

KURT GÖDEL: REVOLUCIÓN EN LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

José Ferreirós
Universidad de Sevilla

ABSTRACT: We offer a survey of Kurt Gödel's main contributions in the field of Logic and foundations of mathematics, and we analyse their impact, which can well be called revolutionary. The aim is to contribute to an understanding of the aims and methodological orientation of Gödel's work, and to deal in some detail with their philosophical consequences. Thus, a perspective is offered on how the philosophy of mathematics changed between the dates of birth and death of this great mathematical logician.

KEY WORDS: Philosophy of mathematics, mathematical logic, foundations of mathematics, consistency, incompleteness, set theory, metamathematics, Hilbert's program, platonism.

El estudio de los fundamentos de la matemática es, desde hace un siglo, competencia de la Lógica Matemática. Se trata de un fenómeno bien característico del siglo XX: la propia matemática trata de dar cuenta de sus bases, convirtiéndose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada *metamatemática*. Por usar la habitual metáfora de la ciencia en tanto edificio, es como si la arquitectura tratara de extender su campo de estudio para dar cuenta también de las bases geológicas en que tienen que asentarse, por necesidad, sus construcciones.

No hay duda de que la Lógica Matemática es una de las ramas matemáticas más propias del siglo XX, y más innovadoras (el otro gran ejemplo es la Topología). La lógica tiene una larga historia, que hunde sus raíces en la Antigüedad y la Edad Media, pero aquí nos referimos a la profunda renovación y transformación que produjo la interacción entre lógica y matemáticas en los años 1850-1940. El ascenso de la Lógica Matemática vino impulsado por cambios profundos en la concepción de las matemáticas, y a la vez su desarrollo en el siglo XX ha seguido generando cambios profundos. Es importante mencionar, asimismo, las innegables implicaciones que ha tenido la teoría lógica moderna a múltiples niveles: sobre todo el desarrollo de

ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura
CLXXXIII 725 mayo-junio (2007) 409-418 ISSN: 0210-1963



RESUMEN: Ofrecemos un repaso a las principales contribuciones de Kurt Gödel en el campo de Lógica y fundamentos de las matemáticas, analizando su impacto, que bien puede llamarse revolucionario. La pretensión es hacer comprensible la tendencia y orientación metodológica de los trabajos de Gödel, y considerar en algún detalle sus repercusiones filosóficas. Así, se ofrece una perspectiva de cómo cambió la filosofía de las matemáticas entre las fechas de nacimiento y muerte del genial lógico matemático.

PALABRAS CLAVE: Filosofía de las matemáticas, lógica matemática, fundamentos de las matemáticas, consistencia, incompletud, teoría de conjuntos, metamatemática, programa de Hilbert, platonismo.

la computación, también en el campo de la lingüística, e incluso en filosofía dentro de la tradición analítica.

A grandes rasgos, cabe decir que la Lógica Matemática se descompone en las siguientes partes: (i) lógica elemental y sistemas formales; (ii) teoría de conjuntos; (iii) teoría de la computabilidad; (iv) teoría de la demostración; y (v) teoría de modelos. Pues bien, Gödel hizo aportaciones fundamentales a todos estos temas, aportaciones que fueron "directas al hueso", como se dice en inglés: atacando cuestiones verdaderamente clave y de implicaciones claras para los fundamentos de las matemáticas. Su obra dejó huella, pues esas aportaciones ayudaron a conformar las distintas ramas de la Lógica y reorientaron la discusión en su conjunto.

En 2006 se ha celebrado ampliamente el centenario de Kurt Gödel, quien, sin llegar a ser el mayor matemático del siglo XX, es indiscutiblemente reconocido como el mayor lógico. Alfred Tarski, hombre ambicioso y quizá algo presuntuoso, llegó a comentar a un buen colega que se consideraba "the greatest living (sane) logician", con lo que evitaba –no muy sutilmente– el problema de su comparación con Gödel.

1. LA SITUACIÓN HACIA 1906

Al nacer Kurt Gödel, en abril de 1906, la comunidad matemática internacional se encontraba en plena discusión sobre las bases y las implicaciones de una serie de transformaciones fundamentales. Durante el XIX, la matemática había dejado de ser una "ciencia de las magnitudes", sus conceptos habían alcanzado un grado de abstracción sin precedentes, sus teorías se habían desarrollado mucho en extensión y profundidad, y al hacerlo surgía lo que hemos solido llamar "matemática moderna". Como muestra de lo que pretendo indicar, baste el siguiente ejemplo: en 1800, la idea de número real se consideraba un concepto científico impuesto por la realidad, por la presencia de magnitudes continuas en el mundo físico; en 1900, por contra, los números reales eran considerados producto del pensamiento puro, en tanto elementos de un conjunto dotado de la estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo. Estructura cifrada por Hilbert en 18 axiomas bastante simples, cuya mera *consistencia lógica* (la ausencia de contradicciones derivables lógicamente de esos 18 axiomas) era suficiente, en su opinión, para garantizar la *existencia* del conjunto de los reales.

