UNA INNOVACIÓN EN MATEMÁTICAS ESPECÍFICAS PARA MAESTROS, APOYADA EN SOFTWARE DINÁMICO

Gavilán, Izquierdo, José Mª
gavilan@us.es
Escudero, Pérez, Isabel Mª
escudero@us.es
Barroso, Campos; Ricardo
rbarroso@us.es
Sánchez-Matamoros, García, Gloria
gsanchezmatamoros@us.es

Dpto. Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este trabajo presentamos una innovación que estamos desarrollando varios profesores, en el Grado de Educación Primaria en la asignatura de "Matemáticas Específicas para Maestros". La innovación se basa en dotar de contenido la Actividad Académica Dirigida de dicha asignatura, haciendo uso de tecnología en la formación inicial de matemáticas de los futuros maestros. El uso de la tecnología se hace a través de la utilización de un software dinámico, GeoGebra, para resolver dos tareas que se refieren esencialmente a la construcción de conocimiento matemático. Los procesos matemáticos de construcción de conocimiento que abordamos en la innovación son definir y probar/demostrar. Los resultados, parciales, nos muestran que tanto desde la visión matemática como afectiva la experiencia es positiva.

Palabras clave: formación inicial de profesores de matemáticas, software dinámico, definir, demostrar.

ABSTRACT

We present here an innovation that several teachers are developing in the Degree of Primary Education for the course "Specific Mathematics for Teachers". The innovation is based on filling the Tutored Academic Activities of the course with content by using technology for the initial mathematics training of future teachers. We use GeoGebra, a dynamic software, to solve two tasks that refer essentially to the construction of mathematical knowledge. The mathematical processes of knowledge construction that we approach in this innovation are "defining" and "proving/demonstrating". The partial results show that the experience is positive from a mathematical and an affective view.
Keywords: initial training of mathematics teachers, dynamic software, define, demonstrate

1. INTRODUCCIÓN. ANTECEDENTES

La introducción en el ámbito universitario de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) es un hecho que se hace cada vez más patente en numerosos países (Cabero, Castaño, & Cebreiro, 2003; Mousley y otros, 2003, Escudero, García & Sánchez, V. 2009). Situándonos en un contexto de un curso universitario de formación inicial de maestros de E. Primaria en Matemáticas, la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación supone un cambio y un reto que nosotros, como formadores de futuros profesores, debemos abordar.

Dentro del campo de la Educación Matemática, se ha visto conveniente el uso de las TIC, como una herramienta adicional en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que van a permitir, entre otras cosas, nuevas formas de representación de los conceptos, tratando de contribuir a aprendizajes significativos. En el conjunto de artículos, documentos e informes sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que mencionan uno o varios de los componentes de las TIC, aparecen una gran diversidad en las formas de usar dichos medios tecnológicos en los procesos educativos que tienen lugar en las aulas de los distintos niveles educativos (Figueras, 2005). En particular, entre los trabajos que se pueden ubicar en la consideración del uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas abundan los que tratan de la introducción del software de geometría dinámica (Gutiérrez, 2005). Desde que se produjo la aparición del primer programa de geometría dinámica (Cabri en 1988) numerosos investigadores de todo el mundo se han dedicado al estudio de las posibilidades de dicho software en la enseñanza de la geometría en los niveles educativos obligatorios y no obligatorios. En los últimos años, con la influencia de la introducción del software libre, ha aparecido con gran fuerza GeoGebra, debido, entre otros aspectos, al carácter abierto de su código, gracias al cual está disponible de manera libre y gratuita para todas las plataformas.

