + a_3d_{t+1} + a_4g_t + a_5c_t\right]$$

$$E_tc_{t+1} - c_t = E_tr_{t+1}$$

En primer lugar, reducimos el sistema de cuatro ecuaciones, sustituyendo la expresión para la oferta de trabajo en la ecuación para el stock de capital y para el tipo de interés.

$$k_{t+1} = \lambda_1^*k_t + \lambda_2^*g_t + \lambda_3^*c_t + \lambda_4^*r_{t+1} + (\lambda_4^* + \lambda_5^*\rho_d)\,d_t + \lambda_5^*u_t$$

donde

$$\lambda_1^* = \lambda_1 + \lambda_2 a_1 \nu(\sigma_\ell) : \lambda_2^* = \lambda_3 + \lambda_2 a_4 \nu(\sigma_\ell) :$$

$$\lambda_3^* = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_2 a_5 \nu(\sigma_\ell) : \lambda_4^* = \lambda_2 a_2 \nu(\sigma_\ell) : \lambda_5^* = \lambda_2 a_2 \nu(\sigma_\ell)$$

$$r_{t+1} = \theta_1^* g_{t+1} + \theta_2^* k_{t+1} + \theta_3^* d_{t+1} + \theta_4^* r_{t+2}^g + \theta_5^* c_{t+1}$$

donde

$$\theta_1^* = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left(\theta_1 + \theta_2 a_4 \nu(\sigma_\ell)\right) : \theta_2^* = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left(\theta_3 + \theta_2 a_1 \nu(\sigma_\ell)\right) :$$

$$\theta_3^* = \theta_4 + \theta_2 \nu(\sigma_\ell)(a_2 + a_3 \rho_d) + \theta_5 \rho_d :$$

$$\theta_3^* = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left(\theta_4 + \theta_2 \nu(\sigma_\ell)(a_2 + a_3 \rho_d)\right) + \theta_5 \rho_d$$

$$\theta_4^* = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left(\theta_4 + \theta_2 \nu(\sigma_\ell) a_2\right) : \theta_5^* = \frac{r+\delta}{(1-\tau)(1+r)} \left(\theta_2 a_5 \nu(\sigma_\ell)\right)$$

Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, probamos como solución para el consumo y el tipo de interés con las siguientes expresiones:

$$c_t = \eta_{ck} k_t + \eta_{cg} g_t + \eta_{cd} d_t + \eta_{cu} u_t$$

$$r_t = \eta_{rk} k_t + \eta_{rg} g_t + \eta_{rd} d_t + \eta_{ru} u_t$$

En primer lugar, sustituimos éstas en la ecuación para el stock de capital:

$$k_{t+1} = \lambda_1^* k_t + \lambda_2^* g_t + \lambda_3^* \left(\eta_{ck} k_t + \eta_{cg} g_t + \eta_{cd} d_t + \eta_{cu} u_t\right) +$$

$$\lambda_4^* \left(\eta_{rk} k_{t+1} + \eta_{rg} g_{t+1} + \eta_{rd} d_{t+1}\right) + \left(\lambda_4^* + \lambda_5^* \rho_d\right) d_t + \lambda_5^* u_t$$

$$k_{t+1} = \frac{\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} k_t + \frac{\lambda_2^* + \lambda_3^* \eta_{cg} + \lambda_4^* \eta_{rg} \rho_g}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} g_t +$$

$$\frac{\lambda_3^* \eta_{cd} + \lambda_4^* + \lambda_5^* \rho_d + \lambda_4^* \eta_{rd} \rho_d}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} d_t + \frac{\lambda_4^* \eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^* \eta_{cu}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} u_t$$

Identificación.

Sustituyendo las expresiones probadas como solución en las dinámicas para el consumo y para el tipo de interés, procedemos a identificar las elasticidades en función de los parámetros del modelo. El procedimiento será realizado en partes separadas, esto es, iré considerando la variable predeterminada y las exógenas, una a una.

En primer lugar identificamos coeficientes para k_t :

$$\eta_{rk}k_t = \theta_2^* k_t + \theta_4^* E_t r_{t+1} + \theta_5^* c_t$$

$$\eta_{rk}k_t = \theta_2^* k_t + \theta_4^* \eta_{rk} \frac{\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} k_t + \theta_5^* \eta_{ck} k_t$$

$$\lambda_4^* \eta_{rk}^2 + (\theta_4^*(\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}) - \theta_5^* \lambda_4^* - \theta_2^* \lambda_4^* - 1)\, \eta_{rk} + \theta_2^* + \theta_5^* \eta_{ck} = 0$$

$$E_t c_{t+1} - c_t = E_t r_{t+1}$$

$$\eta_{ck} k_{t+1} = \eta_{ck} k_t + \frac{k_{t+1} - \lambda_1^* k_t}{\lambda_4^*}$$

$$\lambda_4^* \eta_{ck} \frac{\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} k_t = \lambda_4^* \eta_{ck} k_t + \frac{\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} k_t - \lambda_1^* k_t$$

$$\lambda_4^* \eta_{ck}^2 + (\lambda_1^* - 1 + \eta_{rk}(\lambda_4^* - \lambda_3^*)\, \eta_{ck} - \lambda_1^* \eta_{rk} = 0$$

En segundo lugar, los coeficientes para g_t.

$$k_{t+1} = \frac{\lambda_1^* + \lambda_3^* \eta_{ck}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} k_t + \frac{\lambda_2^* + \lambda_3^* \eta_{cg} + \lambda_4^* \eta_{rg} \rho_g}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} g_t +$$

$$\frac{\lambda_3^* \eta_{cd} + \lambda_4^* + \lambda_4^* \eta_{rd} \rho_d + \lambda_5^* \rho_d}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} d_t + \frac{\lambda_4^* \eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^* \eta_{cu}}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} u_t$$

$$r_t = \theta_1^* g_t + \theta_2^* k_t + \theta_3^* d_t + \theta_4^* r_{t+1} + \theta_5^* c_t$$

$$\eta_{rg} g_t = \theta_1^* g_t + \theta_4^* E_t r_{t+1} + \theta_5^* c_t$$

$$\eta_{rg} g_t = \theta_1^* g_t + \theta_4^* \eta_{rk} \left(\frac{\lambda_2^* + \lambda_3^* \eta_{cg} + \lambda_4^* \eta_{rg} \rho_g}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk}} g_t + \eta_{rg} \rho_g g_t \right) + \theta_5^* \eta_{cg} g_t$$

$$\eta_{rg} = \frac{\left(\theta_1^* + \theta_5^* \eta_{cg}\right)(1 - \lambda_4^* \eta_{rk}) + \theta_4^* \eta_{rk} \left(\lambda_2^* + \lambda_3^* \eta_{cg}\right)}{1 - \lambda_4^* \eta_{rk} - \theta_4^* \rho_g}$$

$$k_{t+1} = \lambda_1^* k_t + \lambda_2^* g_t + \lambda_3^* c_t + \lambda_4^* r_{t+1} + \lambda_5^* d_{t+1}$$

$$\eta_{ck}k_{t+1} + \eta_{cg}g_{t+1} = \eta_{cg}g_t + \frac{k_{t+1} - \lambda_2^* g_t - \lambda_3^* c_t}{\lambda_4^*}$$

$$\eta_{ck}\frac{\lambda_2^* + \lambda_3^*\eta_{cg} + \lambda_4^*\eta_{rg}\rho_g}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}g_t + \eta_{cg}\rho_g g_t =$$

$$\eta_{cg}g_t + \frac{1}{\lambda_4^*}\left(\frac{\lambda_2^* + \lambda_3^*\eta_{cg} + \lambda_4^*\eta_{rg}\rho_g}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}g_t - \lambda_2^* g_t - \lambda_3^*\eta_{cg}g_t\right)$$

$$\eta_{cg} = \frac{(1 - \lambda_4^*\eta_{rk})\,\eta_{rg}\rho_g + (\eta_{rk} - \eta_{ck})\left(\lambda_2^* + \lambda_4^*\eta_{rg}\rho_g\right)}{\left(\rho_g - 1\right)(1 - \lambda_4^*\eta_{rk}) - \lambda_3^*(\eta_{rk} - \eta_{ck})}$$

En tercer lugar, para los coeficientes de d_t.

$$\eta_{rd}d_t = \theta_3^* d_t + \theta_4^* E_t r_{t+1} + \theta_5^* c_t$$

$$\eta_{rd}d_t = \theta_3^* d_t + \theta_4^*\eta_{rk}\left(\frac{\lambda_3^*\eta_{cd} + \lambda_4^*\eta_{rd}\rho_d + \lambda_5^*\rho_d}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}d_t + \eta_{rd}d_{t+1}\right)d_t + \theta_5^*\eta_{cd}d_t$$

$$\eta_{rd} = \frac{(\theta_3^* + \theta_5^*\eta_{cd})\,(1 - \lambda_4^*\eta_{rk}) + \theta_4^*\eta_{rk}\,(\lambda_5^*\rho_d + \lambda_3^*\eta_{cd})}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk} - \theta_4^*\rho_d}$$

$$\eta_{ck}\frac{\lambda_3^*\eta_{cd} + \lambda_4^*\eta_{rd}\rho_d + \lambda_5^*\rho_d}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}d_t + \eta_{cd}\rho_d d_t = \eta_{cd}d_t +$$

$$\frac{1}{\lambda_4^*}\left(\frac{\lambda_3^*\eta_{cd} + \lambda_4^*\eta_{rd}\rho_d + \lambda_5^*\rho_d}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}d_t - \lambda_5^*\rho_d d_t - \lambda_3^*\eta_{cd}d_t\right)$$

$$\eta_{cd} = \frac{(1 - \lambda_4^*\eta_{rk})\,\eta_{cd}\rho_d + (\eta_{rk} - \eta_{ck})\left(\lambda_5^*\rho_d + \lambda_4^*\eta_{rd}\rho_g\right)}{(\rho_d - 1)\,(1 - \lambda_4^*\eta_{rk}) - \lambda_3^*(\eta_{rk} - \eta_{ck})}$$

Finalmente, para u_t.

$$\eta_{ru} = \theta_3^* + \theta_4^*\left(\eta_{rk}\frac{\lambda_4^*\eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^*\eta_{cu}}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}} + \eta_{rd}\right) + \theta_5^*\eta_{cu}$$

$$\eta_{ru} = \frac{(1 - \lambda_4^*\eta_{rk})\,(\theta_3^* + \theta_5^*\eta_{cu}) + \theta_4^*\eta_{rk}\,(\lambda_5^* + \lambda_3^*\eta_{cu})}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk} - \theta_4^*\rho_d}$$

$$\eta_{ck}\frac{\lambda_4^*\eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^*\eta_{cu}}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}} + \eta_{cd}u_t = \eta_{cu} + \eta_{rk}\left(\frac{\lambda_4^*\eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^*\eta_{cu}}{1 - \lambda_4^*\eta_{rk}}\right) + \eta_{rd}$$

$$\eta_{cu} = \frac{(\eta_{rk} - \eta_{ck})\,(\lambda_4^*\rho_d\eta_{ru} + \lambda_3^*) + \eta_{ru}\rho_d(1 - \lambda_4^*\eta_{rk})}{(\rho_d - 1)\,(1 - \lambda_4^*\eta_{rk}) - (\eta_{rk} - \eta_{ck})\lambda_3^*}$$

Obtenidas las elasticidades, calculamos la solución para la oferta de trabajo.

$$n_t = \nu(\sigma_\ell)\left[a_1 k_t + a_2(r^g_{t+1} + d_t) + a_3 d_{t+1} + a_4 g_t + a_5 c_t\right]$$

Sustituyendo las soluciones para el tipo de interés y el consumo, las elasticidades para la oferta de trabajo son:

$$\eta_{nk} = v(\sigma_\ell)\left[a_1 + a_2\eta_{rk}\frac{\lambda_1^* + \lambda_3^*\eta_{ck}}{1-\lambda_4^*\eta_{rk}} + a_5\eta_{ck}\right]$$

$$\eta_{ng} = v(\sigma_\ell)\left[a_1 + a_2\eta_{rg}\rho_g + a_2\eta_{rk}\frac{\lambda_2^* + \lambda_3^*\eta_{cg} + \lambda_4^*\eta_{rg}\rho_g}{1-\lambda_4^*\eta_{rk}} + a_4 + a_5\eta_{cg}\right]$$

$$\eta_{nu} = v(\sigma_\ell)\left[a_2\eta_{rk}\frac{\lambda_4^*\eta_{rd} + \lambda_5^* + \lambda_3^*\eta_{cu}}{1-\lambda_4^*\eta_{rk}} + a_2\eta_{ru}\rho_d + a_3 + a_5\eta_{cu}\right]$$

Y finalmente, la relación entre las elasticidades para la producción y la oferta de trabajo, sencillamente se obtienen a partir de la función de producción linealizada.

$$\eta_{yk} = (1-\alpha)\eta_{nk} + \alpha : \eta_{yg} = (1-\alpha)\eta_{ng} : \eta_{yu} = (1-\alpha)\eta_{nu}$$

CAPITULO 6
PERSISTENCIA, VAR Y CRITICAS AL MODELO

En este capítulo presentamos un conjunto de cuestiones diversas: por una parte exponemos una parte de la literatura que intenta determinar a partir del análisis de series univariantes si el componente permanente de la serie de producción es cuantitativamente más importante que el componente transitorio, o dicho de otra forma, la serie presenta una tendencia estocástica. En segundo lugar, nos hacemos eco de una controversia relativamente reciente acerca del impacto de las perturbaciones tecnológicas sobre el número de horas trabajadas. Finalmente, terminamos con las críticas al modelo de Ciclo Real y con la exposición de las características de un modelo de Equilibrio General Dinámico de referencia, ampliamente utilizado en la literatura empírica en Macroeconomía.

6.1. Tendencias estocásticas versus tendencias deterministas.

Robert Lucas comienza su clásico artículo "Understanding Business Cycles" (1977, pag 7) con la siguiente cuestión:

> "why is it that, in capitalist economies, aggregate variables undergo repeated fluctuationes about trend, all of essentially the same character?".

Muchos textos de Macroeconomía introducen un gráfico en el que se representa la evolución temporal del Producto Interior Bruto real junto a una tendencia, en la mayor parte de los casos lineal, para explicar que dos de los objetivos de la Teoría Macroeconómica es explicar tanto el crecimiento del output per cápita a lo largo del tiempo como las desviaciones del producto respecto a la tendencia de crecimiento. Quizá implícitamente la cuestión que propone Lucas sugieran el hecho de que las fluctuaciones del output son transitorias y ciertamente este punto de vista está conectado intrínsecamente con las explicaciones ciclo económico basadas en cambios en la demanda agregada.

El hecho de que el componente secular del PIB no fluctue demasiado durante periodos cortos de tiempo (un trimestre o un año) sino que al contrario evoluciona de forma lenta y suave en relación al componente cíclico ha conducido a la práctica econométrica tradicional de descomponer el PIB, como indicador sintético global de la actividad económica, en sus componente de crecimiento tendencial o secular y en su componente cíclico ("detrending"). Este hecho tiene una correspondencia directa con la teoría. Si nos atenemos al PIB, el componente de crecimiento tendencial correspondería al dominio de la Teoría del Crecimiento Económico, donde la acumulación de capital, físico en menor medida y humano en mayor medida, y sobre todo el crecimiento del progreso tecnológico son los principales determinantes de dicho crecimiento. Por el contrario, el componente cíclico se asume que es transitorio en su naturaleza (estacionario en términos estadísticos) y su explicación está conectada a cambios transitorios o permanentes en la demanda agregada (cambios en la oferta monetaria o en el gasto público).

Demostrar que los cambios en la demanda tienen efectos transitorios sobre el PIB implica asumir que aquéllos no tienen influencia en la tendencia de crecimiento a largo plazo.

Sin embargo, el movimiento tendencial no tiene que ser necesariamente una tendencia determinista sino que procesos estocásticos como el paseo aleatorio también exhiben también una tendencia secular pero no siguen una senda determinista. De esta forma, si la tendencia en las series macroeconómicas es de naturaleza estocástica y no tanto de naturaleza determinista, los modelos basados en el procedimiento habitual estarían especificados de forma errónea.

Interpretando los residuos o componente cíclico como la imagen de la evolución cíclica del PIB, el siguiente paso consiste básicamente en estimar un proceso estocástico estacionario siguiendo la metodología Box-Jenkins, esto es, determinar qué tipo de modelo ARMA es el que mejor se ajusta como proceso generador de dichos datos.

Un ejemplo de ello es la estimación que proponen Blanchard y Fisher (1989, pag 9) en la que el comportamiento dinámico del componente cíclico del PIB americano, $\hat{y}_t = y_t - \bar{y}_t$, se ajusta bien a un proceso ARMA(2,2), donde ε_t son los shocks o innovaciones que representan, por construcción, la desviación del output respecto de la tendencia que no puede ser predecida a partir de los valores pasados del mismo.

$$\hat{y}_t = 1.31\hat{y}_t - 0.42\hat{y}_t + \varepsilon_t - 0.06\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2} \tag{(6.1)}$$

$$\varepsilon_t = \hat{y}_t - E(\hat{y}_t \mid \hat{y}_{t-1}, \hat{y}_{t-2}...)$$

Una forma útil de visualizar analíticamente el significado de la ecuación anterior es calcular recursivamente los distintos multiplicadores dinámicos, esto es, trazar los efectos dinámicos de una shock sobre el output a lo largo del tiempo. De esta forma, adelantando la ecuación (6.1) sucesivamente obtenemos.

$$\frac{\partial \hat{y}_t}{\partial \varepsilon_t} = 1 : \frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = 1.31 - 0.06 = 1.25 : \frac{\partial \hat{y}_{t+2}}{\partial \varepsilon_t} = 1.31(1.25) - 0.42 + 0.25 = 1.4675$$

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+3}}{\partial \varepsilon_t} = 1.31(1.4675) - 0.42(1.25) \simeq 1.40 : \frac{\partial \hat{y}_{t+4}}{\partial \varepsilon_t} \simeq 1.3(1.40) - 0.42(1.4675) = 1.20$$

La forma alternativa de demostrar que a largo plazo el efecto de un shock tiende a cero es a partir de la solución explícita de la ecuación estocástica de segundo orden que es el modelo ARMA(2,2).

Aplicando el operador de retardos podemos obtener las raíces de la parte autorregresiva:

$$(1 - 1.31L + 0.42L^2)\hat{y}_t = \varepsilon_t - 0.06\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$$

Factorizando

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)\hat{y}_t = \varepsilon_t - 0.06\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}$$

donde λ_1, λ_2 son las inversas de las raíces de $(1 - 1.31L + 0.42L^2)$. Dichas raíces son $\lambda_1 = 0.56$ y $\lambda_2 = 0.75$.

La solución viene dada por:

$$\hat{y}_t = \frac{\varepsilon_t - 0.06\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2}}{(1-0.56L)(1-0.75L)} = \left(\frac{A}{1-0.56L} + \frac{B}{1-0.75L}\right)(\varepsilon_t - 0.06\varepsilon_{t-1} + 0.25\varepsilon_{t-2})$$

donde A y B son parámetros indeterminados que pueden calcularse fácilmente:

$$A + B = 1 : -\lambda_2 B - \lambda_1 A = 0$$

$$A = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -2.947368421 : B = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 3.947368421$$

Aplicando cada uno de los sumandos a la parte de medias móviles obtenemos:

$$\hat{y}_t = A\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(0.56)^i(\varepsilon_{t-i} - 0.06\varepsilon_{t-i-1} + 0.25\varepsilon_{t-i-2})\right\} +$$

$$+B\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(0.75)^i(\varepsilon_{t-i} - 0.06\varepsilon_{t-i-1} + 0.25\varepsilon_{t-i-2})\right\}$$

Adelantando k periodos:

$$\hat{y}_{t+k} = A\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(0.56)^i(\varepsilon_{t+k-i} - 0.06\varepsilon_{t+k-i-1} + 0.25\varepsilon_{t+k-i-2})\right\} +$$

$$+B\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(0.75)^i(\varepsilon_{t+k-i} - 0.06\varepsilon_{t+k-i-1} + 0.25\varepsilon_{t+k-i-2})\right\}$$

expresión con la que podemos calcular el efecto sobre y_{t+k} de un shock en t.

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = A\left\{(0.56)^k - 0.06(0.56)^{k-1} + 0.25(0.56)^{k-2}\right\} +$$

$$+B\left\{(0.75)^k - 0.06(0.75)^{k-1} + 0.25(0.75)^{k-2}\right\}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 0.53A(0.56)^{k-2} + 0.767B(0.75)^{k-2}$$

expresión general válida para calcular la serie de multiplicadores dinámicos y que nos permite demostrar que a largo plazo se verifica:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial \hat{y}_{tt+k}}{\partial \varepsilon_t} \to 0 \Rightarrow y_{t+k} \to \bar{y}_t$$

El gráfico de los efectos dinámicos del shock tiene forma de joroba, (hump-shaped), esto es, el output aumenta hasta el periodo 3 para después ir decreciendo lentamente en el tiempo. Esto refleja el punto de vista tradicional, las desviaciones del PNB ante una perturbación son transitorias, el PNB retorna a la tendencia o las perturbaciones tienen un efecto transitorio en el output.

Este enfoque fue puesto en duda a partir del trabajo econométrico de Nelson y Plosser (1982) el cual expondremos en el epígrafe 6.3.

Podemos plantearlo de la siguiente manera: ¿Puede ocurrir que las perturbaciones tengan un efecto permanente en el output? y si es así ¿cuál sería el origen de tales perturbaciones? Efectivamente, si implícitamente se ha asumido en el trabajo econométrico que las perturbaciones tienen un efecto transitorio, lo contrario suscita inmediatamente la cuestión de cuáles serían las consecuencias de que dichas perturbaciones tuviesen un efecto permanente.

Si las perturbaciones de demanda tienen efectos transitorios en el output, entonces serían las perturbaciones de oferta las que podrían tener un efecto permanente en el mismo.

Campbell y Mankiw (1987) han estimado que el comportamiento del log del PNB real, y_t, se ajusta con bastante precisión a un proceso ARIMA(1,1,2), lo que implica que la tasa de crecimiento sigue un proceso ARMA (1,2). Blanchard y Fisher (1989) estiman este proceso para los mismos datos muestrales que la ecuación (1) dando lugar a:

$$\Delta y_t = c + 0.2\Delta y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.08\varepsilon_{t-1} + 0.24\varepsilon_{t-2}$$

$$y_t = c + 1.2y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.08\varepsilon_{t-1} + 0.24\varepsilon_{t-2} \qquad ((6.2))$$

donde c refleja el hecho de que el crecimiento del output es de media positivo.

Si aplicamos la metodología anterior, la gran diferencia estriba ahora en que la parte autorregresiva del output presenta una raíz unitaria esto es, podemos expresar la ecuación de forma alternativa como:

$$(1-L)(1-0.2L)y_t = \varepsilon_t + 0.08\varepsilon_{t-1} + 0.24\varepsilon_{t-2}$$

donde $\lambda_1 = 0.2$ y $\lambda_2 = 1$ y la solución correspondiente para y_{t+k} vendría dada por:

$$y_{t+k} = \frac{1}{1-\lambda_1}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(\varepsilon_{t+k-i} + 0.08\varepsilon_{t+k-i-1} + 0.24\varepsilon_{t+k-i-2})\right\} +$$

$$-\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(0.2)^i(\varepsilon_{t+k-i} + 0.08\varepsilon_{t+k-i-1} + 0.24\varepsilon_{t+k-i-2})\right\}$$

El cálculo de los multiplicadores dinámicos tendría la expresión siguiente:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{1-\lambda_1}(1.32) - \frac{0.29\lambda_1}{1-\lambda_1}(0.2)^{k-2}$$

Ahora, el segundo sumando tiende a cero conforme aumenta k, pero el segundo es independiente del horizonte de predicción con lo cual:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1.32}{1-0.2} = 1.65$$

La interpretación del resultado anterior es muy distinta: el shock tiene un efecto permanente en el output y por tanto su efecto no desaparece en el tiempo.

En los dos gráficos siguientes observamos el efecto de una perturbación que eleva de forma permanente el nivel de producción y por otra el efecto cuando tiene una efecto transitorio. En el primer caso, la tendencia sería estocástica y en el segundo sería determinista.

La cuestión econométrica sería comprobar cuál es representación apropiada de la no-estacionariedad de la serie temporal. Habitualmente se consideran dos clases diferentes de procesos no estacionarios como hipótesis alternativas.

El primer tipo de proceso se denomina proceso "trend-stationary" (TS) y

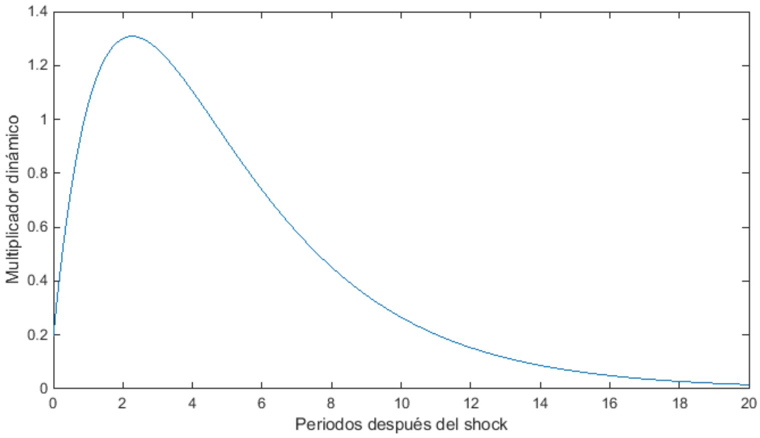

Gráfico 6.1

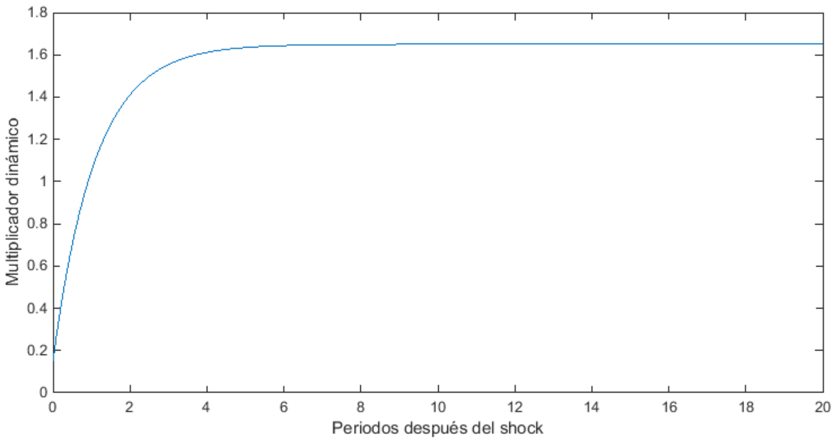

Gráfico 6.2.

en su versión más básica implica que el logaritmo de una serie no estacionaria puede ser expresado como una función determinista del tiempo, la tendencia, más un proceso estocástico estacionario de media cero y varianza finita. Su nombre se deriva de que la tendencia de la serie es perfectamente predecible o como demostraremos la serie vuelve a la tendencia tras el paso del tiempo. Por otra parte, la serie puede convertirse en estacionaria por diferenciación o bien, estimando una tendencia y calculando la desviación de los datos de la serie con respecto a la tendencia estimada.