La nueva matemática, impulsada especialmente desde Alemania por la escuela de Hilbert, se configuraba como un estudio de estructuras abstractas sobre la base de la axiomática y la teoría de conjuntos. Esta orientación suponía una ruptura respecto a la matemática del pasado, centrada en números, figuras y fórmulas: estos elementos tradicionales parecían "constructibles", generables paso a paso y resolubles paso a paso, al menos en principio, mientras que en torno a 1900 se hacía cada vez más claro el carácter "no constructivo" de la matemática moderna. Pero en el mismo momento en que la nueva tendencia parecía triunfar; cuando en el gran Congreso Internacional de París, 1900, el célebre Henri Poincaré la saludaba reconociendo que con ella se había alcanzado el rigor total; entonces surgían también dudas serias sobre la legitimidad de los métodos y los fundamentos postulados por la matemática moderna. Las dudas tuvieron sobre todo dos fuentes:

1. las paradojas de la teoría de conjuntos, descubiertas por Cantor hacia 1897 y desarrolladas por Russell: la paradoja de Burali-Forti o de la totalidad de los números ordinales transfinitos; la paradoja de Cantor o de

- la totalidad de los cardinales transfinitos; la paradoja de Zermelo-Russell o de la totalidad de los conjuntos que no son elementos de sí mismos; y otras muchas paradojas de naturaleza más lingüística o semántica;
2. los métodos de demostración basados en el axioma de elección, usados por Zermelo en 1904 para demostrar la "existencia" de un ordenamiento especial de los números reales (un *buen orden* sobre \mathbf{R}) que nadie sabía cómo definir o "construir", esto es, cuya naturaleza "no constructiva" era tan evidente como para motivar una ola de críticas entre matemáticos franceses, alemanes y de otras naciones.

Consecuencia de este fermento de ideas fue un debate creciente sobre los fundamentos de las matemáticas, donde frente a los partidarios de la nueva matemática surgieron proponentes de enfoques más o menos rupturistas, liderados por algunos de los primeros espadas en matemáticas: el propio Poincaré, el intuicionista holandés Brouwer, o el alemán Weyl. Mientras Poincaré y Brouwer comenzaban a especificar qué postulados y métodos de la matemática conjuntista encontraban objetables, un colaborador de Hilbert, Ernst Zermelo, dedicaba su tiempo a formular un sistema simple de axiomas que fuera suficiente para edificar toda la teoría de conjuntos (sistema que incluía el polémico axioma de elección, pero a la vez excluía las paradojas de Burali-Forti, Cantor y Russell). Su sistema, llamado hoy de Zermelo-Fraenkel y denotado por las siglas ZFC, acabaría convirtiéndose en la axiomática más ampliamente aceptada como base para todo el edificio matemático.

En el desarrollo de las discusiones durante el primer tercio del XX, tres tendencias o "ismos" se dejaron notar especialmente:

1. el *logicismo*, surgido tiempo antes con Dedekind y Frege, luego revitalizado por Russell, quienes defendían que todos los conceptos y principios de las matemáticas pueden en último término reducirse a conceptos y leyes puramente lógicos;
2. el *formalismo*, que a grandes rasgos se identificaba con la posición de Hilbert: la matemática moderna se justifica por la posibilidad de axiomatizar con precisión sus principios, añadiendo la demostración rigurosa de que tales axiomas no llevan a contradicción (son *consistentes*);

3. y el *intuicionismo*, una creación matemática original de Brouwer, que rechazaba los métodos de la matemática moderna y los reemplazaba por métodos alternativos; métodos de elaboración más compleja, pero que parecían tener garantías especiales de evidencia y seguridad por basarse directamente en nuestras intuiciones del número y del continuo.

Frente al avance crítico de Brouwer y otros, el matemático más famoso de aquellos tiempos, David Hilbert, empeñó todo su prestigio en la promesa de ofrecer una demostración de consistencia para la aritmética y para la teoría de conjuntos. Se trataba de poner las bases de la nueva matemática más allá de toda duda razonable, al menos en cuanto a sus garantías lógicas:

"eliminar de la faz de la tierra, de una vez y para siempre, las dudas escépticas sobre los fundamentos de las matemáticas",

como diría en 1927. En una conferencia "Sobre los problemas futuros de las matemáticas" impartida en el Congreso Internacional de 1900, que llegaría a hacerse legendaria, los dos primeros problemas eran sendas apuestas por el triunfo de la teoría de conjuntos y la axiomática: 1. "el problema cantoriano de la potencia del continuo"; 2. "la consistencia de los axiomas aritméticos". El propio Hilbert trató de resolver estos dos problemas con diversas aportaciones realizadas en 1905 y durante los años 1920, especialmente en su trabajo "Sobre el infinito" de 1925. Pero ninguno de sus tenaces intentos dio los frutos deseados. Sería precisamente Kurt Gödel, en 1931 y 1939, quien lograra avances definitivos en ambos frentes, y alguno de ellos en la dirección contraria a las esperanzas de Hilbert.

Desde 1905, los esfuerzos de Hilbert fueron en la dirección de aprovechar las posibilidades técnicas creadas por la Lógica Matemática, con la intención de realizar un estudio matemático de las propias teorías y demostraciones matemáticas. A esto llamó *metamatemática* o *teoría de la demostración*: el estudio de las posibilidades deductivas o demostrativas engendradas por un sistema axiomático dado posibilitaría, en su opinión, establecer el resultado negativo de que un sistema dado *no puede dar contradicciones*.

