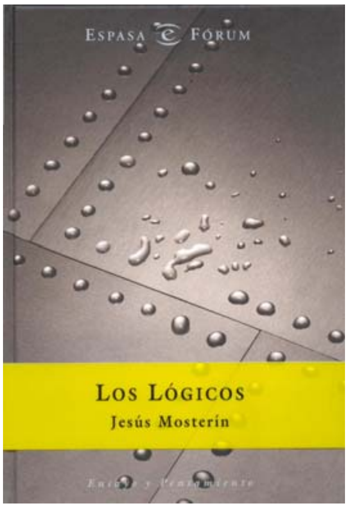
za, formación de profesores, enseñanzas específicas, el papel de la historia y de la resolución de problemas... Hay también una mirada a la evolución de la enseñanza en este siglo, desde la instrucción matemática a la educación matemática, con parada en la "matemática moderna", así como a la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. En fin, "hay de todo, aunque, desde luego, no está todo" lo que se refiere a las matemáticas del siglo XX, pues los editores no han "pretendido describir el nacimiento y la evolución de sus numerosas ramas, ni hacer la crónica de la evolución de su enseñanza, como tampoco referir de modo exhaustivo sus aplicaciones", aunque confiesan haber "querido mostrar lo que han sido a través de una amplia variedad de títulos y autores".

Los 101 artículos han sido escritos por 106 autores, de orígenes geográficos y profesionales bien diversos. Detrás ha estado un grupo de profesores canarios que, coordinados por Antonio Martinón, han participado como editores: José Luis Aguiar, Luis Balbuena, Alicia Bruno, Juan Antonio García Cruz, José Manuel Méndez, Casiano Rodríguez León, José Sabina, Rodrigo Trujillo y Fidela Velázquez.

Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.
A. Martinón (Editor)
Nivola, Madrid, 2000.
Números, Revista de didáctica de las matemáticas, **43** y **44**,
septiembre y diciembre 2000.

LOS LÓGICOS, EN VIDA Y OBRA

Jesús Mosterín



RESEÑADO POR José Ferreiros

Hace dos siglos, la ciencia era ante todo actividad de aficionados aristocráticos, y hace uno, ocupación profesional de burgueses pertenecientes a la clase media-alta. No es extraño que tal actividad estuviera regida por normas de actuación -no escritas- propias de *caballeros.* Una de estas normas era silenciar todo lo que tuviera que ver con peculiaridades o "desviaciones" en la vida privada de los científicos, y algunos llegaban incluso a callar ante casos obvios de conducta *impropia* por parte de sus colegas. Hoy, en cambio, en una sociedad que ya no tiene criterios de "normalidad" tan estrictos como los que antes imperaban, afrontamos con más naturalidad los detalles de la vida privada, y no sentimos ya la obligación de guardar silencio público respecto a los científicos -los muertos, al menos [1]- en tanto personas. El nuevo libro de Jesús Mosterín es, entre otras muchas cosas, un buen índice de esta situación.

Su objetivo ha sido ofrecer retratos de unos cuantos lógicos representativos, en vida y obra. Se trata de una

[1]El caso de los vivos es más complicado, como mostró hace ya muchos años la publicación del libro del Nobel James Watson, *La doble hélice*, con las subsiguientes reacciones.

fórmula útil para divulgar la lógica moderna ante un público más amplio, aliviando la aridez de las teorías con detalles históricos y biográficos. Uno de los motivos para la empresa puede colegirse de estas palabras del Prólogo:

> *"Alguien podría pensar que algo tan abstracto como la lógica solo podría atraer a personalidades frías y exangües. Pero las apariencias engañan. Bajo el hielo de la razón pura arde a veces una llama abrasadora y un corazón atormentado".*

Los seis "héroes intelectuales" elegidos por Mosterín son Frege, Cantor, Russell, von Neumann, Gödel y Turing; al menos dos de ellos, Frege y Gödel, habían sido ya anteriormente objeto de publicaciones del mismo autor[2].

La unión de los intervalos cubiertos por esas seis vidas abarca todo el período de surgimiento y maduración de la moderna teoría lógica. En todos los casos, contamos hoy con buenas monografías biográficas, que Mosterín ha sabido utilizar en combinación con su capacidad de síntesis y comunicación, y con sus sólidos conocimientos de lógica. El resultado es una obra sin duda interesante, donde la anécdota jugosa y los detalles históricos acompañan, como un buen vino, a los platos fuertes relativos a conceptos y resultados de la lógica matemática.