El segundo tipo de proceso se denomina proceso "difference-stationary" (DS), que no es estacionario ni en media ni en varianza y por tanto es indispensable diferenciarlo para transformar la serie original en una serie estacionaria. Esto es, es un proceso estacionario por diferenciación.

Además, el hecho de que las series no estacionarias aumenten su media y su dispersión en proporción a su nivel absoluto motiva que los datos se transformen en primer lugar a logaritmos de los mismos.

El proceso TS lineal más simple tiene la forma para $\ln Y_t = y_t$.

$$y_t - y_{t-1} = \gamma$$

ecuación dinámica cuya resolución por sustitución recursiva da lugar a:

$$y_t = y_0 + \gamma t$$

si el proceso comienza en y_0.

Por contra, el modelo DS más simple es el paseo aleatorio puro (sin deriva) que viene dado por:

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$$

y cuya resolución da lugar a:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} = y_0 + v_t$$

En el primero γt es la tendencia determinista mientras que en el segundo $v_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_{t-i}$ es la tendencia estocástica. Además $\{v_t\}$ es un proceso estocástico no estacionario ya que $E(v_t^2) = t\sigma^2$ depende de t y diverge conforme $t \to \infty$.

De manera más realista podemos añadir a los dos procesos un componente cíclico, que admita una representación ARMA estacionaria e invertible. El proceso TS vendría dado por:

$$y_t = y_0 + \gamma t + c_t = y_0 + \gamma t + \phi(L)\varepsilon_t \tag{(6.3)}$$

$$c_t = \phi(L)\varepsilon_t : \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$$

donde L es el operador de retardos y $\phi(L) = 1+\phi_1 L+\phi_2 L^2+... = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j L^j$.y $\phi_0 \equiv 1$.

La serie c_t es estacionaria y satisface las condiciones de estacionariedad e invertibilidad, esto es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\phi_i| < \infty : \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^2 < \infty$$

Mientras que el proceso DS tendría la siguiente forma:

$$(1 - L)y_t = \gamma + d_t \tag{(6.4)}$$

$$d_t = \lambda(L)\varepsilon_t : \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$$

La mejor manera de entender la diferencia entre ambos es comparando los dos modelos en términos de sus propiedades de serie temporal.

El modelo TS es:

$$y_t = y_0 + \gamma t + \phi(L)\varepsilon_t \tag{(6.5)}$$

El modelo DS tiene por expresión, tras iterar sucesivamente hacia atrás (sustitución recursiva).

$$y_t = y_0 + \gamma t + \sum_{i=1}^{t} d_{t-i} = y_0 + \gamma t + \sum_{i=1}^{t} \lambda(L)\varepsilon_{t-i} \tag{(6.6)}$$

Cálculo del error de predicción a k periodos.

Para el proceso TS, la mejor proyección lineal de y_{t+k} a partir de los valores conocidos $\{y_0, y_1, ...y_t\}$ es[59]:

$$P(y_{t+k} \mid y_t...y_0) = E_t(y_{t+k}) = y_0 + \gamma(t+k) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{i+k}\varepsilon_{t-i}$$

y el error de predicción k periodos hacia delante es:

$$y_{t+k} - E_t y_{t+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t+k-i} - E_t \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{i+k}\varepsilon_{t-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \phi_i \varepsilon_{t+k-i}$$

El error cuadrático medio está acotado superiormente y asintóticamente es igual a:

$$\underset{k\to\infty}{lím} E\left\{y_{t+k} - E_t(y_{t+k})\right\}^2 = \underset{k\to\infty}{lím} E\left\{\sum_{i=0}^{k-1} \phi_i \varepsilon_{t+k-i}\right\}^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^2 < \infty$$

expresión que es igual a la varianza asintótica del proceso TS:

$$Var(y_t) = Var(c_t) = Var\left(\phi(L)\varepsilon_t\right) = \phi(L)^2\sigma^2 < \infty$$

Veamos ahora el proceso DS a partir de la ecuación (6.6).

$$y_t = y_0 + \gamma t + \sum_{i=0}^{t-1} d_{t-i} = y_0 + \gamma t + \sum_{i=0}^{t-1} \lambda(L)\varepsilon_{t-i}$$

Para calcular la media condicional o la mejor proyección k periodos hacia delante, calculamos en primer lugar la media condicional respecto al incremento de la variable. Teniendo en cuenta que:

$$\Delta y_{t+1} = \gamma + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+1-i} : \Delta y_{t+k} = \gamma + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+k-i}$$

[59] Dado que nos centramos en procesos lineales, la proyección $P(x_t \mid x_{t-1}, ...x_0)$ y la expectativa condicional son equivalentes $E_{t-1}(x_t)$.

$$E_t\left(\Delta y_{t+1}\right) = \gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+1-i} : E_t(yx_{t+k}) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{k+i} \varepsilon_{t-i}$$

El proceso puede expresarse como:

$$y_{t+k} = \Delta y_{t+k} + \Delta y_{t+k-1} + ... + \Delta y_{t+1} + y_t$$

$$E_t(y_{t+k}) = E_t(\Delta y_{t+k} + \Delta y_{t+k-1} + ... + \Delta y_{t+1} + y_t)$$

$$E_t(y_{t+k}) = \gamma + \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+k-i} + \gamma + \sum_{i=k-1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+k-1-i} + ...\gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{t+1-i} + y_t$$

$$E_t(y_{t+k}) = \gamma k + y_t + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{k+i} \lambda_{j+1} \right) \varepsilon_{t-i}$$

Para el paseo aleatorio puro con $\gamma = 0$, $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_j = 0 \; \forall j > 1$ la expresión anterior se simplifica a

$$E_t(y_{t+k}) = y_t$$

El error de predicción viene dado por

$$y_{t+k} - E_t(y_{t+k}) = y_t + \sum_{i=1}^{k} \Delta y_{t+i} - E_t \left\{ y_t + \sum_{i=1}^{k} \Delta y_{t+i} \right\} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{i} \lambda_j \right) \varepsilon_{t+k-i}$$

y en el caso del paseo aleatorio puro

$$y_{t+k} - E_t(y_{t+k}) = y_{t+k} - y_t = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{t+k-i}$$

El error cuadrático medio tiene por expresión:

$$E\left\{ y_{t+k} - E_t(y_{t+k}) \right\}^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{i} \lambda_j \right)^2$$

que en el caso del paseo aleatorio puro viene dado por

$$Var(y_t) = Var \left(\sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} \right) = t\sigma^2$$

Los dos modelos de serie temporal se comportan de forma muy distinta a horizontes de predicción largos o aún infinitos.

En cuanto al error de predicción, en el modelo TS está acotado superiormente, aunque aumente conforme ampliemos el horizonte de predicción.

$$\underset{k\to\infty}{lím}\{y_{t+k}-E_t y_{t+k}\}=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\varepsilon_{t+k-i}-E_t\sum_{i=0}^{\infty}\phi_{i+k}\varepsilon_{t-i}=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\varepsilon_{t+k-i}<\infty$$

mientras que para el modelo DS

$$\underset{k\to\infty}{lím}\{y_{t+k}-E_t y_{t+k}\}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\lambda_j\right)\varepsilon_{t+k-i}$$

aumenta rápidamente conforme aumentamos el horizonte de predicción y tendería a infinito conforme $k\to\infty$.

En cuanto a la varianza de los dos procesos, el modelo TS presenta un error cuadrático medio acotado superiormente mientras que el modelo DS no presenta tal característica sino muy al contrario, dicho error cuadrático medio aumenta sin límite conforme se extiende en el tiempo el horizonte de predicción.

Las funciones impulso-respuesta.

Para cualquier modelo estocástico lineal $\{y_t\}$, la diferencia $\varepsilon_t=y_t-E_{t-1}(y_t)$ ó $y_t-P(y_t\mid y_{t-1}...)$ se denomina la innovación o el shock en t.

En los dos modelos, la innovación en t es el shock, ε_t.

En el modelo TS dado por la ecuación (6.5):

$$y_t=y_0+\gamma t+c_t=y_0+\gamma t+\phi(L)\varepsilon_t$$

$$P(y_t\mid y_{t-1}...y_0)=E_{t-1}(y_t)=y_0+\gamma t+\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i\varepsilon_{t-i}+E_{t-1}\varepsilon_t$$

Para el modelo DS:

$$y_t = y_0 + \gamma t + \sum_{i=0}^{t-1} d_{t-i} = y_0 + \gamma t + \sum_{i=0}^{t-1} \lambda(L)\varepsilon_{t-i}$$

$$P(y_t \mid y_{t-1}...y_0) = E_{t-1}(y_t) = y_0 + \gamma t + \sum_{i=1}^{t-1} \lambda(L)\varepsilon_{t-i}$$

Podemos comparar los dos modelos a partir del impacto de una innovación sobre la variable k periodos hacia delante.

En el modelo TS, el efecto de la innovación es justamente el coeficiente de la representación de media móvil del componente cíclico.

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-k}} = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \phi_k$$

Para cada horizonte de predicción, el efecto de una innovación sería igual al coeficiente de media móvil o dicho de otra forma, el efecto de la innovación tiene un efecto temporal en la variable.

Por contra, en el modelo DS el efecto de la innovación viene dado por:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j$$

esto es, el efecto sobre la variable va acumulando los coeficientes de shocks anteriores al momento $t+k$. Para horizontes de predicción largos, obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_j = \lambda(\mathbf{1})$$

Esta expresión nos mide el impacto a largo plazo de una innovación si la serie sigue un proceso DS, o dicho de otra forma, la innovación tiene un efecto permanente sobre la variable, ya que conforme aumenta el horizonte, el efecto sobre la variable viene dado por la acumulación o suma de los coeficientes del proceso d_t.

Finalmente, el proceso TS puede considerarse como un caso límite del proceso DS. Si diferenciamos el proceso TS obtenemos

$$y_t - y_{t-1} = \gamma + (1 - L)c_t$$

$$(1 - L)y_t = \gamma + (1 - L)\phi(L)\varepsilon_t$$

con lo que si el polinomio $\lambda(L)\varepsilon_t$ presenta una raíz unitaria, entonces el proceso DS podría escribirse como

$$(1 - L)y_t = \gamma + \lambda(L)\varepsilon_t$$

con lo que obtendríamos el proceso TS.

Esto es, en el proceso TS se añade una raíz unitaria al proceso de medias móviles mientras que en el proceso DS esta raíz unitaria está ausente.

Si igualamos para los dos procesos la parte correspondiente al shock, podemos obtener la función impulso respuesta a horizonte infinito para el proceso TS.

$$(1 - L)\phi(L) = \lambda(L)$$

con lo cual

$$\phi(\mathbf{1}) = 0$$

por tanto, a horizonte infinito, la función impulso respuesta para el proceso TS es igual a 0.

Una representación particular alternativa.

Supongamos ahora que el componente cíclico sigue un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1):

$$c_t = \phi c_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow c_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \qquad |\phi| < 1$$

En este caso, estamos suponiendo que los coeficientes del proceso de shock son ahora:

$$\phi(L) = 1 + \phi_1 + ... + \phi_k + ... = 1 + \phi + ... + \phi^k + ..$$

y el proceso TS viene dado por:

$$y_t = y_0 + \gamma t + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} : \phi < 1$$

Podemos interpretar esta expresión en un lenguaje diferente. El modelo TS tiene una línea central que es la tendencia, $y_0 + \gamma t$, alrededor de la cual oscila $\{y_t\}$. Si desarrollamos esta expresión obtenemos:

$$y_t = y_0 + \gamma t + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L}$$

$$y_t - \phi y_{t-1} = (1 - \phi) y_0 + \gamma t - \gamma \phi (t - 1) + \varepsilon_t$$

$$y_t - (y_0 + \gamma t) = \phi \left(y_{t-1} - (y_0 + \gamma (t - 1) \right) + \varepsilon_t$$

Definiendo la desviación de la tendencia como

$$\hat{y}_t = y_t - \bar{y}_t$$

la ecuación anterior queda como:

$$\hat{y}_t = \phi \hat{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

esto es, la desviación del PIB respecto a la tendencia determinista sería una proporción ($\phi < 1$) de la desviación ocurrida en el periodo anterior más la innovación.

Si $\phi = 1$ la desviación con respecto a la tendencia se mantendría en el tiempo, dicha desviación sería un paseo aleatorio sin deriva, la desviación seguiría un proceso DS o lo que es lo mismo la serie presentaría una raíz unitaria.

En vez de presentar de nuevo los resultados sobre error de predicción y error cuadrático medio o varianza asintótica simplemente calcularemos los multiplicadores dinámicos o funciones impulso-respuesta.

La solución para la ecuación estocástica y la expresión para los multiplicadores:

$$\hat{y}_t = \phi^t \hat{y}_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} \Rightarrow \frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \phi^k : k = 0, 1, ...k..$$

esto es, conforme aumenta el periodo de predicción el efecto del shock sobre la desviación de la variable con respecto a su tendencia disminuye y tiende a cero, con lo que a largo plazo la serie revierte a la tendencia. La persistencia del efecto de la innovación sobre la serie depende del parámetro ϕ.

$$\underset{k\to\infty}{lím} \frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 0$$

Por contra, en la tendencia estocástica, $\phi = 1$, la serie presentaría un paseo aleatorio con deriva

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

la solución a la ecuación dinámica anterior viene dada por:

$$\hat{y}_t = \hat{y}_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = 1 : \forall k \geq 0$$

En general, y con la formulación para el proceso DS utilizada anteriormente:

$$d_t = \lambda d_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow d_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varepsilon_{t-j} \qquad |\lambda| < 1$$

$$(1 - L)y_t = \gamma + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varepsilon_{t-j}$$

Resolviendo por sustitución recursiva

$$y_t = y_0 + \gamma t + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \lambda^j \right) \varepsilon_{t-i}$$

Ahora los multiplicadores vienen dados por:

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \left(\sum_{j=0}^{i} \lambda^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda^j \right)$$

esto es, el efecto de un shock sobre la serie es la suma del parámetro autorregresivo de la parte estacionaria, esto es, el efecto a largo plazo de una perturbación transitoria viene dado por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{1-\lambda}$$

y por tanto, el nivel de la variable cambia de forma permanente y por supuesto no revierte a la tendencia. El cambio total en la variable endógena depende del parámetro λ.

6.2. Modelos macroeconómicos y persistencia.

Los dos modelos univariantes anteriores encajan con dos visiones diferentes acerca de la causa de las fluctuaciones económicas y los modelos macroeconómicos convencionales pueden explicar sus resultados aunque desde puntos de vista metodológicos relativamente alejados de los modelos de Ciclo Real.

En este apartado consideramos tres modelos estándar que predicen la baja persistencia de las perturbaciones de demanda y la alta persistencia de las perturbaciones de oferta.

6.2.1. Un modelo básico OA-DA.

El primer modelo macroeconómico básico que presentamos es el conocido IS-LM-OA o DA-OA con expectativas adaptativas.

El modelo consta de las siguientes ecuaciones:

La primera ecuación es el equilibrio en el mercado de bienes o curva IS en el que la demanda agregada es igual a la producción y que puede deducirse a partir de la log-linealización de la condición de equilibrio $DA = Y$.

$$y_t - \bar{y} = \delta_t - b(r_t - \bar{r}) : b > 0$$

En ésta, δ_t sería la perturbación de demanda, r_t es el tipo de interés real e y_t es el logaritmo del PIB.

La segunda ecuación sería el equivalente a la ecuación de equilibrio monetario o LM. En lugar de ésta, incluimos una variante de la conocida regla de Taylor en la que el tipo de interés nominal fijado por el Banco Central responde en más de un punto a las desviaciones de la inflación con respecto a la inflación objetivo.

En términos de la tasa de interés real, puede expresarse como:

$$r_t = \bar{r} + \phi_\pi(\pi_t - \pi^*) : \phi_\pi > 1$$

Estas dos expresiones anteriores dan lugar a la curva de demanda agregada en términos de producción-inflación.

En tercer lugar, la curva de oferta agregada o relación directa entre inflación y producción viene dada por:

$$\pi_t - \pi_t^e = \gamma(y_t - \bar{y}) - z_t : \gamma > 0$$

Finalmente, la formación de expectativas adaptativas para la tasa de inflación es:

$$\pi_t^e - \pi_{t-1}^e = \beta(\pi_{t-1} - \pi_{t-1}^e) : 0 < \beta < 1$$

en la que, sin pérdida de generalidad asumiremos $\beta = 1$ supuesto que no modifica los resultados a largo plazo y simplifica en gran medida los cálculos.

En términos de desviaciones respecto el equilibrio a largo plazo, el sistema en inflación y producción viene dado por:

$$\hat{y}_t = \delta_t - b\phi_\pi\hat{\pi}_t \tag{(6.7)}$$

$$\hat{\pi}_t - \hat{\pi}_{t-1} = \gamma\hat{y}_t - z_t \tag{(6.8)}$$

Del sistema (6.7) y (6.8) de desviaciones en ouput-gap e inflación deducimos la ecuación dinámica para el primero:

$$\hat{y}_t = \psi\hat{y}_{t-1} + \psi(1-L)\delta_t + \frac{1-\psi}{\gamma}z_t \tag{(6.9)}$$

donde

$$\psi = \frac{1}{1 + b\phi_\pi\gamma}1 : \frac{1-\psi}{\gamma} = b\phi_\pi$$

Supongamos que los shocks de demanda y oferta siguen los siguientes procesos:

$$\delta_t = \delta_{t-1} + e_t$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t : 0 < \rho < 1$$

donde e_t y ε_t son variables aleatorias incorreladas e idénticamente distribuidas de media cero y varianza finita.

En principio, la perturbación de demanda que sigue un paseo aleatorio tiene, por construcción, más persistencia que el shock de oferta que sigue un proceso AR(1) estacionario. Sin embargo, la introducción de dichos procesos en la ecuación (6.9) para la producción genera los siguientes resultados.

El shock de demanda tiene poca persistencia, sólo afecta a la producción en el mismo periodo en el que se produce pero a partir de ahí sus efectos son nulos y la producción retorna a su tendencia a largo plazo.

$$\hat{y}_t = \psi \hat{y}_{t-1} + \psi e_t$$

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial e_t} = \psi^{k+1} : k = 0, 1, 2...$$

Pero a largo plazo

$$\underset{k \to \infty}{lím} \frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial e_t} \to 0$$

el efecto de la perturbación de demanda desaparece.

Sin embargo, si calculamos los multiplicadores dinámicos para la perturbación de oferta, obtendremos los siguientes resultados.

$$\hat{y}_t = \psi \hat{y}_{t-1} + \frac{1-\psi}{\gamma} \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L}$$

$$(1-\rho L)(1-\psi L)\hat{y}_t = \frac{1-\psi}{\gamma}\varepsilon_t$$

Ecuación dinámica lineal de segundo orden cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \psi : \lambda_2 = \rho$$

y por tanto que puede expresarse como:

$$\hat{y}_t = \frac{1-\psi}{\gamma}\left[-\frac{\rho}{\psi-\rho}\frac{1}{1-\rho L} + \frac{\psi}{\psi-\rho}\frac{1}{1-\psi L}\right]\varepsilon_t$$

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1-\psi}{\gamma}\left[-\frac{\rho}{\psi-\rho}\rho^k + \frac{\psi}{\psi-\rho}\psi^k\right]$$

expresión que también tiende a cero conforme aumenta k.Esto es, el efecto de la perturbación de oferta depende de la persistencia del shock. Su efecto en el PIB también desaparece siempre que el parámetro de persistencia esté comprendido entre 0 y 1. Sin embargo, si el shock de oferta es permanente y $\rho = 1$, entonces la expresión anterior queda como

$$\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1-\psi}{\gamma}\left[-\frac{1}{\psi-1}1^k + \frac{\psi}{\psi-\rho}\psi^k\right] \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\partial \hat{y}_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = \frac{1}{\gamma}$$

6.2.2. Modelo keynesiano con expectativas racionales.

Consideremos en segundo lugar un modelo keynesiano pero con expectativas racionales, similar al que propone Galí (1992). Básicamente es un modelo de oferta y demanda agregada, donde la primera viene da por la curva de Phillips y la segunda se determina a partir del equilibrio IS-LM.

$$\Delta w_t = \beta E_{t-1}\Delta p_t - \gamma(u_t - \bar{u}) : \gamma > 0 : 0 < \beta < 1$$

donde w_t es el logaritmo del salario nominal, p_t es el logaritmo del nivel de precios y u_t es la tasa de desempleo.

Las empresas fijan los precios con un margen sobre el coste variable medio, estando éste formado principalmente por la masa salarial.

$$P = (1+m)CVMe = (1+m)\frac{WN}{Y}$$

La función de producción, manteniendo constante el stock de capital es:

$$Y = ZN \Rightarrow \frac{Y}{N} = Z$$

$$P = (1+m)\frac{W}{Z} \Rightarrow p = m + w - z$$

$$\Delta p = \Delta w - \Delta z$$

dado un margen constante sobre los costes medios.

La relación entre desempleo y output viene dada por la denominada ley de Okun.

$$u_t - \bar{u} = -\alpha(y_t - \bar{y})$$

Con lo que finalmente la curva de oferta agregada es:

$$\Delta p_t = \beta E_{t-1}\Delta p_t + \gamma\alpha(y_t - \bar{y}) - \Delta z_t$$

$$p_t = (1-\beta)p_{t-1} + \beta E_{t-1}p_t + \gamma\alpha(y_t - \bar{y}) - \Delta z_t \qquad ((6.10))$$

La demanda agregada viene dada por el equilibrio simultáneo en los mercados de bienes y de dinero. Las ecuaciones de equilibrio en el mercado de dinero y en el mercado de bienes son:

$$m_t - p_t = y_t - hi_t$$

$$y_t = -\frac{1}{b}r_t$$

La relación entre tipo de interés nominal y real viene dada por la identidad de Fisher:

$$i_t = r_t + E_t\Delta p_{t+1}$$

Con lo que la demanda agregada

$$m_t - p_t = y_t - br_t - \lambda\left(-by_t - E_t\Delta p_{t+1}\right)$$

$$y_t(1+hb) = m_t - p_t + \lambda E_t\Delta p_{t+1}$$

$$p_t = -\frac{1+hb}{1+h}y_t + \frac{h}{1+h}E_tp_{t+1} + \frac{1}{1+h}m_t \qquad ((6.11))$$

Determinación del equilibrio.

Despejando el nivel de precios en (6.11), aplicando el operador forward y sustituyendo en la ecuación de oferta agregada, (6.10).

$$p_t\left(1 - \frac{h}{1+h}F\right) = \frac{1}{1+h}m_t - \frac{1+hb}{1+h}y_t$$

donde

$$Fp_t = E_t p_{t+1}$$

$$p_t = \left(1 - \frac{h}{1+h}F\right)^{-1} \left(\frac{1}{1+h}m_t - \frac{1+hb}{1+h}y_t\right) \qquad ((6.12))$$

Introduciendo (6.12) en la oferta agregada.

$$\frac{1}{1+h}\left(1 - \frac{h}{1+h}F\right)^{-1} (m_t - (1+hb)\, y_t) =$$

$$(1-\beta)\frac{1}{1+h}\left(1 - \frac{h}{1+h}F\right)^{-1} (m_{t-1} - (1+hb)\, y_{t-1}) +$$

$$+\beta\frac{1}{1+h}\left(1 - \frac{h}{1+h}F\right)^{-1} (E_{t-1}m_t - (1+hb)\, E_{t-1}y_t) + \gamma\alpha(y_t - \bar{y}) - \Delta z_t$$

$$m_t - (1+hb)\, y_t = (1-\beta)\,(m_{t-1} - (1+hb)\, y_{t-1}) +$$

$$\beta\,(E_{t-1}m_t - (1+hb)\, E_{t-1}y_t) + (1+h)\left(1 - \frac{h}{1+h}F\right)(\gamma\alpha(y_t - \bar{y}) - \Delta z_t)$$

Reordenando

$$[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]\, y_t = (1-\beta)\,(1+hb)\, y_{t-1} + \beta\,(1+hb)\, E_{t-1}y_t + \gamma\alpha h E_t y_{t+1} + x_t$$

siendo x_t:

$$x_t = m_t - (1-\beta)m_{t-1} - \beta E_{t-1}m_t + \gamma\alpha\bar{y} + (1+h)\,\Delta z_t - hE_t\Delta z_{t+1}$$

$$x_t = \Delta m_t + \beta(m_{t-1} - E_{t-1}m_t) + \Delta z_t + h\,(\Delta z_t - E_t\Delta z_{t+1}) + \gamma\alpha\bar{y}$$

O finalmente

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 E_{t-1}y_t + a_0 E_t y_{t+1} + x_t \qquad ((6.13))$$

$$x_t = \frac{\Delta m_t + \beta(m_{t-1} - E_{t-1}m_t) + \Delta z_t + h\,(\Delta z_t - E_t\Delta z_{t+1}) + \gamma\alpha\bar{y}}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]}$$

donde

$$a_0 = \frac{\gamma\alpha h}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]} > 1 : a_1 = \frac{(1-\beta)\,(1+hb)}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]} > 1$$

$$a_2 = \frac{\beta\,(1+hb)}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]} > 1$$

Solución.

La ecuación dinámica lineal de segundo orden con expectativas para la producción puede resolverse a través del método de coeficientes indeterminados. La solución debe tener la siguiente forma analítica

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_t x_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_{t-1} x_{t+i-1}$$

donde λ, c_i y d_i son coeficientes indeterminados y cuya expresión concreta vendrá dada en función de los parámetros del modelo.

A partir de la conjetura de solución

$$E_{t-1} y_t = \lambda y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_{t-1} x_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_{t-1} x_{t+i-1}$$

$$E_t y_{t+1} = \lambda y_t + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_t x_{t+i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_t x_{t+i}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (6.13) a resolver:

$$\lambda y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_t x_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_{t-1} x_{t+i-1} =$$

$$= a_1 y_{t-1} + a_2 \left[\lambda y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_{t-1} x_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_{t-1} x_{t+i-1}\right]$$

$$+a_0 \left[\lambda \left(\lambda y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_t x_{t+i} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_{t-1} x_{t+i-1}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i E_t x_{t+i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} d_i E_t x_{t+i}\right] + x_t$$

Idenficando coeficientes:

$$[y_{t-1}] : \lambda = a_1 + a_2\lambda + a_0\lambda^2 \Rightarrow a_0\lambda^2 + (a_2-1)\lambda + a_1 = 0 \qquad ((6.14))$$

$$[x_t] : c_0 = a_0 \lambda c_0 + a_0 d_0 + 1$$

$$[E_{t-1} x_{t-1} = x_{t-1}] : d_0 = a_2 d_0 + a_0 \lambda d_0 \Rightarrow d_0 (1 - a_2 - a_0 \lambda) = 0 \Rightarrow d_0 = 0$$

$$[E_t x_{t+1}] : c_1 = a_0 \lambda c_1 + a_0 c_0 + a_0 d_1$$

$$[E_{t-1} x_t] : d_1 = a_2 c_0 + a_2 d_1 + a_0 \lambda d_1$$

Y en general

$$[E_t x_{t+i}] : c_i = a_0 \lambda c_i + a_0 c_0 + a_0 d_i$$

A partir de la ecuación de segundo grado (6.14) obtenemos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1 - a_2}{a_0} : \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_1}{a_0}$$

y en el polinomio $P(\lambda) = a_0 \lambda^2 + (a_2 - 1)\lambda + a_1$ se verifica:

$$P(0) = a_1 > 0 : P(1) = a_0 + a_2 - 1 + a_1 < 0 : P(\infty) > 0$$

Por tanto, las dos raíces verifican

$$\lambda_1 < 1 \text{ y } \lambda_2 > 1$$

siendo la solución estable la raíz inferior a la unidad.