Históricamente, el avance de la lógica moderna se había iniciado con el desarrollo de nuevos cálculos "del razonamiento" (Boole, Frege, Peirce, Peano) y con el despliegue de la teoría de conjuntos en tanto elemento sistematizador y rigORIZADOR del edificio matemático (Cantor, Dedekind, Zermelo, Russell). La fusión de ambas tendencias se produjo gradualmente en las primeras décadas del XX, bajo el impacto de los serios problemas que antes mencionamos: las paradojas conjuntistas y la llamada "crisis fundacional". Para resolver las paradojas y demás problemas se mostraba conveniente emplear los nuevos lenguajes lógicos, estrictamente regimentados y formalizados. Y esta conveniencia se tornó necesidad en el contexto del programa metamatemático de Hilbert, como veremos más abajo.

2. LÓGICA ELEMENTAL

Cuando el joven Gödel comenzó sus estudios en la Universidad de Viena, años 1920, parece ser que su intención era dedicarse a la física. Sin embargo, el impacto de las lecciones sobre teoría de números del gran matemático Furtwängler le movió a cambiar dedicación, y su relación con miembros del famoso Círculo de Viena le puso en contacto con la lógica matemática de Russell. Teoría de números y lógica matemática: una combinación natural de suyo, pero que estaba llamada a alcanzar nuevas cotas de profundidad gracias a Gödel. Pronto Kurt se encontraba preparando la tesis doctoral bajo la dirección de Hans Hahn, matemático y miembro prominente del Círculo: su tema, resolver un problema planteado por Hilbert & Ackermann en sus *Grundzüge der theoretischen Logik (Fundamentos de lógica teórica, Springer Verlag, 1928)*.

La consolidación definitiva de la Lógica Matemática, tal como hoy la entendemos, tuvo lugar en los años 1920 y 1930 bajo el impulso de Hilbert, Bernays y sus seguidores. El texto con el que Paul Bernays recogió y desarrolló las clases impartidas por Hilbert en el invierno de 1917/18, en Gotinga, puede considerarse el primer manual moderno de lógica matemática. Alcanzó la publicación unos años más tarde en los *Grundzüge* de Hilbert & Ackermann. La obra de Gödel se inscribiría plenamente en este contexto, y ha sido sin duda la más influyente contribución a la lógica de todo el siglo XX, que acabó por revolucionar el estudio de los fundamentos.

¿Por qué eran importantes los formalismos de la nueva lógica? Parte de la respuesta ha quedado ya indicada, pero falta decir qué los hacía imprescindibles para Hilbert. La idea clave de la nueva lógica matemática fue desarrollar un *lenguaje formal* perfectamente preciso con el que expresar los enunciados matemáticos, en particular los axiomas, y codificar *reglas de inferencia* que permitieran hacer totalmente precisas las demostraciones. Pensemos en la teoría de conjuntos: esta teoría, llevada a grandes alturas informalmente por Cantor y Dedekind, fue luego codificada y formalizada por Zermelo, Fraenkel, Skolem y otros. El axioma:

Dado un conjunto C existe otro, $\wp(C)$, cuyos elementos son todos los subconjuntos de C ,

queda codificado por el enunciado formal:

$$\forall c \exists d \forall x (x \in d \leftrightarrow x \subseteq c)$$

[que leemos: "Para todo c existe un d tal que para todo x , x pertenece a d si y sólo si x es subconjunto de c "; nótese que $d = \wp(c)$, y que el símbolo \subseteq admite definición explícita en términos de \in]. Cuando todos los axiomas son formalizados, la teoría entera queda reducida a lo que llamamos un *sistema formal*; las deducciones dentro de la teoría se reducen a emplear única y exclusivamente las *reglas de inferencia*, son puramente formales. La teoría no es ya otra cosa que la totalidad de los enunciados (en el lenguaje formal que se ha estipulado con toda precisión) que son consecuencias lógicas de los axiomas.

Esta idea capital fue inventada por Frege hacia 1879, pero lo que para él era meramente una cautela metodológica al servicio de la filosofía, se convirtió con Hilbert en la clave para transformar problemas de fundamentos en problemas puramente matemáticos.

Hilbert venía defendiendo que el matemático sólo debe preocuparse de la *consistencia* o no-contradictoriedad de sus axiomas. Por supuesto, las ideas matemáticas tienen origen en la experiencia cotidiana, en la física, etc., pero con el tiempo los conceptos matemáticos son sometidos a crítica y las teorías son elevadas al estatus de puros entramados conceptuales. Llegados a este punto, estamos en el mundo abstracto de la matemática pura, y podemos

afirmar la existencia de cualesquiera objetos, siempre que sus propiedades características y las relaciones entre estos objetos queden recogidas en un entramado conceptual –un sistema axiomático– que sea consistente. A fin de cuentas, para Hilbert la expresión "existe x ", en matemáticas, apunta sólo a una *existencia ideal*, o si se quiere la admisibilidad del objeto x (caracterizado por ciertos axiomas) en un mundo de abstracciones lógico-conceptuales.