El cuerpo principal del libro resulta, creo, no sólo atractivo sino accesible. Ante nuestros ojos van desfilando retazos de la historia de Alemania, Austria, Hungría, Gran Bretaña y EE.UU., los avatares vitales de los seis protagonistas, sus intereses intelectuales y científicos, y naturalmente descripciones accesibles de sus principales contribuciones lógicas y, en ocasiones, de otros tipos. Los perfiles intelectuales que se trazan, siempre dentro de la genialidad, son muy diversos: desde personas retiradas y reconcentradas, como fueron Frege y Gödel, a individuos mundanos y polifacéticos, como Russell y von Neumann; del algo excéntrico o al menos colorista Cantor, al hipocondríaco Gödel; del mujeriego Russell al honesto homosexual que fue Turing.

Los temas lógicos que se tratan no son menos variados, ya que se habla de lógica en sentido amplio, tal como la disciplina es delimitada por los matemáticos, y no sólo de lógica elemental. Así, además de los rudimentos se discuten cuestiones de teoría de conjuntos, teoría de modelos (aunque es la menos representada) y teoría de computabilidad. Se comienza hablando del lenguaje conjuntista de la matemática moderna, y las cuestiones de teoría de conjuntos cantoriana permanecen siempre presentes. Sigue la emergencia del lenguaje ideográfico de Frege, el cálculo deductivo de la lógica. Luego aparecerá el problema de las paradojas o antinomias, y la solución russelliana en la teoría de tipos. Con von Neumann se trata de otra solución, la axiomatización de la teoría de conjuntos, y también del estudio metateórico de la misma, y de aportaciones al desarrollo de los computadores. Luego vienen los legendarios resultados metalógicos de Gödel, tanto relativos a sistemas formales de primer orden, como sobre consistencia relativa de axiomas conjuntistas. Finalmente, con Turing pasan a primer plano las funciones recursivas y los problemas de máquinas y computabilidad.

El libro tiene también otro nivel de lectura más avanzado, marcado tipográficamente por los recuadros que acompañan a buena parte del texto. Aquí, el autor presenta resúmenes condensados de nociones y resultados lógico-matemáticos. Se trata probablemente de lo más discutible del libro, porque -como ha señalado algún crítico- no puede decirse que estos resúmenes consigan verdaderamente el objetivo de *divulgar* los temas de los que tratan. Como buen exponente de una tendencia que siempre ha sido preponderante en la tradición de los lógicos, Mosterín

[2]Mosterín ha coordinado la edición de los *Escritos filosóficos* del primero (Barcelona, Crítica, 1996), que incluyen mucho material sobre filosofía de la matemática, y de las *Obras completas* del segundo (Madrid, Alianza, 1980).

no hace concesiones a la accesibilidad que puedan suponer merma del rigor. Esto presenta el inconveniente de que, salvo en casos excepcionales, los recuadros sólo serán comprensibles en su totalidad a quien ya haya estudiado con algún detalle su contenido [3]. Se trata de buenos resúmenes para aquellos que conozcan previamente el material, y, eso sí, servirán muy bien de compañía para quienes estén realizando un curso de lógica.

Andando el camino de la historia de la lógica, el lector descubrirá detalles poco conocidos de esos famosísimos seis personajes. Mencionaré algunos de ellos, al tiempo que repaso algunos rasgos clave de estas figuras.

Gottlob Frege (1848-1925) es considerado usualmente como el fundador y aún el creador de la lógica matemática moderna, para la que propuso un sistema formal axiomatizado, muy depurado, en su obra de 1879 *Begriffsschrift* [Ideografía]. Los especialistas en historia de la lógica pueden discutir esa evaluación de su obra, por ejemplo indicando las contribuciones contemporáneas de otros autores, como el inglés Boole, el norteamericano Peirce o el alemán Schröder. O bien apuntando sutilezas importantes de la obra fregueana, como el hecho de que nos encontramos ante una lógica de orden superior y no ante la lógica estándar de primer orden; o como el problema que supone la concepción que tuvo de la lógica, pues hace imposible un tratamiento metateórico (estándar también, y definitorio de lo que hoy entendemos por lógica). Pero nada de eso anula la novedad enorme del enfoque de Frege, la madurez de sus propuestas desde el mismo inicio -contrastando radicalmente con las geniales pero dispersas contribuciones de Peirce-, la claridad meridiana de sus análisis lógicos y conceptuales.