Reorganizando las anteriores identidades obtenemos:

$$c_0 = (1 - a_0 \lambda_1)^{-1} : c_1 = \frac{a_0 (c_0 + d_1)}{1 - a_0 \lambda_1}$$

$$d_0 = 0 : d_1 = \frac{a_2 (c_0 + d_1)}{1 - a_0 \lambda_1}$$

Dividiendo c_1 entre d_1 y teniendo en cuenta que $a_0 \lambda_2 = 1 - a_2 - a_0 \lambda_1$.

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{a_0}{a_2} \Rightarrow d_1 = \left(\frac{a_2}{a_0} \right) c_1$$

$$c_1 = (1 - a_0 \lambda_1)^{-1} (a_0 c_0 + a_2 c_1) \Rightarrow c_1 (1 - a_0 \lambda_1 - a_2) = a_0 c_0 \Rightarrow a_0 \lambda_2 c_1 = a_0 c_0$$

$$c_1 = \lambda_2^{-1} c_0$$

Estos resultados nos permiten calcular todos los coeficientes a partir de:

$$d_i = \left(\frac{a_2}{a_0}\right) c_i : c_i = \lambda_2^{-1} c_{i-1} \quad (i = 1, 2....)$$

Recursivamente y conocido c_0 tendremos:

$$c_i = \lambda_2^{-i} c_0 : d_i = \left(\frac{a_2}{a_0}\right) \lambda_2^{-i} c_0 \quad (i = 1, 2....)$$

Por tanto, la solución de nuestra ecuación dinámica es:

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i} E_t x_{t+i} + \left(\frac{a_2}{a_0}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_2^{-i} E_{t-1} x_{t+i-1} \right\}$$

El efecto de los shocks de demanda.

Consideremos en primer lugar el shock de demanda y asumamos que la oferta monetaria sigue el proceso

$$m_t = m_{t-1} + e_t$$

donde la variable exógena viene dada por:

$$x_t = \frac{\Delta m_t + \beta(m_{t-1} - E_{t-1} m_t) + \Delta z_t + h\left(\Delta z_t - E_t \Delta z_{t+1}\right) + \gamma\alpha\bar{y}}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]}$$

La expresión para ésta queda:

$$x_t = e_t \Rightarrow E_t e_{t+i} = 0 : E_{t-1} e_{t+i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i} E_t x_{t+i} + \left(\frac{a_2}{a_0}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_2^{-i} E_{t-1} x_{t+i-1} \right\}$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \varepsilon_t + \frac{\gamma\alpha(1 - a_0\lambda_1)^{-1}}{[(1+h)\gamma\alpha + (1+hb)]} \left[\frac{1}{1 - \lambda_2^{-1}} + \left(\frac{a_2}{a_0}\right) \frac{\lambda_2^{-1}}{1 - \lambda_2^{-1}} \right] \bar{y}$$

La solución a largo plazo viene dada por:

$$y_t = \bar{y}$$

ya que

$$\frac{1}{1-\lambda_1}\frac{\gamma\alpha(1-a_0\lambda_1)^{-1}}{[(1+h)\gamma\alpha+(1+hb)]}\left[\frac{1}{1-\lambda_2^{-1}}+\left(\frac{a_2}{a_0}\right)\frac{\lambda_2^{-1}}{1-\lambda_2^{-1}}\right]=1$$

Calculando los multiplicadores podemos ver el efecto dinámico de la perturbación de demanda en la producción.

$$\frac{\partial y_{t+k}}{\partial e_t} = \lambda_1^k(1-a_0\lambda_1)^{-1}$$

que tiende a cero conforme $k \to \infty$.

En suma, el efecto de un shock de demanda permanente tiene un efecto temporal en la producción y ésta retorna a su equilibrio a largo plazo.

Efecto del shock de oferta.

El efecto de un shock tecnológico tiene implicaciones muy distintas.

En nuestro modelo, el shock de oferta viene dado por una variación en la productividad media del factor trabajo. Asumamos que sigue el siguiente proceso.

$$\Delta z_t = \Delta z_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow E_t\Delta z_{t+i} = \Delta z_t : E_{t-1}\Delta z_{t+i} = \Delta z_{t-1}$$

$$x_t = \Delta z_t$$

La variable exóenga queda como:

$$E_t x_{t+i} = E_t\Delta z_{t+i} = \Delta z_t : E_{t-1}x_{t+i} = \Delta z_{t-1}$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1-a_0\lambda_1)^{-1}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_t x_{t+i} + \left(\frac{a_2}{a_0}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_2^{-i}E_{t-1}x_{t+i-1}\right\}$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i} \Delta z_t + \left(\frac{a_2}{a_0} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_2^{-i} \Delta z_{t-1} \right\}$$

$$y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \Delta z_t$$

Los multiplicadores dinámicos para la producción son:

$$\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t} = (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}$$

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial \varepsilon_t} = \lambda_1 (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} + (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \varepsilon_t} = (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^k = (1 - a_0\lambda_1)^{-1} \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - 1)(1 - \lambda_1)}$$

Por tanto, el modelo predice que las perturbaciones de demanda tienen un efecto transitorio en el PIB mientras que la perturbación permanente de oferta eleva el PIB de forma permanente.

6.2.3. Un modelo sencillo de oferta y demanda agregada con información imperfecta sobre el carácter de las perturbaciones.

Blanchard y Fisher (1989, pag 525) plantean un modelo sencillo pero muy útil para estudiar los efectos de los shocks de oferta. Las dos características más relevantes del mismo son:

a) que las perturbaciones de oferta son la suma de dos componentes: uno transitorio y otro permanente siendo imposible para los agentes discernir cuál de los dos es el relevante.

b) es posible comparar los efectos del shock de oferta tanto en presencia como en ausencia de rigideces nominales en el mercado de trabajo.

La demanda agregada viene dada a partir de la Teoría Cuantitativa donde la velocidad de circulación es constante y en logaritmos es:

$$y_t^d = m_t - p_t$$

La oferta agregada se deriva a partir de la función de producción y del equilibrio en el mercado de trabajo.

La función de producción, sin capital, viene dada por:

$$Y_t = (Z_t N_t)^{1-a} \Rightarrow y_t^s = (1-a)(z_t + n_t^d)$$

La demanda de trabajo, se obtiene a partir del comportamiento optimizador de las empresas que operan en competencia perfecta:

$$\frac{W}{P} = \frac{\partial Y}{\partial N}(N) \Rightarrow \frac{W}{P} = Z_t^{1-a}(1-a)N_t^{-a} \Rightarrow w_t - p_t = (1-a)z_t - an_t^d + \ln(1-a)$$

$$n_t^d = \frac{1}{a}\left[(1-a)z_t - (w_t - p_t)\right]$$

La oferta de trabajo se deriva del comportamiento optimizador de los agentes económicos, que maximizan una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria:

$$n_t^s = \beta(w_t - p_t)$$

donde β depende de los parámetros de la función de utilidad y nos mide la elasticidad de la oferta de trabajo respecto el salario real.

La ecuación que especifica la naturaleza de la rigidez nominal es la siguiente:

$$w \mid E_{t-1} n_t^d = E_{t-1} n_t^s$$

donde el salario nominal es tal que iguala la demanda esperada de trabajo a la oferta esperada de trabajo. Dado el salario nominal, el nivel de empleo viene determinado por la demanda de trabajo.

Por contra, la no existencia de rigidez nominal permite que el equilibrio en el mercado de trabajo sea

$$n_t^d = n_t^s = \bar{n}$$

Solución.

Comencemos por el caso más sencillo de ausencia de rigidez nominal. A partir del equilibrio en el mercado de trabajo obtenemos el salario real y el nivel de empleo de equilibrio.

$$\beta(w_t - p_t) = \frac{1}{a}\left[(1-a)z_t - (w_t - p_t)\right]$$

$$w_t - p_t = \frac{1-a}{1+a\beta}z_t : \bar{n} = \beta\frac{1-a}{1+a\beta}z_t$$

$$y_t^s = \frac{(1-a)\,(1+\beta)}{1+a\beta}z_t$$

lo que da lugar al conocido resultado clásico en el que la oferta agregada es vertical en el plano (y, p) y sólo se ve afectada por la perturbación de oferta.

Si el shock fuese permanente conduciría a una variación permanente del PIB y una variación en el nivel de precios de signo contrario al shock de oferta, mientras que si fuese transitoria el PIB sólo cambiaría en un solo periodo dada la naturaleza estática del modelo.

En el caso de rigidez nominal, el salario nominal viene dado por la igualdad entre la oferta y la demanda esperada de trabajo.

$$w_t = E_{t-1}p_t + \frac{1-a}{1+a\beta}E_{t-1}z_t$$

El salario nominal es igual al nivel de precios esperado más una función del shock tecnológico esperado.

Si la función de oferta de trabajo fuese perfectamente elástica, entonces

$$\beta \to \infty \Rightarrow \frac{1-a}{1+a\beta} = 0$$

un shock positivo conduciría sólo a un aumento en el nivel de empleo, manteniendo constante el salario nominal y real.

La oferta agregada en términos del salario real es

$$y_t^s = (1-a)(z_t + n_t^d) = (1-a)(z_t + \frac{1}{a}\left[(1-a)z_t - (w_t - p_t)\right])$$

Sustituyendo la expresión para el salario nominal, obtenemos la función de oferta agregada.

$$y_t^s = \frac{1-a}{a}(p_t - E_{t-1}p_t) + \frac{1-a}{a}\left(z_t - \frac{1-a}{1+a\beta}E_{t-1}z_t\right)$$

El equilibrio oferta y demanda para la producción viene dado por:

$$y_t^s = y_t^d$$

$$y_t = \frac{1-a}{a}(m_t - y_t - E_{t-1}m_t + E_{t-1}y_t) + \frac{1-a}{a}\left(z_t - \frac{1-a}{1+a\beta}E_{t-1}z_t\right)$$

y su valor esperado es:

$$E_{t-1}y_t = \frac{1-a}{a}\left(E_{t-1}z_t - \frac{1-a}{1+a\beta}E_{t-1}z_t\right) = \frac{(1-a)(1+\beta)}{1+a\beta}E_{t-1}z_t$$

Finalmente, sustituyendo la expresión anterior en el nivel de producción de equilibrio, expresamos éste en función de las perturbaciones de oferta y de demanda

$$y_t = (1-a)(m_t - E_{t-1}m_t) + (1-a)(z_t - E_{t-1}z_t) + \frac{(1-a)(1+\beta)}{1+a\beta}E_{t-1}z_t$$

Consideremos la siguiente estructura de serie temporal para la perturbación de oferta.

$$z_t = u_t + e_t$$

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$$

$$e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$$

Esto es, la perturbación de oferta tiene un componente transitorio, e_t y un componente permanente, u_t, dando lugar a que los individuos observen z_t pero no sepan si dicho shock es de carácter permanente o transitorio.

Consideremos en primer lugar el efecto sobre la producción de un shock transitorio de tal manera que:

$$u_{t+j} = 0 \quad \forall j \neq 0 : u_t = e_t$$

Como demostramos en el apéndice 6.1 la predicción para el proceso del shock es la siguiente:

$$E_{t-1}z_t = \sum_{j=1}^{\infty}(1-\theta)\theta^{j-1}z_{t-j}$$

de tal forma que

$$E_{t-1}z_t = 0 : E_t z_{t+1} = (1-\theta)e_t : E_{t+1}z_{t+2} = (1-\theta)\theta e_t$$

y en general

$$E_{t+k-1}z_{t+k} = (1-\theta)\theta^{k-1}e_t : k = 1, 2...$$

El comportamiento dinámico del PIB es:

$$y_t = (1-a)z_t$$

$$y_{t+1} = (1-a)(1-\theta)\frac{\beta(1-a)}{1+a\beta}e_t$$

$$y_{t+2} = (1-a)^2(1-\theta)\theta\frac{\beta}{1+a\beta}e_t$$

$$y_{t+k} = (1-a)^2(1-\theta)\theta^{k-1}\frac{\beta}{1+a\beta}e_t$$

Con lo cual, conforme nos alejamos del momento en el que se produce la perturbación, el efecto transitorio se desvanece:

$$\underset{k\to\infty}{lím}\, y_{t+k} \to 0$$

En suma, una perturbación de oferta transitoria tiene un efecto transitorio en la producción.

Por contra, una perturbación permanente provoca un cambio permanente en la producción.

$$E_{t-1}z_t = 0 : E_t z_{t+1} = (1-\theta)e_t : E_{t+1}z_{t+2} = (1-\theta^2)e_t$$

y en general

$$E_{t+k-1}z_{t+k} = (1-\theta^k)e_t : k = 1, 2...$$

La evolución en el tiempo de la producción viene dada por:

$$y_t = (1-a)\varepsilon_t$$

$$y_{t+1} = (1-a)\left[\theta\frac{\beta(a-1)}{1+a\beta} + \frac{1+\beta}{1+a\beta}\right]\varepsilon_t$$

$$y_{t+2} = (1-a)\left[\theta^2\frac{\beta(a-1)}{1+a\beta} + \frac{1+\beta}{1+a\beta}\right]\varepsilon_t$$

$$y_{t+k} = (1-a)\left[\theta^k\frac{\beta(a-1)}{1+a\beta} + \frac{1+\beta}{1+a\beta}\right]\varepsilon_t$$

sin embargo conforme nos alejamos en el tiempo del momento en el que se produce la perturbación el efecto de la misma no desaparece por completo ya que

$$\lim_{k\to\infty} y_{t+k} = (1-a)\frac{1+\beta}{1+a\beta}$$

esto es, una perturbación de oferta permanente tiene un efecto permanente sobre la producción.

Si realizamos el mismo ejercicio para una perturbación de demanda permanente tendríamos que

$$m_t = m_{t-1} + \epsilon_t$$

y la producción

$$y_t = (1-a)\epsilon_t$$

$$y_{t+k} = (1-a)\epsilon_{t+k} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Esto es, la perturbación permanente de demanda tiene un efecto transitorio y en el modelo su efecto dura un solo periodo.

6.3. Tendencias y paseos aleatorios. Nelson y Plosser (1982).

Nelson y Plosser siguen la estrategia de Dickey y Fuller consistente en integrar los procesos TS y DS en un modelo común. De esta forma, dependiendo del parámetro ϕ, el modelo TS puede escribirse como:

$$x_t = \alpha + \beta t + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L}$$

o también:

$$x_t = \alpha(1-\phi) + \phi\beta + \beta(1-\phi)t + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

De esta forma, si la hipótesis TS es correcta entonces $|\phi| < 1$ mientras que si la hipótesis DS es la correcta entonces $\phi = 1$ y la ecuación anterior se reduciría a un paseo aleatorio con deriva.

Para una serie estacionaria se estimaría la siguiente regresión:

$$x_t = a + bx_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t$$

y se realizaría el test siguiente:

$$H_0 : \phi = 1 \qquad H_1 : \phi \neq 1$$

La simulación de Monte Carlo y la aplicación de los métodos estandard de estimación les hacen concluir que para los casos $a = 0$ y $a = 1$ y en ambos con $b = 1$ y $\gamma = 0$, están fuertemente sesgados hacia aceptar la hipótesis TS frente a la DS, es decir, se tiende a rechazar la hipótesis $b = 1$ cuando es cierta en favor de $b < 1$ y tiende a rechazar la hipótesis $\gamma = 0$ cuando es cierta.

En segundo lugar, a partir de la estimación de las autocorrelaciones muestrales para PNB real y nominal, empleo, salarios nominales y reales tanto en niveles como en primeras diferencias concluyen que son inconsistentes con un modelo TS. Las razones son que las autocorrelaciones decaen muy lentamente para las variables en niveles lo que es consistente con el comportamiento de un paseo aleatorio y para las autocorrelaciones en primeras diferencias, la autocorrelación sólo es positiva para retardos de un periodo, lo que es característico de procesos de medias móviles de primer orden, MA(1).

La evidencia contra la representación TS es reforzada por las autocorrelaciones muestrales de las desviaciones respecto a una tendencia lineal estimada.

Si los test realizados sugieren que las series no contienen tendencias deterministas sino al contrario están presentes tendencias estocásticas características de procesos DS es útil centrarse en el comportamiento del output.

Nelson y Plosser especifican un modelo de componentes no observables de tal forma que el output es descompuesto en un componente tendencial o secular y un componente cíclico. Si asumimos que éste es estacionario entonces cualquier no estacionariedad en el output debe ser atribuible al componente tendencial.

$$y_t = \bar{y}_t + c_t$$

donde además

$$\bar{y}_t = (1-L)^{-1}\theta(L)u_t \quad \text{y} \quad c_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

La separación de ambos componentes es un problema de extracción de señal cuando la única información que tenemos son las series observadas o puede enfocarse como un problema de regresión cuando los determinantes del proceso de crecimiento son conocidos y observables.

No obstante, el supuesto de que el componente cíclico es estacionario combinado con la observación de que las autocorrelaciones en primeras diferencias del output son positivas en el retardo uno y cero en otro caso, son suficientes para suponer que la variación en los cambios en el output está dominado por cambios en el componente tendencial $\bar{y}_t$ y no tanto en el componente cíclico c_t.

$$(1-L)y_t = \theta(L)u_t + (1-L)\psi(L)\varepsilon_t$$

La presencia de la autocorrelación sólo en $(1-L)y_t$ implica que $\theta(L)$ es de primer orden y $\psi(L)$ es de orden cero con lo que la expresión anterior puede escribirse como:

$$\Delta y_t = (1-L)y_t = u_t + \theta u_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

donde $|\theta| < 1$ para asegurar la invertibilidad.

La autocovarianza del cambio en el output en el retardo uno es:

$$\rho_1 = \frac{Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1})}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma_u^2 - (1-\theta)\sigma_{u\varepsilon} - \sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta^2)\sigma_u^2 + 2\sigma_\varepsilon^2} \qquad ((6.15))$$

Debido a que la autocorrelación $\gamma(1)$ encontrada en los datos es positiva, discutiremos el denominador, $Cov(\Delta y_t, \Delta y_{t-1}) > 0$, ya que $\gamma(0)$ es siempre positivo.

El único término desconocido en (6.15) es $\sigma_{u\varepsilon}$.

Supongamos en primer lugar que $\sigma_{u\varepsilon} \geq 0$, lo cual implica que $\theta > 0$, esto es el componente tendencial debe estar positivamente correlacionado.

Además, dado que $|\theta| < 1$, entonces:

$$\sigma_u^2 > (\theta^{-1} - 1)\sigma_{u\varepsilon} + \sigma_\varepsilon^2 > \sigma_\varepsilon^2$$

En segundo lugar si $\sigma_{u\varepsilon} < 0$, y sabiendo $\sigma_u^2\sigma_\varepsilon^2 \geq |\sigma_{u\varepsilon}|$, dado que el coeficiente de correlación de Pearson es inferior a la unidad en valor absoluto, tenemos que:

$$\theta\sigma_u^2 + (1-\theta)\sigma_u\sigma_\varepsilon - \sigma_\varepsilon^2 \geq \theta\sigma_u^2 - (1-\theta)\sigma_u\sigma_\varepsilon - \sigma_\varepsilon^2 \geq \theta\sigma_u^2 - (1-\theta)\sigma_{u\varepsilon} - \sigma_\varepsilon^2 > 0$$

$$\theta\sigma_u(\sigma_u - \sigma_\varepsilon) + \sigma_\varepsilon(\sigma_u - \sigma_\varepsilon) = (\sigma_u - \sigma_\varepsilon)(\theta\sigma_u + \sigma_\varepsilon) > 0$$

Si ambos miembros son positivos, entonces $\sigma_u > \sigma_\varepsilon$ y $\theta > -\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_u}$. En caso contrario, tendríamos la contradicción $\sigma_\varepsilon > -\theta^{-1}\sigma_u > \sigma_u$.

En suma, la desviación típica de la innovación al componente de tendencia es mayor que la desviación típica de la innovación en el componente cíclico.

Dadas las autocorrelaciones empíricas, podemos estimar la relación entre las desviaciones típicas de las dos innovaciones y para determinados valores de θ suponiendo que $\sigma_{u\varepsilon} = 0$.

$$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-(1+2\rho_1)}{(1+\theta^2)\rho_1 - \theta} > 0 : \rho_1 < \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

En la siguiente tabla, (Nelson y Plosser, pag 157) resumimos los posibles valores para el ratio de desviaciones típicas de las innovaciones para distintos valores de ρ_1 y de θ.

Tabla 6.1					
ρ_1			$\frac{\sigma_u}{\sigma_\varepsilon}$		
			0.5	0.6	0.8
0.1			1.8	1.6	1.4
0.3			3.6	2.9	2.3

Dichos valores sugieren que la desviación estándar de las innovaciones en el componente no estacionario puede ser varias veces mayor que la desviación estandar de las innovaciones en el componente cíclico.

En suma, el análisis del modelo de componentes no observables para el output ha conducido a que si éste es la suma de un componente no estacionario del tipo DS y de un componente estacionario y si además observamos autocorrelación no negativa en el retardo de primer orden de la primera diferencia del output entonces la varianza de las innovaciones en el componente no estacionario debe ser al menos tan grande o mayor que la varianza del componente transitorio o estacionario.

Este resultado tiene importantes implicaciones para la investigación teórica de los ciclos económicos; inferir que las innovaciones en el componente permanente tienen una varianza mayor que las innovaciones en el componente transitorio implica que las perturbaciones reales son probablemente un origen más importante de las fluctuaciones cíclicas del output que las perturbaciones de naturaleza monetaria.

6.4. Midiendo la persistencia.

Cochrane (1988) examina las propiedades a largo plazo del PNB norteamericano y concluye que la serie revierte hacia la tendencia cuando se ha desviado de la misma debido a cualquier shock. Las propiedades a corto plazo del PNB son consistentes con un modelo en el que los shocks son muy persistentes y ésto podría conducir a realizar la inferencia equivocada de suponer que esta persistencia a corto plazo se mantiene a largo plazo.

Como hemos señalado con anterioridad los dos modelos de serie temporal más comúnmente utilizados utilizados en la modelización del PNB son los procesos TS y DS. En el primero, cualquier perturbación tiene un efecto transitorio sobre la serie y por tanto no tiene efecto sobre la predicción del nivel de la serie en el futuro, mientras que en el segundo cualquier perturbación afecta de forma permanente a la serie.

De forma algo diferente a lo expuesto anteriormente, el proceso TS sencillo también puede modelizarse como:

$$x_t - \bar{x}_t = \phi(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1}) + \varepsilon_t : 0 < \phi < 1 \qquad ((6.16))$$

donde $\bar{x}_t$ es la tendencia que asumiremos es lineal, $\bar{x}_t = \alpha + \gamma t$. La ecuación (6.16) tiene la siguiente interpretación: si la serie sigue un proceso TS la desviación de la serie con respecto a la tendencia en t es una proporción de la desviación ocurrida en el periodo anterior $t-1$.

Si además sustituimos la tendencia en la misma, la ecuación nos dice que el modelo de serie temporal estimado sería en general un $AR(1)$ en este caso, o en general un $ARMA(1,q)$.

$$x_t = \alpha + \gamma t + \phi x_{t-1} - \phi(\alpha + \gamma(t-1)) + \varepsilon_t$$

$$x_t = \alpha(1-\phi) + \phi\gamma + \gamma(1-\phi)t + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si definimos la desviación de la tendencia como

$$\hat{x}_t = x_t - \bar{x}_t$$

la ecuación anterior queda como:

$$\hat{x}_t = \phi \hat{x}_{t-1} + \varepsilon_t$$

cuya solución viene dada por[60]:

$$\hat{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

y la serie de multiplicadores dinámicos que nos permiten representar las funciones impulso respuesta ante una perturbación viene dada por:

$$\frac{\partial \hat{x}_{t+i}}{\partial \varepsilon_t} = \phi^i$$

cuyo límite tiende a cero conforme i tiende a infinito. En suma, la desviación con respecto a la tendencia se hace cero y por tanto la serie convergería a dicha tendencia. A largo plazo, la predicción que haríamos sería

$$E_t \hat{x}_{t+i} = 0 \Rightarrow E_t x_{t+i} = \alpha + \gamma(t+i)$$

Por contra, si el parámetro ϕ es igual a 1 tendríamos el proceso estocástico del paseo aleatorio con deriva ("random walk con drift") en el que cualquier perturbación afecta a la serie de forma permanente, con lo que es la propia tendencia la que cambia y no existe tal convergencia,es decir, los valores futuros de la serie no revierten a ninguna tendencia.

$$x_t - (\alpha + \gamma t) = x_{t-1} - (\alpha + \gamma(t-1)) + \varepsilon_t$$

$$x_t - x_{t-1} = \gamma + \varepsilon_t$$

[60]Nótese que el componente cíclico se modeliza en general como $c_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i}$. En esta modelización concreta la aparición del término autorregresivo da lugar a que los valores concretos del proceso de media móvil del componente cíclico vengan dados por ϕ^i. esto es:

$$\phi_0 = 1 : \phi_1 = \phi : \phi_2 = \phi^2 : \phi_i = \phi^i$$

y ahora los multiplicadores dinámicos son:

$$\frac{\partial \hat{x}_{t+i}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

y la predicción a largo plazo que resultaría si éste fuese el proceso estocástico que sigue el PNB vendría dada por:

$$E_t x_{t+i} = x_t + \gamma i$$

con lo que si suponemos que el shock se produce en t, $\varepsilon_t = 1$, entonces x_t aumenta en 1 y la predicción aumenta en 1 para todo el futuro.

Por tanto, dada la distinción extrema en la predicción a largo plazo entre los dos procesos podemos preguntarnos en primer lugar cuánto de la predicción a largo plazo responde a un shock unitario, esto es, si un shock unitario afecta a largo plazo en una unidad entonces el PNB seguiría un paseo aleatorio mientras que si es cero entonces estaríamos en presencia de un proceso estacionario.

En segundo lugar podemos modelizar una serie como una combinación de una serie estacionaria y un paseo aleatorio. El paseo aleatorio incluiría la parte permanente del cambio en la serie y la parte estacionaria conllevaría la parte temporal del cambio. Si la serie presenta tanto cambios permanentes como transitorios podemos preguntarnos sobre la importancia relativa del componente permanente en el comportamiento de la serie o dicho de otra forma cuál es la importancia cuantitativa de la varianza de los shocks al paseo aleatorio comparado con la varianza de las tasas de crecimiento del PNB.

