*X Congreso de Ingeniería de Organización*
*Valencia, 7 y 8 de septiembre de 2006*

# Integración de los modelos de preferencias no lineales y el diseño de experimentos no lineal para el estudio de decisiones individuales

**J. Nicolás Ibáñez[1], Jesús Muñuzuri[1], Luis Onieva[1], José Guadix[1]**

[1] Grupo de Ingeniería de Organización. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Avda. de los Descubrimientos, s/n, 41092 Sevilla. juannicolas@us.es, munuzuri@esi.us.es, onieva@us.es, guadix@esi.us.es

## Resumen

*Este trabajo abunda en las razones que desaconsejan, en general, la implementación de una estrategia de construcción de un diseño no lineal por adaptación directa de otro que es lineal. Para ello se formula el denominado problema general de diseño no lineal, el cuál incluye a toda la tipología de cuestionarios sobre los que aplicar modelos de preferencias no lineales y cuya función objetivo se prueba sustancialmente diferente a la del caso lineal. Asimismo, se muestra cómo la resolución de este problema general difiere de la resolución de un modelo de preferencias, la cual tiene por objetivo último ponderar la contribución de diferentes factores a la explicación de las respuestas a un cuestionario construido previamente. Finalmente, se analiza la diferente incidencia del tipo de decisiones recogidas de los individuos (elecciones, ratings o rankings) en la formulación tanto del problema general de diseño como en el problema de optimización para resolver un modelo de preferencias, y se destacan con este análisis las ventajas de proceder a una integración de ambos.*

**Palabras clave:** Modelos de preferencias, maximización de la utilidad, diseño de experimentos

## 1. Modelos no lineales de preferencias

Tanto si un fabricante decide introducir un nuevo modelo de vehículo o no, o tanto si una empresa decide adoptar o abandonar un proyecto de transporte combinado, o tanto si un individuo decide utilizar el autobús para ir a trabajar o no, son situaciones diferentes en las que existen *elecciones discretas* por parte de una población. La terminología se refiere al hecho de que el individuo decide, en base a considerar un número finito (y superior a uno) de alternativas, selecciona una alternativa de entre un conjunto de varias posibles.

La metodología en torno al tratamiento de estas elecciones para la construcción de modelos descriptivos y predictivos de las preferencias observadas se ha desarrollado casi en su totalidad a partir de los años setenta y con el objetivo último de construir modelos que se acerquen a la realidad del proceso decisor individual más que los modelos lineales de preferencias (de entre los que destacan los modelos de regresión lineal).

## 2. Estructura básica

La observación básica en un modelo de elección discreta es la decisión realizada por un individuo al considerar simultáneamente dos o más alternativas (*conjunto de decisión*). La diferencia fundamental respecto al caso lineal es que mientras que en modelos lineales los individuos asignan valoraciones al analizar una combinación de atributos, en los no lineales, los elementos básicos de información son agrupaciones de al menos dos combinaciones de atributos (*conjuntos de decisión*). El individuo considera simultáneamente todos los perfiles contenidos en el conjunto de decisión y realiza una valoración sobre ellos (por este motivo a cada perfil también se le conoce en modelos no lineales como *alternativa de decisión*).

Los tres tipos más extendidos de valoración que realizan los individuos al considerar las alternativas de un conjunto de decisión son los tres siguientes: primero, elegir una de las alternativas del conjunto como la que le proporciona la mayor satisfacción (o la menor pérdida) (*datos de elección*); segundo, asignar porcentajes de preferencia para cada una de las alternativas (*datos de frecuencia*); y tercero, asignar un orden de preferencia de las alternativas (*datos de ranking*).

Al igual que los modelos lineales, el objetivo de los modelos de preferencias no lineales (de los que son un caso particular los modelos de elección discreta) es encontrar unos coeficientes que ponderen a cada uno de estos atributos en su contribución a la utilidad o índice de satisfacción de cada alternativa. Existen, sin embargo, dos aspectos diferenciados en el proceso para realizar dicho cálculo:

Primero, el establecimiento de una relación funcional entre los valores de los atributos de una alternativa y la utilidad o satisfacción a ella asociada. Los términos de error tienen una interpretación más compleja que la del caso lineal y las valoraciones que realizan los individuos no son directamente las variables dependientes o explicadas.

