UNA APROXIMACIÓN A LA DEFINICIÓN DESDE PERSPECTIVAS SOCIOCULTURALES

José María Gavilán Izquierdo, *Universidad de Sevilla (Sevilla)*
Isabel María Escudero Pérez, *Universidad de Sevilla (Sevilla)*
Gloria Sánchez-Matamoros García*, I.E.S."Andrés Benítez", Jerez de la Frontera (Cádiz)*

RESUMEN.

Uno de los aspectos importantes en la generación de conocimiento matemático de los estudiantes en cualquier nivel del sistema educativo es el proceso de definir, y el resultado del mismo, la definición. En este trabajo tratamos de acercarnos a ellos desde nuestra propia experiencia como profesores de diferentes niveles educativos, a través de ideas procedentes de perspectivas socioculturales, dentro del campo de la Educación Matemática. Pensamos que estudios de este tipo ayudan a reflexionar y discutir sobre los contenidos curriculares escolares, y pueden contribuir al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Nivel educativo: Enseñanza Secundaria, Universidad.

1. INTRODUCCIÓN.

En esta comunicación nos ocupamos del proceso matemático de definir y, en particular, en el resultado del mismo, la definición. En trabajos previos dentro de nuestro grupo, asumimos que el proceso de definir es, junto a otros procesos como probar, modelar, etc., de gran importancia en la generación de conocimiento matemático de los estudiantes en cualquier nivel de nuestro sistema educativo y destacamos el interés de su producto, la definición, como expresión final del mismo (García et al., 2006; Sánchez et al., 2006; Sánchez y García, 2006; Sánchez-Matamoros y Escudero, 2006; Sánchez-Matamoros y Gavilán, 2007).

El intento por comprender la complejidad de los fenómenos educativos en el contexto escolar hace que se consideren dentro del campo de la investigación en educación matemática nuevos enfoques o aproximaciones, que van aportando herramientas para analizar e interpretar dichos fenómenos. En los últimos tiempos, en este ámbito de investigación han surgido aproximaciones socioculturales (Wenger, 1998; Sfard, 2006) que conllevan nuevas formas de entender el aprendizaje en general, y el matemático en particular, así como el uso de distintas ideas teóricas para dar cuenta del mismo.

En nuestro trabajo vamos a utilizar las ideas propuestas por Sfard (2006) para "mirar" de forma distinta el proceso de definir y la definición en el contexto escolar. Pensamos que esta forma de abordar su estudio puede ayudar a los profesores a entender de forma más completa el aprendizaje matemático de los alumnos sobre ellos y plantear su enseñanza.

En lo que sigue vamos a presentar algunos elementos que nos van a permitir aproximarnos al objetivo de este estudio.

2. SITUANDO EL ESTUDIO.

Dos aspectos importantes nos permiten situar el estudio que aquí vamos a presentar. Por un lado, la consideración de la definición y del proceso de definir, y por otro, las ideas socioculturales que nos aportan nuevas formas de entender dicho proceso.

En relación a definir, la revisión previa de algunos trabajos sobre el tema (Borasi, 2001; Van Dormolen y Zaslavsky, 2003; Zaslavsky y Shir, 2005; García et al., 2006; Sánchez et al., 2006; Sánchez y García, 2006; Sánchez-Matamoros y Gavilán, 2007; Sánchez et al., 2008) nos permitieron identificar "definir" como el `proceso para llegar a establecer una definición', considerando que esta última prescribe el significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas. Se puede decir entonces que hay un proceso (definir) y un producto (la definición), dualidad que es necesario tener en cuenta cuando abordamos su estudio. Ese producto tiene unos atributos de distinta naturaleza:

a) Imperativos:

-No contradictoria: Las características de la definición deben ser consistentes.

Este atributo conlleva que una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo y en el mismo sentido. Profundizando en esta idea, hay que tener en cuenta que una teoría formal se considera inconsistente cuando, en base a sus axiomas y reglas de inferencia, una sentencia y su negación pueden ser demostradas. O sea: Si dadas dos proposiciones verdaderas p y q, se cumple que p ➔ r y que q ➔ no r. Esto implica la descalificación de dicha teoría.