Spongamos que todo eso es correcto, y que por tanto basta con la simple consistencia lógica: la ausencia de toda contradicción en el plano rígidamente reglamentado de la teoría matemática, del sistema formal. El problema era: ¿cómo demostrar que las teorías interesantes son consistentes? La teoría de los números reales formulada por Dedekind y Hilbert, o la teoría de conjuntos codificada por Zermelo, tienen ya un grado de complejidad notable. Cualquier dominio de objetos (por muy "ideales" que sean) en el que se verifique una teoría u otra debe ser un dominio infinito bastante complejo. El sistema de Zermelo era fruto de una reflexión profunda, permitía trabajar libremente con conjuntos al tiempo que eliminaba las paradojas, pero ¿realmente lograba eliminar *toda* contradicción? Las matemáticas del infinito habían conducido a contradicciones difíciles de superar, tanto que algunos matemáticos muy influyentes habían apostado por el *finitismo* estricto: eliminar el infinito del universo conceptual de las matemáticas.

La idea crucial debió ocurrírsele a Hilbert en el transcurso de 1903, con motivo de reflexiones renovadas acerca de las dificultades que enfrentaba la teoría de conjuntos en tanto fundamento. Su intuición genial fue que la formalización de las matemáticas por medio de la lógica permitía tratar el problema de la consistencia como un problema matemático simple: mera cuestión de combinatoria finita, representable incluso como un problema de teoría de números. He aquí la manera. Cada teoría matemática, al ser formalizada, se reduce a un sistema finito de símbolos: todo teorema es el resultado de una *serie finita de inferencias* (reguladas por las reglas de inferencia) que en último término se originan en los axiomas, los cuales no son más que *secuencias finitas de símbolos*. La cuestión es, entonces, si la combinatoria finita de símbolos que es la teoría puede originar la demostración de una contradicción. Una contradicción no es más que una fórmula de la forma: $(p \wedge \neg p)$, y en el contexto de la lógica formal

basta incluso preguntarse si una contradicción concreta, una sola, es deducible (por ejemplo, si el sistema contiene símbolos para los números, basta saber si hay una deducción de la fórmula $0 > 1$).

Estudiar las inferencias y deducciones formales en las teorías matemáticas formalizadas era, precisamente, el objetivo de la *teoría de la demostración* o *metamatemática* de Hilbert. Sería posible, así, analizar toda una serie de características de las teorías matemáticas. He aquí las principales:

- *independencia* o dependencia de los axiomas entre sí;
- *completud* de la teoría, esto es, si todos los enunciados relevantes (delimitados de manera sintáctica o semántica) son deducibles;
- *decidibilidad* de los enunciados, o sea, si existe un algoritmo que permita saber que un enunciado pertenece a cierto conjunto de ellos;
- y sobre todo el problema de la *consistencia*, cuya solución debía eliminar para siempre las dudas escépticas.

El programa se trató de desarrollar de manera progresiva, como era natural. Se esperaba dar primero una demostración de consistencia de la aritmética de Peano (el sistema axiomático para los números naturales), y más tarde proceder a establecer la consistencia de la aritmética de los números reales (con lo que quedaría fuera de dudas el análisis matemático). En el camino, se delimitó toda una serie de sistemas y se perfeccionaron los métodos de la lógica. Ya en las lecciones de 1917/18, mencionadas arriba, se caracterizaba con precisión lo que hoy llamamos la *lógica de primer orden*. En este sistema lógico, el más importante para las matemáticas y el estudio de sus fundamentos, contamos con símbolos para las conectivas lógicas 'y', 'o', 'no', 'si... entonces...', respectivamente:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow,$$

y para los cuantificadores 'para todo x ', 'existe un x ', respectivamente:

$$\forall x, \exists x.$$

Siendo el sistema puramente formal, los objetos en el dominio de los cuantificadores son individuos cualesquiera: no existen en lógica de primer orden recursos para "ha-

blar" de "todas las propiedades". (Esto exigiría lógicas de segundo orden o de orden superior, las cuales presentan problemas en el contexto de los fundamentos de la matemática.)

Hilbert & Ackermann, en su obra citada (1928), planteaban el problema de demostrar que ese sistema lógico básico, la lógica cuantificacional o de primer orden, es *completo* en el sentido antes indicado. Este limitado pero importante problema fue el objeto de la tesis de Gödel, defendida en 1929. Pongamos que Σ es un conjunto cualquiera de fórmulas en el lenguaje de la lógica de primer orden (LPO). Gödel demostró que todas las consecuencias lógicas de Σ resultan demostrables a partir de las fórmulas de Σ mediante las reglas de inferencia de LPO. Para ello, Gödel estableció que todo conjunto (consistente) de fórmulas en el lenguaje LPO tiene un modelo enumerable en el sentido de la teoría de conjuntos (es decir: el modelo es finito o admite correspondencia uno-a-uno con los números naturales). De aquí se deducía otra consecuencia importante respecto a las propiedades de la LPO: el teorema de compacidad, que tendría gran importancia en el contexto de la teoría de modelos. Gödel obtuvo así un *metateorema lógico* que suele estudiarse en todo curso universitario de lógica matemática¹. Pero lo mejor estaba por llegar.

3. INCOMPLETUD Y TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN

Mostrar la completud de la lógica de primer orden era un avance hacia la realización del programa que Hilbert se había marcado como objetivo de su metamatemática. Recordemos que se trataba de investigar varias propiedades de los sistemas formales: independencia de los axiomas, completud, decidibilidad, y consistencia. Hilbert asumía, de manera algo implícita o a veces indirecta, que no sólo LPO, sino también otros sistemas formales eran completos y consistentes: en particular, varios sistemas formalizados como el de los axiomas de Dedekind y Peano; el sistema de axiomas de los números reales; y el sistema axiomático ZFC de la teoría de conjuntos. Y obviamente, Hilbert suponía que los métodos empleados en metamatemática eran suficientes para demostrar que dichos sistemas son consistentes.