Por otro lado, en estos momentos estamos inmersos en nuestra Facultad en un proceso de transformación y cambio ante el reto de lo que supone la entrada en el Espacio Europeo de Educación Superior. Entre los cambios que está originando la inclusión de nuestra Facultad en dicho Espacio, señalamos que las especialidades de Magisterio comienzan a ser sustituidas en este curso por enseñanzas de Grado en Educación Primaria y Educación Infantil. Esto conlleva que se hayan empezado a desarrollar nuevos planes de estudios en dichos grados, que ha supuesto que en muchas de las Áreas, responsables de la docencia en dichas titulaciones, se estén implementando nuevas asignaturas y/o nuevos proyectos docentes. En particular, en el Área de Didáctica de las Matemáticas somos responsables de la docencia de una asignatura obligatoria anual denominada “Matemáticas Específicas para Maestros”, que se ha empezado a impartir este curso en el Grado de Educación Primaria, que está estructurada en 4’5 créditos teóricos, 3 prácticos y 1’5 créditos de actividad tutelada.

La experiencia que vamos a presentar en esta comunicación ha tenido lugar durante este curso en la parte de actividad tutelada o actividad académica dirigida (AAD), utilizando GeoGebra como software de geometría dinámica.

2. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

2.1 Geogebra como instrumento

GeoGebra es un software diseñado específicamente para ser utilizado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos. En

este apartado describiremos algunas características de GeoGebra (Gavilán y Barroso, 2009, 2011).
GeoGebra integra capacidades de los programas de geometría dinámica con capacidades de los programas de cálculo simbólico y de las hojas de cálculo. Además, GeoGebra permite el uso simultáneo de los sistemas de representación simbólico (algebraico/numérico) y gráfico, en tres ventanas simultáneas (algebraica, gráfica y hoja de cálculo). Las manipulaciones o modificaciones de objetos geométrico, o más generalmente, matemáticos (por ejemplo, mediante tironeo/arrastre) en una de las ventanas (algebraica, gráfica, o en la hoja de cálculo) tiene de forma inmediata repercusión en las restantes ventanas. Si a estas dos características añadimos que dispone de un interface "amigable" que facilita su uso, podemos decir que es un instrumento que puede ser útil para la enseñanza de las matemáticas.
Otra característica de GeoGebra, y general en los programas de geometría dinámica, es la diferenciación entre *dibujo* y *figura*. Esta diferenciación ha sido introducida por Laborde (1994), pero que interpretamos de la siguiente manera. *Construcción dibujo*: realizada de la misma forma que los dibujos hechos con lápiz y papel, es decir, dibujo a mano alzada. Por ejemplo, podemos trazar un segmento y una recta que aparentemente sea perpendicular. Arrastrando o tironeando algún punto básico, se observa que la recta deja de cumplir la propiedad de ser perpendicular. *Construcción figura*: realizada utilizando las propiedades euclídeas que el programa ofrece a través de las herramientas propias o bien por las creadas por el usuario (herramientas personales). Por ejemplo, para trazar una recta perpendicular a un segmento debemos utilizar la herramienta "Recta Perpendicular". Cuando se arrastre cualquier punto básico de la construcción, la recta sigue siendo perpendicular (principio de geometría dinámica).
Otra característica que podemos señalar es la necesidad de definir explícitamente los objetos geométricos. Los objetos que se construyen con GeoGebra tienen que ser definidos explícitamente para que sean reconocidos como tales y por tanto manejables por el programa. Por ejemplo: tres segmentos consecutivos y cerrados no definen un triángulo para el programa y, por tanto, no es posible calcular el área, etc., salvo que sea definido/construido con la herramienta correspondiente.
Por último, el Principio de Geometría Dinámica significa que las construcciones realizadas con GeoGebra pueden ser modificadas dinámicamente a través del arrastre de algunos de los objetos básicos (o bien introduciendo deslizadores). Las propiedades o relaciones geométricas establecidas explícitamente al construir la figura a través de las herramientas disponibles permanecen al arrastrarse los objetos. Este arrastre es un test que permite al usuario contrastar si la construcción de la figura es correcta.
Además este principio hace posible la "devolución" que hace del arrastre en las figuras el programa: no sólo permanecen las propiedades explícitas usadas por el usuario al realizar la figura, sino que se *hacen visibles al usuario* todas aquellas propiedades o relaciones de la figura que se deducen de las anteriormente explicitadas por el usuario. Por ejemplo, si se construye un triángulo ABC y se traza una de las medianas r (por el punto medio de AB, M) y el baricentro G, utilizando las herramientas correspondientes (punto medio, segmento…) si efectuamos las medidas GM y GC obtenemos que la relación entre ambas distancias es constante (podemos comprobarlo para cualquier triángulo arrastrando los vértices) y se hace explícita al usuario..