Y segundo, el establecimiento de una relación funcional entre la utilidad de una alternativa y la probabilidad con la que el modelo postula que ésta será elegida; mientras mayor sea la probabilidad asignada a las alternativas que han sido elegidas o mejor valoradas por los individuos, mejor será el modelo construido en base a las dos relaciones funcionales mencionadas. Las expresiones de la probabilidad se derivan de asumir que los individuos muestran mayor preferencia por las alternativas con mayor utilidad. Al ser las utilidades aleatorias, a éste paradigma de comportamiento, adoptado como base teórica para la mayoría de los modelos de preferencias, se le denomina teoría de maximización de la utilidad aleatoria o teoría *RUM* (*random utility maximization*). La definición exacta de *RUM* establece que la probabilidad de elegir la alternativa *j* en la situación de decisión *m* está relacionada con las utilidades de las alternativas de la forma siguiente:

$$P_j^m = \Pr\left(U_j \geq \left\{U_1, \ldots, U_{C_m}\right\}\right)$$

con $C_m$ indicando el número de alternativas del conjunto de decisión *m*. La derivación de la expresión concreta para estas probabilidades está estrechamente relacionada con el tipo de distribución conjunta de los términos de error $\left\{\xi_1^m, \ldots, \xi_{C_m}^m\right\}$.

En la Tabla 1 se muestran diferentes relaciones entre las probabilidades y las utilidades de las alternativas, cada una de las cuales descansa en una diferente distribución de los términos aleatorios.

| Tipo de modelo | Distribución de $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ | $P_j^m = g\left(V_1,\ldots,V_{C_m}\right)$ |
|---|---|---|
| *Logit simple* | $\varepsilon_i^m \rightarrow i.i.d.\ Gumbel(0,\lambda)$ | $P_i^m = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_i^m}}{\sum_{k\in C_m} e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_k^m}}$ |
| *Logit jerárquico de dos niveles (GEV-derivation)* | $F\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\right) = \exp\left(-G\left(e^{-\boldsymbol{\varepsilon}^m}\right)\right)$ | $P_i^m = \frac{e^{\lambda_g V_i^m}\left(\sum_{j\in B(g)} e^{\lambda_{B(i)} V_j^m}\right)^{\mu/\lambda_{B(g)}-1}}{\sum_q \left(\sum_{k\in B(q)} e^{\lambda_{B(q)} V_k^m}\right)^{\mu/\lambda_{B(q)}}}$ |
| *Probit* | $\boldsymbol{\varepsilon}^m \rightarrow N(\mathbf{0},\boldsymbol{\Omega})$ | $P_i^m = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}^m \in D_i^m} \frac{\exp\left(-\boldsymbol{\varepsilon}^{m\prime}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^m/2\right)}{(2\pi)^{-C_m/2}\det(\boldsymbol{\Omega})^{1/2}} d\boldsymbol{\varepsilon}^m$ |
| *Logit Mixto* | $f(\boldsymbol{\varepsilon}^m)\ ,\ f(\boldsymbol{\beta})$ | $P_i^m = \int_{-\infty\cdot\mathbf{1}}^{+\infty\cdot\mathbf{1}} \frac{e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_i^m}}{\sum_{k\in C_m} e^{\boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_k^m}} f(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta}$ |

***Tabla 1.*** *Funciones de asignación de probabilidad para diferentes modelos de preferencias no lineales*

Así, por ejemplo, los modelos de elección discreta postulan que el individuo elige aquella alternativa que le proporciona más utilidad. El modelo estima los coeficientes que ponderan la contribución de los atributos a dicha utilidad de tal forma que se asigne una utilidad mayor a aquellas alternativas que han sido elegidas, siendo esta asignación la establecida por la teoría *RUM* que se expone con posterioridad a esta introducción. Así pues, los coeficientes de los atributos son estimados de tal forma que las probabilidades de las alternativas elegidas sean lo más altas posibles, denominándose este procedimiento *estimación de máxima verosimilitud*.

Si en lugar de elegir se pide a los individuos encuestados que valoren u ordenen a todas las alternativas disponibles, datos de rating y de ranking respectivamente, se sigue un procedimiento similar para calcular los coeficientes, si bien se hace necesaria alguna manipulación de la función de verosimilitud que se maximiza al calcular los parámetros del modelo. Algunas de estas manipulaciones para construir probabilidades a partir de datos de ranking son los *modelos logit explotados* o los *modelos logit ordenados*. La construcción de probabilidades a partir de datos de rating también ha recibido la atención de trabajos como Bates & Terzis (1992) o Ibáñez (2006).