Gödel saltó a la fama con su enorme logro de 1931: la demostración del Primer Teorema de Incompletud, y la

idea de cómo demostrar un segundo teorema del que hablaremos más abajo. Tras anunciar los teoremas en varios lugares, Gödel los publicó en su obra "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines", aparecida en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Estos resultados de la metamatemática arruinaban buena parte de las esperanzas de Hilbert. No tendría sentido aquí intentar una descripción precisa del contenido y los métodos de ambos teoremas². Nos limitaremos a dar una idea de su tendencia fundamental y de sus repercusiones.

Los sistemas formales definidos o codificados en la lógica de primer orden son, como hemos visto, de carácter finito y combinatorio. Cada enunciado es una secuencia finita de símbolos –por ejemplo: $\forall c \exists d \forall x (x \in d \leftrightarrow x \subseteq c)$ – y hay algoritmos que determinan si una secuencia dada está bien formada o no. Cada demostración formal es una secuencia finita de fórmulas, que puede escribirse como varias líneas, en cada una de las cuales aparece una fórmula. Una nueva línea en la demostración se justifica pura y simplemente por las reglas de inferencia (formales o combinatorias) y por una o varias de las líneas que la preceden. Y hay algoritmos que determinan si una secuencia dada de fórmulas es o no es una demostración. En resumidas cuentas, al formalizar una teoría matemática en LPO, lo que estamos haciendo es reducir todo lo relativo a los enunciados de la teoría y sus demostraciones a un mero asunto de combinatoria de símbolos. Precisamente por ser consciente de esto, Hilbert se convenció de que era posible desarrollar una teoría matemática de las demostraciones formales.

Pensemos ahora en la teoría de números. Los números naturales son instrumentos que manejamos para representar todo tipo de fenómenos de carácter finito. Más aún, cualquier cuestión que sea sólo de carácter combinatorio y finito puede siempre ser reformulada como una cuestión acerca de números (Tait 1981). Esto no debería sorprendernos mucho, y hoy menos que nunca. Recuerdo al lector que, en el mundo digital que nos hemos creado, los números naturales nos permiten codificar todo tipo de informaciones: programas informáticos, por supuesto, y el contenido de cualquier libro, y gráficos, etc., pero también la cara de mi abuelo (tal como queda reflejada en una fotografía) y las melodías y armonías de la sinfonía 41 de Mozart tal como las interpretara von Karajan... ¡o la voz

de Hilbert en el año 1930!³ Con más razón, y con mucha mayor precisión, pueden los números codificar todos los asuntos de combinatoria finita.

Tratemos ahora de reunir y combinar lo que acabamos de decir en los párrafos anteriores. Dado que cualquier sistema formal es de carácter combinatorio y finito, resulta posible establecer una representación o codificación de la información relevante sobre el sistema mediante números naturales. Es decir, podemos asignar números a los símbolos del sistema, y también a las fórmulas del sistema. Y lo más interesante: las relaciones entre las fórmulas se corresponderán también con relaciones bien definidas entre sus códigos numéricos. Esto es, lo relativo a la metamatemática del sistema es codificable en términos aritméticos. Semejante codificación digital del sistema formal y su metateoría se llama a veces una *gödelización*, y los números asignados se llaman "números de Gödel" (o incluso "gödels" a secas) de los signos, fórmulas, demostraciones, etc.

Una vez realizada esa codificación, es posible determinar efectivamente propiedades como si cierto número n es el número de un signo, o si es el número de Gödel de una fórmula. Dada una teoría T , hay algoritmos para determinar si cualquier fórmula dada es un axioma, si cierta ristra de fórmulas es una demostración formal, etc. Por tanto, es posible determinar efectivamente propiedades como las siguientes: si el número n es el número de Gödel de un axioma, o es el número de una demostración formal. Y también se puede determinar efectivamente la relación que se da entre los números n y m cuando m es el gödel de una demostración formal a partir de T de la fórmula cuyo gödel es n .

¿Por qué resulta todo esto interesante? Simple y llanamente, porque se trata de métodos muy fructíferos, y porque fue explotando las posibilidades de esas codificaciones (esa aritmetización de la metamatemática) como Kurt Gödel logró establecer sus llamativos resultados de 1931.

La teoría de los números naturales, en particular, puede ser axiomatizada y formalizada: se trata de la Aritmética de Dedekind-Peano (ADP). Pero aplicando el procedimiento de gödelización, se obtiene una representación del sistema formal ADP dentro de la propia aritmética; y por tanto, es posible representar el sistema y su metamatemática

dentro de sí mismo. Lo cual permitía, dando un nuevo giro a la reflexividad que está aquí involucrada, obtener un resultado capital. Gödel supo emplear las relaciones aritméticas para "cocinar" una fórmula φ que no puede ser demostrada ni refutada dentro del sistema formal, so pena de inconsistencia⁴.