En otros planos, quien lea a Mosterín saldrá con una imagen clara de la soledad vital de Frege, de su talante conservador y aún reaccionario, pero también del papel clave que desempeñó el físico y empresario Ernst Abbe en su trayectoria académica, y así, indirectamente, en la historia de la teoría lógica.

Si pasamos a la legendaria figura de Georg Cantor (1845-1918), también él es considerado habitualmente como el creador de una gran teoría matemática, la teoría de conjuntos, en una peripecia intelectual y personal bien conocida entre los matemáticos [4]. También en este caso, los especialistas -y no en último término el que suscribe- pueden discutir esa evaluación, subrayando por ejemplo cómo la reformulación conjuntista de la matemática estaba ya en marcha, antes e independientemente de Cantor, por obra de personajes tan influyentes como Riemann y Dedekind. Pero también aquí, nada de ello anula la impresionante originalidad de los planteamientos y los razonamientos de Cantor, cuyas *contribuciones a la fundación de la teoría de conjuntos transfinitos*[5] marcan, sin duda, el origen de esa teoría en tanto rama de la lógica matemática actual.

En *Los lógicos*, el interesado podrá leer sobre las célebres crisis mentales de Cantor (resultado, al parecer, de una enfermedad maníaco-depresiva) y acerca de su casi mítica confrontación con Kronecker, sobre la que quizá se ha tendido a exagerar[6]. También podrá seguir los detalles de la poco exitosa carrera académica del genial matemático, conocer sus ideas filosóficas sobre el in-

[3] Difícilmente bastará al lector no experimentado con leer las pags. 42-46 para hacerse una idea de lo que es un sistema axiomático de lógica, o las 53-54 para entender la definición del conjunto de los números naturales dada por Dedekind, ni mucho menos las 202-04 para entender lo que son los espacios de Hilbert.

[4] Aunque muchas veces tergiversada o incluso falseada, como sucede con la conocidísima descripción que dio E.T. Bell en su *Men of mathematics*.

[5] Es el título de dos artículos de los años 1890, pero vale como resumen de toda la obra del autor.

[6] Por ejemplo, no hay evidencia documental independiente de que sea cierto que Kronecker retrasó la publicación de un artículo de Cantor en 1878 (p. 106). De hecho, el artículo de Cantor aparece tipografiado precediendo a un artículo recibido con anterioridad. El lector interesado puede ver mi trabajo *El nacimiento de la teoría de conjuntos*, p. 229-30.

finito, su participación como fundador de la Unión Matemática Alemana, y su muy peculiar atracción por la idea de que el verdadero escritor de los dramas de Shakespeare no podía ser otro que un cultivado aristócrata de intereses científicos, el canciller Francis Bacon.

Quizá vale la pena insertar aquí un aparte, aunque suponga alejarnos del contenido del libro que comentamos. Hay un rasgo paralelo y llamativo en las figuras de Frege y Cantor. En ambos casos, ha habido mucho interés por pintarlos como "el creador" de una rama capital de la lógica matemática, y esto sucedía allá por el año 1930. Mi opinión particular es que existe una causa común, y es la situación conflictiva por la que atravesaban los estudios sobre fundamentos en tiempos de la famosa "crisis". Convenía crear unas señas de identidad para quienes se dedicaban a estos temas, y en particular para los hilbertianos. Convenía establecer unas figuras bien reconocibles como *padres fundadores* de la disciplina, y tanto mejor si esos personajes podían ser presentados como grandes innovadores que en su día sufrieron la indiferencia y aún el desprecio de matemáticos influyentes pero mucho menos dotados. Las biografías de Cantor y Frege se prestaban muy bien a esta operación de imagen, y así pasaron a formar parte de la retórica de Hilbert y otros autores.