De esta forma, si la varianza de los shocks al componente de paseo aleatorio es cero, la serie seguiría un proceso TS mientras que si dicha varianza es igual a la varianza de la primera diferencia de la serie, entonces la serie sería un paseo aleatorio.

Por tanto, el "tamaño" del paseo aleatorio en el PNB podría ayudarnos a discernir entre distintas teorías del ciclo económico. Si dicho "tamaño" es pequeño entonces la serie estadísticamente viene explicada por una tendencia determinista más un componenente cíclico que fluctúa alrededor de ella; si por contra es grande las perturbaciones tienen una duración larga (infinita asintóticamente) y daría respaldo a los modelos de Ciclo Real, donde las fluctuaciones del PIB vienen explicadas por shocks tecnológicos.

La técnica que utiliza Cochrane para medir el tamaño del componente de paseo aleatorio en el PNB es estimar la varianza de la diferencia de sus logaritmos. La intuición que hay detrás de esta medida procede del siguiente argumento.

Si x_t sigue un paseo aleatorio, entonces la varianza de su diferencia k-ésima crece linealmente con dicho retardo k, esto es:

$$x_t - x_{t-1} = \gamma + \varepsilon_t \Rightarrow Var(x_t - x_{t-1}) = \sigma^2$$

$$x_t - x_{t-2} = 2\gamma + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} \Rightarrow Var(x_t - x_{t-2}) = 2\sigma^2$$

y en general

$$x_t - x_{t-k} = k\gamma + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{t-j} \Rightarrow Var(x_t - x_{t-k}) = k\sigma^2$$

Al contrario, si el logaritmo del PNB es estacionario alrededor de una tendencia, la varianza de su k-ésima diferencia tiende a una constante que es el doble de la varianza incondicionada de la serie.

$$x_t = \alpha + \gamma t + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$$

$$x_{t-k} = \alpha + \gamma(t-k) + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j-k}$$

$$x_t - x_{t-k} = \gamma k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j-k}$$

$$Var(x_t - x_{t-k}) \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \sigma^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \sigma^2 = 2\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \rightarrow 2Var(x_t)$$

dado que la varianza asintótica de la serie

$$Var(x_t) \to \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2$$

El análisis de Cochrane consiste en considerar $\frac{1}{k}Var(x_t - x_{t-k})$ como una medida o estimación del componente de paseo aleatorio en el PNB. De esta forma estima $\frac{1}{k}Var(x_t - x_{t-k})$ para el logaritmo del PIB per cápita americano y para el periodo 1869-1986 y la representa en función de k.Si x_t es un paseo aleatorio, dicha medida oscilaría de forma estacionaría alrededor de σ^2 mientras que si x_t sigue un proceso de tendencia estacionaria, la varianza declinaría hacia cero.

Si las fluctuaciones son parcialmente permanentes y parcialmente temporales, podemos modelizar la serie de PNB como una combinación de un paseo aleatorio y una parte estacionaria.

Los resultados que obtiene Cochrane es que conforme aumenta k, $\frac{1}{k}Var(x_t - x_{t-k})$ va disminuyendo de forma monótona de tal forma que que la varianza de la innovación del componente del paseo aleatorio es 1/3 de la varianza de los cambios año a año, por tanto las tasas de crecimiento presentan un componente transitorio importante.

Una forma alternativa y complementaria de la anterior puede plantearse de la siguiente manera. Si asumimos que el logaritmo del PNB sigue un proceso lineal estacionario en primeras diferencias, (integrada de orden 1 o que presenta una raíz unitaria) y las tasas de crecimiento son por tanto estacionarias, entonces puede representarse de la siguiente forma.

$$\Delta x_t = (1-L)x_t = \gamma + \lambda(L)\varepsilon_t = \gamma + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \varepsilon_{t-j} \qquad ((6.17))$$

Cualquier proceso estacionario en primeras diferencias puede ser representado como la suma de un proceso estacionario más un paseo aleatorio. Una descomposición entre un componente transitorio y otro permanente de amplia utilización en Macroeconomía es la propuesta por Beveridge y Nelson (1981). De esta forma, descomponiendo una serie en sus componentes cíclico y tendencial es posible relacionar la varianza del componente permanente en función de la varianza de la perturbación, ε_t.Cochrane demuestra que no sólo esta descomposición permite derivar el siguiente resultado: la varianza de la innovación al componente permanente de la serie viene dada por:

$$\sigma^2_{\Delta z} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \right)^2 \sigma^2_{\varepsilon}$$

Por otra parte, la varianza de la serie en primeras diferencias viene dada por:

$$\sigma^2_{\Delta x} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 \right) \sigma^2_{\varepsilon}$$

Si definimos el ratio de varianzas:

$$r = \frac{\sigma^2_{\Delta z}}{\sigma^2_{\Delta x}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \right)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 \right)^{-1}$$

entonces $\{x_t\}$ es TS si $\lambda(\mathbf{1}) = 0$ y por tanto $r = 0$. Por contra, si $\{x_t\}$ es DS, entonces $r = 1$.

La expresión de la varianza de la k-ésima para el proceso (6.17) viene dada por:

$$v_k = \frac{1}{k} Var(x_t - x_{t-k}) = \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} k^{-1}(k-j)\rho_j \right) \sigma^2_{\Delta x}$$

donde ρ_j es el coeficiente de autocorrelación de $\{\Delta x_t\}$ para el retardo j.

$$\rho_j = \frac{Cov(\Delta x_t \Delta x_{t-k})}{\sigma^2_{\Delta x}}$$

$$\underset{k\to\infty}{lím}\, v_k = \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \right) \sigma^2_{\Delta x}$$

Cochrane estima v_k utilizando la autocorrelación muestral a partir de la estimación de modelos ARMA para comprobar la robustez de la estimación de v_k en muestras pequeñas. Dentro de los modelos ARMA estimados los únicos que son consistentes con v_k decreciente son un proceso AR(2) y un AR(15). El ratio de varianzas para el primero es 0 mientras que para el segundo es 0.18, con lo que si existe un componente de paseo aleatorio en el PNB es numéricamente pequeño.

En suma, el proceso AR(2) o cualquier proceso ARMA estacionario en diferencias con un componente cuantitativamente pequeño para el paseo aleatorio es una buena caracterización del comportamiento del PNB americano.

Por otra parte, Campbell y Mankiw (1987, 1989) modelizan el logaritmo del PNB americano como un proceso estacionario ARMA.

$$\phi(L)\Delta \ln Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

con representación de media móvil.

$$\Delta \ln Y_t = \lambda(L)\varepsilon_t : \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i < \infty$$

La representación del nivel de la serie viene dada por:

$$\ln Y_t = (1 - L)^{-1}\lambda(L)\varepsilon_t$$

$$\ln Y_t = B(L)\varepsilon_t : B_i = \sum_{j=0}^{i} \lambda_j$$

y por tanto, el objetivo es estimar el valor de B_i ya que nos mide la respuesta de $\ln Y_{t+i}$ a una innovación en t y $B(1) = \sum_{i=0}^{p} B_i$ nos da el multiplicador a largo plazo.

Campbell y Mankiw estiman 15 procesos ARMA para la tasa de crecimiento del PIB americano y calculan los impulsos respuestas dados por los B_i encontrando que un 1 % de cambio en la innovación incrementa la predicción del PNB en un 1 % para cualquier horizonte temporal, lo que es sinónimo de evidencia de persistencia en la serie de producción.

En un segundo artículo confirman sus resultados para el siguiente conjunto de países confirmando los resultados anteriores excepto para Reino Unido.

Tabla 6.2		
País	$ARMA(p, q)$	$B(1)$
Canadá	$(1, 0)$	1.15
Francia	$(1, 2)$	1.65
Alemania	$(2, 2)$	1.00
Italia	$(1, 0)$	1.14
Japón	$(1, 2)$	3.67
Reino Unido	$(0, 1)$	0.82
Estados Unidos	$(2, 2)$	1.00

La evidencia del análisis univariante sobre la producción no es concluyente acerca de la la importancia de las perturbaciones permanentes.

6.5. Shocks tecnológicos y modelos VAR.

El análisis univariante de series temporales ha dado paso a la metodología de Vectores Autorregresivos (VAR), la cual se ha convertido en una herramienta básica utilizada con frecuencia para estimar el efecto de distintos tipos de perturbaciones y de esta forma comprobar qué shocks permiten explicar un porcentaje mayor de la variación de las variables implicadas en la modelización del VAR. A partir de las funciones de impulso-respuesta estimadas se intenta responder a la cuestión de qué perturbaciones explican mejor el comportamiento dinámico de las variables endógenas e incluso este hecho se ha utilizado para discriminar entre distintos modelos macroeconómicos.

Dos aportaciones pioneras que aplican esta metodología son Blanchard y Quah, (1989) y Cochrane (1994). En ambos casos, las perturbaciones de demanda son importantes para explicar el comportamiento de la producción a corto plazo aunque es dificil cuantificar con precisión su contribución.

El trabajo empírico de Galí (1999) obtiene un resultado totalmente distinto al que predice el modelo de Ciclo Real al estimar el efecto de los shocks tecnológicos sobre las horas trabajadas: los shocks tecnológicos predicen un descenso en las horas trabajadas.

Mientras que el modelo de Ciclo Real predice una correlación positiva entre horas-salarios y horas-producción, debido a que la perturbación tecnológica desplaza la función de producción hacia arriba y la demanda de trabajo hacia la derecha, por contra, en el modelo New-Keynesian con precios rígidos, el efecto de un shock tecnológico es aumentar la producción y simultáneamente reducir el número de horas trabajadas, debido a que la reducción de los costes marginales que provoca el shock tecnológico afecta a todas las empresas pero sólo un porcentaje de ellas reducirá sus precios; la demanda agregada crecerá menos que proporcionalmente al aumento en la productividad y la demanda de trabajo descenderá, dando lugar a un comportamiento contracíclico entre horas trabajadas y productividad. Bajo estas circunstancias los salarios reales crecerán si existe un efecto riqueza lo suficientemente fuerte que afecte a la oferta de trabajo de tal forma que su desplazamiento domine al efecto sobre la demanda de trabajo.

Por otra parte, Galí demuestra que los shocks de naturaleza monetaria, sí predicen una correlación positiva entre horas y productividad.

Shapiro y Watson (1988) muestran que para EEUU los shocks tecnológicos explican alrededor de un 25 % de las fluctuaciones de la producción, mientras que los shocks de demanda y a la oferta de trabajo comparten por igual el restante 75 %. Sus estimaciones predicen una respuesta negativa en las horas trabajadas ante una perturbación tecnológica.

Otros trabajos que confirman el resultado de Galí son los de Shea (1998), Basu, Fernald y Kimball (1999), Pesavento y Rossi (2003), Francis and Ramey (2004), Francis, Owyang and Theodorou (2003).

Este tipo de evidencia sugiere que el modelo de Ciclo Real con precios flexibles debería ser abandonado en favor de los modelos con precios rígidos y competencia monopolística.

Sin embargo, la utilización de vectores autorregresivos no es unánime al respecto.

Christiano, Eichenbaum y Vigfusson (2003) responden al trabajo de Galí al considerar que sus resultados son sensibles o no son robustos a cambios en los supuestos sobre el número y las propiedades de las variables incluidas en la especificación; más concretamente, si las horas trabajadas no se incluyen en primeras diferencias sino en niveles, el impacto sobre las mismas de una perturbación tecnológica no provoca una contracción en las mismas, sino todo lo contrario.

Los trabajos de Gospodinov, Maynard y Pesavento (2009), Dedola y Neri (2004), Peersman y Straub (2004) o Uhlig (2004) estiman una respuesta positiva en las horas trabajadas ante un shock tecnológico positivo; por tanto no se rechaza el punto de vista de que los shocks tecnológicos tengan un papel sustancial en la explicación de las fluctuaciones cíclicas.

Galí y Rabanal (2004) demuestran que que el grado de acomodación de la política monetaria a las perturbaciones tecnológicas es débil y concluyen que tanto las rigideces de precios y de salarios son cruciales para comprender el efecto de los shocks tecnológicos sobre las horas trabajadas y los salarios.

Francis y Ramey (2005) plantean que si las innovaciones a la tecnología son la única fuente de cambios en la productividad del trabajo, un modelo de Ciclo Real con hábitos en el consumo y costes de ajuste en la inversión predice que las horas trabajadas caen después de un shock tecnológico positivo y que tal caída es tan persistente como la persistencia de la perturbación lo que implica una correlación negativa entre producción y trabajo y por tanto un modelo con flexibilidad de precios también puede generar una respuesta negativa a corto plazo de las horas trabajadas ante un shock tecnológico positivo.

Sobre el papel que juegan las perturbaciones monetarias las respuestas son de diversa índole. Leeper y Zha (1996), Galí (1992) y Uhlig (2005) documentan un papel débil, mientras que Faust (1998) y Canova y Nicoló (2002) ofrecen la evidencia opuesta.

Ireland (2003), en el marco de un modelo New-Keynesian introduce tres tipos de perturbaciones adicionales al shock tecnológico, un shock a las preferencias de las economías domésticas, un segundo que afecta al margen deseado por las empresas y una regla de política monetaria, subrayando que las perturbaciones de carácter monetario explican la inestabilidad de la producción americana antes de 1980 mientras que por contra las perturbaciones de carácter tecnológico tienen un papel modesto, sólo explican menos de la mitad de la variabilidad observada en el crecimiento de la producción.

Kim (1999) reconoce que los shocks de política monetaria tiene efectos significativos en la producción a corto plazo, sin embargo su contribución relativa a las fluctuaciones del output es pequeña. Los resultados no implican necesariamente que la política monetaria no importe, aunque los shocks de política monetaria no son candidatos para explicar las fluctuaciones en la producción.

La razón fundamental de estos resultados contradictorios hay que encontrarlos en los supuestos de identificación del VAR estimado. Por otra parte, Christiano, Eichenbaum y Evans (2005) y Smets y Wouters (2007) subrayan que para mostrar evidencia de la importancia de las perturbaciones monetarias es condición indispensable la presencia de rigideces nominales.

Fisher (2006) distingue entre progreso tecnológico neutral y shocks específicos a la inversión, y encuentra estadísticamente signicativo el descenso en las horas trabajas en respuesta a una innovación positiva en ambos tipos de shocks.

Erceg, Guerrieri y Gust (2004) cuestionan la capacidad de los modelos VAR par medir consistentemente los efectos de una perturbación tecnológica utilizando restricciones a largo plazo. En concreto, muestran como el VAR no puede estimar con precisión el efecto de los shocks tecnológicos sobre las horas trabajadas.

En este sentido Chari, Kehoe y McGrattan (2004) presentan un resultado similar al estimar un DSVAR con las series artificialmente generadas por un modelo de Ciclo Real. Mientras que el modelo predice una respuesta positiva de las horas trabajadas al shock tecnológico, la estimación DSVAR conduce a una respuesta negativa de las horas trabajadas.

Estas aportaciones, a las que podemos sumar la de Cooley y Dwyer (1998) alertan sobre la utilización del VAR como un instrumento independiente en orden a identificar el efecto de los shocks tecnológicos.

Más recientemente, Basu, Fernald y Kimball (2006) y Liu y Phaneuf (2011) subrayan que aunque los estudios empíricos difieren tanto en métodos de estimación, periodos muestrales o estrategias de identificación del VAR, el consenso que emerge en su conjunto sugiere que el efecto de una perturbación tecnológica es una reducción persistente en las horas trabajadas mientras que los salarios reales aumentan modestamente en el momento del impacto y continúan aumentando hasta alcanzar un nuevo nivel más alto de estado estacionario.

Aportaciones más recientes señalan que los shocks tecnológicos son importantes para explicar los ciclos económicos. Smets y Wouters (2007) estiman que las perturbaciones tecnológicas explican más del 30 % del error de la varianza del error de predicción para la producción. Ireland (2011) sugiere que contribuyen en un 60 % a las fluctuaciones del output. Galí, Smets y Wouters (2011) establecen que los shocks de productividad contribuyen entre el 46 y el 59 % de la descomposición de varianza del output y entre el 32 y el 40 % de la descomposición de la varianza de los salarios reales.

En este sentido, Woodford (2009, pag 272) se hace eco de estos resultados, al avanzar:

> "it is now widely accepted that real disturbances are an important source of economic fluctuations. The hypothesis that business fluctuations can be largely attributed to exogenous random variations in monetary policy has few if any remaining adherents".

6.6. Horas trabajadas y shocks tecnológicos.

Seguidamente presentamos tres modelizaciones que tratan la cuestión de la respuesta de las horas de trabajo ante una perturbación tecnológica.

6.6.1. Un modelo con precios rígidos (Galí, 1999).

Una de los principales puntos débiles del modelo de Ciclo Real estriba en que predice una alta correlación entre las horas trabajadas y la productividad del trabajo. El origen de dicha correlación se encuentra en el mecanismo que subyace a la generación de ciclos en este modelo, esto es, refleja el cambio en la demanda de trabajo debido a las perturbaciones tecnológicas, junto a una curva de oferta de trabajo con pendiente positiva. Como sabemos esta predicción contrasta con la correlación entre salarios y horas trabajadas que encontramos en los datos, lo que ha conducido a que se busquen otro tipo de perturbaciones que actúen de tal forma que desplacen la curva de oferta de trabajo hacia la derecha y pueda mejorar la predicción del modelo.

Otra alternativa es modificar el modelo e introducir otros elementos que puedan explicar este hecho. Galí (1999) propone un modelo con competencia monopolística y precios rígidos con esfuerzo laboral variable que puede explicar la correlación anteriormente citada en el que introduce dos tipos de perturbaciones, un shock monetario y otro tecnológico.

Las economías domésticas maximizan:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t + a \ln \frac{M_t}{P_t} - G(N_t, e_t) \right]$$

donde $G(N_t, e_t)$ mide la desutilidad del trabajo y depende las horas trabajadas y del nivel de esfuerzo.

La restricción presupuestaria a la que se enfrentan es:

$$\int_0^1 P_{it} C_{it} + M_t = W_t N_t + p_e e_t + M_{t-1}$$

donde C_t es un índice de consumo definido por:

$$C_t = \left(\int_0^1 (C_{it})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

donde C_{it} es la cantidad de bien $i \in [0,1]$ y σ es la elasticidad de sustitución entre bienes.

El nivel agregado de precios viene dado por:

$$P_t = \left(\int_0^1 (P_{it})^{1-\sigma} \, di \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

La función de $G(N_t, e_t)$ es separable en horas trabajadas y esfuerzo.

$$G(N_t, e_t) = \frac{1}{1+\theta} N_t^{1+\theta} + \frac{1}{1+\varphi} e_t^{1+\varphi}$$

Planteando el lagrangiano, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\mathcal{L}(C_t, C_{it}, N_t, e_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln C_t + a \ln \frac{M_t}{P_t} - G(N_t, e_t) \right) +$$

$$\beta^t \lambda_t \left(- \int_0^1 P_{it} C_{it} - M_t + W_t N_t + V_t e_t + M_{t-1} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t P_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{it}} = \frac{1}{C_t} \frac{\partial C_t}{\partial C_{it}} - \lambda_t P_{it} = 0$$

$$\frac{1}{C_t} \left(\int_0^1 (C_{it})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \, di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1} - 1} C_{it}^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{P_{it}}{P_t C_t} \Rightarrow C_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} C_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = a \frac{P_t}{M_t} - \lambda_t + \beta \lambda_{t+1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -N_t^{\theta} + \lambda_t W_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = -e_t^{\varphi} + \lambda_t V_t = 0$$

Eliminando el multiplicdor del Lagrange:

$$C_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t \tag{(6.18)}$$

$$a\frac{P_t}{M_t} + \beta E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) = \frac{1}{C_t} \tag{(6.19)}$$

$$N_t^{\theta} C_t = \frac{W_t}{P_t} \tag{(6.20)}$$

$$e_t^{\varphi} C_t = \frac{V_t}{P_t} \tag{(6.21)}$$

Cada una de las j empresas en la economía producen bienes con la siguiente tecnología:

$$Y_{jt} = Z_t L_{jt}^{\alpha}$$

donde L_{jt} es la cantidad de trabajo efectivo utilizado por la empresa, que es función de las horas trabajadas y del esfuerzo a través de una función multiplicativa y con rendimientos constantes.

$$L_{jt} = N_{jt}^{\delta} e_{jt}^{1-\delta}$$

y Z_t es la perturbación tecnológica que sigue el proceso

$$Z_t = Z_{t-1}\exp(\varepsilon_t)$$

La condición de minimización de costes implica que las empresas resuelven el siguiente problema:

$$Min \;\; W_t N_t + V_t e_t$$

sujeto a la condición de alcanzar un determinado nivel de eficiencia.

$$L_{jt} = N_{jt}^{\delta} e_{jt}^{1-\delta}$$

La resolución del problema nos da el siguiente resultado.

$$\frac{e_{jt}}{N_{jt}} = \frac{1-\delta}{\delta}\frac{W_t}{V_t} \tag{(6.22)}$$

Por tanto, el coste total para cada empresa puede expresarse como:

$$CT_j = \frac{1}{\delta} W_t N_{jt}$$

La demanda de cada uno de los bienes producidos por cada empresa viene dada por:

$$Y_{jt} = \left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t$$

Asumimos que al final del periodo $t-1$, antes de observar las realizaciones de las variables exógenas, oferta monetaria y perturbación tecnológica, las empresas fijan el precio al que desean vender, sujetas a la restricción de la curva de demanda.

$$Max \quad E_{t-1}\left[\frac{1}{C_t}\left(P_{jt}\left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\sigma} C_t - \frac{W_t N_{jt}}{\delta}\right)\right]$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$E_{t-1}\left[\frac{1}{C_t}\left((1-\sigma)P_{jt}^{-\sigma}P_t^{\sigma}C_t - \frac{1}{\delta}W_t\frac{\partial N_{jt}}{\partial Y_{jt}}\frac{\partial Y_{jt}}{\partial P_{jt}}\right)\right] = 0$$

$$E_{t-1}\frac{1}{C_t}\left(\alpha\delta P_{jt}Y_{jt} - \frac{\sigma}{\sigma-1}W_t N_{jt}\right) = 0 \qquad ((6.23))$$

La cantidad de dinero viene dada por la expresión siguiente:

$$M_t = M_{t-1}\exp\left\{\xi_t + \gamma\varepsilon_t\right\}$$

y para $\gamma \neq 0$ la autoridad monetaria responde sistemáticamente a los shocks tecnológicos, ε_t.

El equilibrio simétrico supone que todas las empresas fijan el mismo precio y producen lo mismo.

A partir de la condición (6.19) obtenemos la relación de demanda agregada; dicha ecuación es una ecuación en diferencias lineal para $\frac{1}{C_t P_t}$ que tiene por solución:

$$C_t = \frac{1}{a\left[1-\beta\exp\left\{1/2(\sigma_m^2+\gamma^2\sigma_z^2\right\}\right]}\frac{M_t}{P_t} \qquad ((6.24))$$

A partir de (6.20), (6.21) y (6.23) y expresadas en logaritmos:

$$\theta \ln N_t + \ln C_t = \ln W_t - \ln P_t$$

$$\varphi \ln e_t + \ln C_t = \ln V_t - \ln P_t$$

$$\ln e_t - \ln N_t = \ln \frac{1-\delta}{\delta} + \ln W_t - \ln V_t$$

obtenemos

$$(1+\theta) \ln N_t = (1+\varphi) \ln e_t - \ln \frac{1-\delta}{\delta}$$

que sustituida en la función de producción nos da la relación entre producción y horas trabajadas.

$$\ln Y_t = \ln Z_t + \alpha \ln L_t = \ln Z_t + \alpha \left(\delta \ln N_t + (1-\delta) \ln e_t\right)$$

$$\ln Y_t = \ln Z_t + \alpha\delta \ln N_t + \alpha(1-\delta) \left[\frac{1+\theta}{1+\varphi} \ln N_t + \ln \frac{1-\delta}{\delta}\right]$$

$$\ln Y_t = \ln Z_t + \lambda \ln N_t : \lambda = \alpha\delta + \alpha(1-\delta)\frac{1+\theta}{1+\varphi} > 1 \qquad ((6.25))$$

Expresando las variables en logaritmos en minúscula y resolviendo el sistema (6.23), (6.24) y (6.25) en función de las perturbaciones queda como:

$$\Delta p_t = \xi_{t-1} - (1-\gamma)\varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta y_t = \Delta\xi_t + \gamma\varepsilon_t + (1-\gamma)\varepsilon_{t-1}$$

$$n_t = \frac{1}{\lambda}\xi_t - \frac{1-\gamma}{\lambda}\varepsilon_t$$

$$\Delta(y_t - n_t) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \Delta\xi_t + \left(\frac{1-\gamma}{\lambda} + \gamma\right) \varepsilon_t + (1-\gamma)(1 - \frac{1}{\lambda})\varepsilon_{t-1}$$

Una perturbación monetaria ξ_t tiene un impacto transitorio en la producción, el empleo y la productividad y un efecto permanente sobre el nivel de precios. La respuesta de la productividad del trabajo depende de λ. Para $\lambda > 1$ tendríamos rendimientos crecientes a corto plazo en el trabajo que son mayores cuanto menor sea δ, esto es, que las horas extraordinarias o esfuerzo laboral sean lo suficientemente productivas o bien que $\theta > \varphi$, esto es, que la elasticidad de la desutilidad de las horas trabajadas sea mayor que la del esfuerzo o bien que la elasticidad de la producción con respecto al trabajo efectivo sea lo suficientemente alta.

Una perturbación tecnológica tiene un efecto permanente positivo sobre la producción y un efecto negativo sobre el nivel de precios si el grado de acomodación de la política monetaria ante la perturbación no es demasiado fuerte, $(\gamma < 1)$. Si éste es el caso, el shock tecnológico positivo tendrá un efecto negativo a corto plazo sobre el nivel de empleo. En el caso que γ fuese igual a cero, la combinación de una oferta monetaria constante y precios predeterminados implicarían que los saldos reales y por tanto la demanda agregada permanecerían constantes lo que provocaría que el nivel de producción de las empresas tampoco cambiase, por tanto el aumento de productividad de los factores explicaría una caída en el nivel de horas trabajadas, dando lugar a un aumento en la productividad del trabajo.

Al siguiente periodo, dado que los costes marginales son más bajos, las empresas ajustarían sus precios a la baja, la demanda agregada y la producción aumentarían y el nivel de empleo volvería a su nivel original.

El cambio en la productividad del trabajo depende también del parámetro λ y el efecto del shock tecnológico es positivo para $\gamma \in [0, 1)$.