## 3. Origen de los modelos de elección: teoría de elección del consumidor

En McFadden (1974) se formula el modelo de elección discreta de tipo logit simple con el propósito de mejorar sustancialmente diferentes procedimientos de modelado del comportamiento de los individuos desarrollados desde principios del siglo XX. El objetivo inicial de esta formulación no es tanto el estudio de la conducta general de los individuos respecto a una determinada temática, sino el análisis de su actividad consumidora (teoría de elección del consumidor). En lo que sigue se presenta una revisión de la relación entre esta teoría y los modelos de preferencias que se han presentado.

La teoría económica clásica postula que un consumidor busca con sus decisiones maximizar su propio interés, y que este propio interés es el que caracteriza ampliamente la consistencia entre las diferentes decisiones de los individuos. El concepto de comportamiento *racional* de los consumidores por el seguimiento de su propio interés recibe en la primera mitad del siglo XX un significado más específico a partir de trabajos como Hicks (1957) y Samuelson (1948), definiendo el propio interés en términos de preferencias innatas y estables de los individuos.

Las preferencias de los consumidores quedan representadas por una función de utilidad o satisfacción, $U(\mathbf{x})$, que depende de los niveles de consumo de una cesta de productos (**x**). La cantidad consumida de cada producto se escoge maximizando esta función de utilidad sujeta a una restricción de presupuesto, $\sum_{j\in Cesta} x_j p_j \leq I$, donde $p_j$ es el precio de cada producto e $I$ es el ingreso disponible para consumo. De tal maximización de la utilidad se ha de desprender una función de demanda $\mathbf{x} = f(\mathbf{p}, I)$. Estos primeros trabajos mencionados hacen referencia a las preferencias del consumidor representativo de la población bajo estudio, y no a las preferencias desagregadas para cada individuo de esta población. La ponderación mediante algún método de las características que definen a cada individuo proporciona las características que definen al consumidor representativo.

A partir de este punto, nuevos trabajos comienzan a considerar preferencias heterogéneas para este consumidor representativo, definiendo una función de demanda con términos aleatorios capaces de explicar la discrepancia con los datos observados del consumo medio, es decir, una función $\mathbf{x} = f(\mathbf{p}, I) + \boldsymbol{\varepsilon}$. Esta perturbación se interpreta como el error de medida en las cantidades demandadas **x** o el error en el proceso de optimización de la función de utilidad por parte de los individuos.

En los años sesenta, quizá motivado por el rápido incremento en la disponibilidad de datos de naturaleza microeconómica (observaciones de consumo y características a nivel individual), se considera más en detalle el comportamiento individual de los consumidores. Los elementos aleatorios $\boldsymbol{\varepsilon}$ que aparecen en la función de utilidad se considera que producen perturbaciones en el individuo, con unas propiedades dependientes directamente del origen de estos elementos aleatorios y de si son conocidas por cada consumidor (Griliches, 1957; Mundlak, 1963; Griliches y Ringstad, 1970). A partir de estos trabajos, se inicia propiamente el estudio de la teoría de elección del consumidor basada en preferencias heterogéneas a nivel individual.

Posteriormente se produce un desarrollo importante de esta teoría al aplicar la naturaleza de los términos aleatorios individuales introducidos por Griliches (1957) para estudiar funciones de producción de electricidad (McFadden, 1978; Fuss, McFadden y Mundlak, 1978), dando lugar al modelo logit de tipo simple empleado ampliamente como modelo básico de estudio de las preferencias individuales.

## 4. Diseños de experimentos para análisis de preferencias

Además de la aproximación a los modelos de preferencias, este trabajo también aborda el proceso de construcción de los cuestionarios a partir de los cuales obtener información de los individuos acerca de dichas preferencias. A este proceso se le denomina diseño del experimento. Existen dos líneas de investigación principales en lo relativo al diseño de experimentos, una más tradicional basada en la aplicación de modelos de tipo lineal (Fisher, 1935; Box et al., 1978 y Montgomery, 1996) y otra más novedosa desarrollada a partir de la generalización de las aplicaciones prácticas de metodología no lineal de análisis de las preferencias, y basada precisamente en la definición de procedimientos de construcción de cuestionarios o encuestas a partir de los cuales recoger eficientemente la información que procesan dichos modelos.