Hablando de Hilbert, fueron él y sus alumnos, particularmente con la publicación de los *Elementos de lógica teórica* en 1928,[7] quienes dieron paso a la época de plena madurez de la teoría lógica. Indicio de ello es que en ese libro se da un tratamiento metateórico moderno a los sistemas de lógica formal, se plantean los problemas de consistencia, decidibilidad y completud, y se delimita con claridad el ámbito de la lógica de primer orden[8]. La figura de Hilbert hubiera encajado bien dentro de los límites de la obra de Mosterín, ya que su vida fue más movida y dramática de lo que parece pensar el autor (lo mismo podría decirse del alumno de Hilbert que fue Zermelo). Pero es obvio que toda selección es subjetiva, y no hay nada de objetable en la que estamos comentando.

De hecho, la figura de Hilbert aparece en varios lugares de Los lógicos, ya que planeó sobre toda la época dorada de la teoría lógica, que tuvo su cénit en los años 1930. En el cap. 1 puede verse la disputa que Frege y él sostuvieron hacia 1900 sobre el alcance y la legitimidad del método axiomático moderno. Frege defendía aún la vieja concepción de los axiomas como verdades ciertas y evidentes, mientras que Hilbert era ya el defensor de la moderna concepción axiomática, enfatizando la arbitrariedad -en principio- de los axiomas y poniendo la condición de consistencia como único requisito indispensable. Esta discusión da algunas pistas importantes de por qué la lógica de Frege no era aún la moderna, y por qué precisamente Hilbert pudo ayudar a su maduración. Reaparece en el cap. 4, dedicado a von Neumann, tanto a propósito del programa metamatemático como de los espacios de Hilbert. Y surge de nuevo, como no podía ser menos, a propósito de los teoremas de Gödel en el cap. 5, y de la contribución de Turing al problema de la decisión en el cap. 6.

Pero volvamos a nuestros seis personajes en su orden cronológico. Le llega el turno a ese gran intelectual, agudo lógico y perspicaz filósofo que fue Bertrand Russell (1873-1970)[9]. Mosterín da una buena imagen de la increíble capacidad de trabajo y versatilidad de Russell, así como de los múltiples giros que experimentó en su trayectoria intelectual. Sin duda su obra magna fue la que dedicó a cuestiones de lógica y fundamentos, culminando en un traba-

[7] Por desgracia, no es este libro el que está disponible en castellano, sino una versión muy posterior y modificada de la misma obra, que salió de la mano de Ackermann exclusivamente.

[8] Lógica cuantificacional elemental, donde el rango de los cuantificadores sólo puede ser un dominio de individuos.

[9] En el título del capítulo correspondiente (y en el índice) hay una errata, dándose como fecha de muerte 1941.

jo tan ponderado como poco leído, los *Principia mathematica* de 1910-13. Es indudable su aportación al desarrollo de la lógica, primero al poner en claro las dificultades que suponían las contradicciones o paradojas de la teoría de conjuntos, y después con la teoría de tipos y también la teoría de las descripciones. Pero uno se queda siempre con la sensación de que la gran capacidad matemática, y sobre todo lógica, de Russell quedó un tanto inhibida por la preeminencia que en su pensamiento tuvieron las consideraciones filosóficas. Sólo así se explican las deficiencias que, a ojos de un matemático, presenta inevitablemente la teoría ramificada de los tipos en la que se basaron los *Principia*.

Al leer las páginas de Mosterín dedicadas a Russell, uno no puede dejar de advertir la indudable simpatía que siente por la figura de éste en sus múltiples dimensiones, y no en último lugar las personales. Se nos muestra la interesante trayectoria del aristócrata inglés tanto en el plano personal y sentimental como en lo relativo a cuestiones teóricas y prácticas. No en vano fue un filósofo interesado cada vez más en lo práctico, en cuestiones políticas y sociales de candente actualidad, como las que le llevaron a prisión en tiempos de la Guerra. Hay que decir una vez más que Russell -bastante olvidado por los historiadores de la filosofía- es uno de los filósofos más interesantes del siglo XX, sobre todo porque su vida es una ventana abierta a los grandes acontecimientos y las grandes preocupaciones de buena parte del siglo pasado.

