EL NACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: "DESCARTES Y FERMAT"

José Mª Gavilán Izquierdo.
Ricardo Barroso Campos.
Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Sevilla.

INTRODUCCIÓN

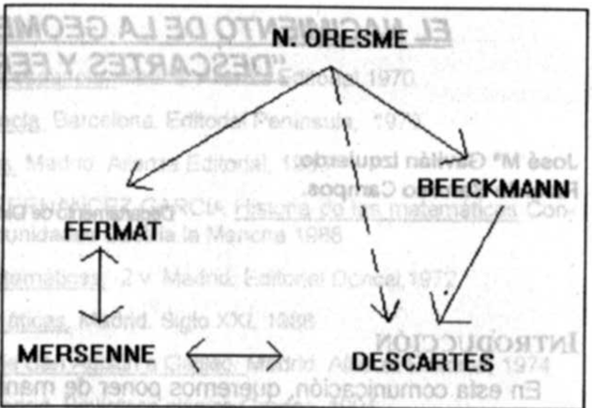
En esta comunicación, queremos poner de manifiesto, cómo se inventa la geometría analítica en el siglo XVII. Este nuevo método para resolver problemas, es inventado de manera simultánea e independiente por Descartes y Fermat. Los cuales, no introducen lo que hoy conocemos como coordenadas cartesianas (coordenadas ortogonales), sino un sistema de coordenadas oblicuas genérico, que en algún caso puede ser rectangular.

Tampoco, ninguno de los dos autores, llega a denominar a su sistema como de coordenadas y ni siquiera identifican una curva con su ecuación. Su gran mérito, creemos, consistió en abrir el camino al uso de ecuaciones como representación de la curva (identificando curva y ecuación), y al uso del álgebra como soporte y herramienta de la geometría. Ni ellos, ni sus contemporáneos llegaron a ser conscientes de su invento, por lo cual durante más de un siglo no se desarrollará esta geometría, no será hasta el siglo XIX cuando viva la edad de oro, al aplicarse para resolver los problemas clásicos de geometría sintética, como el problema de Apolonio (construir un círculo tangente a tres círculos dados).

No son los primeros, en utilizar una representación gráfica, pues en el siglo XIV Nicolás de Oresme (1.323-1.382) en un tratado sobre la variación de las cualidades [1] (en el sentido aristotélico) representa esta variación de la intensidad en dos ejes perpendiculares que denomina *longitud y latitud*, siguiendo la terminología propia de los mapas que usaban los cosmógrafos y marinos.La cualidad que representa es la variación de la velocidad en un movimiento uniformente acelerado, y los dos ejes son el tiempo y la velocidad Aunque la idea de Oresme va más dirigida al aspecto de variabilidad funcional, que al puramente geométrico.

[1] Tratado sobre las configuraciones de las cualidades y movimientos. (1.350)

Fermat, hace algunas referencias a los trabajos de Oresme, por lo que su influencia queda fuera de toda duda. Mientras que Descartes, que no cita sus fuentes, es muy probable que los conociera.[2] De modo gráfico, las relaciones entre ellos podrían ser estructurada así:



1.-Breve reseña de las biografías de Descartes y Fermat.

Nace René Descartes en Le Haye (hoy Le Haye de Descartes) el 31 de Marzo de 1.596. Hijo de la nobleza menor se hace llamar "Sieur de la Perron", lo que da una idea de su carácter. Estudió en un colegio de jesuitas desde 1.606 a 1615, lo que le proporcionó una sólida formación. Estudió latín, griego e italiano. Inicia en esta época el hábito de levantarse tarde, costumbre que logra mantener casi toda su vida, salvo en la época que fue preceptor de la reina Cristina de Suecia.

Estudió el Bachiller en Leyes, licenciándose en 1.616 el día siguiente de su examen y obteniendo el doctorado al mes siguiente. Viajó por numerosos países conociendo a Isaac Beeckmann, que jugó un papel importante en su vida.

No fue un escritor precoz ni prolífico, pues comenzó a escribir a los 41 años. Su trabajo de geometría aparece en un apéndice de su obra "Discurso del método" (1.637), titulado "*La Geometría*", que se divide en tres partes.