2.2 Los contenidos matemáticos (definir y probar)

Desde nuestro punto de vista (Sánchez, García, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2008) consideramos el aprendizaje como la construcción del conocimiento, en este caso matemático. Por tanto, en un primer momento, necesitamos fijar los elementos relevantes en dicha construcción. En general, en el campo de la Educación Matemática, definir, probar y modelar han sido considerados básicos en el «hacer matemáticas». Aunque con matices diferentes (en algunos casos más próximos a una consideración como conceptos y en otros casos como procesos) su importancia ha sido destacada por distintos investigadores (Borasi, 1991; García y Llinares, 2001). Sin embargo, en muchas ocasiones, su estudio se ha desarrollado por separado.

Debido a su configuración compleja, multidimensional y universal, incluyendo cada uno de ellos numerosos aspectos de complejidad muy diferente, en la innovación que vamos a presentar nos centraremos en dos de ellos: definir y probar/demostrar. Estos metaconceptos aportan diferentes referentes que se interrelacionan en la construcción del conocimiento matemático, y por lo tanto en el proceso de aprendizaje. Así, por ejemplo, se crean modelos de situaciones en los que intervienen definiciones de conceptos, y propiedades/teoremas que han sido demostrados. Y todo ello con una validez local, marcada por un determinado nivel cognitivo y contextual, que es a su vez un primer paso para alcanzar la validez universal (Sánchez et al, 2008).

En relación al metaconcepto *definir* hemos asumido que son todas aquellas "acciones" que tienen como objetivo llegar a prescribir el significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de propiedades que tienen que ser todas verdaderas, lo que da lugar a la *definición.* Además, en Sánchez et al (2008) describimos los atributos que han sido identificados por la comunidad de Educación Matemática como caracterizadores de una definición, como por ejemplo la no ambigüedad, no contradictoria, etc. Respecto a la *prueba/demostración* su caracterización se ha hecho en base a la existencia de una premisa/enunciado/proposición claro y de una secuencia de inferencias lógicas aceptadas como válidas por parte de la comunidad matemática en el sentido de 'no erróneas'.

2.3 Contenidos implicados e instrumento utilizado en la experiencia

En la innovación realizada, pretendemos que nuestros estudiantes abordaran los procesos matemáticos de identificar y definir conceptos, establecer conjeturas, razonar inductiva y deductivamente y realizarán pruebas/ demostraciones. Además, en dicho trabajo hacemos uso de figuras construidas con Geogebra que se ponen a disposición de los estudiantes participantes en la actividad AAD aquí reseñada. Esta manera de usar GeoGebra hace posible que todas las relaciones entre objetos geométricos de la figura puedan ser objeto de descubrimiento, ya que son hechas explicitas a los estudiantes por el programa. Esta manera de proceder tiene además la ventaja de que los estudiantes no necesitan conocer el uso de herramientas y menús del programa GeoGebra, sino que sólo necesitan conocer la técnica de arrastre o tironeo (y en otras situaciones el uso de deslizadores) para enfrentarse a las tareas matemáticas propuestas.

3. METODOLOGÍA

3.1 Participantes

Como señalamos en la introducción, el contexto en el que se desarrolla la innovación que presentamos, es en la asignatura "Matemáticas Específicas para Maestros", situada en el primer curso del Grado de Educación Primaria y, en particular, en la parte de la asignatura dedicada a la Actividad Académica Dirigida (AAD). El número aproximado de estudiantes participantes en la experiencia ha sido de 126, pertenecientes a tres grupos de primero.

3.2 Las tareas

Hasta el momento en que presentamos este trabajo se han desarrollado dos tareas, centradas en los procesos de definir y probar/demostrar respectivamente. A continuación presentamos cada una de ellas.