Damos un salto generacional y nos encontramos con el húngaro, nacionalizado estadounidense, János o Johann o John o, por qué no, Juan von Neumann (1903-1957). La versatilidad matemática de von Neumann es bien conocida: contribuciones múltiples a la teoría de conjuntos, la metamatemática, la teoría cuántica, la teoría de juegos, la computación, el proyecto Manhattan, etc. En este sentido, y a diferencia de todos los lógicos anteriores, se trata de uno de los grandes matemáticos de su época. En lo que a nuestros temas respecta, von Neumann tuvo una contribución muy precoz presentando la definición axiomática moderna de los ordinales, y contribuyó a la maduración de la teoría axiomática de conjuntos (tanto en la versión Zermelo-Fraenkel como en la suya propia, adoptada luego por Bernays y Gödel). También fue el primero en manejar la jerarquía cumulativa de los conjuntos bien fundados, aunque no en forma dogmática sino sólo como herramienta metateórica; fue Zermelo quien, poco después, tomó como axioma el de Fundación y adoptó plenamente la jerarquía cumulativa.

Lo curioso en el caso de von Neumann es que él mismo quizá no se hubiera sentido satisfecho al ser identificado como lógico, por más que en su vida y sus decisiones hiciera gala como ningún otro del "hielo de la razón pura" y de una "lógica aplastante". Las contribuciones de von Neumann a la lógica se concentran exclusivamente en la etapa que va desde sus 20 a sus 28 años de edad. Desde 1931 -año de la publicación de los teoremas de Gödel, cuyo alcance fue quizá el primero en comprender- hasta su muerte, se dedicó a temas más próximos a la ciencia y las aplicaciones. Tras la Segunda Guerra Mundial escribió:

> *"Esto [los enormes giros en la investigación de fundamentos] sucedió en el transcurso de mi propia vida, y yo mismo sé con cuán humillante facilidad mi concepto sobre la verdad absoluta matemática ha cambiado durante estos episodios, ¡y cómo ha cambiado sucesivamente tres veces!" "A gran distancia de su origen empírico, o después de muchas reproducciones "abstractas", un tema matemático está en peligro de degeneración. ... Siempre que se alcance este punto, me parece que el único remedio es el retorno rejuvenecedor a la fuente: la reinyección de ideas*

más o menos directamente empíricas."[10]

Creo que estas palabras nos presentan la justificación (!) de su abandono de la investigación en teoría de conjuntos y fundamentos, volviéndose a cuestiones científicas y aplicadas.

Y ya que estamos hablando de heterodoxia, hay que decir que el propio Cantor no se identificaba a sí mismo en absoluto como un lógico, cuando menos al final de su carrera. Sentía poca simpatía por quienes se aproximaban a la matemática y la teoría de conjuntos desde un planteamiento estrictamente lógico. Este era el caso de su corresponsal, Dedekind, y también el de Frege y Russell: los tres son representantes de la llamada "teoría ingenua" de conjuntos, que se basaba en el principio de comprehensión. En una carta a Hilbert de Noviembre de 1899, Cantor le dice que el fundamento de sus investigaciones sobre los conjuntos se encuentra "*en oposición diametral*" al núcleo de la concepción de Dedekind, a saber, "el supuesto ingenuo de que *toda colección* o *sistema bien definido* es siempre una "*colección consistente*" (principio de comprehensión). Esta frase expresa explícitamente el anti-logicismo de Cantor en su madurez, e implica que la teoría de conjuntos no debe verse como una parte de la lógica (elemental), como pensaban muchos en aquel tiempo.

Tras von Neumann encontramos al lógico más famoso del siglo XX, Kurt Gödel (1906-1978), al que alguna revista ha declarado, exageradamente, como el primer matemático del siglo. Nada nuevo podemos decir aquí acerca de Gödel: sus contribuciones a la lógica son de una brillantez y una profundidad innegable, y Mosterín las analiza muy bien en su libro. El lector encontrará también comentarios acerca de la atribulada vida privada del gran lógico, cuyo caso encaja a la perfección con el mito de que un acercamiento demasiado estrecho a la verdad lleva indefectiblemente a la locura. (El "teorema" converso dice que ninguno de los que estamos cuerdos puede ser un genio; de ser cierto, sólo Cantor y Gödel podrían aspirar a ser calificados de tales.) Se encontrarán también discusiones sobre la filosofía de la matemática gödeliana, siempre interesante aunque polémica, sobre su vida en el Institute for Advanced Study de Princeton, y sobre sus aportaciones a la cosmología relativista.