Este hecho implica la necesidad de efectuar cambios en el proceso tradicional (lineal) de construcción de las encuestas para incorporar en él las particularidades de la metodología no lineal de preferencias.

La literatura que aborda el diseño o construcción de las encuestas, a partir de las cuales recoger las preferencias de los individuos, es considerablemente más escasa que la dedicada a la propia especificación de los modelos de preferencias, siendo esta escasez aún mayor en lo relativo a los diseños construidos para aplicar modelos no lineales.

La razón principal que puede justificar este hecho es que el diseño de experimentos haya estado asociado tradicionalmente a ensayos de laboratorio, donde es común la aplicación de modelos de regresión lineal para establecer empíricamente relaciones causa-efecto entre ciertas variables de entrada y algún fenómeno observado. A partir de los años setenta se comenzaron a generalizar los proyectos de estudio de preferencias grupales mediante empleo de modelos de elección discreta (modelos no lineales basados en la *selección* entre alternativas) estableciendo, en este caso, relaciones causa-efecto entre las características de las alternativas presentadas a los individuos y las preferencias mostradas por éstos. Debido fundamentalmente a esta mayor antigüedad y difusión, la mayoría de diseños de experimentos de elección discreta se han desarrollado al abrigo de conceptos y resultados propios de la teoría de diseño lineal.

La existencia de catálogos de diseños lineales, en los que a partir de ciertas especificaciones, y siguiendo un enfoque de *caja negra*, se ofrece un diseño lineal adecuado, puede haber contribuido a reafirmar esta extensión directa de diseños lineales al caso no lineal, aunque sólo sea por la difusión y facilidad de uso implícita a estos catálogos. Entre las especificaciones mencionadas se encuentran el número de pruebas o perfiles distintos de alternativas que se pretenden valorar (tamaño del diseño fraccional), el número de atributos que definen a los perfiles que han de valorar los individuos, el número de niveles de cada atributo y la resolución deseada para el diseño, es decir el tipo y número de efectos que se desea estimar independientemente. Entre los catálogos de diseños lineales utilizados con profusión se encuentra Connor & Zelen (1959), Connor & Young (1961), Hahn & Shapiro (1966) y McLean & Anderson (1984).

Por su parte, entre el número considerablemente menor de referencias que han abordado la especificidad de los diseños no lineales, se encuentran como excepciones destacables Louviere (1988), Lazari & Anderson (1994), Kuhfeld et al. (1994), Zwerina (1997), Louviere et al. (2000) y Sándor & Wedel (2001).

En los catálogos lineales se establece que, empleando el diseño que éstos proponen, se obtiene la información de la forma más eficiente posible, si bien es común no encontrar explicaciones abundantes a este respecto. De entre las ventajas más citadas a favor del uso de diseños así construidos, se destaca la minimización de las correlaciones entre los parámetros del modelo o, en otras palabras, la maximización de la ortogonalidad entre los parámetros. La ortogonalidad es un concepto que hace uso del contenido estadístico de los modelos y es dependiente de forma explícita del tipo de modelo que se considere. Aun así, Tampoco es común encontrar en estos catálogos un detalle de hasta qué punto se cumplen las distintas propiedades aplicables a un diseño lineal, esto es, la ortogonalidad y el equilibrio de niveles de los atributos.

Una de las razones que desaconsejan, en general, la implementación de una estrategia de construcción de un diseño no lineal por adaptación directa de otro que es lineal, es la diferente implementación que ambos tipos hacen de la ortogonalidad. Así, por ejemplo, todos los diseños que se incluyen en Hahn & Shapiro (1966) son ortogonales, significando que los modelos aplicados sobre los datos recogidos con tal diseño proporcionan parámetros no correlacionados entre sí o, lo que es lo mismo, matrices de covarianza de los parámetros diagonales. Considerando su extensión a diseños no lineales, el concepto de ortogonalidad es similar, pero la matriz de covarianza es de naturaleza diferente, por lo que la adaptación de los diseños de los catálogos al caso no lineal no es adecuada en principio.