3.2.1. Tarea 1: Definir y definición de figuras geométricas

En un applet se ofrece al alumno la posibilidad de manipular objetos geométricos e indagar sus propiedades. Mediante el uso de cuestionarios creados para la interacción alumno/profesor se establecen una serie de cuestiones para sus respuestas individuales por internet.
La tarea primera quedó enunciada de la forma siguiente:
En http://personal.us.es/gavilan/geogebra/cuadrilaterosb.html puede encontrarse la figura usada en clase (ver figura 1).

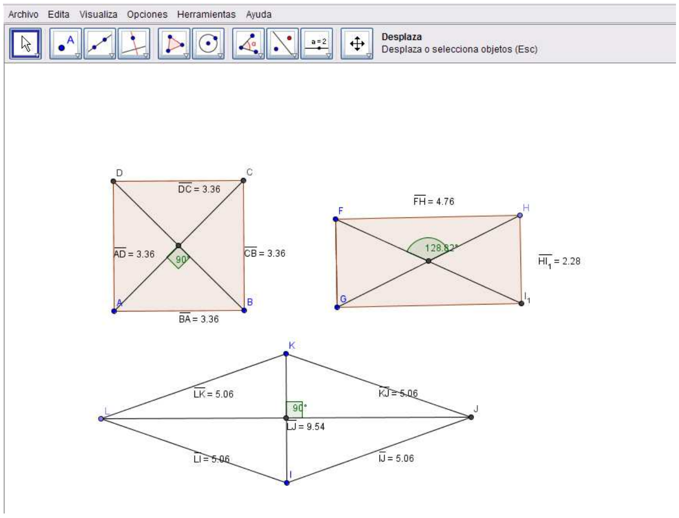

Figura 1: Applets sobre cuadriláteros

1.1.- En las tres figuras anteriores se pueden identificar elementos básicos como lados, vértices, ángulos, diagonales, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada una de esas figuras? (Pensar en cada uno de los elementos por separado).
Figura: ;
Lados:; Ángulos:; Diagonales: ; Vértices: ; Otros:
1.2.-De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes a cada dos figuras?
1.3-¿Hay alguna propiedad o característica común a las tres figuras?
1.4.- ¿Hay alguna propiedad de alguna de las figuras que la diferencie de las otras dos?
1.5.-Definir cada una de las figuras.
Figura:
1.6.- ¿Podríais dar otra definición de cada una de las figuras?
Figura:
1.7.- ¿Alguna de las definiciones de las figuras que habéis dado puede servir para alguna de las restantes figuras? (por ejemplo, la definición de la figura 1 para la figura 2 o la figura 3)
1.8.- ¿Podríais dar una definición de una de las figuras (figura 1, figura 2 o figura 3) que sirva para dos de las figuras dadas?
1.9.- ¿Hay algún comentario o sugerencia que nos queráis hacer?

3.2.2. Tarea 2: Conjeturar, probar/demostrar en geometría

La tarea segunda quedó formulada para los estudiantes de la siguiente forma:

2.1. Caso del rectángulo

a) En la figura (http:www.personal.us.es/rbarroso/geogebra/varignon1.html) se representa un rectángulo en el que debes construir los puntos medios de cada uno de los lados (ver figura 2). Uniendo los puntos medios de cada dos lados contiguos se obtiene un cuadrilátero. Formula una conjetura sobre el tipo de cuadrilátero obtenido.

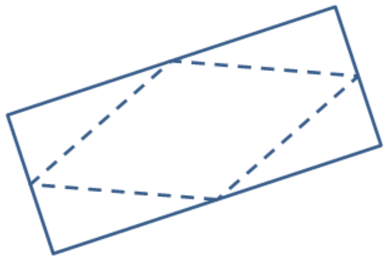

Figura 2: Teorema de Varignon. Con el rectángulo

Indicación1: Puedes medir los lados y los ángulos del cuadrilátero que te sale para formular/enunciar tu conjetura.