La fórmula φ de Gödel se obtiene considerando cuidadosamente la manera concreta en que se ha "gödelizado" el sistema formal, por ejemplo ADP. Conociendo el modo en que las propias relaciones aritméticas interpretan o codifican propiedades metamatemáticas, es posible interpretar φ como una afirmación de su propia indemostrabilidad⁵. La fórmula φ está construida de tal modo que, si φ fuera demostrable en el sistema formal, éste sería contradictorio; y si la negación de φ fuera demostrable, también sería contradictorio. Suponiendo pues que el sistema sea consistente (como creemos que lo es ADP y los demás sistemas que interesan a los matemáticos), la fórmula φ es *formalmente indecidible* dentro del propio sistema. Pero, como añadía el propio Gödel,

De la observación que $[\varphi]$ afirma su propia indemostrabilidad, se sigue inmediatamente que $[\varphi]$ es correcta, puesto que $[\varphi]$ es ciertamente indemostrable (pues es indecidible). Y así, la proposición que es indecidible *en el sistema PM* resulta con todo ser decidida por consideraciones metamatemáticas.

Aunque el sistema formal particular para el que Gödel demostró su Primer Teorema era el mencionado *PM* (basado en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell), estaba claro que resultados análogos se podían demostrar para ADP o para sistemas como el *ZFC* de la teoría de conjuntos. En la descripción anterior no hemos entrado en detalles técnicos, pero como el lector podrá imaginar se ha establecido con toda precisión la clase de los sistemas afectados. Para la gödelización o aritmetización de la metateoría no hace falta ni siquiera disponer de toda la aritmética, es suficiente con una parte de ella (llamada aritmética recursiva primitiva). Cualquier sistema formal que tenga la capacidad expresiva suficiente para formular esa parte de la aritmética, está sujeto al Primer Teorema de Gödel. Esto sucede con la teoría de conjuntos o los sistemas formales para el análisis.

La existencia de un sistema formal incompleto no es en sí particularmente sorprendente. Un sistema puede ser

incompleto simplemente porque no se han descubierto todos los axiomas necesarios. Lo que demostró Gödel es que, en casos de gran importancia como la aritmética o el análisis real, *nunca* se puede lograr un conjunto completo de axiomas. La incompletud es esencial: cada vez que se añade un nuevo axioma siempre habrá otra proposición que resulte indecidible.

4. TEORÍA DE CONJUNTOS

Según parece, Kurt Gödel tuvo siempre preferencia por la idea de que las matemáticas estudian un dominio de objetos, de *entidades independientes* cuya existencia y propiedades son objetivas. Parece ser que en su juventud limitaba esa actitud suya a los números naturales, mientras que consideraba como creaciones humanas a las ideas matemáticas más avanzadas (el concepto de conjunto, por ejemplo). Pero poco a poco su "platonismo" o realismo con respecto a los objetos matemáticos se fue ampliando, hasta incluir los conjuntos. En esto tuvieron un papel importante sus trabajos sobre la teoría de conjuntos y su metamatemática.

Las contribuciones de Gödel en este campo fueron muchas y de gran calado. Para empezar, la visión intuitiva de los conjuntos que hoy prefieren los especialistas (denominada la *concepción iterativa* de los conjuntos) fue aportación de Gödel en los años 1930 y 1940. Según esta concepción, comenzamos con un dominio limitado de objetos, por ejemplo los números naturales, y formamos *conjuntos de* esos objetos. Y la operación "conjunto de" puede *iterarse*, para formar conjuntos de conjuntos de conjuntos... Dicho proceso iterativo se concibe como abierto y absolutamente sin límites. La idea no está exenta de dificultades, pero ofrece una concepción sólida que justifica con relativa facilidad los axiomas habituales del sistema de Zermelo-Fraenkel, y aclara también por qué las famosas paradojas o contradicciones no afectan a la teoría axiomática de conjuntos.

Más importantes todavía fueron las contribuciones técnicas que Gödel realizó hacia 1940. Se trató de aplicar los métodos de la lógica matemática al estudio metateórico del sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (y otros sistemas alternativos de teoría de conjuntos). Suponiendo dado un modelo *M* del sistema de Zermelo-Fraenkel, Gödel

consideró un submodelo (en el interior de M) constituido por lo que se denominan *conjuntos constructibles*. Tales modelos internos resultaron tener propiedades de gran interés, permitiendo resolver varias dificultades.

Como vimos antes, desde comienzos de siglo venía existiendo una gran controversia en torno al Axioma de Elección. Con sus nuevos métodos, Gödel demostró en 1939 que, si la teoría de Zermelo-Fraenkel (sin Axioma de Elección) es consistente, entonces también lo es la teoría ZFC que añade a la anterior dicho axioma. Esto es así, porque dado un modelo del simple sistema Zermelo-Fraenkel, el modelo interno de conjuntos constructibles satisface a la teoría ZFC. Gracias a este resultado, las cautelas extraordinarias que se venían tomando en relación al Axioma de Elección perdieron base.

Análogamente, Gödel demostró que la Hipótesis del Continuo de Cantor puede añadirse a la teoría ZFC sin que afecte en absoluto a su consistencia. Pero Gödel creía que, en realidad, la Hipótesis de Cantor era independiente de los axiomas habituales, de modo que a fin de cuentas no era sino una *proposición indecidible* en la teoría de conjuntos estándar. Los trabajos de Paul Cohen en los años 1960, que introdujeron una nueva etapa en el desarrollo de la teoría de conjuntos (con su método de *forcing*) y le valieron la Medalla Fields, confirmaron plenamente esa idea.