A modo de sumario de lo que se ha establecido, se muestra en la Figura 1 la diferente metodología que existe para construir diseños fraccionales, haciendo especial hincapié en cómo se tratan los efectos interacción, en cómo influye sobre la técnica de diseño tanto el tipo de codificación de los atributos utilizada como el número de niveles de éstos, y en las diferencias que existen entre diseños lineales y no lineales. También se incluye en la figura los diversos procedimientos que se proponen para la construcción de encuestas: la utilización de algoritmos de tipo numérico, el producto de columnas utilizando relaciones de confusión entre efectos y la aplicación de *ortogonal arrays*.

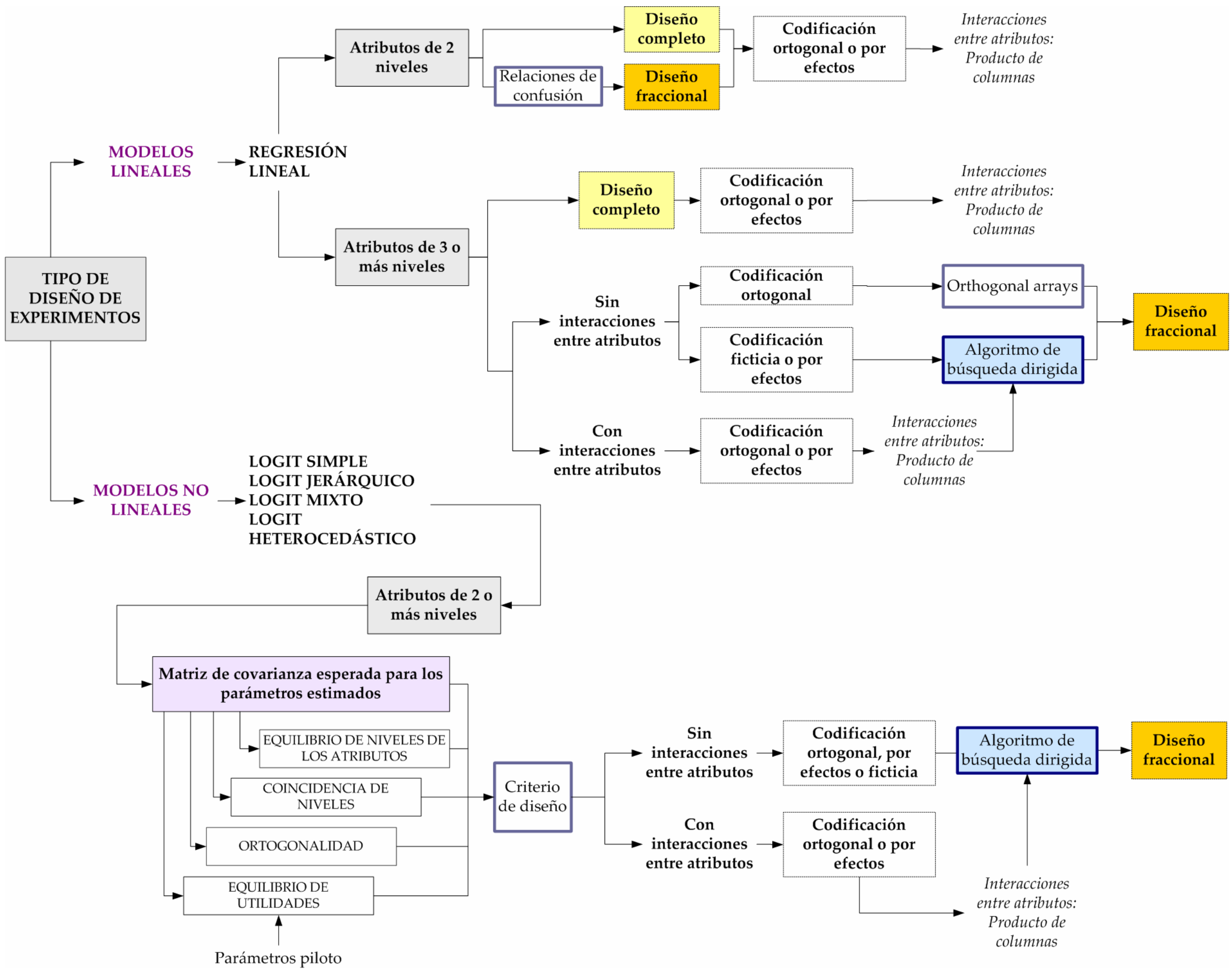


***Figura 1.*** *Tipología y propiedades de las diferentes técnicas de diseño de experimentos*

## 5. Generalización de los diseños no lineales de experimentos

Anteriormente se ha expuesto cómo la construcción de diseños no lineales en base a una disciplina propia, y no limitándose sólo a extensiones del caso lineal, implica un significativo avance en la teoría de construcción de encuestas. Sin embargo, no es menos cierto que este avance se ha originado en la literatura casi en su totalidad bajo la asunción general de considerar que el modelo de preferencias a aplicar sobre los datos recogidos es de tipo logit simple y que las utilidades de las alternativas son lineales en los parámetros. En los apartados siguientes se procede a la relajación de ambas restricciones.

En este sentido, la necesidad de calcular las probabilidades de que resulten elegidas las alternativas ofrecidas a los individuos para iniciar el proceso de construcción de una encuesta no lineal, pone de manifiesto una dependencia directa del diseño **X** construido no sólo con respecto a los parámetros piloto elegidos, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$, sino también con respecto al modelo no lineal de preferencias utilizado, es decir, respecto a las funciones *g* y *d* que se escojan para calcular el vector de valoraciones piloto $\boldsymbol{\delta}^p$: $\boldsymbol{\delta}^p = g\left(d\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p, \mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}\right)\right) = \mathbf{P}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p, \mathbf{X}\right)$.