Pierre Fermat nace en 1.601 en Beaumont-de-Lomagne. Hijo de un comerciante, estudia Derecho en Toulouse. Ejerce su profesión de abogado, y se dedica al estudio de las matemáticas en su tiempo libre. No está muy interesado en la publicación de sus trabajos, tal vez por no ser consciente de su valor, por lo que aparecen como apéndices de otros escritos. Se dedicó también al estudio de otros campos de la ma-

[2] Colerus "Breve Historia de las Matemáticas" pag 146-161, y Youschkevitch "The concept of funtion..." pag 45-50.

temática, como la teoría de números, que dejó como observaciones a un ejemplar de la "*Aritmética*" de Diofanto.

2.-La aritmetización de la geometría.

La geometría analítica puede entenderse del siguiente modo:

"Al descartar deliberadamente todas las construcciones geométricas, he querido que el lector se dé cuenta de que existe una manera de considerar la geometría, que se podría llamar ***geometría analítica*** *, y que consiste en deducir las propiedades de lo extenso a partir del menor número de principios, por métodos puramente analíticos ..."* (Lacroix, Tratado del cálculo diferencial e integral , 1797).

Esta definición se ajusta a la idea manejada hoy día de geometría analítica como una aritmetización de la geometría. Sin embargo, si atendemos a la obra de Descartes, "La Geometría" (1637), pensamos que realmente, la idea primera de Descartes es aplicar la geometría para resolver problemas aritméticos, esto no es de extrañar con su idea de la resolución de problemas (ecuaciones) que no consiste en llegar a un resultado algebraico, sino en la construcción "real" de la solución. Por ejemplo, si desea resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2 = 0$, no le basta decir que $x = 2^{1/2}$ (no está tan interesado en las soluciones negativas, a las que llama "raíces falsas") , sino que además debe construir un segmento que sea de esa longitud.

En su obra, dedica la primera parte a hacer un análisis sobre la representación gráfica de las operaciones aritméticas *a saber, la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, y la extracción de raíces (que puede ser considerada como una especie de división).*

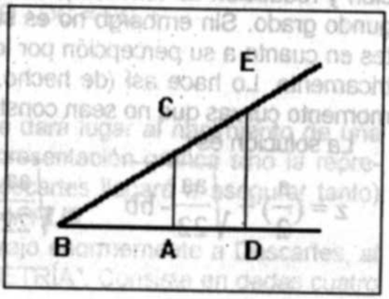
Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones geométricas.

<u>La multiplicación</u>

Sea, por ejemplo, AB la unidad y que sea preciso multiplicar BD por BC ; solamente debo unir los puntos A y C, trazando DE paralela a CA, siendo BE el resultado de esta multiplicación.

Usando el Teorema de Thales:

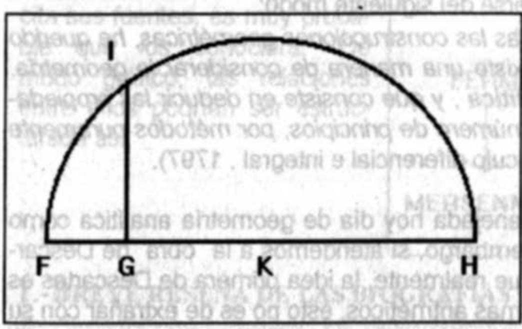
$$\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA} \qquad BE = BC.BD$$



La división.

O bien, si es preciso dividir BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, trazo AC paralela a DE, siendo pues, BC el resultado de tal división.

La extracción de la raíz cuadrada.



Si se desea calcular la raíz cuadrada de GH, se agrega FG que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales, tomando como centro el punto K, trazo el círculo FIH. Seguidamente trazo sobre el punto G hasta el punto I la perpendicular a FH, siendo GI la raíz buscada.

Los triángulos FGI y IGH son semejantes, luego por el Teorema de Thales:

$$\frac{GI}{FG} = \frac{GH}{GI} \qquad GI^2 = GH.1 \qquad GI = \sqrt{GH}$$

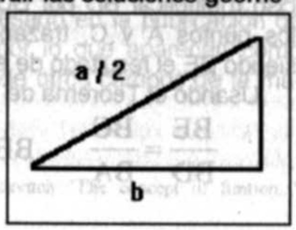
Veamos un ejemplo de cómo aplicar el método de Descartes a una ecuación de segundo grado, hay que tener en cuenta que para Descartes los términos de una ecuación han de ser homogéneos dimensionalmente, en todos los aspectos, es por ello que constantemente se refiere a multiplicar por la unidad.

$$z^2 = az - bb$$

El estudio de la ecuación de segundo grado es realizado en Europa a partir del siglo XII, al traducir los trabajos de Muhammad abn Musa al Khuwarizmi (siglo IX) que en su libro "Hhisab al-jabr wa-al-muqabala" (Libro sobre las operaciones de trasposición y reducción de términos), resuelve sistemáticamente ecuaciones de primer y segundo grado. Sin embargo no es suficiente para el pensamiento filosófico de Descartes en cuanto a su percepción por los sentidos. Quiere construir las soluciones geométricamente. Lo hace así (de hecho, no admitirá en ningún momento curvas que no sean construibles físicamente).