Finalmente, nuestro hombre fue también el gran impulsor de lo que se llama a veces el "*Programa de Gödel*" en teoría de conjuntos, que encuentra su justificación en resultados como los anteriores y en el Teorema de Incompletud. La idea era avanzar hacia un mejor conocimiento del universo de los conjuntos introduciendo axiomas que establecen la existencia de lo que se llama "grandes cardinales" (con una modestia en la expresión que algunos califican de poética). Si la teoría de conjuntos estudia los cardinales infinitos, todos los cuales parecen enormes o incluso monstruosos a una persona media, los "grandes cardinales" son exorbitantemente grandes. Pero su estudio ha guiado buena parte de la labor de los especialistas durante el último medio siglo, produciendo resultados notables y de una sofisticación matemática muy considerable.

Sigue siendo un problema abierto si la introducción de grandes cardinales conducirá a resolver el Problema del Continuo de Cantor. Gödel creía, en realidad⁶, que la hipó-

tesis de Cantor es falsa, y que la cardinalidad del continuo es \aleph_2 . Según importantes especialistas, hay resultados recientes que apuntan en esta misma dirección, pero todavía se está lejos de ninguna demostración fehaciente.

5. REPERCUSIONES: EL PANORAMA EN FUNDAMENTOS

Según vimos, durante el primer tercio del siglo XX las principales corrientes, dentro del estudio de los fundamentos de la matemática, eran logicismo, formalismo e intuicionismo. Las aportaciones de Gödel afectaron profundamente a toda la discusión y contribuyeron quizá más que ninguna otra a modificar sus términos.

Cabría argumentar que el logicismo estaba ya en pleno retroceso antes de Gödel, pero en todo caso sus resultados afectaron a esta corriente del mismo modo que al formalismo. Ambas propugnaban la formalización completa de las teorías matemáticas, y presuponían ingenuamente que los nuevos sistemas formales (especialmente los de importancia práctica, como los sistemas para la aritmética y el análisis real) serían completos. El Primer Teorema de Incompletud de 1931 cayó no como un jarro, sino como una verdadera inmersión en agua fría, y sus consecuencias se sentirían por muchos años. Se sienten todavía, porque es un resultado inapelable que afecta a nuestra comprensión del conocimiento matemático. En mi opinión, contraria a lo que piensa algunos matemáticos, la conclusión principal es que no se puede identificar las matemáticas con una (o varias) teorías formales; pero esto tampoco nos arroja en brazos del platonismo.

Las teorías formales son instrumentos matemáticos de gran alcance y de gran interés. También interés práctico, ya que los desarrollos de la lógica matemática asociados al nombre de Gödel han conducido a las teorías de la computabilidad, constituyendo la base teórica del desarrollo de la tecnología de computadores. Pero las teorías formales son instrumentos que tienen límites severos: en los casos interesantes son incompletas, no sirven para caracterizar unívocamente el dominio de entidades que se pretende estudiar, etc. Gödel contribuyó más que ningún otro a aclarar esta situación.

La tendencia que se vio más afectada fue la formalista, y en particular el Programa de Hilbert para la demostración

de que las teorías matemáticas son consistentes. Gödel no sólo demostró el teorema del que hablamos en la sección 3, sino también un Segundo Teorema de Incompletud. Los procedimientos de gödelización o aritmetización hacen posible formular una fórmula $Con(S)$ que codifica la consistencia del sistema formal S , y esto puede hacerse de tal modo que la fórmula φ que vimos en la sección 3 sea deducible de $Con(S)$. Los detalles técnicos son delicados, de manera que la demostración de este Segundo Teorema es bastante más difícil que la del primero. Pero la consecuencia es clara: la fórmula $Con(S)$ es también indecidible. La consistencia de un sistema formal de este tipo *no es demostrable sin emplear medios que no son codificables dentro del propio sistema*.

El Programa de Hilbert pretendía demostrar la consistencia de la aritmética ADP, de ZFC, y sistemas afines mediante *medios finitos*. Pero tales medios son codificables dentro de cualquiera de dichos sistemas. Gödel estableció pues que la meta que Hilbert se había fijado era inalcanzable. Por aclarar la situación metafóricamente, el intento de Hilbert quedó en una posición similar a los del barón de Münchhausen (personaje literario de Rudolf Erich Raspe): el barón había caído con su caballo en una ciénaga, e intentaba salir tirándose de su propia coleta. Igualmente fútiles parecían los intentos de resolver las dudas escépticas sobre las matemáticas con medios matemáticos.

En seguida, Gödel pasó a estudiar otros aspectos de los sistemas formales que tenían interés para la polémica entre formalistas e intuicionistas. Los intuicionistas, ya lo vimos, ponían objeciones a los métodos usuales en matemáticas, hasta el punto de rechazar incluso la forma normal de argumentar en aritmética. Así elaboraron una "aritmética intuicionista", y esta teoría acabó siendo formalizada en un sistema que llamaremos AI. Pues bien, en 1933 Gödel demostró que si el sistema AI es consistente, también lo es la aritmética "clásica" del sistema ADP. No era un resultado tremendo, pero cuestionaba las dudas de los intuicionistas. También sirvió para clarificar las ideas de los especialistas en fundamentos, que hasta entonces habían confundido los métodos finitarios con los métodos intuicionistas. Se entendía ahora, por fin, que los segundos van más allá de los primeros.