Existen, por tanto, al menos dos razones que hacen que el proceso de búsqueda de la mejor encuesta sea diferente, dependiendo del modelo de preferencias específico que se decida emplear: la diferente función objetivo a minimizar en cada caso, debido a que las matrices de covarianza dependen del modelo de preferencias considerado, y la diferente aproximación de las valoraciones reales que harán los individuos (valoraciones piloto), debido a que éstas también dependen del modelo de preferencias que se considere. En lo que sigue se formula el proceso de cálculo de las encuestas cuando se emplean modelos no lineales más generales.

## 6. Empleo de utilidades lineales en modelo logit simple

El modelo de preferencias de tipo logit simple con utilidades lineales es el que se entiende como modelo no lineal de preferencias básico en la literatura. En él se supone que la parte aleatoria se distribuye en cada situación de decisión *m* como $\boldsymbol{\varepsilon}^m \to Gumbel\left(\mathbf{0}_{C_m \times 1}, \mu \mathbf{I}_{C_m \times C_m}\right)$. Lo que hace que la probabilidad de elegir la alternativa *j* en este conjunto de decisión *m* sea:

$$P_j^m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p, \mathbf{X}\right) = g_m\left(U_1^m, \ldots, U_{C_m}^m\right) = \exp\left(\mu \mathbf{x}_j^m \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right) \Big/ \sum\nolimits_{j=1}^{C_m} \exp\left(\mu \mathbf{x}_j^m \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right) \ , \ j = 1, \ldots, C_m$$

donde $\mathbf{x}_j^m$ es una fila de la matriz de diseño **X** en la que se acumulan las características de la alternativa *j* del conjunto *m*, y $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$ los parámetros estimados para el modelo.

En este caso, y debido a la relativa sencillez de las ecuaciones de cálculo de la probabilidad, la función objetivo para el cálculo de los parámetros (logaritmo de la función de verosimilitud, $w$) y su respectivo *hessiano*, son los siguientes:

$$w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y}, \mathbf{X}\right) = \sum\nolimits_{m=1}^{M} \left(\sum\nolimits_{j \in C_m} \left[\mu \delta_{mj}^p \mathbf{x}_j^m \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right] - \ln \sum\nolimits_{j \in C_m} \exp\left(\mu \mathbf{x}_j^m \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right)\right) \ , \ \nabla^2 w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y}, \mathbf{X}\right) = -\mu^2 \mathbf{Z}'\mathbf{P}\mathbf{Z}$$

donde las matrices implicadas se definen más abajo en el Cuadro 1.