-No ambigua: Define de manera unívoca una clase de objetos.

Algunos autores caracterizan la no ambigüedad como que "su significado debe ser interpretado exclusivamente" (Zaslavsky y Shir, 2005, p.319). Este atributo, entendido como que en la definición se define de una manera unívoca una clase de objetos, permite que dado un objeto concreto sea posible incluirlo en esa clase o no sin ambigüedad.

Atendiendo a este atributo, podemos considerar dos tipos de definiciones (inclusivas, exclusivas), que además nos permiten relacionar dicho atributo con el atributo de la minimalidad de la definición:

- Definiciones inclusivas: un objeto de una clase puede pertenecer a otra clase. Puede darse una inclusión entre clases. Por ejemplo, las funciones lineales están incluidas dentro de las funciones afines ($y=ax+b$, a y b reales).

- Definiciones exclusivas: un objeto pertenece a una clase y no a otra. Por ejemplo, las funciones afines $y=ax+b$, a y b reales, con $b\neq 0$ por un lado, y por otro, las funciones lineales $y=ax$, a real.

-Invariante bajo el cambio de representación: Un objeto pertenece a una clase de objetos (concepto) independientemente del modo en que viene representado.

Pensamos que este atributo puede ser considerado como que las características de los objetos no se alteran al cambiar el registro o forma de representación. Por ejemplo, si se define una circunferencia por un gráfico, las características del gráfico deben respetar que todos los puntos equidisten del centro (lo que sería una definición con texto verbal) y si se calculan dichas distancias en forma euclídea para cualquier punto (x, y), dichas distancias deben ser constantes. En el cambio de representación podemos incluir cambios dentro de una misma forma de representación, lo que se puede denominar transformación. Por ejemplo, la recta del plano como conjunto de puntos (x, y) que verifican cierta condición, puede expresarse algebraicamente de distintas maneras, ecuación explícita, ecuación vectorial, ecuación paramétrica, etc.

-Naturaleza jerárquica: Los términos empleados en la definición deben ser básicos o estar previamente definidos, sin hacer referencia al propio concepto definido (definición no circular).

Este atributo ha sido caracterizado por otros autores añadiendo algunos aspectos. Así Borasi (1991) indica que "todos los términos empleados en la definición deberían estar previamente definidos, a menos que sea uno de los pocos términos sin definir asumidos como punto de partida en el sistema axiomático dentro del que se está trabajando" (Borasi, 1991, p.17). Debemos puntualizar que esta definición de Borasi aúna dos características identificadas por van Dormolen y Zaslavsky (2003): el criterio jerárquico y el de axiomatización.

b) Opcionales: Sólo vamos a considerar el caso de la Minimalidad.

- *Minimalidad:* No redundancia de características en la definición (ninguna característica se puede deducir de las restantes).

Por otro lado, desde una perspectiva sociocultural, las matemáticas son un tipo especial de discurso. Se entiende el término discurso como cualquier acto específico de comunicación, sea verbal o no, con otros o con uno mismo, sea sincrónico o asincrónico (Wenger, 1998; Ben-Yehuda et al., 2005; Sfard, 2006; Sánchez y García, 2009). Para caracterizar el discurso matemático, Sfard (2006) considera un conjunto de elementos que describimos a continuación:

Palabras matemáticas ('mathematical words' en el original)*:* Aquellas utilizadas en el discurso matemático, incluyendo los términos propios de la matemática.

Mediadores visuales ('visual mediators' en el original)*:* Entendidos como artefactos simbólicos específicos para este tipo de comunicación. Dentro de los mediadores visuales se incluyen los modos de representación.

Narrativas aceptadas ('endorsed narratives' en el original)*:* Conjunto de proposiciones que son aceptadas y etiquetadas como verdaderas por una comunidad dada. Las narrativas matemáticas para ser aceptadas tienen/ deben de ser construidas y sustanciadas de acuerdo con un conjunto de reglas bien definidas específicas de ese discurso.