Finalmente, el cálculo de las covarianzas de entre las variables nos permiten explicar los co-movimientos entre las variables del sistema cuando tenemos en cuenta ambas perturbaciones:

$$Cov(\Delta y_t, \Delta(y_t - n_t)) = \frac{2\,(\lambda - 1)\,\sigma_m^2 + (\gamma + \lambda - 1)\,\sigma_z^2}{\lambda}$$

$$Cov(\Delta y_t, \Delta n_t) = \frac{2\sigma_m^2 + (1-\gamma)(1-2\gamma)\sigma_z^2}{\lambda}$$

$$Cov(\Delta n_t, \Delta(y_t - n_t)) = \frac{2(\lambda - 1)\sigma_m^2 - (1-\gamma)\left[(2-\lambda) + 2\gamma(\lambda - 1)\right]\sigma_z^2}{\lambda^2}$$

Si $0 \leq \gamma < 1/2$ y los shocks monetarios son lo sufiencientemente importantes en relación a los tecnológicos, el modelo predice que el crecimiento de las horas trabajadas tendrá un comportamiento procíclico. Es suficiente además que $\lambda > 1$ para que la productividad sea procíclica independientemente de la importancia relativa de los shocks.

El signo de la covarianza entre crecimiento en horas trabajadas y crecimiento de la productividad depende de λ,de γ y de la importancia relativa de las perturbaciones.

Si consideramos el efecto de la perturbación tecnológica por separado la correlación entre ambas será negativa si $\gamma \in [0, 1)$ y $\lambda \in (1, 2)$.

Si los parámetros están dentro de esos límites, el comportamiento cíclico entre producción, horas y productividad son consistentes con la evidencia empírica siempre que tengamos en cuenta ambos tipos de perturbaciones.

Si sólo consideramos el efecto de las perturbaciones tecnológicas el modelo con precios rígidos predice una correlación negativa entre horas y crecimiento de la productividad.

6.6.2. Un modelo sencillo de Ciclo Real con formación de hábitos en el consumo.

La formación de hábitos supone que el consumo responde de manera débil al shock de oferta, dando lugar a que no se produzca la sustitución de horas de ocio por horas de trabajo ante la subida en el salario real. Si añadimos costes de ajuste en la inversión se amplificaría la respuesta positiva del ocio y por tanto el shock de oferta no conseguiría que los individuos respondiesen óptimamente aumentando sus tiempo de trabajo.

El shock tecnológico puede reducir las horas trabajadas si el efecto renta domina al efecto sustitución. Es decir, el modelo de Ciclo Real asume que el aumento en el salario real provoca un efecto sustitución que reduce el número de horas de ocio y aumenta la oferta de trabajo y un efecto renta que se traduce en un aumento en el consumo y una disminución en la utilidad marginal de éste. La cuestión es ver bajo qué condiciones ocurre lo contrario, de tal forma que la respuesta óptima del individuo consista en aumentar su demanda de ocio y reducir su oferta de trabajo. La existencia de hábitos en el consumo puede provocar que el aumento en el salario no se traduzca en un aumento en el nivel de horas de trabajo ofrecido por el individuo.

La idea básica reside en los efectos renta y sustitución derivados de un aumento en el salario.

Con una función de utilidad dada por:

$$u(C_t, N_t) = u(C_t) - V(N_t)$$

la condición de primer orden es:

$$V'(N_t) = u'(C_t)W_t$$

Diferenciando:

$$V''(N_t)dN_t = u''(C_t)W_t dC_t + u'(C_t)dW_t \qquad ((6.26))$$

El segundo sumando de (6.26) es positivo y $V''(N_t) > 0$. El shock de productividad disminuirá las horas trabajadas si la reducción en la utilidad marginal del consumo es mayor que el aumento en el salario; en este caso el efecto renta domina al efecto sustitución y salario y horas trabajadas estarían negativamente correlacionados.

El modelo que planteamos es una simplificación del estudiado por Francis y Ramey (2005) que muestran como un el modelo de Ciclo Real puede predecir una reducción en las horas trabajadas ante un shock tecnológico positivo:

Consideremos un agente representativo que maximiza la siguiente función de preferencias:

$$E_0 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t (\ln C_t - bC_{t-1}) - V(N_t)$$

donde el parámetro b mide la importancia de la formación de hábitos.

La función de producción viene dada por:

$$Y_t = C_t = Z_t N_t$$

y el proceso del shock tecnológico está especificado como:

$$Z_t = Z_{t-1} \exp\{\varepsilon_t\}$$

La oferta de trabajo, derivada a partir de las condiciones de primer orden viene dada por:

$$V'(N_t)(C_t - bC_{t-1}) = W_t$$

Mientras que la demanda de trabajo es:

$$Z_t = W_t$$

Por tanto, en equilibrio:

$$V'(N_t)(N_t - bN_{t-1} \exp\{-\varepsilon_t\}) = 1$$

Esta ecuación nos da una única solución para las horas trabajadas, y en el caso de que b fuese igual a 0, un shock tecnológico no tendría efectos sobre N_t dada la función de utilidad utilizada, ya que efecto renta y sustitución se cancelarían. Con formación de hábitos, un shock tecnológico conduce a una reducción en las horas trabajadas, por tanto un modelo de Ciclo Real sería también capaz de generar un efecto contractivo en dicha variable.

6.6.3. Un modelo New-Keynesian.

En este apartado consideramos de nuevo un modelo New-Keynesian sencillo en el que la oferta monetaria, al igual que en el modelo de Galí (1999) puede responder a las perturbaciones tecnológicas y estudiamos el ajuste de horas y salarios ante una perturbación tecnológica.

El modelo lo compone la NKPC:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t$$

donde $\kappa = \frac{(1-\gamma\beta)(1-\gamma)}{\gamma}(1+\varphi)$ y por tanto depende positivamente de la inversa de la elasticidad de la oferta de trabajo (φ), de tal forma que una elasticidad pequeña en la oferta de trabajo implica valor alto de κ y por tanto el coste marginal responde en mayor medida a los cambios en la demanda agregada dando lugar a que la rigidez de precios nominal sea menor.

La demanda agregada viene dada por la log-linealización de la condición de primer orden, ecuación (6.19).

$$p_t + y_t = (1-\beta)m_t + \beta E_t(p_{t+1} + y_{t+1})$$

Resolviendo hacia delante para $p_t + y_t$ obtenemos:

$$p_t + y_t = (1-\beta)\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i E_t m_{t+i}$$

Si el proceso que sigue la oferta monetaria es:

$$m_t = m_{t-1} + \gamma z_t \Rightarrow E_t m_{t+i} = m_t$$

donde z_t es la perturbación tecnológica y γ nos mide el grado de acomodación de la política monetaria a dicho shock tecnológico.

La demanda agregada viene entonces dada por:

$$p_t + y_t = m_t$$

Expresando la NKPC en logaritmos del nivel de precios, las dos ecuaciones nos permiten obtener la solución para el nivel de precios.

$$p_t - p_{t-1} = \beta E_t(p_{t+1} - p_t) + \kappa(y_t - y_t^n)$$

teniendo en cuenta que y_t^n depende positivamente de la perturbación tecnológica y aquí supondremos por sencillez que $y_t^n = z_t$

La ecuación dinámica a resolver viene dada por:

$$p_t = \frac{1}{1+\kappa}p_{t-1} + \frac{\beta}{1+\kappa}E_t p_{t+1} + \frac{\kappa}{1+\kappa}(m_t - z_t)$$

La solución viene dada por:

$$p_t = \lambda_1 p_{t-1} + (1-\lambda_1)(\gamma-1)z_t$$

donde $0 < \lambda_1 < 1$ es la raíz estable del polinomio $\beta\lambda^2 - (1+\beta+\kappa)\lambda + 1 = 0$.

Por tanto, el nivel de precios cae ante el shock tecnológico si $\gamma < 1$.

La solución para la producción es:

$$y_t = m_t - p_t$$

$$(1-\lambda_1)y_t = \theta(1-\lambda_1 L)z_t - (1-\lambda_1)(\gamma-1)z_t$$

La relación entre el empleo y la producción la obtenemos a partir de considerar una función de producción como:

$$y_t = n_t - z_t$$

y por tanto:

$$n_t = \lambda_1 p_{t-1} + \lambda_1(\gamma-1)z_t$$

Un shock tecnológico positivo conduce a una caída en el empleo si $\gamma < 1$.

A partir de las condiciones de primer orden para las empresas y economías domésticas, obtenemos el salario real, que en el momento del impacto del shock tecnológico tiene la siguiente expresión:

$$w(0) = 1 - \lambda_1(1+\varphi)(1-\gamma)$$

El salario real cae en el impacto ante un shock tecnológico positivo si la acomodación de la política monetaria al mismo es baja, $\gamma < 1$, la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo es baja o el parámetro de persistencia λ_1 que depende de la rigidez de precios es alto.

En este caso, la reducción en la demanda de trabajo ante la perturbación tecnológica presiona al salario a la baja, pero dado que la producción y el consumo aumentan, el efecto renta sobre la oferta de trabajo tienen a cancelar la caída en el salario real con lo que el efecto neto sería ambigüo. Este efecto sobre el salario real depende por tanto de lo cuantitativamente importante que sea el efecto renta, que a su vez depende negativamente del grado de rigidez de precios y positivamente del grado de acomodación de la política monetaria al shock tecnológico, en relación al efecto sustitución que depende positivamente del coeficiente φ de la oferta de trabajo.

6.7. Críticas al modelo de Ciclo Real.

Desde la publicación del trabajo de Kydland y Prescott (1982) las reacciones en contra del supuesto de que los shocks tecnológicos eran los causantes de las fluctuaciones cíclicas no se hicieron esperar.

En 1986, Quarterly Review edita un número monográfico sobre el debate Prescott-Summers en el que éste presenta dos críticas fundamentales al artículo Theory Ahead of Business Cycle Measurement. Summers interpreta que el propio título del artículo de Prescott da a entender que las técnicas de medida no han progresado hasta tal punto que puedan corroborar la teoría, esto es, si el modelo no predice bien la correlación entre productividad y horas parece que no es problema del modelo sino problemas de medición de los datos.

La conclusión de Summers (1986, cit pag 24) es clara:

"My view is that real business cycle of the type....have nothing to do with the business cycle phenomena observed in the United States or other capitalist economies"

En primer lugar alude a la parametrización del modelo en el sentido de si los parámetros escogidos son los correctos subrayando que la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo estimada en estudios microeconómicos es baja en relación a la que necesita el modelo para provocar una sustitución considerable entre ocio y trabajo.

En segundo lugar, Summers cuestiona la ausencia de evidencia independiente para probar lo que denominamos shocks tecnológicos; es difícil encontrar evidencia directa de la existencia de perturbaciones de cuantía considerable que sean capaces de generar la senda cíclica observada en las series. En palabras de King y Rebelo (1999, pag 34):

"If these shocks are large and important why can't read about them in the Wall Street Journal"

En dos artículos publicados en 1989 en el Journal of Economic Perspectives, Plosser por una parte y Mankiw por otra expresan sus distintos puntos de vista sobre el modelo de Ciclo Real. Mankiw sostiene que el modelo de Ciclo Real no genera una explicación plausible de las fluctuaciones económicas debido a cuatro cuestiones fundamentalmente:

1. A la alta dependencia de los resultados que se obtienen a partir de perturbaciones tecnológicas que tienen que ser de considerable magnitud y estar muy correlacionadas en el tiempo.

2. Otros tipos de perturbaciones son incapaces de generar fluctuaciones cíclicas cuando se introducen en un modelo de Ciclo Real. Por ejemplo, un aumento del gasto público en el modelo predice una caída del consumo y del ocio. El modelo debería poder explicar porqué en una recesión provocada por una caída en la demanda es racional para los individuos aumentar la demanda de ocio al mismo tiempo que aumenta su demanda de consumo; por tanto, la introducción de perturbaciones de demanda en el modelo no genera resultados plausibles.

3. El modelo de Ciclo Real asume que las fluctuaciones en el empleo son totalmente voluntarias, mientras que observamos que el empleo varía considerablemente mientras los determinantes de la oferta de trabajo, salario real y tipo de interés, no varían sustancialmente. Para replicar este hecho el modelo requiere que los individuos estén dispuestos a reasignar significativamente su tiempo entre ocio y trabajo en respuesta a cambios temporales y pequeños en los salarios o al tipo de interés real.

Esto es, el mecanismo de propagación basado en la sustitución intertemporal de ocio por trabajo no es creíble.

4. Mankiw estima la fuente de las perturbaciones tecnológicas en el modelo, el residuo de Solow, y la imagen que sobresale es que es altamente procíclico con el crecimiento de la producción, esto es, las variaciones en el crecimiento de la producción van acompañadas de crecimiento del residuo de Solow; o dicho de otra forma distinta, si el residuo de Solow es una medida

válida del cambio en la función de producción, entonces las recesiones son periodos de regresión tecnológica.

Por tanto, desde un punto de vista meramente cualitativo pronto se observó las posibles deficiencias que presentaba el modelo.

Análisis cuantitativos más pormenorizados han confirmado que tanto el origen de las perturbaciones tecnológicas, el residuo de Solow, como los parámetros necesarios para replicar en alguna medida los datos son difíciles de sostener.

En este sentido, los datos reflejan que el empleo (o las horas trabajadas) es fuertemente procíclico y con una volatilidad similar a la producción mientras que los salarios reales son en el mejor de los casos débilmente procíclicos. La perturbación tecnológica desplaza la demanda de trabajo en sentido ascendente pero dado que los estudios microeconómicos reflejan una elasticidad del salario real con respecto a las horas trabajadas muy baja, (Altonji, 1986), el shock de productividad afectaría sobre todo al salario real y no tanto al empleo, con lo que la predicción del modelo es una alta correlación entre salarios y producción y relativamente baja entre empleo y producción.

Sólo con una alta elasticidad de sustitución intertemporal en las horas trabajadas es posible generar el comportamiento observado en dichas variables.

La utilización de la función Cobb-Douglas y el hecho de que los salarios son iguales a la productividad marginal del factor trabajo, provoca que ésta sea proporcional a la productividad media de tal manera que la correlación entre salarios y la productividad sea mucho más alta en el modelo que en los datos observados.

$$Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha} \Rightarrow W = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\frac{Y}{N}$$

Resultado de lo anterior es que la productividad del trabajo está fuertementemente correlacionada con la producción mientras los datos en realidad muestran que esta correlación es moderada.

La cuestión de la exogeneidad del residuo de Solow como medida de las perturbaciones tecnológicas se ha visto también cuestionada. El compor-

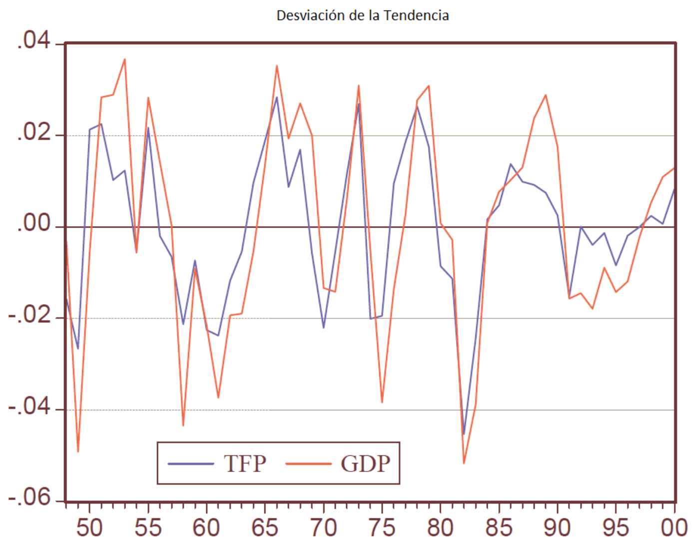

Gráfico 6.3

tamieto procíclico de la productividad total de los factores puede ser reflejo de la existencia de competencia monopolística o bien que esté correlacionado con el gasto militar (Hall, 1988) o que los cambios endógenos en la tecnología sean debidos a shocks de demanda (Evans, 1992). Otra explicación del comportamiento procíclico del residuo de Solow se fundamenta en el hecho de que las empresas no ajustan el nivel de empleo completamente a los cambios en la demanda, el conocido labor hoarding (Burnside, Eichenbaum y Rebelo, 1993) en el que las empresas no cambian automáticamente su nivel de empleo ante cambios en la demanda, sino que a corto plazo demandan de sus trabajadores un aumento en su esfuerzo laboral (horas extraordinarias) lo que provoca un aumento en la producción sin que el número de empleos aumente sustancialmente.

En el gráfico 6.3. se observa el comportamiento altamente procíclico del residuo de Solow.

Basu, Fernald y Kimball (1996) realizan un ejercicio de este tipo, estimando un residuo de Solow "purificado" y concluyen que el número de horas trabajadas responde negativamente a las perturbaciones de productividad.

En este sentido, consideremos el siguiente ejemplo sencillo.

Bajo competencia imperfecta, las empresas fijan los precios con un margen sobre el coste marginal, lo que distorsiona la medida del residuo de Solow.

Este como sabemos, para una función Cobb-Douglas $Y = ZK^{\alpha}N^{1-\alpha}$ viene dado por:

$$SR = \Delta \ln \left(\frac{Y}{K} \right) - (1-\alpha)\Delta \ln \left(\frac{N}{K} \right)$$

Con competencia monopolística y margen μ, las condiciones de primer orden para las empresas son:

$$Z_t \frac{\partial Y}{\partial N} = \mu W : Z_t \frac{\partial Y}{\partial K} = rW$$

Y por tanto en este caso:

$$\Delta \ln Y = (1 - \mu(1-\alpha))\Delta \ln K + \mu(1-\alpha)\Delta \ln N_t + \Delta \ln Z_t$$

Con lo que el residuo de Solow medido vendría dado por:

$$SR = (\mu - 1)(1-\alpha)\Delta \ln \left(\frac{N}{K} \right) + \Delta \ln Z_t$$

El residuo de Solow incluye una parte endógena que fluctúa con el ratio horas/capital. Ya que las horas trabajadas son más procíclicas que el capital, debemos concluir que el residuo de Solow será más procíclico que la verdadera productividad total de los factores.

Un ejercicio similar puede realizarse en el caso de que hubiésemos introducido rendimientos crecientes a escala en la función de producción.

La consecuencia de obtener medidas más precisas del residuo de Solow implica directamente que la varianza del shock de productividad disminuye considerablemente, y como hemos visto la volatilidad que predice el modelo para las variables depende directamente de ésta, con lo que la capacidad para explicar una fracción o porcentaje sustancial de la volatilidad muestral de las series disminuye.

Eichenbaum (1991) subraya desde una posición metodológica resume en cuatro, las deficiencias del modelo:

1. Pequeños cambios en la teoría alteran las conclusiones de forma concluyente.

2. Pequeños cambios en los métodos estadísticos utilizados alteran las conclusiones.

3. Cambios en el periodo muestral utilizado modifican las conclusiones.

4. La confianza en las conclusiones se ve afectada una vez que abandonamos la "conveniente ficción" de que realmente conocemos los verdaderos valores de los parámetros estructurales del modelo.

Eichenbaum (1991) tilda de informal la técnica de calibración ya que no suministra ningún tipo de información sobre qué nos dicen los datos acerca de los parámetros. Un método más sofisticado sería estimar dichos parámetros a través del método generalizado de los momentos que se basa en la utilización de las condiciones de primer orden para estimar dichos parámetros.

La crítica de Eichenbaum (1991) se centra fundamentalmente en que el ratio de varianza del modelo, $Var_m\left(\hat{\Psi}\right)$ con respecto a la varianza de la muestra presenta un elevado grado de incertidumbre debido a que la primera está condicionada a los parámetros calibrados del modelo.

Eichenbaum cita expresamente a Hansen argumentando que el ratio de varianza del modelo en relación a la varianza de los datos no puede considerarse un estimador válido para probar que el modelo de Ciclo Real replica bien las características de las series.

$$\lambda = \frac{Var_m\left(\hat{\Psi}\right)}{\widehat{Var_d}}$$

Esto es, aunque dicho ratio sea alto, nadie ha explicado aún la sensibilidad de dicho ratio a cambios en los parámetros incluidos en $\hat{\Psi}$.

Eichenbaum (1991), en un ejercicio basado en el modelo con labor hoarding de Burnside, Eichenbaum y Rebelo (1990) realiza el siguiente experimento.

El residuo de Solow está relacionado con el esfuerzo laboral (e_t) y con el verdado shock tecnológico a través de la relación:

$$\widehat{SR}_t = \hat{Z}_t + \alpha\hat{e}_t$$

A partir de las condiciones de primer orden, el nivel de esfuerzo viene dado por:

$$\hat{e}_t = \eta_{ek}\hat{K}_t + \eta_{en}\hat{N}_t + \eta_{eZ}\hat{Z}_t + \eta_{eg}\hat{G}_t$$

donde los parámetros son todos positivos. Un aumento del gasto público eleva el nivel de esfuerzo y a su vez eleva el residuo de Solow, esto es, el residuo de Solow aumenta aunque no haya habido shock tecnológico alguno, de tal manera que las estimaciones del shock tecnológico basadas en el cómputo del residuo de Solow interpretan falsamente que el cambio en el esfuerzo se debe a un aumento del shock tecnológico cuando lo que ha ocurrido es que ha sido el gasto público el causante del aumento en el nivel de esfuerzo.

Si el sistema responde a una perturbación tecnológica, el esfuerzo aumenta, provocado a su vez que aumente el residuo de Solow, por lo tanto, la medida de éste exagera la verdadera magnitud del shock tecnológico.

Si rechazamos por tanto el residuo de Solow como medida de los cambios a corto plazo que se producen en la función de producción agregada, entonces ¿ qué otro tipo de perturbación tecnológica de suficiente magnitud puede provocar fluctuaciones cíclicas ? El único shock de oferta perfectamente identificable es un cambio sustancial en el precio de las materias primas, (petróleo) e indudablemente es importante pero cambios de tal magnitud que provoquen sistemáticamente expansiones o recesiones no los observamos con la frecuencia que se suceden los ciclos económicos[61].

Por otra parte, Cogley y Nason (1995) estiman las funciones impulso respuesta y estiman las correlaciones para varios modelos de Ciclo Real. El ejercicio que realizan es determinar si los modelos tienen mecanismos de propagación que induzcan a una alta correlación en la producción por lo menos a dos retardos, llegando a la conclusión que los modelos de Ciclo Real dependen fundamentalmente de la dinámica que siga la perturbación

[61] Hamilton (2005) identifica que 9 de 10 recesiones en EEUU fueron precedidas por subidas en el precio del petróleo.

tecnológica, esto es, el modelo tiene débiles mecanismos endógenos de propagación y no es capaz de generar por tanto el comportamiento observado en las series[62], por lo que la autocorrelación de las series depende fundamentalmente de la autocorrelación estimada del proceso autorregresivo que siga el shock tecnológico.

Por otra parte, Rouwenhorst (1991, pag 242) simula economías con y sin "time to build" concluyendo que las fluctuaciones que genera el modelo tienen mucho más que ver con el proceso exógeno que con la propia dinámica del sistema.

> "the main determinant of these model dynamics is the stochastic process for the shocks that hit the economy. Time-to-build, by itself contains only relatively weak material propagation mechanisms for transferring real shocks in terms of effects on output, labor input and consumption. For persistent deviations in output and investment to occur in the neoclassical model it is required that the time series of shocks that hit the economy behave very much like the flcutuations which the model seeks to explain. This conclusion is robust to allowing for nonseparabilities in preferences....time to build does not seem to be central to the explanation of business cycles"

Con respecto a las prescripciones de política económica, da la sensación que el enfoque clásico trivializa el coste social y de bienestar que producen los ciclos económicos. Si los ciclos económicos son la respuesta óptima de los individuos ante cambios en la productividad total de los factores, las políticas de estabilización son totalmente innecesarias.

Prescott (1986, pag 21) apunta que:

> "The policy implications of this research is that costly efforts at stabilization are likely to be counterproductive. Economic fluctuations are optimal responses to uncertainty in the rate of technology change".

[62] El modelo de Ciclo Real tendría la característica de un modelo WYGIWYPI (What You Get Is What You Put In).

Es irónico que el modelo de Ciclo Real surja en 1982 en EEUU, cuando fue patente el resultado de la política anti-inflacionista de Volcker que condujo a una de las peores recesiones de la postguerra americana.

El modelo no puede explicar el hecho contrastado que la participación de las rentas del trabajo en la renta nacional es una variable contracíclica, ya que el modelo asume que es una constante en la calibración del mismo.

La metodología del agente representativo da lugar a que en el modelo no haya desempleo y toda la variación en el empleo se deba a variaciones en el número de horas trabajadas por el individuo, esto es, que el ajuste se produzca en el margen intensivo.

A pesar del éxito, relativo y cuestionado, en replicar varias características de los datos, una de las limitaciones del modelo de Ciclo Real descansa en sus predicciones acerca de la dinámica del crecimiento de la producción. El modelo canónico predice que dicha variable es esencialmente un proceso de ruido blanco, de tal forma, que aunque pueda producir persistencia en el nivel de producción, carece de un mecanismo de propagación necesario para generar persistencia en el crecimiento del output.

Hemos visto que son necesarios shocks tecnológicos persistentes para generar un comportamiento serialmente correlacionado en el output que sea consistente con los datos y es intrínseco al modelo el hecho de que las variables siguen un comportamiento dinámico esencialmentalmente igual a la dinámica incorporada en el shock exógeno.

La razón de que el modelo estandar de Ciclo Real no pueda propagar las perturbaciones es que el stock de capital es la única variable endógena de estado y es una variable que cambia muy lentamente en el tiempo, esto es, el mecanismo de propagación basado en el crecimiento del stock de capital que afecta posteriormente a la producción es muy débil para provocar autocorrelación en las series económicas.

Dicho de otra forma, en las soluciones del modelo hemos encontrado que la raíz estable para el stock de capita está cerca de uno, lo que convierte un proceso AR(1) para el stock de capital casi en un proceso ruido blanco para su variación.

Consideremos el siguiente ejemplo sencillo (Wen, 2005) con oferta de trabajo fija. Para maximizar la utilidad esperada el agente representativo intenta suavizar su senda esperada para el consumo. Este resultado provoca que sea la inversión la que absorba la mayor parte del impacto del shock. Esta característica es la que permite al modelo replicar la volatilidad relativa del consumo y la inversión respecto a la producción.

A partir de la identidad de la renta $C_t + I_t = Y_t$ obtenemos

$$Y_t = cC_t + (1-c)I_t \Rightarrow \sigma_C^2 = \frac{1}{c^2}\left(\sigma_Y^2 + +(1-c)^2\sigma_I^2 - 2c\sigma_{YI}\right)$$

El deseo de mantener niveles de consumo estables por parte de los individuos implica elegir la covarianza entre la inversión y la producción con el fin de resolver el siguiente problema de minimización:

$$Min\ \sigma_C^2 = \frac{1}{c^2}\left(\sigma_Y^2 + +(1-c)^2\sigma_I^2 - 2c\sigma_{YI}\right)$$

sujeto a que la matriz de covarianzas del output y de la inversión sea semidefinida positiva, esto es, que verifique la condición de segundo orden para un mínimo.