La solución es :

$$z = \left(\frac{a}{2}\right) + \sqrt{\frac{aa}{22} - bb} \qquad \sqrt{\frac{aa}{22} - bb}$$



Este radical puede ser interpretado gráficamente con el Teorema de Pitágoras:

Evidentemente, si b> a/2, el triángulo carece de sentido y no se pueden construir geométricamente las soluciones en el plano real, al ser complejas.

Descartes tiene en cuenta este hecho para buscar la solución geométrica (sólo debe añadir o sustraer de a/2, esta cantidad para obtener las **dos soluciones positivas**).

Las dos soluciones son positivas por las relaciones entre coeficientes y raíces.

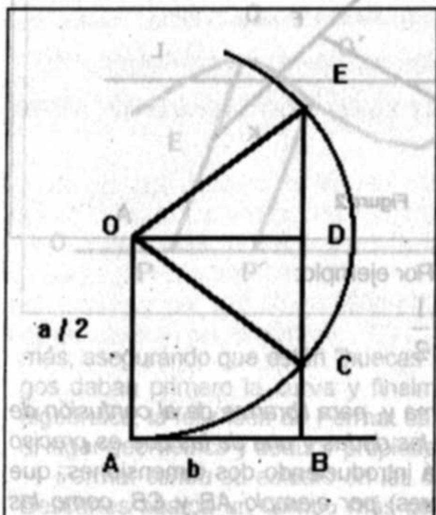


Figura 1

Descartes traza una circunferencia de radio a/2 para representar de este modo todas las posibles hipotenusas, traza también dos líneas paralelas de distancia b para representar los posibles catetos (de longitud b). De esta forma se garantiza tener los triángulos rectángulos que necesita. En el caso límite (b = a / 2), el triángulo degenera en el segmento OD

$$(DE)^2 = (OE)^2 - (OD)^2$$

$$(DE)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

En la figura 1, el triángulo ODE, nos va a proporcionar el radical apropiado a la solución (con el triángulo ODC ,que es igual al anterior, se obtendría la otra solución):

La solución gráficamente es : **z=BD+DE=BE**

La otra solución sería: z = BD - DC = BC.

3-. EL MÉTODO DE DESCARTES.

Para ilustrar el método que utiliza Descartes que dará lugar al nacimiento de una geometría cuyo pilar fundamental ya no será la representación gráfica sino la representación analítica (aunque en ningún momento Descartes llegará a asegurar tanto) usaremos su mismo ejemplo: *EL PROBLEMA DE PAPPUS* .

Conocido desde la antigüedad, este problema atrajo enormemente a Descartes, al cual dedicó unas 20 páginas de su Obra "LA GEOMETRÍA". Consiste en dadas cuatro rectas, que pueden ser más, MN, NK, ML, DA (figura 2), encontrar el lugar geométrico de los puntos para los que el producto de los segmentos trazados desde ellos bajo ángulos iguales a n/2 rectas se encuentren en una relación dada con respecto al producto de los segmentos trazados del mismo modo a la otra mitad de la recta. Por ejemplo:

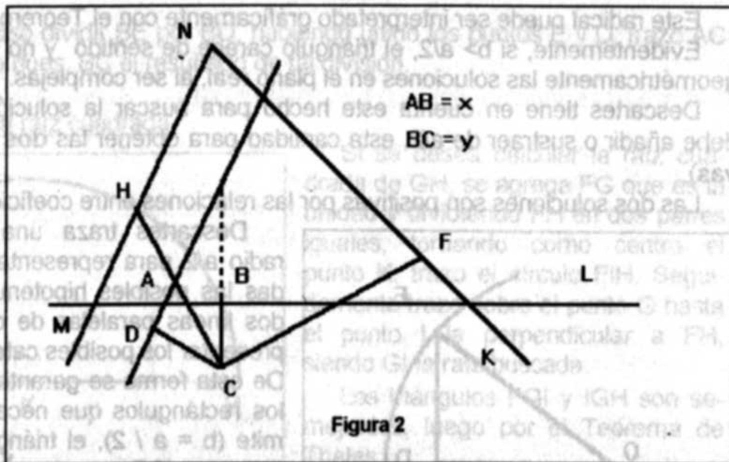


Figura 2

$$\frac{CB.CD}{CF.CH}=\frac{1}{2}$$

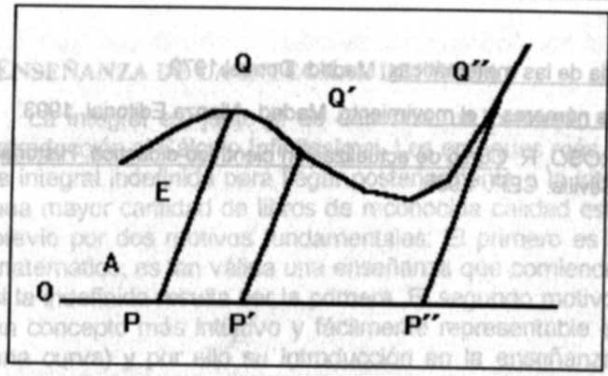
"En primer lugar, supongo resuelto el problema y, para librarme de al confusión de todas estas líneas, considero solamente una de las dadas y una de las que es preciso calcular (aquí consideramos que Descartes está introduciendo dos dimensiones, que llamará x e y no necesariamente perpendiculares) *por ejemplo AB y CB, como las principales y con las que intento relacionar todas las otras* (la relación será la ecuación algebraica*). Concedamos que el segmento de la línea AB, que está entre los puntos A y B, sea llamado **x**, y que BC sea **y**."*

Proponemos como aplicación del método de Descartes, el siguiente problema: *"Dados cuatro puntos, uno arbitrario de cada lado de un cuadrado, construir éste."*

4.-EL MÉTODO DE COORDENADAS DE FERMAT.

Pierre Fermat, contemporáneo de Descartes, introduce la idea de variable, antes de la publicación de La Geometría, como paso para el estudio de los lugares geométricos. Denomina a sus variables A y E, como representación de puntos que se mueven sólo en el primer cuadrante. Estas dos variables son idénticas a la x e y de Descartes, es decir, fijan la posición de un punto respecto de dos rectas, que no son necesariamente perpendiculares. La idea básica de Fermat:

"Siempre que en una ecuación se hallen dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar geométrico, cuyo extremo describe una línea recta o curva".



A y E son las cantidades desconocidas que permiten expresar las curvas con una ecuación algebraica. Fermat y Descartes siguen la notación (que llega hasta nuestros días) de representar con letras cantidades tal y como introdujo Vieta (1540-1603).

Esta idea de cantidad desconocida viene a significar que más que una incógnita es una variable; Descartes llegará a más, asegurando que están "huecas" y que se deben rellenar de cantidades. Los griegos daban primero la curva y finalmente obtenían la descripción verbal o ecuación algebraica; la feliz idea de Fermat es comenzar con la ecuación algebraica y construir el lugar geométrico y deducir propiedades.

Fermat centra su estudio en las curvas de primer y segundo grado, mientras que Descartes abarca un campo más general. Descartes en su generalidad clasifica los problemas según el grado de las ecuaciones de las soluciones a los problemas geométricos planteados.

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, CARL B. Historia de la Matemática. Madrid. Alianza Editorial .1987.

EDWARDS, CHARLES H. The Historical Development of the Calculus. New York. Springer-Verlag. 1979.

RIBNIKOV, K. Historia de las Matemáticas. Moscú. Mir. 1991.

COLLETTE, JEAN-PAUL. Historia de las Matemáticas. Madrid. Siglo XXI de España Editores SA. 1985.

KLINE, MORRIS. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Madrid. Alianza Editorial. 1992.

YOUSCHKEVITCH, A.P. The concept of funtion up to the Middle of the 19th Century. Archive for history of exact sciences. Vol 16

BOYER, CARL B. History of Analitic Geometry. New Jersey. The Scholar´s Bookshelf. 1956.

DESCARTES, R. La Geometría.

COLERUS, EGMONT. Breve historia de las matemáticas. Madrid. Doncel.1972.

SHEA, WILLIAM R. La magia de los números y el movimiento. Madrid. Alianza Editorial. 1993.

MAZA, C. GAVILÁN, J.M. Y BARROSO, R. Curso de actualización científico-didáctica: Historia de las Matemáticas y Enseñanza. Sevilla. CEP. 1.995.