Indicación2: Puedes mover o arrastrar algún punto de la figura para confirmar o rechazar la conjetura formulada.

b) ¿Siempre que se unan los puntos medios de cada dos lados contiguos de un rectángulo sale ese tipo de polígono? Haz una prueba (o demostración) de ello.

c) Calcula las áreas de los dos cuadriláteros de la figura y trata de establecer una conjetura sobre la relación entre las áreas.

d) En caso de no existir relación, justifícalo. En caso de que hayas encontrado una relación trata de realizar una prueba o demostración de la relación encontrada.

2.2. Caso del rombo.

a) En la figura (http://personal.us.es/rbarroso/geogebra/varignon2.html) se representa un rombo en el que debes construir los puntos medios de cada uno de los lados. Uniendo los puntos medios de cada dos lados contiguos se obtiene un cuadrilátero. Formula una conjetura sobre el tipo de cuadrilátero obtenido.

Indicación: Puedes medir los lados y los ángulos del cuadrilátero que te sale para formular/enunciar tu conjetura.

Indicación: Puedes mover o arrastrar algún punto de la figura para confirmar o rechazar la conjetura formulada.

b) ¿Siempre que se unan los puntos medios de cada dos lados contiguos de un rombo sale ese tipo de polígono? Haz una prueba (o demostración) de ello.

c) Calcula las áreas de los dos cuadriláteros de la figura y trata de establecer una conjetura sobre la relación entre las áreas.

d) En caso de no existir relación, justifícalo. En caso de que hayas encontrado una relación trata de realizar una prueba o demostración de la relación encontrada.

2.3. Investiga si ocurre algo análogo cuando unimos los puntos medios consecutivos de otros cuadriláteros. Intenta dar justificaciones. Señala los elementos geométricos en los que basas tus justificaciones. ¿Puedes dar un enunciado general para todos los cuadriláteros?

3.3. Recogida y análisis de los datos:

Para la recogida de datos hemos utilizado dos tipos de instrumentos, que describimos a continuación. Por un lado los cuadernillos de las resoluciones de las tareas que hemos tenido por escrito o enviados on-line, bien a través del correo electrónico o mediante la plataforma virtual, por otro lado, hemos elaborado y pasado un cuestionario que tiene como objetivo valorar la apreciación de los estudiantes sobre el software utilizado, tanto en el aspecto del contenido como en el actitudinal.

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La experiencia que describimos en este trabajo está en fase de desarrollo, por este motivo sólo es posible mostrar algunos resultados parciales. Hemos dividido los resultados en dos grupos, aquellos que afectan al contenido curricular de la materia, es decir, a las propias matemáticas, y aquellos que versan sobre aspectos "afectivos" en relación a las matemáticas y al instrumento tecnológico.

- En relación al contenido matemático, respecto a la primera tarea nos hemos encontrado con que los estudiantes cuando usan GeoGebra como instrumento para "hacer matemáticas" llegan a ser capaces de enunciar definiciones de diferentes tipos. Un primer tipo son "**definiciones redundantes"**, es decir, con información redundante (se incluyen características de la figura que se deducen de otras características dadas en la definición de dicha figura). Por ejemplo, un grupo (3) da una definición de cuadrado del siguiente tenor "*El cuadrado es aquel polígono regular de cuatro lados iguales cuyos vértices forman ángulos de 90º. Dado que sus lados son paralelos dos a dos, es un cuadrilátero paralelogramo, con diagonales también de la misma medida y el corte que forman también es de 90º.*". La característica de que las diagonales son iguales es redundante, ya que se deduce de las otras características (lados iguales y ángulos de 90º).