Dicha condición exige que:

$$|\sigma_{YI}| \leq \sigma_I \sigma_Y$$

La solución es $\sigma_{YI} = \sigma_I\sigma_Y$ lo que implica $c\sigma_C = |\sigma_Y - (1-c)\sigma_I|$. Dado que $c \in [0,1]$ debemos tener $\sigma_Y > (1-c)\sigma_I$ y consecuentemente $c\sigma_C + (1-c)\sigma_I = \sigma_Y$. Como $\sigma_C < \sigma_Y$ finalmente la implicación es $\sigma_I > \sigma_Y$.

Este problema de minimización es menos exacto conforme aumenta la persistencia del shock, debido a que éste induce a un aumento en la renta y el consumo sí responde a cambios permanentes en la misma.

Hemos demostrado en el capítulo 2 que el mecanismo de propagación de la perturbación se apoya en la dinámica del stock de capital. Esto es, el aumento directo de la producción debido al aumento en la productividad, conduce a un aumento en la inversión y por tanto a un incremento en el stock de capital, que a su vez incide en el output.

Esta cadena de transmisión es extremadamente débil aún en el caso extremo de que todo el aumento en el output se materialice en un aumento en la inversión. Por ejemplo, log-linealizemos la función de producción, la restricción de recursos y la dinámica del capital.

$$\hat{Y}_t = \hat{Z}_t + \alpha \hat{K}_t$$

$$c\hat{C}_t + (1-c)\hat{I}_t = \hat{Y}_t$$

$$\hat{K}_{t+1} = \delta \hat{I}_t + (1-\delta)\hat{K}_t$$

Un incremento en la productividad total, $\hat{Z}_t$, de un 1 % provoca un aumento de un 1% en el output. Si en el estado estacionario, el ratio I/Y es de 0.3, entonces el aumento en la inversión será alrededor del 3.3 %, (1/0.3 %), manteniendo constante el consumo. Al siguiente periodo el aumento en el stock de capital será del 3.3 δ y el incremento en el output será del $[\rho + \alpha(3.3\delta)]$ %, donde ρ es la persistencia de la perturbación. Ahora podemos preguntarnos cuánto vale la expresión anterior. Para $\delta = 0.025$ y $\alpha = 0.36$, y en ausencia de crecimiento en las horas trabajadas y en persistencia en la perturbacion, los aumentos iniciales en la inversión y en la producción revierten rápidamente hacia su equilibrio inicial.

Veamos porqué tanto la producción como su tasa de crecimiento dependen esencialmente del proceso de shock.

Las ecuaciones para el stock de capital y la producción, linealizadas vienen dadas por:

$$\hat{K}_{t+1} = \pi_{kk}\hat{K}_t + \pi_{kz}\hat{Z}_t$$

$$\hat{Y}_t = \pi_{yk}\hat{K}_t + \pi_{yz}\hat{Z}_t$$

Para valores de calibración usuales en el modelo, $\pi_{kz} \simeq 0$ y $\pi_{kk} \simeq 1$. Despejando el capital, podemos expresar la desviación de la producción como:

$$(1 - \pi_{kk}L)\hat{Y}_t = \pi_{yz}\hat{Z}_t + (\pi_{yk}\pi_{kz} - \pi_{kk}\pi_{yz})\hat{Z}_{t-1}$$

que puede aproximarse a:

$$(1 - \pi_{kk}L)\hat{Y}_t = \pi_{yz}(1 - \pi_{kk}L)\hat{Z}_t$$

Por tanto, la dinámica de $\hat{Y}_t$ esencialmente refleja la dinámica de $\hat{Z}_t$.

Por otra parte, diferenciando la expresión para la producción.

$$\Delta\hat{Y}_t = \pi_{yz}\Delta\hat{Z}_t$$

Si el shock a la tecnología es un proceso de paseo aleatorio, entonces la tasa de crecimiento de la producción es esencialmente ruido blanco, (Watson, 1993).

La única forma de mejorar la dinámica del output es introducir otras variables endógenas de estado, como en Burnside, Eichenbaum y Rebelo (1993) al introducir N_t como variable endógena predeterminada en el periodo $t-1$. Si introducimos una nueva variable de estado, entonces su solución de equilibrio vendrá dada en función de la perturbación tecnológica.

$$\hat{x}_t = \pi_{xz}\hat{Z}_{t-1} \Rightarrow \hat{Y}_t = \pi_{yz}\hat{Z}_t + \pi_{xz}\hat{x}_t$$

y

$$\Delta\hat{Y}_t = \pi_{yz}\Delta\hat{Z}_t + \pi_{yx}\pi_{xz}\Delta\hat{Z}_{t-1}$$

Ahora la dinámica del crecimiento de la producción es un proceso de medias móviles con una dinámica muy distinta al ruido blanco.

Si el modelo de Ciclo Real ha sido cuestionado desde sus inicios podemos preguntarnos porqué ha constituido un campo de investigación activa. De forma unánime y con el paso del tiempo, la aportación metodológica del modelo de Ciclo Real ha sido fundamental para el desarrollo de la Macroeconomía moderna, ya que el marco analítico del modelo de equilibrio general ha sido el campo en el que se han contrastado cuantitativamente los resultados que generaba la simulación del modelo con las propiedades de las series temporales. Las sucesivas ampliaciones y modificaciones del modelo básico han buscado tanto mejorar las predicciones del modelo como introducir nuevos mecanismos dentro de un enfoque de equilibrio general.

Aunque los shocks tecnológicos se sigan considerando como una fuente importante para generar ciclos económicos, el mecanismo de sustitución intertemporal en un modelo walrasiano ha sido progresivamente abandonado para introducir elementos en el que la existencia de rigidices nominales constituye un elemento común y el origen de las perturbaciones que afectan a las variables endógenas es mucho más amplio.

Destacados economistas como Blanchard y Fisher (1989, pag 320-321) no dudan en afirmar cuando se disponen a presentar el capítulo 7 "Competitive Equilibrium Business Cycle":

> "As will become clear, we do not believe that the line of research that we present in this first chapter on aggregate fluctuations is likely to provide a satisfactory explanations of fluctuations".

Fernández-Villaverde (2010, pag 4) expone con crudeza:

> "Except for a small but dedicated group of followers at Minnesota, Rochester, and other bastions of heresy, the initial reaction to Kydland and Prescottís assertions varied from
>
> amused incredulity to straightforward dismissal.The critics were either appalled by the whole idea that technological shocks could account for a substantial fraction of output volatility or infuriated by what they considered the superfluity of technical fireworks."

6.8. Un prototipo de Modelo de Equilibrio General.

En este epígrafe final presentamos un Modelo Dinámico de Equilibrio General basado en Smets y Wouters (2007) que amplían el modelo utilizado por Christiano, Eichenbaum y Evans (2005). El modelo de Ciclo Real ha derivado en modelos de alta complejidad que tienen la ventaja de combinar elementos microeconómicos acerca del comportamiento optimizador de economías domésticas y empresas con un conjunto extenso de rigideces de precios y/o salarios. Dichos modelos están siendo utilizados tanto en el ámbito científico como por parte de los bancos centrales con el fin de evaluar cuantitativamente la política económica. Como señala Fernández-Villaverde (2009) la combinación de modelos estructuralmente variados junto a la implantación de algoritmos de resolución más avanzados y técnicas de simulación más potentes han permitido desarrollar lo que se denomina la Nueva Macroeconometría.

Para España puede consultarse a Andrés, Burriel y Estrada (2006), Boscá, Bustos, Díaz, Doménech, Ferri, Pérez y Puch (2007) y el trabajo de Burriel, Fernández-Villaverde y Rubio-Ramírez (2010) en el que realizan una introducción al Modelo de Equilibrio Dinámico para la Economía Española (MEDEA).

Las características esenciales de tales modelos es que incorporan aspectos del modelo New Keynesian, esto es, asumen la existencia de rigideces nominales en precios y/o salarios, introducen utilización variable del capital y shocks específicos a la inversión junto a una variedad de perturbaciones de oferta y de demanda.

La exposición que realizamos viene ya expresada en su forma log-lineal.

La ecuación (6.27) es la restricción de recursos donde el gasto público es la variable exógena e incorpora utilización variable del capital.

$$y_t = C_y c_t + I_y i_t + u_y u_t + \varepsilon_t^g \qquad ((6.27))$$

La ecuación (6.28) representa la ecuación de Euler para el consumo, donde el consumo actual depende de las expectativas sobre el consumo futuro, del consumo anterior, de las horas trabajadas y las expectativas sobre ellas y del tipo de interés real ex-ante. El término ε_t^b indica una perturbación exógena que afecta al rendimiento de los bonos.

$$c_t = c_1 c_{t-1} + (1 - c_1) E_t c_{t+1} + c_2(n_t - E_t n_{t+1}) - c_3(r_t - E_t \pi_{t+1} + \varepsilon_t^b) \quad ((6.28))$$

Las ecuaciones (6.29) y (6.30) caracterizan la dinámica de la inversion. La inversión depende de las expectativas sobre la inversión futura, la inversión anterior y del valor del stock de capital, q_t, que a su vez depende de las expectativas sobre el rendimiento del capital, r_t^k y del tipo de interés real. Las perturbaciones ε_t^b y ε_t^i afectan a la inversión, siendo ésta última un shock específico a ésta.

$$i_t = i_1 i_{t-1} + (1 - i_1) E_t i_{t+1} + i_2 q_t + \varepsilon_t^i \quad ((6.29))$$

$$q_t = q_1 E_t q_{t+1} + (1 - q_1) E_t r_{t+1}^k - (r_t - E_t \pi_{t+1} + \varepsilon_t^b) \quad ((6.30))$$

La ecuación (6.31) es la función Cobb-Douglas con progreso técnico neutral, representado por ε_t^a.

$$y_t = \alpha k_t^s + (1 - \alpha) n_t + \varepsilon_t^a \quad ((6.31))$$

La ecuacion (6.32) incluye tasa de utilización variable del capital.

$$k_t^s = k_{t-1} + u_t \quad ((6.32))$$

La ecuación (6.33) determina el grado de utilización del capital en función del rendimiento del mismo.

$$u_t = u_1 r_t^k \quad ((6.33))$$

La ecuación (6.34) es la dinámica del stock de capital que lleva incluida el shock específico a la inversión.

$$k_{t+1} = k_1 k_t + (1 - k_1) i_t + \varepsilon_t^i \tag{(6.34)}$$

La ecuaciones (6.35), (6.36), (6.37) y (6.38) nos resumen el equilibrio en el mercado de bienes y de trabajo con rigidez de salarios.

$$\mu_t^p = \alpha(k_t^s - n_t) + \varepsilon_t^a - w_t \tag{(6.35)}$$

donde μ_t^p viene dado por la diferencia entre la productividad marginal del trabajo y el salario real.

La ecuación (6.36) es la conocida curva de Phillips New-Keynesian, donde ε_t^p es un shock exógeno a los precios. En (6.37) el margen sobre los salarios es igual a la diferencia entre el salario real y la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio. Mientras que (6.38) nos da la ecuación dinámica para los salarios.

$$\pi_t = \pi_1 \pi_{t-1} + \pi_2 E_t \pi_{t+1} - \pi_3 \mu_t^p + \varepsilon_t^p \tag{(6.36)}$$

$$\mu_t^w = w_t - \left(\sigma_n n_t + \frac{1}{1-a} (c_t - a c_{t-1}) \right) \tag{(6.37)}$$

$$w_t = w_1 w_{t-1} + (1 - w_1) E_t (w_{t+1} + \pi_{t+1}) - w_2 \pi_t + w_3 \pi_{t-1} - w_4 \mu_t^w + \varepsilon_t^w \tag{(6.38)}$$

y donde ε_t^p y ε_t^w son perturbaciones exógenas que afectan a los márgenes de precios y salarios.

En la ecuación (6.39), el rendimiento del capital es función del ratio capital-trabajo y del salario real.

$$r_t^k = -(k_t - n_t) + w_t \tag{(6.39)}$$

Finalmente (6.40) nos describe la regla de Taylor, según la cual la autoridad monetaria fija el tipo de interés en función de los cambios en la tasa de inflación y el output gap.

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1 - \rho_r) \left[\phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t \right] + \varepsilon_t^r \tag{(6.40)}$$

en la que ε_t^r muestra las desviaciones aleatorias del tipo de interés en relación con el seguimiento de una regla sistemática de política monetaria.

En conjunto como podemos observar el modelo incorpora tasa de utilización variable del capital así como shocks específicos a la inversión. Lo que diferencia el resto de las ecuaciones del modelo de Ciclo Real es la incorporación de precios y salarios rígidos determinados a partir de problemas de optimización bien definidos.

6.9. Apéndice 6.1.

El argumento se deduce de la siguiente forma.

Cuando el individuo se enfrenta a un problema de extracción de señal, esto es, observa la perturbación pero no sabe si ésta es permanente o transitoria es posible modelizar la perturbación de la siguiente manera:

$$z_t = u_t + e_t$$

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t : \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$$

Esto es, la perturbación de oferta tiene un componente transitorio, e_t y un componente permanente, u_t, dando lugar a que los individuos observen z_t pero no sepan si el mismo es de carácter permanente o transitorio.

La estructura anterior es equivalente a:

$$\Delta z_t = z_t - z_{t-1} = \varepsilon_t + (1 - L)e_t$$

esto es, la perturbación sigue un proceso integrado y de media móvil, IMA(0,1,1).

Nuestro objetivo es doble: por una parte, demostrar bajo qué condiciones dicho proceso puede expresarse en función de un sólo shock y con una estructura similar a un proceso IMA(0,1,1) y por otra, demostrar la expresión para la predicción óptima del proceso.

Si calculamos las autocorrelaciones:

$$\gamma(0) = E\left[(\varepsilon_t + (1-L)e_t)(\varepsilon_t + (1-L)e_t)\right] = \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_e^2$$

$$\gamma(1) = E\left[(\varepsilon_t + (1-L)e_t)(\varepsilon_{t-1} + (1-L)e_{t-1})\right] = -\sigma_e^2$$

Si de forma análoga consideramos un proceso IMA(0,1,1) general

$$\Delta x_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

Las autocorrelaciones teóricas del modelo son:

$$\gamma(0) = E\left[(\Delta x_t)^2\right] = E\left[(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})\right] = \sigma^2(1+\theta^2)$$

$$\gamma(1) = E\left[(\Delta x_t)(\Delta x_{t-1})\right] = E\left[(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} - \theta\epsilon_{t-2})\right] = -\theta\sigma^2$$

Si igualamos las autocorrelaciones teóricas con las de nuestra formulación

$$\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_e^2 = \sigma^2(1+\theta^2) : -\sigma_e^2 = -\theta\sigma^2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_e^2} + 2 = \frac{1+\theta^2}{\theta} \Rightarrow \theta^2 - \sigma\theta + 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4}\right]$$

Esto es, nuestro proceso $\Delta z_t = z_t - z_{t-1} = \varepsilon_t + (1-L)e_t$ puede expresarse como:

$$\Delta z_t = e_t - \theta e_{t-1}$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4}\right] \text{ y } \sigma = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_e^2} + 2$$

En segundo lugar, veamos cuál es la expresión para la predicción óptima de la perturbación.

$$(1-L)z_t = (1-\theta L)e_t \Rightarrow \Pi(L)z_t = e_t$$

donde

$$\Pi(L) = \frac{1-L}{1-\theta L}$$

Supongamos que podamos escribir $\Pi(L)z_t = e_t$ como

$$z_t\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i L^i\right) = e_t \Rightarrow z_t = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i z_{t-i} + e_t$$

con lo que nuestro problema se centraría en poder identificar los α_i.

$$\Pi(L) = \frac{1-L}{1-\theta L} \Rightarrow \Pi(L) = \frac{1-\theta L-(1-\theta)L}{1-\theta L} = 1-(1-\theta)L\left[1+\theta L+\theta^2L^2+.....\right]$$

Identificando

$$1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i L^i = 1-(1-\theta)L\left[1+\theta L+\theta^2L^2+.....\right]$$

$$\alpha_1 = 1-\theta : \alpha_2 = \theta(1-\theta)....\alpha_j = \theta^{j-1}(1-\theta) : j \geq 1$$

Con lo que finalmente, el proceso de perturbación puede escribirse como:

$$z_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{j-1}z_{t-j} + e_t$$

Nuestro interés se centra además en calcular las predicciones óptimas conforme el tiempo va pasando. De esta forma tenemos

$$E\left(z_t \mid t-1\right) = (1-\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{j-1}z_{t-j}$$

y

$$E\left(z_{t+1} \mid t\right) = (1-\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{j-1}z_{t+1-j}$$

con lo que la corrección de la predicción entre dos periodos consecutivos es:

$$E\left(z_{t+1} \mid t\right) - E\left(z_t \mid t-1\right) = (1-\theta)z_t - (1-\theta)^2\sum_{j=1}^{\infty}\theta^{j-1}z_{t-j}$$

$$E\left(z_{t+1} \mid t\right) - E\left(z_t \mid t-1\right) = (1-\theta)(z_t - E\left(z_t \mid t-1\right)$$

Esta expresión tiene una interpretación interesante y es el que el proceso sigue el denominado proceso de expectativas adaptativas, donde la predicción de la variable depende de sus valores pasados ponderados por θ^{j-1} , o dicho de otro modo, la nueva predicción es una interpolación lineal entre la predicción anterior y la nueva observación.

$$E\left(z_{t+1} \mid t)\right) = (1-\theta)z_t + \theta E\left(z_t \mid t-1\right)$$

RESUMEN Y CONSIDERACIONES FINALES.

Como en otros campos de la ciencia, la Macroeconomía moderna es el resultado de un intenso, apasionado y a veces agrio debate en el que nuevos paradigmas pueden o no sustituir a los firmemente asentados. Antes de la publicación de la Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero, la "Macroeconomía Clásica" era un reflejo del modelo microeconómico con mercados que se equilibraban automáticamente ante desajustes entre la oferta y la demanda mientras que la Teoría Monetaria era fundamentalmente la Teoría Cuantitativa del Dinero. Conscientes de la dificultad del marco teórico para explicar las sucesivas crisis que periódicamente afectaban al sistema capitalista, los economistas de la época centran su atención fundamentalmente en el papel del crédito bancario, aunque visto en su conjunto no existe un modelo unificado dada la diversidad de autores y factores que potencialmente podrían estar detrás de las fluctuaciones cíclicas. Desde el papel que juega la periodicidad con la que se suceden las innovaciones en Schumpeter, el subconsumo, el exceso de inversión hasta los cambios en las expectativas, el factor común a todas ellas era el intento de ofrecer una explicación endógena de cada una de las fases en las que el ciclo entre expansiones consecutivas se desarrollaba; la prosperidad inevitablemente conduciría a la contracción y a partir de ésta surgiría la recuperación.

El interés por la cuestión es patente y la necesidad de comprobar estadísticamente el comportamiento dinámico de las series marca la obra del gran estudioso del ciclo que fue W.C. Mitchell, aunque el incipiente desarrollo de modelos dinámicos provocó que el enfoque impulso-propagación de Frisch y el descubrimiento de Slutzky, al demostrar que una ecuación dinámica puede generar fluctuaciones cíclicas ante perturbaciones exógenas, iban a marcar la metodología teórica en el futuro.

Keynes y la formulación analítica del modelo IS-LM por parte de Hicks marcan el nacimiento de la Macroeconomía como ciencia y supone un punto de inflexión crucial en la Historia del Pensamiento Económico. Los planteamientos keynesianos en sus aspectos teórico y práctico, en lo que respecta a la elaboración de la política económica, se asientan como el paradigma dominante durante los siguientes 40 años.

Sin embargo, el análisis clásico y la Teoría Cuantitativa no habían muerto. Podemos considerar las aportaciones de Friedman y Lucas como un segundo punto de inflexión en la Macroeconomía moderna. El liberalismo que acompaña la obra de Friedman abre el debate keynesiano-monetarista en los años 60 y 70 en tres cuestiones fundamentalmente: el intervencionismo del Estado en la economía, el papel de los precios en una economía de mercado como suministradores de información sobre la escasez y sobre todo el papel de las fluctuaciones en la cantidad de dinero en circulación como origen y causa de las fluctuaciones económicas.

Los modelos de Friedman y Lucas se enfrentan a un problema de calado: cómo explicar las desviaciones de la producción con respecto a su tendencia a partir de un modelo en el que existe equilibrio continuo en los mercados, donde las variables reales se determinan a partir del bloque de oferta agregada y con una ecuación de demanda agregada que sólo sirve para relacionar el nivel de precios con la oferta monetaria.

La solución clásica para explicar el fenómeno cíclico, basada en el supuesto de información imperfecta constituye un intento de solución, que realmente es poco convincente sobre todo cuando sustituimos el supuesto de expectativas adaptativas por el de expectativas racionales.

En los años 70 del siglo XX, el planteamiento de los modelos keynesianos más significativos de la época, Fisher y Taylor, suponen de facto que los salarios nominales se fijan de tal manera que, dada la información disponible, los agentes económicos tengan el objetivo de mantener constante el salario real esperado. Con este supuesto de rigidez de precios y expectativas racionales, los cambios en la política monetaria, ya sean anticipados o no, afectan a las variables reales a corto plazo, manteniéndose la neutralidad del dinero a largo plazo.

La proposición de inefectividad de la política monetaria derivada a partir del modelo de Lucas contrasta con la prescripción keynesiana, según la cual la política monetaria contracíclica tiene un papel estabilizador de la producción.

El modelo de Ciclo Económico Real propuesto por Kydland y Prescott puede considerarse como el segundo impulso de desarrollo dentro de los modelos clásicos aunque con diferencias sustanciales

La primera de éstas reside en la causa de las fluctuaciones económicas. Los shocks de productividad como perturbación de oferta son el elemento que provoca el comportamiento cíclico observado; el papel del dinero para explicar el ciclo económico es anulado por completo.

En segundo lugar, el modelo es capaz de explicar cuantitativamente de manera razonable el comportamiento observado en las series macroeconómicas, esto es, el modelo de Ciclo Económico Real permite no sólo la comparación cualitativa de sus predicciones sino que su calibración y la generación de series artificialmente generadas a partir de perturbaciones estocásticas a la función de producción nos dan la posibilidad de comparar sus resultados con determinadas características de las series temporales reales.

Sin embargo, el efecto de los shocks de productividad en el modelo neoclásico nos permiten obtener los dos siguientes resultados.

En primer lugar la dinámica temporal de las variables endógenas del modelo ante la perturbación de oferta depende en gran medida de la persistencia del shock. Si la perturbación es meramente transitoria el comportamiento dinámico en las variables endógenas es poco persistente, esto es, el cambio en éstas es de poca duración; y al contrario, si la perturbación tecnológica es permanente, el cambio en la variable endógena es permanente o lo que es lo mismo provoca que el nivel a largo plazo de la variable cambie.

En segundo lugar, el mecanismo de propagación por el cual la perturbación genera el comportamiento dinámico de las variables endógenas se realiza a través de la acumulación de capital y del parámetro que nos mide la participación de las rentas del capital en la renta nacional. A corto plazo sabemos que el stock de capital fluctúa muy poco, con lo cual es dudoso que en realidad pueda provocar el grado de persistencia que observamos en la producción y el consumo.

Por tanto la resolución de los modelos neoclásicos de crecimiento con oferta de trabajo fija nos permite observar por una parte que la dinámica de las variables endógenas está condicionada a la propia dinámica de la variable exógena y por otra que el mecanismo de transmisión interno de propagación de las perturbaciones es extremadamente débil.

El modelo de Ciclo Económico Real básico presentado en el capítulo 3 introduce oferta de trabajo variable en la función de utilidad, dando lugar a que el mecanismo de propagación del impulso tecnológico se amplíe por otra via, la sustitución intratemporal e intertemporal entre ocio y trabajo. Un shock tecnológico eleva la demanda de trabajo provocando una subida del salario real dando lugar a que la respuesta óptima de los individuos ante la perturbación de oferta positiva consista en demandar menos ocio y ofrecer más horas de trabajo; la perturbación favorable aumenta el nivel de producción y el consumo debido a al efecto renta derivado de la subida salarial. Por otra parte la elevación de la productividad marginal del capital y por tanto del tipo de interés real suaviza la respuesta del consumo ante el aumento en el salario. El consumo se comporta como un bien normal mientras que el ocio se comporta como un bien inferior.

La cuestión es si este mecanismo es lo suficientemente importante para explicar las fluctuaciones cíclicas. Dado que el método de análisis supone que el consumidor o la economía doméstica representativa es fiel reflejo del comportamiento a nivel agregado, el ajuste en las horas trabajadas se produce en el margen intensivo, esto es, en las horas que cada individuo ofrece y por extensión todos aquellos que conforman la economía.

Sin embargo, los datos a nivel agregado sobre horas trabajadas confirman que su variación total no procede principalmente de ajustes en el margen intensivo sino todo lo contrario, su variabilidad viene explicada por cambios en la tasa de desempleo, es decir a los flujos de entrada y salida en el mercado de trabajo.

Relacionado con esta cuestión es la discrepancia cuantitativa entre la elasticidad de sustitución intertemporal en la oferta de trabajo estimada a nivel microeconómico y la que necesita el modelo de Ciclo Económico Real para explicar la alta correlación observada entre producción y horas trabajadas. Mientras que a nivel individual, la respuesta de la oferta de trabajo ante cambios en el salario es baja (más alta cuando el individuo estima que la subida salarial es transitoria), la elasticidad de la oferta de trabajo necesaria en el modelo debe ser alta, o lo que es lo mismo, la curva de oferta de trabajo debe ser muy elástica, de tal forma que el shock de productividad al elevar la demanda de trabajo pueda predecir una alta correlación entre producción y nivel de horas trabajadas.

De esta forma, este mecanismo de transmisión adicional de las perturbaciones de oferta se considera que es bastante débil para provocar ciclos económicos.

Por el contrario, el modelo explica considerablemente bien el comportamiento prociclíco del consumo y de la inversión así como la volatilidad relativa de éstos con respecto a la producción.

Centrémonos en los shocks de productividad. A lo largo del trabajo han sido modelizados a partir de una ecuación dinámica estocástica de primer orden, pero la cuestión realmente importante es qué son y cómo se miden. El proceso que sigue dicha perturbación estocástica viene estimado a partir del residuo de Solow como medida de la productividad total de los factores. La cuestión que se plantea es si dicho residuo es una medida correcta del verdadero shock de productividad. La respuesta es negativa, la productividad total de los factores está correlacionada positivamente con el nivel de gasto público, con el grado de competencia en los mercados de bienes y con el nivel de esfuerzo u horas extraordinarias que realizan los individuos.

Es decir, el residuo de Solow no es una medida correcta de los verdaderos shocks tecnológicos. La consecuencia es que la varianza del mismo es sobreestimada si no se tienen en cuenta los elementos enunciados con anterioridad y por tanto, su capacidad para explicar la volatilidad de las variables endógenas del modelo en relación a la calculada en los datos observados disminuye considerablemente.

Por otra parte, dónde podemos identificar este tipo de perturbaciones, que deben ser altamente persistentes, para explicar la dinámica de las variables a corto plazo.

A pesar de estas dificultades, el modelo de Ciclo Económico Real se ha convertido en el marco básico de referencia para estudiar el fenómeno cíclico debido a que su flexibilidad le permite incorporar un amplio abanico de alternativas, bien alterando la función de utilidad, el supuesto de equilibrio walrasiano en los mercados o bien introduciendo otros tipos de perturbaciones exógenas.