En la obra de Gödel pueden rastrearse los inicios de la teoría de modelos y la teoría de la recursividad, que forman las otras ramas fundamentales de la lógica matemática [11]. Y hablando de recursión y computación llegamos a la última de las seis figuras, Alan Turing (1912-1954). A la edad de 24 años, Turing realizó una gran contribución demostrando que el problema de la decisión o Entscheidungsproblem de Hilbert tenía solución negativa: no existe un procedimiento automático que permita obtener la solución a cualquier cuestión matemática. Para ello recurrió a su famosa noción de "máquina de Turing", mostrando que el problema de la parada de una máquina de Turing dada cualquiera, es indecidible. Turing continuó realizando contribuciones muy importantes a la lógica, la computación, la inteligencia artificial y la biología matemática, al tiempo que participaba en las actividades de guerra como "rompe-códigos". Pero su vida terminó muy pronto y trágicamente: a consecuencia de un robo en su casa, que inició una serie de peripecias, fue acusado de prácticas de sexo homosexual consentido en su propia casa y con un "menor" (19 años). Juzgado y condenado a recibir inyecciones de estrógeno, ésto acabó con su buena forma física (forjada en carreras de maratón), puso fin a sus actividades en criptografía, le convirtió en objeto de vigilancia policial, y terminó llevándole a pensar que la vida ya no valía la pena. El 8 de junio de 1954 se quitó la vida tomando cianuro potásico.

Con esta triste historia, demasiado humana y demasiado poco racional,

[10] "El matemático", en Newman, *Sigma. El mundo de las matemáticas*, vol. 1.

[11] Aunque, por supuesto, decir teoría de modelos es hablar del otro gran lógico contemporáneo de Gödel, Alfred Tarski.

termina el libro de Mosterín. Afortunadamente, la vida de las disciplinas científicas no es tan dependiente de las circunstancias particulares de la cultura y las costumbres sociales humanas. La lógica matemática ha seguido avanzando imparablemente y de una forma cada vez más variada desde entonces, si bien muchos matemáticos tienen la impresión de que los resultados de la segunda mitad del siglo XX no alcanzan el nivel de profundidad y relevancia general que tuvieron aquellos míticos logros de la década de 1930. Pero esta es una cuestión diferente, que cae fuera del marco del trabajo, bien realizado y muy recomendable, de Mosterín.

Los Lógicos
J. Mosterín
Madrid, Espasa-Calpe 2000
Colección Espasa Fórum, Ensayo y pensamiento), 324 págs.

José Ferreirós
Dpto. de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla
c/ Camilo José Cela, s/n, 41018 Sevilla
correo electrónico: jmferre@cica.es

Fotografiando las Matemáticas

Estamos ante un libro singular, bello y a la vez provocativo, fruto de una aventura común, por una parte, una editorial que apuesta por la belleza, y por la otra, unos matemáticos apasionados por su ciencia y afanados en compartirla con todos. Este Año Mundial de las Matemáticas, Carroggio S.A. de ediciones ha querido sumarse a la conmemoración con la osadía de, ni más ni menos, que fotografiar las Matemáticas.

¿Se pueden fotografiar las Matemáticas? En palabras del propio Santiago Carroggio, Presidente de la editorial, el proyecto pretendía elevar las Matemáticas a la categoría de arte. Por los primeros comentarios recibidos, parece que este objetivo se ha logrado. Pero se trataba también de mostrar las Matemáticas escondidas en las Ciencias y las Tecnologías, matemáticas que impregnan nuestro mundo y que nos pasan muchas veces desapercibidas. El objetivo complementario era aumentar la apreciación pública de las matemáticas por los ciudadanos, cumpliendo así con uno de los principales fines que perseguía la Declaración de Río de Janeiro del 2000 como Año Mundial de las Matemáticas.

Lo primero que llama la atención en este libro son sus medidas. El lector curioso puede dividir la longitud por la anchura: el resultado que encontrará es el número aúreo, el número ϕ. Si el lector observa con atención la portada verá una lente que forma ese mismo número. El número ϕ aparece como la proporción perfecta, el canon de belleza del Partenón. Lo encontramos en la Pintura, en la Arquitectura, en la Escultura, pero también está presente en la naturaleza, resultado de la optimización con la que ésta actúa.

El tamaño es el primer guiño que se hace al lector, pero no es más que la primera de una larga serie de complicidades.