Rutinas ('routines' en el original)*:* Son patrones repetitivos bien definidos característicos de un discurso dado. Las regularidades específicamente matemáticas pueden ser identificadas si uno ve el uso de las palabras matemáticas y mediadores matemáticos o sigue el proceso de crear y sustanciar narrativas. Las rutinas pueden ser de naturaleza algorítmica.

Todas las ideas anteriores, las aportaciones provenientes de distintos trabajos de investigación (García et al., 2006; García y Sánchez, 2008; Sánchez el al., 2006; Sánchez y García, 2006, 2009) y nuestra propia experiencia como profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos en relación con las matemáticas, nos han llevado a plantearnos como objetivo de este estudio mostrar cómo los elementos anteriormente citados se manifiestan en definir/definición.

En lo que sigue presentamos nuestra interpretación de cómo las palabras matemáticas, rutinas, narrativas aceptadas y mediadores visuales aparecen cuando pretendemos llegar a establecer una definición, vinculándolas a los atributos que hemos considerado que debe cumplir dicha definición.

3. IDENTIFICACIÓN DE PALABRAS MATEMÁTICAS, NARRATIVAS Y RUTINAS EN LA DEFINICIÓN

Para llevar a cabo el objetivo pretendido, los tres profesores participantes en el estudio, a través de la reflexión individual sobre nuestra propia experiencia apoyada en ocasiones en la consulta de textos y otras fuentes donde aparecían definiciones matemáticas, identificamos lo que podrían ser consideradas como palabras matemáticas, narrativas, mediadores visuales y rutinas que podían estar asociadas a cada uno de los atributos de la definición. Posteriormente, en sucesivas reuniones se discutieron las propuestas individuales, rechazando las que no eran asumidas por los tres participantes y aclarando aspectos que eran dudosos o que había que reconsiderar. Finalmente, el proceso selectivo de las propuestas individuales nos condujo a un listado definitivo de algunas palabras matemáticas, narrativas y rutinas que pensamos que están asociadas a cada uno de los atributos de la definición. A continuación, presentaremos los resultados obtenidos.

Queremos destacar que en nuestro estudio hemos apreciado que los *mediadores visuales* que aparecen están ligados al contexto matemático específico en el que se desarrolla el proceso de definir y su producto la definición. Por ejemplo, si la definición está ligada a un concepto geométrico que se aborda desde un punto de vista sintético, las representaciones gráficas e icónicas pueden tener un peso relevante como mediadores visuales, sin embargo en conceptos vinculados al pensamiento matemático avanzado (cálculo) el peso relevante puede recaer sobre representaciones simbólicas (numéricas o algebraicas) o simulaciones. Debido a ello en los resultados que mostramos a continuación no aparece este elemento.

Consideramos que los atributos de la definición (producto del proceso de definir) aparecen como resultado de las "acciones" realizadas durante dicho proceso. Esto nos ha llevado a que tanto en el análisis realizado para identificar palabras matemáticas, narrativas, rutinas, etc, en el proceso de llegar a establecer una definición como en la propia presentación de los resultados obtenidos se haya hecho atendiendo a los atributos anteriormente indicados para la definición, siendo por tanto estos atributos los que van a ser desarrollados en cada uno de los siguientes apartados.

3.1. NO CONTRADICTORIA.

Respecto a este atributo, y en relación a las *palabras matemáticas*, pueden aparecer términos como 'características/atributos, relaciones entre características, condición necesaria, condición suficiente', que de algún modo son específicos de la definición (y del proceso seguido para llegar a ella), pero que inciden en la idea de no contradictoriedad.

En cuanto a las *narrativas*, nos ha parecido muy relevante la que hemos identificado como NARRATIVA No Contradictoria 1 (NC1): 'Las características /propiedades establecidas en una definición deben coexistir'. Con algunas variantes lingüísticas que presentan significados sinónimos, esta narrativa expresa una idea importante de cara a la identificación de este atributo de la definición.