Otras definiciones son "**definiciones excluyentes/exclusivas**", en el sentido de que un objeto es de la clase A o de la clase B pero no puede ser de ambas. Un grupo señala que un rectángulo es "*Es un cuadrilátero cuyos lados paralelos tienen la misma longitud, que son diferentes a la de sus lados contiguos. Tiene dos diagonales que se cortan en el centro formando dos ángulos agudos y dos obtusos".*

Otros grupos dan "**definiciones inclusivas/jerárquicas**", es decir, un objeto puede estar en dos clases de objetos, pues una clase está incluida en la otra. Un grupo señaló "*definición de rectángulo: se trata de un polígono que consta de cuatro lados y éstos son iguales dos a dos. Los ángulos que se forman en la unión de sus lados son rectos".*

Destacar que los grupos que elaboran definiciones inclusivas son mayoritarios respecto a los grupos que las dan redundantes o exclusivas. En este sentido, la tarea de cuadriláteros planteada para ser resuelta utilizando el software dinámico (GeoGebra), podríamos considerarla "eficiente" pues facilita a los estudiantes la transición de definiciones exclusivas a definiciones inclusivas (De Villiers, 1994).

- En relación a la apreciación que se observa en los estudiantes sobre el instrumento utilizado para "hacer matemáticas", obtenida a partir del cuestionario, aproximadamente a la mitad de los estudiantes (48%) les parece interesante el uso del software dinámico en la asignatura de Matemáticas Específicas para Maestros, el nivel de rechazo a dicho uso es del 26%. Asimismo, destacar que el 86% de los participantes en la innovación no han tenido ninguna experiencia en el uso del ordenador en las clases de Matemáticas previa a la universidad. Respecto a su futuro profesional como maestros, nos llama la atención que la mayoría de ellos considere que puede ser interesante incorporar software dinámico en sus futuras clases y que les pueda facilitar su labor como profesor dicho uso (un 50% considera que les puede facilitar algo en su labor profesional, y un 26% considera que bastante). Todo ello, teniendo en cuenta la poca experiencia previa que han tenido con el uso de las TIC en las clases de Matemáticas. A partir de estos resultados, pensamos que la experiencia en general nos ha resultado positiva y, por tanto nos planteamos continuarla en futuros cursos, en dos sentidos. Por un lado, ampliar los contenidos curriculares en los que incorporar tareas matemáticas diseñadas con el uso de software dinámico y por otro, no sólo incluir este tipo de tareas en la Actividad Tutelada sino también hacerlo extensivo a los créditos prácticos de la asignatura.

5. BIBLIOGRAFÍA

Borasi, R. (1991). *Learning Mathematics Through Inquiry*, Heinemann Educational Books, Ins., Portsmouth,NH

Cabero (Dir), J., Castaño, C. & Cebreiro, B. (2003). Las nuevas tecnologías en la actividad universitaria. *Píxel-Bit, Revista de Medios y Educación*, 20, 81-100

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18

Escudero, I., García, M. & Sánchez, V. (2009). Nuevos espacios de enseñanza/aprendizaje en la formación inicial de profesores de primaria. *Píxel-Bit, Revista de Medios y Educación*, 34, 105-120.

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 5-16.

García, M. & Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática, en Castro (Edt.) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*, Síntesis, Madrid.

Gavilán J. M. & Barroso, R. (2009). Manual del curso de Thales-Cica 2009, Geogebra: TICs e innovación en la enseñanza de las matemáticas.

Gavilán J. M. & Barroso, R. (2011). GeoGebra como instrumento de la práctica del profesor. Comunicación presentada en las *II Jornadas de Geogebra en Andalucía*. Huelva, 1 al 3 de abril de 2011. Organizadas por el Instituto GeoGebra de Andalucia-SAEM Thales.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A., Gómez, B & Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 27-44.

Laborde, C. (1.994). Les rapports entre visuel et géometrique dans un EIAO, en Artigue, M y otros (eds) *Vingt ans de didactique des Mathematiques en France*. La Pensée Sauvage, Editions.

Mousley, J., Lambdin, D. & Koc, Y. (2003). Mathematics teacher education and technology, en Bishop, J. y otros (eds.). *Second international handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sánchez, V., García, M.; Escudero, I.; Gavilán J.M. & Sánchez-Matamoros, G. (2008). Una aproximación a las matemáticas en el Bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos? *Enseñanza de las Ciencias* 26(2), 267-276