Tras todos estos giros, el panorama en fundamentos acabó mutando. El formalismo siguió estando fuerte a mediados del XX, aunque más como ideología conveniente que como una alternativa seria, ya que se había ido la esperanza de

conseguir la clave de bóveda que debían haber constituido las demostraciones de consistencia. Hacia 1950, el logicismo había casi desaparecido, porque a las dificultades mostradas por Gödel se le unían otras específicas suyas. Entretanto, las peculiaridades de los métodos matemáticos, que la Lógica Matemática hizo tanto por clarificar, se convertían en argumentos plausibles a favor del platonismo. Y así, la tendencia preferida por Gödel se volvió una alternativa sólida en la práctica, aunque rodeada de dificultades filosófico-científicas⁷.

El intuicionismo y, más en general, las posiciones denominadas constructivistas no desaparecieron, pero se consolidaron como una alternativa minoritaria. Así pues, y hablando a grandes rasgos, en la segunda mitad del siglo eran mayoritarias las posiciones que combinaban de modos diversos aspectos del formalismo y del platonismo⁸. Un triunfo más de Gödel.

La teoría de la demostración, por cierto, ha seguido desarrollándose con gran éxito. Téngase en cuenta que los propios teoremas de Gödel, por sorprendentes que fueran sus resultados, constituían grandes éxitos de los métodos metamatemáticos. Pero no ha resultado ser la panacea anunciada por Hilbert. Otra gran figura del siglo XX, John von Neumann, se había dedicado con ahínco al estudio de los fundamentos y al Programa de Hilbert. Tras los teoremas de Gödel, que von Neumann fue quizá el único en comprender inmediatamente, su desencanto con estos temas fue enorme. Decidió volverse hacia campos de las matemáticas que no fueran tan abstractos, sino que estuvieran en contacto directo con las ciencias, con la inyección vivificadora de ideas procedentes de la experiencia.

El desarrollo intelectual de Gödel fue en otra dirección. Continuó trabajando con intensidad en lógica matemática y fundamentos en las siguientes décadas. Pero, poco a poco, se fue centrando más en tratar de darle justificación filosófica a sus ideas preferidas. Se entregó así al estudio de textos filosóficos, a la reflexión sobre la obra de Leibniz y sobre la fenomenología de Husserl. Especuló con la posibilidad de elaborar una nueva ontología de los conceptos, y así fueron pasando los años, cada vez más recluso en el Institute for Advanced Study de Princeton. Continuaron la coherencia enorme y cierta tendencia a la obsesión que habían caracterizado su vida, y caracterizaron también su muerte por "desnutrición e inanición" en 1978.

Recibido: 16 de diciembre de 2006
Aceptado: 22 de diciembre de 2006

NOTAS

- 1 Aunque a menudo se estudia en una versión posterior, debida al recién fallecido Leon Henkin en 1949.
- 2 Para esto, el lector consultará con provecho el trabajo de Jané (2006) que se cita en la bibliografía. Véase <http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/Gaceta/Gaceta.asp>
- 3 <http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.mp3>. Aquí habla Hilbert de que en matemáticas no hay problemas sin solución: "debemos saber y sabremos".
- 4 Digo "cocinar" porque la fórmula φ no tiene interés aritmético por sí misma. Otros lógicos han buscado fórmulas indecidibles más naturales, y la búsqueda continúa con H. Friedman.
- 5 Por eso se dice a menudo que hay cierta similitud entre el Primer Teorema de Incompletud de Gödel y la paradoja del mentiroso ("La frase que Ud. está leyendo, escrita entre paréntesis y comillas, es falsa").
- 6 Véase su artículo más fácil de leer: "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?" (1947 y 1964), recogido en las *Obras completas*.
- 7 Para una discusión de este tema, puede verse Ferreirós (1999).
- 8 Hay más alternativas, claro, tanto por el lado filosófico como por el lógico-matemático: predicativismo, teoría de categorías, etc. Pero no podemos entrar en detalles.

BIBLIOGRAFÍA

Escritos de Gödel

- Obras completas*, Alianza, Madrid, 1989.
 "La situación presente en los fundamentos de las matemáticas", en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9, 3, 2006, 761-771.
Collected Works. Volúmenes I-V. Ed. S. Feferman et al., Oxford University Press, New York, 1986-2003.

Biografía

- Dawson, John W. (1997): *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, Wellesley (Mass.).

Análisis desde el punto de vista lógico y filosófico

- Feferman, Solomon (1998): *In the Light of Logic*, Oxford University Press, New York, 1998.
 Ferreirós, José (1999): "Matemáticas y platonismo(s)", en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 2, 446-473.
 Franzén, Torkel (2005): *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, Wellesley (Mass.).
 Jané, Ignacio (2006): "La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos", en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9, 3, 772-788.
 Tait, W. (1981): "Finitism", *Journal of Philosophy*, 78; reimpresso en Tait, *The Provenance of Pure Reason*, Oxford University Press, 2005.
 Wang, Hao (1991): *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Alianza, Madrid.