Respecto a las *rutinas* ligadas a este atributo de la no contradictoriedad, hemos identificado tres. De ellas, las dos primeras aparecen vinculadas también al atributo de la no ambigüedad (lo que representaremos por NC y NA):

La primera de ellas es:

RUTINA NC1-NA1: 'Proponer ejemplos y contraejemplos'.

El esquema de esta rutina es el siguiente: general→concreto. Respecto a los ejemplos del concepto que va a ser definido, se ha de tener en cuenta que: i) cualquier ejemplo del concepto debe cumplir *todos* los requerimientos/ características de la definición y ii) cualquier objeto matemático que cumpla *todos* los requerimientos de la definición es un ejemplo del concepto.

La segunda rutina identificada consiste en:

RUTINA NC2-NA2: 'Identificar atributos/características relevantes e irrelevantes'.

El esquema de esta rutina es el siguiente: concreto → general. En relación a los "atributos/características relevantes" de un concepto se deben considerar como las características que un objeto debe poseer para ser considerado un ejemplo de dicho concepto, o sea, las características que actúan como condiciones necesarias. Cada definición menciona solamente un subconjunto propio de estos atributos/características; mientras que aquellos atributos/características relevantes que no fueron incluidos en la definición se deben deducir lógicamente de los que sí lo fueron. Además, hay que tener en cuenta que cada ejemplo de un concepto posee también características que son atributos no requeridos, directa ni indirectamente, por la definición. Son los llamados "atributos o características irrelevantes", como por ejemplo, el asociar a cualquier triángulo las características de tener los ángulos agudos que son propias de los triángulos acutángulos (Hershkowitz, 1990).

El uso de la rutina NC2-NA2 permite eliminar características, atributos o propiedades del objeto que no juegan un papel relevante en la definición.

Finalmente, la tercera rutina se puede expresar del siguiente modo:

RUTINA NC3: 'No puede darse la característica 1 y la negación de la característica 1'.

Es decir, de la definición no puede seguirse la proposición A y su negación (noA).

3.2. NO AMBIGUA.

En relación con este atributo, *palabras matemáticas* como 'abstraer, condiciones equivalentes, condición necesaria, condición suficiente' aparecen en muchos casos ligadas a él. Como en el caso anterior, no son exclusivas del atributo de la no ambigüedad pero sí muy frecuentes cuando se aborda el proceso de definir y la definición.

En cuanto a las *narrativas* hemos identificado la NARRATIVA NA1: 'Define de manera unívoca una clase de objetos. Dado un objeto permite incluirlo o no en la clase sin indeterminación'.

En relación a las *rutinas*, también han sido tres las identificadas ligadas a este atributo, siendo las dos primeras compartidas con el atributo anterior y por tanto descritas anteriormente: RUTINA NC1-NA1: 'Proponer ejemplos y contraejemplos' y RUTINA NC2-NA2: 'Identificar atributos/características relevantes e irrelevantes'.

La tercera rutina identificada consiste en:
RUTINA NA3: 'Identificación de los casos límite'.

En esta rutina se trata el estudio y análisis de los casos límite y degenerados. Por ejemplo si se define una función afín como aquellas de la forma y=ax+b, casos límite son a=0 y/o b=0.

3.3. INVARIANTE BAJO EL CAMBIO DE REPRESENTACIÓN.

Respecto a este atributo y en relación a las *palabras matemáticas* pueden identificarse términos como 'modos de representación, transformaciones, traslaciones'; que en este caso consideramos que son prácticamente exclusivas de este atributo.

En cuanto a las *narrativas* y *rutinas* hemos identificado las siguientes, que al igual que para las palabras matemáticas, pensamos que son exclusivas de este atributo:
NARRATIVA I1 (Invariancia): 'Existencia de un "isomorfismo" entre las características de los objetos en diferentes representaciones'.

El isomorfismo lo entendemos aquí en el sentido de que se conservan las características de la definición y las relaciones que se deducen de ellas.
RUTINA I1: 'Realizar traslaciones entre los distintos modos de representación (incluyéndose transformaciones, que serían traslaciones dentro del mismo modo)'.