Nadie pone en duda que la manera científicamente correcta de plantear un modelo macroeconómico consiste en considerar el comportamiento optimizador de consumidores y empresas, es decir, plantear un modelo de equilibrio general y a partir de él experimentar cuál es la dinámica de las variables endógenas cuando se ve sometido a distintos tipos de shocks.

Más allá de considerar que los shocks tecnológicos son el origen de las fluctuaciones económicas, el modelo de Ciclo Económico Real ha contribuido a ser el fundamento metodológico en el que se basan los modernos modelos de equilibrio general.

La introducción de shocks monetarios que abordamos en el capítulo 4 nos enseña que en el modelo de Ciclo Económico Real con dinero, el papel de la política monetaria en la determinación de las variables reales es cuantitativamente poco importante.

En el caso del modelo clásico, las variables reales vienen determinadas por las perturbaciones tecnológicas y las variables nominales por el tipo de regla monetaria que siga el banco central. El dinero es neutral a corto y largo plazo.

Sólo cuando introducimos rigidez de salarios, los shocks monetarios junto a las perturbaciones tecnológicas mejoran la capacidad del modelo para explicar las correlaciones entre las variables en relación a las estimadas si sólo estuviesen presentes shocks de carácter tecnológico.

La introducción del dinero, ya sea como variable de elección en la función de utilidad o como restricción de liquidez no es cuantitativamente importante para explicar la dinámica de las variables endógenas. Las perturbaciones de carácter monetario apenas tienen influencia en la producción y el empleo.

De nuevo, el mecanismo de transmisión inherente no es lo suficientemente importante para que estos modelos expliquen el ciclo económico a partir de shocks monetarios.

La introducción de rigidez nominal en un modelo con dinero en la función de utilidad y competencia monopolística, a partir del cual derivamos el modelo IS-LM, predice que cambios en la cantidad de dinero tienen efectos reales dependiendo éstos de la forma concreta de modelizar la perturbación.

La introducción de rigideces nominales y/o de precios constituye hoy uno de los enfoques dominantes en los modelos de equilibrio general dinámico. El modelo New-keynesian participa de las características del modelo de Ciclo Económico Real, complementado con competencia monopolística que sustituye a la competencia perfecta.

Los resultados del modelo New-keynesian con rigidez de precios depende de la regla monetaria que siga el banco central. En el caso de fijación de una regla de fijación de tipos de interés nominales, una elevación del mismo conduce a un descenso en la producción y en la inflación mientras que el efecto del shock tecnológico sobre el empleo y la producción depende de los parámetros que intervienen en la solución del modelo.

Si el banco central sigue una regla de crecimiento monetario el efecto de una política monetaria expansiva es positivo para la producción y la tasa de inflación. El efecto de una perturbación tecnológica positiva sobre el nivel de empleo depende de los parámetros del modelo mientras que por otra parte eleva la producción.

Si la perturbación tecnológica positiva es muy persistente y para determinados valores de los parámetros el efecto sobre el nivel de empleo sería negativo.

A raíz del trabajo de Kydland y Prescott, el modelo de Ciclo Económico Real ha sido objeto de un examen riguroso tanto desde el punto de vista teórico como econométrico. En el capítulo 5 exponemos algunas de las principales extensiones del modelo básico y podemos comprobar que la investigación en este área ha sido de especial relevancia.

La cuestión de la modelización del margen extensivo fue una de las primeras cuestiones que se abordaron. El trabajo de Hansen al transformar la función de utilidad de tal forma que generara una función de oferta totalmente elástica mejoró la correlación entre productividad y horas trabajadas a nivel agregado, sin embargo, el mecanismo de loterías supone que la utilidad marginal del ocio es constante e independientemente del número de horas que trabaje el agente representativo. El modelo de trabajo indivisible fue la primera respuesta clásica a las críticas sobre la necesidad de incorporar al modelo una función de oferta con alta elasticidad de sustitución intertemporal en las horas trabajadas.

Más interesantes nos parecen tanto la introducción de salarios de eficiencia como el modelo de búsqueda en el marco del Ciclo Económico Real. Aunque el modelo con salarios de eficiencia expuesto parece que genera unos resultados satisfactorios en orden a explicar la correlación entre salarios y horas trabajadas, realmente el resultado depende de un parámetro que no tiene contrapartida empírica. A la luz de trabajos más recientes consideramos que tiene mayor relevancia empírica el modelo de búsqueda. La aportación que hemos incluido fue pionera en incorporar las características de dicho modelo entro del Ciclo Económico Real y predice unos resultados que mejoran sustancialmente el modelo clásico de mercado de trabajo.

La evidencia suministrada por el modelo con rigidez salarial y restricción de liquidez, “cash in advance” descansa fundamentalmente en la introducción de costes de ajuste en el empleo, supuesto que se utiliza con el fin de suavizar los ajustes que se producen en dicha variable ante perturbaciones tecnológicas. En un modelo similar sin costes de ajuste en el empleo, la volatilidad de las variables reales es demasiado alta en relación a la observada en los datos.

La utilización variable del capital se ha incorporado como un elemento que mejora la propagación de las perturbaciones tecnológicas y se ha incorporado de manera habitual en la literatura ya que permite una mayor variabilidad en las horas trabajadas ante la perturbación de oferta, no siendo por tanto necesario acompañar el modelo con una función de utilidad que incorpore una función de oferta de trabajo elástica.

Las aportaciones que incluyen shocks específicos a la inversión son de especial interés. En vez de considerar un shock general a la función de producción, el progreso técnico se incorpora a través de la producción de nuevos bienes de capital.

La principal dificultad de introducir una perturbación de demanda de este tipo, como es el aumento en la inversión debido a un aumento en la rentabilidad de la misma (un aumento en la eficacia marginal del capital), reside en que la respuesta del consumo en el modelo de Ciclo Económico Real es negativa.

Modificando la función de utilidad e introduciendo utilización variable del capital es posible obtener una respuesta positiva del consumo ante un cambio en la productividad de la inversión.

Con la introducción del gasto público financiado con impuestos, el modelo predice de nuevo un comportamiento contracíclico del consumo ante perturbaciones de demanda, por tanto es necesario añadir algún grado de complementariedad entre gasto público y consumo privado dentro de la función de utilidad de tal manera que el aumento del primero no genere una disminución del segundo.

El aumento del gasto público mejora la correlación entre salario y horas trabajadas con respecto al modelo básico de Ciclo Económico Real ya que provoca un desplazamiento de la curva de oferta de trabajo debido al efecto renta negativo que genera en los individuos.

Los impuestos sobre la renta y sobre el capital, al distorsionar la elección óptima de los individuos entre ocio y trabajo generan el mismo tipo de efecto.

El efecto de un aumento en el nivel de deuda provocado por una disminución en el nivel de impuestos genera un efecto positivo en el consumo, la producción y el empleo para valores relativamente bajos en la persistencia de la deuda. Cuando comparamos un aumento en la deuda provocado por un mayor gasto observamos un efecto desplazamiento en la inversión y efectos cuantitativamente pequeños sobre las variables reales. La financiación del gasto con mayores impuestos sobre la renta tiene efectos negativos sobre las variables reales.

El efecto de la introducción del denominado “labor hoarding” unido a costes de ajuste en el empleo permite reducir la volatilidad de éste ya que a corto plazo el ajuste en el número de horas trabajadas ante una perturbación de oferta se realiza en el margen intensivo, esto es, en el esfuerzo adicional que las empresas piden a sus trabajadores. Constituye una explicación plausible tanto del denominado “puzzle de la productividad” como del hecho que la productividad del trabajo tenga un comportamiento procíclico.

La modelización de la producción doméstica es equivalente a introducir un nuevo sector donde ahora el tiempo total disponible puede dedicarse además a realizar trabajos en el hogar. Esto permite que la economía representativa pueda sustituir no sólo tiempo de trabajo por tiempo de ocio, sino también por tiempo de trabajo doméstico. La calibración del modelo sigue estimado la correlación entre salarios y horas trabajadas a un nivel demasiado alto en relación a la observada empíricamente.

Un desarrollo relativamente reciente ha sido explorar la idea de si las expectativas sobre la productividad total de los factores o del cambio tecnológico que afecta específicamente a los nuevos bienes de capital es capaz de provocar una expansión económica. Para poder generar el comportamiento observado en las series económicas el modelo debe incorporar ciertas restricciones sobre las formas funcionales de las ecuaciones del modelo, esto es, los resultados están condicionados a la introducción de unas determinadas preferencias, a la utilización variable del capital y a la incorporación de costes de ajuste en la inversión.

El modelo de Ciclo Económico Real ha sido utilizado para explicar el denominado “equity Premium puzzle “. La calibración estándar predice que la prima de riesgo de los bonos es ligeramente superior a la de las acciones, lo que está en contra de la evidencia empírica.

Una forma alternativa de introducir los efectos de los shocks de demanda en el modelo de Ciclo Económico Real es incluyendo una perturbación que afecte a las preferencias de los individuos en la función de utilidad y que por tanto al influir en la utilidad marginal del consumo provoca cambios en el nivel óptimo del mismo. El problema fundamental es que de forma simétrica a lo que hemos explicado con los shocks específicos a la inversión pero al contrario, el efecto de la perturbación tecnológica eleva el nivel de consumo pero genera una respuesta negativa en la inversión. En el modelo presentado la solución a este problema puede realizarse a través de la introducción de externalidades positivas en la producción.

La idea de los denominados “animal spirits” se fundamenta sobre la base de que el comportamiento coordinado de los individuos en un determinado sentido, olas de optimismo o pesimismo, puede provocar fluctuaciones en las series económicas. Técnicamente su modelización se realiza a partir de la introducción en la solución del modelo de Ciclo Económico Real de una variable aleatoria no relacionada con las variables de estado del problema en el caso de que el modelo tenga una solución indeterminada. Esto puede suceder cuando introducimos competencia monopolística o rendimientos crecientes a escala.

Finalmente el modelo de Ciclo Económico Real de Kydland y Prescott fue una de las contribuciones que les hicieron ser galardonados con el Premio Nobel de Economía en 2004. Es una ampliación del modelo básico y de ahí que haya preferido incorporarlo en el capítulo 5.

El ejercicio que realizan es ni más ni menos mostrar como el modelo neoclásico de crecimiento y la calibración del mismo es capaz de generar series artificiales que tienen un coeficiente de correlación similar a las series americanas de consumo, inversión y horas trabajadas. El resultado fallido es la correlación entre la productividad y el output que predice ya que resulta demasiado alta en el modelo.

La principal novedad del modelo y de ahí el título del trabajo, es la introducción del denominado Time to Build o “tiempo para construir” en el que la inversión en un momento del tiempo no se transforma en capital productivo al siguiente periodo, sino que el proceso de construcción del stock de capital hasta que éste se convierte en un bien de capital listo para producir es necesario que transcurran varios periodos de tiempo o dicho de otro modo, la inversión es un proceso que implica desde el punto de vista tecnológico varios periodos de tiempo.

Dos características adicionales del trabajo anterior son la utilización de una forma funcional CES para modelizar la función de producción y una función de utilidad no separable en consumo y ocio donde éste viene determinado por todos los valores pasados del mismo.

La razones de la utilización de una estructura autorregresiva para modelizar el ocio e incluir el proceso time to build se encuentran en el hecho de que permiten que el mecanismo de propagación interno del modelo genere una mayor persistencia ante la perturbación de oferta, esto es, el ajuste de las variables hacia su estado estacionario sea más lento. Es más, como demostramos en el apartado 5.18, dicha forma funcional supone una elasticidad de la oferta de trabajo con respecto al salario real mayor y una oferta de trabajo que depende negativamente de todos los valores pasados en el nivel de ocio.

La cuestión de la persistencia de los shocks y su relación con las teorías explicativas del ciclo económico fue analizada a través del análisis univariante de series temporales. Las conclusiones no son nada definitivas a nivel econométrico aunque el trabajo de Nelson y Plosser tuvo en su momento gran relevancia como soporte y apoyo a la teoría del Ciclo Económico Real.

En los modelos sencillos analizados en el capítulo 6, las perturbaciones de demanda tienen efectos transitorios mientras que las del lado de la oferta tienen efectos permanentes.

El efecto de los shocks tecnológicos sobre las horas trabajadas a nivel agregado ha generado un cierto debate a partir de la estimación de modelos con la metodología de vectores autorregresivos. El modelo New-keynesian con precios rígidos planteado en el capítulo 4 ya contempla el hecho de que una perturbación tecnológica positiva no predice un aumento en las horas trabajadas sino todo lo contrario, lo cual de ser confirmado parecía que daba la puntilla al modelo de Ciclo Económico Real con precios flexibles. Sin embargo, éste también puede predecir esta consecuencia si el efecto renta derivado del aumento en el salario es tan fuerte que supera el efecto sustitución dando lugar a la conocida curva de oferta “hacia atrás”.

Todos los modelos son falsables, esto es, siempre es posible encontrar la regularidad empírica que no puede explicar el modelo. En el caso del Ciclo Económico Real el gran desafío ha sido explicar la baja correlación entre las horas trabajadas y la productividad del trabajo o salario real, sin embargo las críticas no se han centrado sólo en esta regularidad empírica.

A continuación exponemos de forma sintética las principales conclusiones obtenidas en esta tesis doctoral.

CONCLUSIONES.

1. Los modelos keynesianos de Taylor y Fisher con salario monetario rígido generan más persistencia en la producción que los modelos clásicos de Friedman y Lucas. En los años 70, el debate en torno al origen de las fluctuaciones no se centraba en las causas de los ciclos económicos sino en la flexibilidad o rigidez en precios y/o salarios como elemento clave en la modelización.

2. El modelo de Ciclo Económico Real necesita de una alta relación marginal de sustitución intertemporal entre ocio y trabajo para explicar la correlación entre productividad o salarios y empleo.

3. Los mecanismos internos de propagación del modelo son débiles. Ni la sustitución entre ocio y horas trabajadas ni el efecto inducido a través del stock de capital pueden ser considerados como medios de transmisión con la suficiente potencia para generar ciclos económicos.

4. Por otra parte, las volatilidades relativas del consumo y la inversión sí pueden ser explicadas por el modelo.

4. El residuo de Solow no es una buena medida del verdadero shock tecnológico ya que su comportamiento procíclico depende de variables de demanda como el gasto público, el nivel de esfuerzo o la existencia de competencia monopolística en el mercado de bienes.

5. El comportamiento dinámico de las variables endógenas del modelo está condicionado en gran medida por el proceso dinámico que sigue el shock tecnológico.

6. La correlación entre horas trabajadas y salario real es demasiado alta en el modelo en relación a la evidencia empírica.

7. Las predicciones del modelo cuando se le aplican shocks de demanda predice una correlación negativa entre consumo e inversión lo cual está en contra de la evidencia empírica.

8.. El modelo predice una mejor correlación entre producción y salario real si introducimos rigidez salarial y shocks de carácter monetario.

9. Los shocks monetarios en el modelo de Ciclo Económico Real tienen muy poco efecto cuantitativo sobre las variables reales.

10. En el modelo New-Keynesian los shocks tecnológicos pueden producir una reducción en las horas trabajadas a nivel agregado.

11. El modelo IS-LM con rigidez salarial y competencia monopolística es capaz de explicar las fluctuaciones en la producción a partir de shocks monetarios.

12. La modelización con trabajo indivisible del trabajo mejora la correlación entre horas y productividad del trabajo aunque consideramos que la aportación de los modelos de búsqueda es más completa y se ajusta mejor a la evidencia empírica.

13. La introducción de costes de ajuste en el empleo ayuda a suavizar la dinámica del empleo, sin embargo, la introducción de esfuerzo en la función de producción explica el comportamiento procíclico de la productividad del trabajo y la baja correlación entre salarios reales y empleo.

14. El modelo de Ciclo Económico Real necesita de perturbaciones adicionales como por ejemplo disminuciones de impuestos sobre la renta o aumento del gasto público a los shocks de productividad para poder explicar la baja correlación entre salarios y horas trabajadas.

15. Las perturbaciones de demanda tienen efectos transitorios en la producción mientras que las perturbaciones de oferta tienen efectos permanentes.

16. La flexibilidad del modelo de equilibrio general ha permitido que en su marco se hayan podido acomodar distintas ampliaciones que han intentado superar la principal dificultad del modelo en relación a la correlación entre salarios y empleo. Por otra parte, el modelo de Ciclo Económico Real ha sido el referente en el que otras explicaciones del fenómeno cíclico han sido desarrolladas.

17. Independientemente de si las perturbaciones tecnológicas explican una mayor o menor variabilidad en las variables endógenas, el modelo de Ciclo Económico Real ha contribuido de forma decisiva a la metodología en Macroeconomía. La nueva generación de modelos de Equilibrio General Dinámico conservan el bloque básico del modelo de Ciclo Real, sin embargo, su complejidad es aún mayor debido a que:

1. Suelen combinar varios tipos de perturbaciones, además de los shocks tecnológicos.
2. El supuesto de competencia perfecta en los mercados ha sido abandonado al haber sido sustituido por rigideces de precios y salarios al estilo del modelo New-Keynesian.
3. Dentro de las ampliaciones que hemos expuesto, los shock específicos a la inversión y la utilización variable del capital suelen estar presentes en los modelos más avanzados.

Bibliografía.

[] Adelman, I y Adelman, F (1959). "The Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model". *Econometrica,* 4, 596-625.

[] Akerloff, G. (1982). "Labor Contracts as Partial Gift Exchange". *Quarterly Journal of Economics*, 97, 543-569.

[] Altonji, J. G. (1986). "Intertemporal substitution in labor supply: Evidence from micro data". *The Journal of Political Economy*, Vol 94, 3, 176-S215.

[] Amano, R. y Wirjanto, T.S. (1998): "Government expenditures and the permanent income model". *Review of Economic Dynamics* 1, 719-30.

[] Anderson, G. y Moore, G (1985) "A linear algebraic procedure for solving linear perfect foresight models". *Economics Letters* 17(3), 247–252

[] Andolfatto, D. (1996). "Business cycles and labor-market search". *The American Economic Review*, 98(4), 112-132.

[] Andrés J, Burriel P y Estrada A (2006). "BEMOD: a DSGE model for the Spanish economy and the rest of the Euro area". *Documento de Trabajo del Banco de España* 0631.

[] Arnold, L. (2002). Business Cycle Theory. Oxford University Press.

[] Aschauer, D. (1988). "The Equilibrium Approach to Fiscal Policy". Journal of Money, Credit and Banking Vol. 20, nº 1 (Feb), 41-62

[] Attfield, C, Demery, D y Duck N. (1991). "Rational Expectations in Macroeconomics : An Introduction to Theory and Evidence" 2 ª Ed. Blackwell Publishers.

[] Barro, R.J. (1978). "Unanticipated Money, Output and the Price Level in the United States". *Journal of Political Economy.* 86, 549-580.

[] Barro, R. y King, R. (1984). "Time-separable preference and intertemporal-substitution models of business cycles". *Quarterly Journal of Economics*, Nov, 99, 817-39.

[] Barro R. (1989). The Neoclassical Approach to Fiscal Policy. In: Barro R Modern Business Cycle Theory. Harvard University Press and Basil Blackwell Publishers.

[] Basu, S., Fernald, J., y Kimball, M. (2004). "Are technology improvements contractionary?" WP 10592. *National Bureau of Economic Research.*

[] Baxter, M., y King, R. (1991). "Productive externalities and business cycles". *Institute for Empirical Macroeconomics, Federal Reserve Bank of Minneapolis.*

[] Baxter, M.y King, R. (1993). Fiscal policy in general equilibrium. *The American Economic Review*, Vol. 83, N^o 3 (Jun), 315-334.

[] Baxter, M. and King, R. (1995) Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. NBER Working Paper Series. WP No. 5022. Cambridge, MA.

[] Beaudry P y Portier F. (2004). "Stock Prices, News and Economic Fluctuations". *American Economic Review.* 96(4), 1293-1307.

[] Beaudry, P., & Portier, F. (2007). When can changes in expectations cause business cycle fluctuations in neo-classical settings?. *Journal of Economic Theory*, 135(1), 458-477.

[] Becker, G. (1996). "Accounting for Tastes". Harvard University Press. Cambridge, MA.

[] Benassy, J:P (1995). "Money and wage contracts in a optimizing model of the business cycle". *Journal of Monetary Economics*, 35, 303-315.

[] Benassy, J.P. (2003). "Staggered contracts and persistence: microeconomic and macroeconomic dynamics". *Recherches Économiques de Louvain*, vol 69(2), 125-144.

[] Benhabib, J., Rogerson, R., y Wright, R. (1991). "Homework in macroeconomics: Household production and aggregate fluctuations". *Journal of Political economy*, Vol 99, N^o 6, Dec 1166-1187.

[] Benhabib, J y Farmer, R. "Indeterminacy and Increasing Returns". *Journal of Economic Theory*, 63, 19-41.

[] Blanchard, O y Kahn, Ch. (1980). "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations". *Econometrica*, 48(5), 1305-1312.

[] Blanchard, O y Fischer S. (1989). Lectures on Macroeconomics. Massachussets Institute of Technology. MIT Press.

[] Blanchard, O y Quah, D. (1989). “The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances”. *American Economic Review*, 79(4), 654-673.

[] Blanchard, O. y Kiyotaki, N. (1987). “Monopolistic Competition and the effects of Aggregate Demand”. *American Economic Review.* vol 77, issue 4 (Septiembre), 647-666.

[] Blanchard, O, y Kahn C. (1980). “The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations”. *Econometrica*, vol 48, 1305-1311.

[] Blanchard, O. (2000). “What do we know about macroeconomics that Fisher and Wicksell did not”.*The Quarterly Journal of Economics.* Noviembre. 1375-1409.

[] Boldrin, M., Christiano, L. y Fisher, J. (1995). “Asset pricing lessons for modeling business cycles” WP5262. National Bureau of Economic Research.

[] Boscá J. Bustos A, Díaz A, Doménech R, Ferri J, Pérez E, Puch L (2007) “A rational expectations model for simulation and policy evaluation of the Spanish economy”. *Documento de Trabajo de la Dirección General de Presupuestos* D-2007-04.

[] Boschen, J y Grossman, H.I. (1982). “Test of Equilibrium Macroeconomics Using Contemporaneous Monetary Data”. *Journal of Monetary Economics*, 10, 309-333.

[] Bouakez, H. y Rebei, N. (2007): “Why does private consumption rise after a government spending shock?”. *Canadian Journal of Political Economy* 40: 954-79.

[] Brechling, F (1965). “The Relationship between Output and Employment in British Manufacturing Industries”. *Review of Economic Studies*, 32(3), 187-216.

[] Brock, W. y Mirman, L. (1972). “Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case,” *Journal of Economic Theory*, 4(3), 479–513.

[] Bronfenbrenner, M. (1969). “Is the Business Cycle obsolete ?”. Ed. Wiley. New York.

[] Burnside, C, Eichenbaum M. y Rebelo, S. (1993). “Labor Hoarding and the Business Cycle”. *Journal of Political Economy*, 101(2), 245-273.

[] Burnside, C. y Eichenbaum, M. (1996). "Factor Hoarding and the Propagation of Business-Cycle Shocks". *American Economic Review*, 86(5), 1154-1174.

[] Burriel, P, Fernández-Villaverde, J y Rubio-Ramírez. J. (2010). "MEDEA: a DSGE model for the Spanish economy". *Series* 1, 175–243. Springer-Verlag.

[] Calvo, G. (1983). "Staggered prices in a utility-maximizing framework". *Journal of Monetary Economics*, vol 12, 383-398.

[] Campbell, J y Mankiw, G. (1987). "Are output fluctuations transitory?". *The Quarterly Journal of Economics*, 102, Nov, 857-890.

[] Campbell, J. y Mankiw, G. (1988). "International Evidence on the Persistence of Economic Fluctuations". Mimeo, Pricieton University Press.

[] Campbell, J.Y. (1994). "Inspecting the Mechanism: An Analytical Approach to the Stochastic Growth Model". *Journal of Monetary Economics* 33 (June), 463-506.

[] Campbell, J. y Shiller, R (1988). "The dividend-price ratio and expectations of futue dividends and discount factors". *Review of Financial Studies*, vol 1, 195-228.

[] Campbell, J. (2003). "Asset prices, Consumption, and the Business Cycle". (Taylor J. y . Woodford, Editores). *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1, cap 19, 1231–1303.

[] Canova, F. (1998). "Detrending and Business Cycle Facts". *Journal of Monetary Economics*. Vol 41, 475-512.

[] Canova, F. y De Nicolo, G (2002), " Money Matters for Business Cycle Fluctuations in the G7". *Journal of Monetary Economics*, 49, 1131-1159.

[] Cass, D. (1965). "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation". *Review of Economic Studies* 32 (July), 233-240.

[] Chari, V.V. (1998). "Nobel Laureate Robert E Lucas Jr: Architect of Modern Macroeconomics". *The Journal of Economic Perspectives*, vol 12, N^o 1, 171-186.

[] Chari, V.V., Kehoe, P y McGrattan, E. (2000)."Sticky Prices Models of the Business Cycle: Can the Contract Multplier Solve the Persistence Problem?". *Econometrica* 68(5), Sept, 1151-1179

[] Chari, V. Kehoe, P., y McGrattan, E. (2004). "Are structural VARs useful guides for developing business cycle theories?". *Federal Reserve Bank of Minneapolis*, Working Paper, 631.

[] Chari, V. Kehoe, P., y McGrattan, E. (2007). "Business Cycle Accounting". *Econometrica* ,Volume 75, Issue 3, pages 781–836, May 2007.

[] Chatterjee S. (2000). "From Cycles to Shocks: Progress in Business-Cycle Theory". *Business Review*, Federal Reserve Bank of Philadelphia. March/April, 1-11.

[] Cho, J y Cooley, T (1993). "Employment and Hours over the Business Cycle". *Journal of Economic Dynamics and Control* 18 (1994) 411-432.

[] Cho, J y Cooley, T (1995). "The business cycle with nominal contracts". *Economic Theory* 6, 13-33.

[] Christiano, L. y Eichenbaum, M. (1992). "Current real business cycles theories and aggregate labor market fluctuations". *American Economic Review* 82: 430-50.

[] Christiano, L., Eichenbaum, M. y Evans, C. (2005). "Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy." *Journal of political Economy*, 113(1), 1-45.

[] Christiano, L, Motto, R y Rostagno, M. (2006). "Monetary Policy and a Stock Market Boom-bust Cycle". *Mimeo, Northwestern University.*

[] Clarida, R, Galí, J. y Gertler, M. (2000). "Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory". *The Quarterly Journal of Economics* 115 (1): 147–180.1

[] Clower, R.W. "A Reconsideration of the Microfundations of Monetary Theory". *Western Economic Journal.* 6(1) Dec, 1-9.

[] Cochrane, J. (1988). "How Big is the random walk ?". Journal of Political Economy, 96 n^o 5, 893-920.