3.4. JERÁRQUICA.

Vinculado a la naturaleza jerárquica de la definición hemos asociado *palabras matemáticas* como 'generalizar, particularizar, abstraer'. Como en algunos casos comentados anteriormente, aunque inciden en este atributo no son exclusivas de él.

Con respecto a las *narrativas* hemos identificado la enunciada como NARRATIVA J1 (Jerárquica): 'Debería estar basada sobre conceptos básicos o previamente definidos, de una manera no circular'. Al igual que para otras, esta narrativa admite diversas variantes lingüísticas.

En relación a las *rutinas* hemos identificado las tres siguientes:
RUTINA J1: 'Identificar características o propiedades del objeto'. Esta rutina responde al esquema: concreto → general (rutina concreto a general). En cierto sentido, la podemos considerar similar a la idea de "asimilación" piagetiana, ya que se ven propiedades o características del objeto a partir de objetos ya conocidos (definidos).

Por ejemplo: la característica "lados iguales" se identifica a partir de los términos "lado" e "igual" ya definidos. Para Piaget (1972) la asimilación mental consiste en la incorporación de los objetos dentro de los esquemas de comportamiento, esquemas que no son otra cosa sino el armazón de acciones que el hombre puede reproducir activamente en la realidad.

Es de resaltar que esta rutina está muy relacionada con la generación de definiciones *descriptivas* (*a posteriori)*, que son descritas por Freudental (1973), como aquellas definiciones que "describe un objeto conocido por la selección de algunas propiedades características" (p. 458).

RUTINA J2: 'A partir de un concepto conocido por sus propiedades, se eliminan algunas (o se reemplazan por otras más generales) para obtener un nuevo concepto'. Esta otra rutina también responde al esquema: concreto → general (rutina concreto a general). Por ejemplo, cuando se define un paralelogramo a partir del conocimiento de un rombo estamos utilizando dicha rutina.

En el caso de la rutina J2, hay una vinculación estrecha con la producción de definiciones *constructivas (*a priori) que según Freudental (1973, p. 458) consiste en "modelar nuevos objetos a partir de otros que sean familiares". Este tipo de definiciones tienen lugar cuando una definición dada de un concepto se cambia a través de la exclusión, generalización, particularización, cambio o adición de nuevas propiedades de la definición (De Villiers, 1998).

RUTINA J3: 'A partir de un concepto conocido por sus propiedades, se exigen otras para obtener un nuevo concepto'. Ésta responde al esquema: general → concreto (rutina general a concreto).

Por ejemplo, cuando se define "un ángulo recto como un ángulo en el que sus lados son perpendiculares entre si", el concepto general es "ángulo" y se le exige otra propiedad para definir el nuevo concepto de "ángulo recto". De esta manera el nuevo concepto se describe como un caso especial de otro concepto más general (van Dormolen y Zaslavsky, 2003). De manera análoga al caso de la rutina J2, esta nueva rutina puede dar lugar a definiciones constructivas o a priori.

3.5. MINIMALIDAD.

A la hora de hacer operativo este atributo más bien podría hablarse de tendencia a la minimalidad, en el sentido de que en el proceso de llegar a establecer la definición de un concepto, se van a ir incluyendo en la definición cada vez menos características, sin perder "la esencia" del concepto.

Por ejemplo, un rectángulo puede definirse como un paralelogramo con lados formando ángulos de 90º y podemos añadir o no la característica de "con lados contiguos desiguales". Durante el desarrollo del proceso de definir un rectángulo podemos eliminar primero la característica "lados contiguos desiguales" y obtener una definición que engloba al cuadrado como un caso particular de rectángulo. En un paso siguiente podemos "eliminar la característica" de que todos los ángulos sean rectos y exigir sólo "la existencia de tres ángulos rectos". La eliminación de las dos características de la definición de rectángulo no altera "el contenido esencial" de la definición de rectángulo (ni la esencia de lo que es un rectángulo).