[] Cogley, T y Nason, J. (1995). "Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series. Implications for Business Cycle research." *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, 253-278.

[] Collard, F y Erz, G (2000). "Stochastic nominal wage contracts in a cash-in-advance model". *Recherches Économiques de Louvain,* vol 66, 2821-301.

[] Collard, F y De la Croix, D. (2000). "Gift Exchange and the Business Cycle: The Fair Wage Strikes Back". *Review of Economic Dynamics*, 3, 166-193.

[] Cooley, T.F y Hansen, G. (1989). "The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model". *The American Economic Review,* 79(4), Sept, 733-748.

[] Cooley, T.F y Ohanian, L.E (1991). The cyclical behavior of prices". *Journal of Monetary Economics*, 28, 25-60.

[] Cooley, T.F. y Prescott, E.C. (1995). "Economic Growth and Business Cycles". En Frontiers of Business Cycle Research, Princeton University Press, 1-38.

[] Cooley, T. y Dwyer, M. (1998). "Business cycle analysis without much theory A look at structural VARs". *Journal of econometrics,* 83(1), 57-88.

[] Cooley, T, Hansen, G. (1998). "The role of monetary shocks in equilibrium business cycle theory: three examples". *European Economic Review* 42, 605-617.

[] Dedola, L y Neri, S. (2004). "Can the RBC hypothesis be rescued ?. A model-based VAR analysis." Mimeo.

[] Diamond, P.A (1965). "National Debt in a Neoclassical Growth Model". *American Economic Review* 55, 5 (Dec), 1126-1150.

[] Dixit, A y Stiglitz. "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity," *American Economic Review*, 67(3), 297–308.

[] Dolado, J.J, Sebastián, M y Vallés, J. (1993). "Cyclical Patterns of the Spanish Economy". *Investigaciones Económicas.* Volumen XVII (3). Sept, 445-473

[] Dotsey, M (1990). "The economic effects of production taxes in a stochastic growth model". *American Economic Review*, 80, 1168-1182.

[] Dunlop, J. (1938). "The movements of real and money wage rates". *Economic Journal*, 48, 413-434.

[] Ebell, M. (2006). "Labor Market Search, the Participation Margin and the Business Cycle: A Fresh Look". Humboldt-University, Berlín.

[] Eichenbaum, M. (1991). "Real business-cycle theory: wisdom or whimsy?". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15(4), 607-626.

[] Eisner, R. (1988). "Extended accounts for national income and product". *Journal of Economic Literature*, vol. 26 (4), 1611-1684.

[] Erceg, C. J., Gust, C., & Guerrieri, L. (2005). "Can long-run restrictions identify technology shocks?". *Journal of the European Economic Association*, 1237-1278.

[] Evans, C. L. (1992). "Productivity shocks and real business cycles". *Journal of Monetary Economics*, 29(2), 191-208.

[] Fair, C. (1992). "The Cowles Comission Approach, Real Business Cycle Theories and New Keynesian Economics". *National Bureau of Economic Research*, WP3990.

[] Faust, J. (1998). "The Robustness of Identified VAR Conclusions about Money". *Carnegie Rochester Series on Public Policy*, Vol. 49, pp.207-244.

[] Farmer, R. y Guo, J. (1994)." Real Business Cycles and the Animal Spirits Hypothesis". *Journal of Economic Theory*, 63, 42-73.

[] Fay, J. y Medoff, J. (1985). "Labour an Output Over the Business Cycle: Some Direct Evidence". *The American Economic Review*, 75(4), Sept, 638-655.

[] Fernández-Villaverde J y Rubio-Ramírez, J. (2004)."On the solution of the growth model with Investment-Specific Technological Change". Mimeo.

[] Fernández-Villaverde, J (2010). "The econometrics of DSGE models". *Series Springer-Verlag,* Volume 1, Issue 1,March, 3-49.

[] Fischer, S. (1977). "Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule". *Journal of Political Economy* 85 (febrero): 191-205.

[] Fischer, S. (1979). "Capital Accumulation on the Transition Path in a MOnetary Optimizing Model". *Econometrica* 47(6), 1433-1439.

[] Fisher, J. (2003). "The New View of Growth and Business Cycles". *Federal Reserve Bank of Chicago Economic Perspectives* 23(1), 35-56.

[] Fisher, J. (2006). "The dynamic effects of neutral and investment-specific technology shocks". *Journal of political Economy*, 114(3), 413-451.

[] Francis, N y Ramey, V (2004). "Is the Technology-Driven Real Business Cycle Hypothesis Dead ? Shocks and Aggregate Fluctuations Revisited.". *Journal of Monetary Economics*, 52(8), 1379-1399.

[] Francis, N., Owyang, M. y Theodorou, A. (2003). "The use of long-run restrictions for the identification of technology shocks", *Federal Reserve Bank of St Louis Review*,

Vol. 85, No. 6, pp. 53-66.

[] Friedman, M y Schwartz, A. (1963). "A Monetary History of the U.S." Princeton, Princeton University Press.

[] Friedman, M. (1968). "The Role of Monetary Policy". *American Economic Review* 58 (Marzo), 1-17.

[] Frisch, R. (1933). "Propagation problems and impulse problems in dynamic economic". *Economic Essays in honor of Gustav Cassel.* Allen & Unwin, London. Reimpreso en Gordon y Klein (1966). *Readings in Business Cycles,* 155-187.

[] Galí, J. (1992). "How ell Does the IS-LM Model Fit Postwar U.S. Data ?". *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), May, 709-738.

[] Galí, J. (1995) "Real Business Cycles with Involuntary Unemployment". Center for Economic Policy Research. Mimeo.

[] Galí, J. (1999). "Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations"?. *American Economic Review*, 89(1) March, 249-271.

[] Galí, J., & Rabanal, P. (2005). "Technology Shocks and Aggregate Fluctuations: How Well Does the Real Business Cycle Model Fit Postwar US Data?". *NBER Macroeconomics Annual* 2004, Volume 19 (pp. 225-318). MIT Press.

[] Galí, J. (2008). Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle. An introduction to the New Keynesian Framework. Princeton University Press.

[] Galí, J, Smets, F y Wouters, R. (2011). "Unemployment in an estimated New Keynesian Model". *NBER, Working Paper* 17084.

[] Ganelli, G. y Tervala (2009): "Can government spending increase private consumption? The role of complementarity". *Economics Letters*, Elsevier 103(1): 5-7.

[] García de Paso, I. (1999). Macroeconomía Superior. Ed. Pirámide.

[] Goldfeld, S y Sichel, D (1990). "The Demand for Money". *The Handbook of Monetary Economics.* Friedman, B y Hahn, F (Editores), Vol I, Amsterdam, North-Holland, 299-356.

[] Goodfriend, M y King, R. (1997). "The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy". NBER Macroeconomics Annual, 231-282.

[] Gospodinov, N, Maynard, A y Pesavento, E (2009). "Sensitivity of impulse responses to small low frequency co-movements: Reconciling the evidence on the efects of technology shocks". CIREQ Cahier 03-2009, March.

[] Gravelle, H y Rees, R. (2004). Microeconomía (3^a edición). Pearson-Prentice-Hall.

[] Greenwood, J. y Hercowitz, Z. y Huffman, G. W. (1988). "Investment, capacity utilization, and the real business cycle". *The American Economic Review*, 78, n^o 3, 402-417.

[] Greenwood, J. y Hercowitz, Z. (1991). "The allocation of capital and time over the business cycle". *Journal of Political Economy*, 99 (6), 1188-1214.

[] Greenwood, J, Rogerson, R y Wright, R. (1993). "Putting Home Economics into Macroeconomics". Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, vol 17 n^o 3, 2-11.

[] Greenwood, J., Hercowitz, Z. y Krusell, P. (1997). "Long-run implications of investment-specific technological change". *The American Economic Review*, Vol. 87, n^o 3 (Jun), 342-362.

[] Greenwood, J., Hercowitz, Z., y Krusell, P. (2000). "The role of investment-specific technological change in the business cycle". *European Economic Review*, 44(1), 91-115.

[] Guo, J., Sirbu, A.y Weder, M. (2015). "News about aggregate demand and the business cycle". *Journal of Monetary Economics*, 72, 83-96.

[] Haberler, G. (1937). "Prosperity and Depression. A theoretical analysis of cyclical movements". Harvard University Press. Cambridge, Massachussets. 5^a edición, 2^a impresión (1968).

[] Haberler, G. (editor) (1956) "Ensayos sobre el ciclo económico". Fondo de Cultura Económica. México, Buenos Aires.

[] Hairault, J. y Portier (1995). "Cash in Advance Constraint and the Business Cycle". Advances in Business Cycle Research. Henin P-Y (Editor). Springer-Verlag, Berlin, 107-142.

[] Hall, R, (1978). "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence". *Journal of Political Economy* 86 (6): 971–987.

[] Hall R. (1988). "The relation between price and marginal cost in US industry". *Journal of Political Economy*, 96 (1988), pp 921–947.

[] Hall, R. (2005). "Employment fluctuations with equilibrium wage stickiness". *American Economic Review*, 95(1), 50-65.

[] Hamilton, J. (2008). "Understanding crude oil prices". *National Bureau of Economic Research*. WP14492).

[] Hansen, L. (1982). "Large sample properties of generalized method of moments estimators". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1029-1054.

[] Hansen, A. (1951). "Business Cycles and National Income". W.W. Norton & Company Inc. New York.

[] Hansen, G. (1985). "Indivisible Labor and the Business Cycle". *Journal of Monetary Economics* 16 309-327.

[] Heer, B y Maussner, A (2005). Dynamic General Equilibrium Modelling. Springer Verlag, Berlín.

[] Hicks J.R. (1950). "A Contribution to the Theory of the Trade Cycle". Oxford: Oxford University Press.

[] Hicks, J.R. (1937). "Mr. Keynes and the "Classics"; A Suggested Interpretation".*Econometrica*, Vol. 5, No. 2 (Apr), 147-159.

[] Huh C y Trehan, B. (1991). "Real Business Cycles: A selective survey.". *Economic Review*. Federal Reserve Bank of San Francisco, Spring, n^o 2.

[] Ireland, P. (2004). "Technology shocks in the new Keynesian model". *Review of Economics and Statistics*, 86(4), 923-936.

[] Ireland, P. (2011). "A New Keynesian Perspective of the Great Recession". *Journal of Money, Credit and Banking,* 43(1), 31-54.

[] Jaimovich, N., y Rebelo, S. (2007). "Behavioral theories of the business cycle". *Journal of the European Economic Association*, 5(2-3), 361-368.

[] Jermann, U. J. (1998). “Asset pricing in production economies”. *Journal of monetary Economics*, 41(2), 257-275.

[] Juglar, C. “Des crises commerciales et leur retour periodique en France, en Angleterre et aux Etats Units”. Ed.Guillaumin, París.

[] Kaldor,N (1961).“Capital Accumulation and Economic Growth,” in F.A. Lutz and D.C. Hague,eds., The Theory of Capital, St. Martins Press, 1961, pp. 177–222

[] Keynes, J.M. (1930). Treatise on Money. Traducción al Castellano Tratado sobre el dinero. (2010). Fundación ICO, Síntesis. Madrid.

[] Keynes, J.M. (1936). Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero. Fondo de Cultura Económica, 3^a Edición, 2001.

[] Kim, S. (1999). “Do monetary policy shocks matter in the G-7 countries? Using common identifying assumptions about monetary policy across countries”. Journal of International Economics, 48(2), 387-412.

[] King, R y Plosser, C. (1984). “Money, Credit and Prices in a Real Business Cycle”. *American Economic Review*, 74(3) June, 363-380.

[] King, R, Plosser, C, y Rebelo, S. (1988). “Production, Growth and Business Cycles I: The Basic Neoclassical Model”. *Journal of Monetary Economics* 21 (1988). 195-232.

[] King, R, Plosser C y Rebelo, S (1988). “Production, Growth and Business Cycles II: New Directions”. *Journal of Monetary Economics*, 21, 309-341.

[] King, R. y Rebelo, S. (1999). “Resuscitating Real Business Cycles”. *Handbook of macroeconomics*, 1, 927-1007.

[] Kirman, A. (1992). “Whom or What Does the Representative Individual Represent?”. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, No. 2 (Spring, 1992), pp. 117-136

[] Koopmans, T. (1946). “Measurement without Theory”. *Review of Economic and Statistics,* 29(3), 161-172.

[] Kydland, F. y Prescott, E. (1982). “Time-to-build and aggregate fluctuations”. *Econometrica* 50: 1345-1370.

[] Kydland, F.y Prescott, E. (1994). "Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth". The Rational Revolution Expectations. Readings from the Front Line, 307-333.

[] Kydland, F. y Prescott, E (1988). "The workweek of capital and its cyclical implications". *Journal of Monetary Economics*, 21, 343-360.

[] Laidler, D.E.W. (1976)."An Elementary Monetarist Model of Simultaneous Fluctuations in Prices and Output" (1976).En Frisch (ed) *Inflation in Small Countries.* Berlin, Springer-Verlag, 75-89

[] Leeper, E. Sims, C.., Zha, T., Hall, R., & Bernanke, B. (1996). " What does monetary policy do?". *Brookings papers on economic activity*, 1-78.

[] Lettau, M. (2003). "Inspecting the Mechanism: Closed form solutions for asset prices in Real Business Cycle Models". *The Economic Journal*, 113, 550-575.

[] Linnemann, L. (2006): "The efects of government spending on private consumption: a puzzle?" *Journal of Money, Credit and Banking* 38: 1715-35.

[] Liu, Z y Phaneuf, L. (2011). "The adjustment of hours and real wages to technology shocks: Assesing the role of nominal rigities". Mimeo.

[] Long, B John y Plosser, Ch. (1983) "Real Business Cycles". *Journal of Political Economy.* Vol. 91, no 1, 39-69.

[] Lucas, R.E. Jr y Rapping, L (1969). "Real Wages, employment and inflation". *Journal of Political Economy*, 77, 721-754.

[] Lucas, R.E. Jr (1972). "Expectations and the Neutrality of Money". *Journal of Economic Theory*, 4, 103-124.

[] Lucas, R.E. Jr. (1976). "Econometric Policy Evaluation:A Critique". Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1, 19-46.

[] Lucas, R.E. Jr (1977). "Understanding Business Cycles". Stabilization of the Domestic and International Economy, vol 5 of Carnegie-Rochester Series on Public Policy. Eds Brunner, K and Meltzer. Amsterdam, North Holland Publishing Company, 7-29.

[] Lucas, R.E. Jr. (1978). "Asset prices in an exchange economy". *Econometrica*, vol 46, 1429-1445.

[] Lucas, R.E. Jr. (1980). "Methods and Problems in Business Cycle Theory". *Journal of Money, Credit and Banking*, 12, 696-715.

[] Lucas, R. E. Jr. (1988). "On the mechanics of economic development". *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3-42.

[] Ludvigson, S. (1996). "The macroeconomics effects of government debt in a sotchastic growth model". *Journal of Monetary Economics*, 38, 25-45.

[] McCallum, B. (1989). "Real Business Cycle Models". En R.J. Barro, ed. *Modern Business Cycle Theory*, 16-50. Cambridge MA. Harvard University Press.

[] McCallum, B (1993). "Real Business Cycle Theories". Macroeconomics: A survey of research strategies. En Vercelli, A y Dimitri, N (Editores).

[] McCandless, G. (2008). "The ABCs of RBCs. An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models". Harvard University Press.

[] McGrattan, E. R., Rogerson, R., & Wright, R. (1992). "Estimating the stochastic growth model with household production". *Manuscript. Federal Reserve Bank of Minneapolis.*

[] McGrattan, E. (1994). "The macroeconomics effects of distortionary taxation". *Journal of Monetary Economics* 33, 573-601.

[] Mankiw, G., Rotemberg, J., y Summers, L. (1982). "Intertemporal substitution in macroeconomics". *The Quarterly Journal of Economics* (1985) 100 (1), 225-251.

[] Mankiw, G. (1989). "Real business cycles: A new Keynesian perspective". *Journal of Economic Perspectives*, vol 3, n^o 3, 79-90.

[] Marcet, A y Ravn, M. (2004). "The HP-Filter in Cross-Country Comparisons". *Center for Economic and Policy Research* (CEPR), Febrero, DP4244

[] Mertens, K. (2014) "Uncertainty, rational expectations, and staggered wage setting". Mimeo.

[] Merton, R.C. (1969). "Liftime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continous Time Case". *Review of Economics and Statistics* 51, 247-257.

[] Metzler, L.A. (1941). The Nature and Stability of Inventory Cycles". *Review of Economics and Statistics.* 23, 113-129.

[] Mishkin, F.S (1982). "Does Anticipated Money Matter ? An Econometric Investigation". *Journal of Political Economy*, 90, 22-51.

[] Mitchell, W.C. (1927). “Business Cycles: the problem and its setting”. National Bureau of Economic Research, New York.

[] Mitchell, W.C. y Burns, A. (1946). Measuring Business Cycles. National Bureau of Economic Research, New York

[] Mortensen, D. y Pissarides, C. (1999). “New developments in models of search in the labor market”. *Handbook of labor economics*, 3, 2567-2627.

[] Mullineux, A. (1984). “The Business Cycle after Keynes. A Contemporary Analysis”. Wheatsheaf Books Ltd, Brighton.

[] Nelson, C. y Plosser, C. (1982). “Trends and random walks in macroeconmic time series: some evidence and implications”. *Journal of Monetary Economics*, 10(2), 139-162.

[] Obstfeld, M y Rogoff, K. (1996). Foundations of International Macroeconomics. The MIT Press.

[] Oi, W. (1962). “Labor as a quasi-fixed factor”. *The Journal of Political Economy*, vol 70, n^o 6, 538-555.

[] Ortega, E. (1998). “The Spanish Business Cycle and its Relationship to Europe”. *Banco de España, Servicio de Estudios*, DT n^o 9819.

[] Okun, A. (1962). “Potential GNP: Its Measurement and significance”. *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section* Vol. 7, pp. 89-104.

[] Patinkin, Don (1972) “Wicksell’s cumulative process in theory and practice” en Patinkin, Don, Studies in monetary economics, Harper & Row, Publishers, London.

[] Peersman, G y Straub, R. (2004). “Technology Shocks and Robust Sign Restrictions in a Euro Area SVAR”. European Central Bank, Working Paper Series, n^o 373.

[] Pencavel, J. (1986). “Labor supply of men: A survey.” *Handbook of Labour Economics*, (Ashenfelter, O y Layard, R, ed). North-Holland, Amsterdam, 3-102.

[] Pesavento, E. y Rossi, B. (2004). “Do Technology Shocks Drive Hours Up or Down?: A Little Evidence from an Agnostic Procedure” Duke University, mimeo.

[] Phelps, E. (1966). Golden rules of economic growth. Norton, New York.

[] Phelps, E. (1968). "Money-Wage Dynamics and Labor Market Equilibrium". *Journal of Political Economy* 76 (julio-agosto, parte 2), 678-711.

[] Phelps, E.S. (1990). Seven Schools of Macroeconomic Thought. Oxford, Clarendon Press.

[] Phillips, A.W. (1958). "The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom, 1861-1957". *Economica* 25 (Noviembre), 283-299.

[] Pissarides, C. (1990). Equilibrium unemployment theory. Oxford, Blackell.

[] Plosser, C. (1989). "Understanding real business cycles". *The Journal of Economic Perspectives*, vol 3, n^o 3, 51-77.

[] Pollak, R. y Wachter, M. (1975). "The relevance of the household production function and its implications for the allocation of time". *The Journal of Political Economy*, Vol. 85, N^o 5 Oct. 255-278.

[] Prescott, E. (1986). "Theory Ahead of Business-Cycle Measuremente". *Carnegie- Rochester Conference Series on Public Policy* 25 (Fall). 11-44.

[] Prescott, E. (1991). "Real Business Cycle Theory: What have we learned ?". Revista de Análisis Económico, vol 6 n^o 2, (Nov), 3-19.

[] Prescott, E. (1986). "Theory Ahead of Business Cycle Measurement". *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, (Fall), 9-22.

[] Puch, L, Licandro, O. (1997). "Are there any special features in the Spanish Business Cycle ?". *Investigaciones Económicas*, Vol XXI(2), 361-394.

[] Ramsey, F (1928). "A Mathematical Theory of Saving". *Economic Journal*, 38 (Dec), 543-559. Reimpreso en Stiglitz y Uzawa (1969).

[] Rebelo, S. (2005). "Real Business Cycle Models: Past, Present and Future". *Scandinavian Journal of Economics*, 107(2), 217-238.

[] Roberts, J.M. (1995). "New Keynesian Economics and the Phillips Curve". *Journal of Money, Credit and Banking* 27 (4): 975–984.

[] Rogerson, R. (1988). "Indivisible Labor, Lotteries and Equilibrium". *Journal of Monetary Economics* 21 (1988) 3-16.

[] Romer, D. (2001). Macroeconomía Avanzada. Mc Graw Hill. 3^a ed.

[] Romer, P. (1986). "Increasing returns and long-run growth". *The Journal of Political Economy*, Vol. 94, Nº 5, Oct,1002-1037.

[] Rotemberg, J. (1982). "Monopolistic Price Adjustment and Aggregate Output". *Review of Economic Studies* 44, 517-531.

[] Rouwenhorst, K. (1991). "Time to build and aggregate fluctuations: A reconsideration". *Journal of Monetary Economics,* 27(2), 241-254.

[] Rouwenhorst, G. (1995). "Asset Pricing implications of equilibrium Business Cycle Models". En *Frontiers of Business Cycle Research*, (Ed Cooley, T). Princeton University Press, 294-330.

[] Salop, S. (1979). "A model of the natural rate of unemployment". *American Economic Review*, 69, 117-125.

[] Samuelson, P. (1936). "Interactions Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration". *Review of Economics and Statistics.* 21, 75-78.

[] Samuelson, P. (1958). "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money". *Journal of Political Economy* 66, 6 (Dec), 467-482.

[] Samuelson, P. (1969). "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming". *Review of Economics and Statistics* 51 (August), 824-834.

[] Sargent, T, Wallace, N (1975). "'Rational Expectations', the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule. *Journal of Political Economy* 83 (Abril), 241-254

[] Sargent, T. (1978). Estimation of dynamic labor demand schedules under rational expectations. *The Journal of Political Economy*, 86 1009-1044.

[] Sargent, T. (1979). Macroeconomic Theory. Academic Press. New York.

[] Shapiro, M y Watson, M. "Sources of Business Cycle Fluctuations". En *NBER Macroeconomics Annual*, (S. Fisher, editor). MIT Press, 111-148.

[] Shea, J. (1998). " What Do Technology Shocks Do?". *NBER Working Paper* No. 6632.

[] Shimer, R. (2005). "The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies". *American Economic Review,* 95 (1), 25-49.

[] Sidrauski, M(1967). "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy". *American Economic Review*, 57(2) May, 534-544.

[] Sims, C.A., (1972). "Money, income and causality". *American Economic Review* 62, 540-552.

[] Sims, C.A. (1980). "Comparison of interwar and postwar business cycles: Monetarism reconsidered". *American Economic Review* 70, 250-257.

[] Sims, C.A. (2011). "The Real Business Cycle Model". Graduate Macro Theory II, Mimeo. University of Notre Dame, Spring 2011

[] Slutzky, E. (1927). "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes". *Econometrica,* 5, 19-60.

[] Smets, F. y Wouters, R. (2003). "An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area". *Journal of the European economic association*, 1(5), 1123-1175.

[] Smets, F. y Wouters, R. (2007). "Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach". *National bank of Belgium* WP109.

[] Smith, R.T. (1992). "The cyclical behavior of prices". *Journal of Money, Credit and Banking* 24, 413-430.

[] Solow, R. (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function". *Review of Economics and Statistics* 39, 312-320.

[] Solow, R. (1964). "Draft of Presidental Address on the Short-Run Relation of Employment and Output". Unpublished manuscript. Citado en Fay y Medoff (1985).

[] Solow, R. (1979). "Another possible source of wage stickiness". *Journal of Macroeconomics* 1, 79-82.

[] Stadler, G.(1994). "Real business cycles". *Journal of Economic Literature*, 1750-1783.

[] Stock J. y Watson M. (1999). Business Cycle Fluctuations in US Macroeconomic Time Series. Handbook of Macroeconomics. Elsevier.Vol 1. Capítulo 1.

[] Summers, L. (1986). " Some Skeptical Observations on Real Business Cycle Theory". *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, (Fall), 23-29.

[] Stiglitz, J, Uzawa, H. (Editores). (1969). "Readings in the Modern Theory of Economic Growth". Cambridge, MA. MIT Press

[] Taylor, J.B. (1979). "Staggered Wage Setting in a Macro Model". *Journal of Political Economy* 88 (Febrero), 1-23.

[] Taylor, J.B y Uhlig, H. (1990). "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods." *Journal of Business & Economic Statistics*, January 1990, Vol. 8, No. 1

[] Taylor, J.B. (1993). "Discretion versus Policy Rules in Practice". *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39, 195–214.

[] Taylor. J.B y Uhlig, H. (1990). "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods". *Journal of Business & Economic Statistics*, (Jan), Vol. 8, No. 1 , 1-17.

[] Tharsis, L (1939). "Changes in Real and Money Wages". *Economic Journal*, 49 150-154.

[] Tobin, J. (1970). "Money and Income. Post Hoc Ergo Propter Hoc?". *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 84, No. 2. (May, 1970), pp. 301-317

[] Uhlig, H. (1999). "A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily" en Marimon y Scott (Editores) Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Oxford University Press, 30-61.

[] Uhlig, H. (2005). "What are the effects of monetary policy on output? Results from an agnostic identification procedure". *Journal of Monetary Economics* 52, 381–419.

[] Usabiaga, C. y O'Kean, J.M. (1994). La nueva macroeconomía clásica. Una aproximación metodológica al pensamiento económico. Ed. Pirámide.

[] Walsh, C. (2010). Monetary Theory and Policy. 3^{a} Edición. The MIT Press, Cambridge, Massachussetts.

[] Watson, M, (1993). "Measures of fit for calibrated models". *Journal of Political Economy,* 101, n^{o} 6, 1011-1041.

[] Wen, Y. (2005). "Where's the beef? The trivial dynamics of real business cycle models". *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper Series*, (2005-039).

[] Wen, Y. (2006). "Demand Shocks and Economic Fluctuations". *Federal Reserve Bank of St. Louis.* WP2006-011A.

[] Wickens, M. (2012). Macroeconomic Theory: a Dynamic General Equilibrium Approach. Princeton University Press.

[] Woodford, M. (2009). "Convergence in macroeconomics: elements of the new synthesis". *American economic journal: macroeconomics*, 1(1), 267-279.

[] Yellen, J. (1994). (1984). "Efficiency wage models of unemployment". *American Economic Review Proceedings* 74, 200-205.

[] Yun, T. (1996). "Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity, and Business Cycles". *Journal of Monetary Economics* 37, 2, 345-370.

[] Zagaglia, Paolo (2005) "Solving rational-expectations models through the Anderson-Moore algorithm: An introduction to the Matlab implementation" *Computational Economics* 26(1), 91–106.