Como en casos anteriores las *palabras matemáticas* que hemos asociado a la minimalidad no son exclusivas del mismo, aunque si son muy frecuentes cuando se aborda dicho atributo. Estas son palabras tales como 'abstraer, condiciones equivalentes, condiciones necesarias y/o suficientes'.

Para la minimalidad hemos identificado dos *narrativas*, que aunque están relacionadas entre sí, el que se puedan apreciar diferencias de matices nos ha llevado a explicitarlas: NARRATIVA M1 (Minimalidad): 'Una definición tiene las menos características posibles' y NARRATIVA M2: 'No redundancia de características del objeto'.

Para las *rutinas* hemos apreciado una única con dos casos particulares:
RUTINA M1: 'Identificar relaciones entre características'.

Esta rutina la hemos desglosado en dos casos concretos:

RUTINA M1.1: 'De una característica se deduce otra característica, es decir: Característica1→ Característica 2'.
Por ejemplo, cuando al definir un rectángulo se tienen las características "lados opuestos paralelos dos a dos" (característica 1) y "lados opuestos iguales dos a dos" (característica 2), de la característica 1 se deduce la característica 2, y por tanto en la definición de rectángulo es suficiente considerar la característica 1.
RUTINA M1.2: 'A partir de dos características se puede deducir otra característica, es decir: Característica1 y Característica 2→ Característica 3'.
Por ejemplo, para definir un rectángulo tenemos las características "lados opuestos paralelos dos a dos" (característica 1), "ángulos rectos entre los lados" (característica 2) y "diagonales iguales" (característica 3), de las características 1 y 2 se deduce la característica 3, y por tanto en la definición de rectángulo no es necesario incluir la característica de que las diagonales son iguales.

4. CONCLUSIONES

En el trabajo que presentamos, hemos tratado de aproximarnos al proceso de definir y al resultado del mismo, la definición, utilizando las ideas propuestas por Sfard (2006), enmarcadas dentro de una perspectiva sociocultural. El análisis que hemos realizado nos ha permitido particularizar en ellos los elementos considerados en nuestro estudio y nos ha informado sobre su complejidad.

Respecto a los *mediadores visuales* nuestro análisis nos lleva a concluir que este elemento teórico está estrechamente ligado al contexto matemático específico en el que se está desarrollando el proceso de definir y por lo tanto, no se presentan ejemplos de mediadores visuales vinculados a los atributos de la definición.

Además, se ha puesto de manifiesto que en la búsqueda o establecimiento de definiciones se ponen en juego un conjunto de "formas de hacer" (*rutinas*) ligados a "hechos" (*narrativas*) concretos. En nuestro trabajo hemos apreciado la existencia de relaciones entre las narrativas, rutinas y palabras matemáticas cuando se aborda en el proceso de definir la consecución de algún atributo de la definición. Por ejemplo, cuando se pretende que la definición tenga el atributo de "minimalidad" la narrativa M2 'No redundancia de características del objeto' hace que se ponga en juego la rutina M1 'Identificar relaciones entre características'.

Desde el punto de vista del aprendizaje, el análisis realizado que nos informa de las narrativas, rutinas, etc. que se pueden poner en juego cuando se está definiendo, lo que podría ayudar a los profesores a identificar "*dificultades*" en los procesos de aprendizaje de los estudiantes cuando ellos intentan establecer una definición o darle significado.

Desde el punto de vista de la enseñanza, pensamos que nuestro análisis puede ayudar al profesor de matemáticas a ser consciente de la *doble dimensión del proceso*: por un lado las rutinas, narrativas, palabras matemáticas, necesarias, y por otro los atributos de la definición que se pretende enunciar como resultado del proceso de definir, cuando aborda el diseño de entornos de enseñanza y aprendizaje.

Desde el contexto de la investigación, caracterizar desde un punto de vista "teórico" un "mecanismo" para llegar establecer una definición puede ayudar a indagar sobre los procesos de cambio que hace que los estudiantes tiendan hacia este "modelo teórico" del proceso de definir. También puede ayudar a identificar e interpretar las dificultades que tienen los estudiantes cuando definen o usan definiciones de los conceptos matemáticos.

Desde un punto de vista personal lo que nos ha guiado es compartir con el colectivo de profesores de matemáticas unas ideas que pensamos deben ser conocidas y valoradas en el contexto de la práctica. En el futuro pretendemos continuar profundizando en el estudio de relaciones entre las distintas ideas socioculturales y las involucradas en el proceso de definir en contextos de aprendizaje de contenidos matemáticos concretos.

NOTA: Esta comunicación se apoya en trabajos previos del Proyecto de investigación PSI2008-02289 "La definición matemática en alumnos de bachillerato y en estudiantes para profesores de primaria. Una aproximación sociocultural" financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

REFERENCIAS.

BEN-YEHUDA, M., LAVY, I., LINCHEVSKI, L. y SFARD, A. (2005). *Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses*, Journal for Research in Mathematics Education, vol 36 (3), 176-247.

BORASI, R. (2001*). Learning Mathematics through Inquiry*, Heinemann Educational Books, Inc., Portsmouth, NH.

DE VILLIERES, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define?. *Paper in PME 22 Proccedings, en* A. Olivier& K. Newstead (Eds), Univ Stellenbosch, RSA.

FREUDHENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task,* Reidel, Dordrecht.

GARCÍA, M., SÁNCHEZ, V., ESCUDERO, I., GAVILÁN, J.M., TRIGUEROS, R. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2006). *Comentario a un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el Bachillerato dentro de una comunidad de indagación*, en MC Penalva y otros (Eds) *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*, Proyecto Sur, Granada.

HERSHKOWITZ, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*, en Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics and cognition*, Cambridge U.P., Cambridge.

PIAGET, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente,* Paidós, Buenos Aires.

SÁNCHEZ, V., GARCÍA, M., ESCUDERO, I., GAVILÁN, J.M., TRIGUEROS, R. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2006). *Un estudio sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos en el Bachillerato dentro de una comunidad de indagación*, en MC Penalva y otros (Eds) *Conocimiento, entornos de aprendizaje* *y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas*, Proyecto Sur, Granada.

SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. (2006). *Los contenidos matemáticos en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos?* Ponencia presentada al III Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas, Sevilla, España. [http://www.grupo.us.es/geducmate/usuabua/].

SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. (2009). *Aproximaciones socioculturales al aprendizaje matemático: el caso de definir,* Ponencia presentada al V Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas, Barcelona, España.

SÁNCHEZ, V., GARCÍA, M., y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2007). *El acceso a la comprensión matemática de los estudiantes de bachillerato como problema metodológico*, Ponencia presentada al IV Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización, Alicante, España.

SÁNCHEZ, V., GARCÍA, M., ESCUDERO, I., GAVILÁN, J.M., TRIGUEROS, R. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2008). *Una aproximación a las matemáticas en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos?*, Enseñanza de las Ciencias, 26(2), 267-278.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. y GAVILÁN, J.M. (2007). *Una aproximación al aprendizaje de los contenidos matemáticos por los estudiantes en Bachillerato: la definición*, XIII JAEM, Granada.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. y ESCUDERO, I. (2006). *A first approach to students' ´learning of mathematical content*, en J. Novotná et al. (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Prague, Czech Republic, pp.418, ISSN 00771-100X.

SFARD, A. (2006). *Participacionist discourse on mathematics learning*, en J.Maasz & W. Schlöglmann (Eds.)*, New Mathematics Education Research and Practice* Sense Publishers, Rotterdam.

VAN DORMOLEN, J. y ZASLAVSKY, O. (2003) *The many facets of a definition: The case of periodicity*, Journal of Mathematical Behavior, 22, 91-106.

WENGER, E. (1998). *Communities of Practice,* Cambridge University Press, Cambridge.

ZASLAVSKY, O. y SHIR, K. (2005). *Students' Conceptions of a Mathematical definition*. Journal for Research in Mathematics Education, vol 36 (4), 317-347.