Haciendo empleo de estas ecuaciones de probabilidad y de resultados de la teoría de distribuciones asintóticas, se establece que la matriz de covarianza de los parámetros $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$ en un modelo logit simple, es igual al negativo de la inversa del *hessiano* de la función de verosimilitud expuesto más arriba, de tal forma que se tiene que:

$$\operatorname{var}\left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right) = -\left[\nabla^2 w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y}, \mathbf{X}\right)\right]^{-1} = \left(\mu^2 \mathbf{Z}'\mathbf{P}\mathbf{Z}\right)^{-1}$$

Siendo $\boldsymbol{\beta}$ el vector de parámetros reales del que $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$ es la mejor realización que se puede obtener. Así, finalmente, el problema de búsqueda del mejor diseño para un logit simple con utilidades lineales es el siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
MIN & \left(\det\left(\mu^2 \mathbf{Z}'\mathbf{P}\mathbf{Z}\right)^{-1}\right)^{1/L} \\
s.a. & \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^1 & \cdots & \mathbf{z}^M \end{bmatrix} \ , \mathbf{z}^m = \mathbf{x}^m - \sum_{k \in C_m} \left(\mathbf{x}'_k P_k^m\right) \\
 & \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 & \cdots & \mathbf{P}^M \end{bmatrix}' \ , \mathbf{P}^m = \begin{bmatrix} P_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{C_m}^m \end{bmatrix} \ , P_j^m = \dfrac{\exp\left(\mathbf{x}_j^{m\prime} \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right)}{\sum_{j=1}^{C_m} \exp\left(\mathbf{x}_j^{m\prime} \hat{\boldsymbol{\beta}}_p\right)}, \forall j \in C_m \\
 & \mathbf{x}_j^m \in D(\mathbf{X}), \forall j \in C_m, m = 1, \ldots, M
\end{array}
$$

***Cuadro 1.*** *Problema de construcción de la mejor encuesta para un modelo logit simple*

Las únicas variables del problema de optimización sin restricciones son los perfiles de atributos $\mathbf{x}_j^m$ que han de componer la matriz de datos **X**. Cada uno de estos perfiles se ha de elegir del conjunto total de perfiles de atributos posibles o *diseño completo,* $D(\mathbf{X})$. En total, si cada conjunto de decisión está compuesto de $C_m$ alternativas, y se quieren construir $M$ de estos conjuntos, la solución del problema consta de hasta $T = \sum_{m=1}^{M} C_m$ perfiles, siendo éste un dato especificado por el analista.

Los parámetros piloto que caracterizan al modelo, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$, no son variables incógnita de este problema, pues se les ha asignado un valor concreto para deshacer la naturaleza iterativa del proceso de diseño expuesta con anterioridad. Nótese, pues, la diferencia entre los problemas de construcción de la matriz **X** (condicionado en $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$) y de estimación de los parámetros $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Una prueba de esta diferencia es que la función objetivo de este problema no es globalmente convexa, a diferencia del problema de estimación de los parámetros de un logit simple, en el que debido al carácter semi- definido negativo de la matriz $\left(\mu^2 \mathbf{Z}'\mathbf{P}\mathbf{Z}\right)^{-1}$, se tienen funciones objetivo globalmente cóncavas.

Por último, obsérvese en la formulación del problema que las valoraciones piloto $\boldsymbol{\delta}^p$ no participan directamente del proceso de construcción de la encuesta, haciendo innecesario, por tanto, establecer una regla para su cálculo en función de los parámetros piloto en este modelo logit simple. Tampoco sería necesario, por tanto, distinguir entre datos de elección, de rating o de ranking, en este estadio del análisis. Esto es debido a la forma del hessiano para este caso del logit simple. Para el caso general, el vector $\boldsymbol{\delta}^p$ se aproxima por las probabilidades de elección, esto es:

$$
\delta_{mj}^p = P_j^m = g_m\left(d_m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p, \mathbf{x}^m, \boldsymbol{\varepsilon}^m\right)\right)
$$

Aún siendo válido que esta aproximación no es necesaria para un logit simple, el proceso de construcción del mejor diseño teórico sigue teniendo carácter iterativo, pues las probabilidades dependen de los parámetros piloto $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$, y las probabilidades sí que participan del modelo.

## 7. Problema general de diseño

El primer paso que se realiza para generalizar el proceso de construcción de encuestas es relajar la linealidad en los parámetros de las utilidades asignadas a las alternativas. El empleo de utilidades no lineales, manteniendo en la estructura del modelo que la parte aleatoria de estas utilidades se distribuye como $\boldsymbol{\varepsilon}^m \to Gumbel\left(\mathbf{0}_{C_m\times 1}, \mu \mathbf{I}_{C_m\times C_m}\right)$, no implica un desvío conceptual apreciable respecto al caso anterior de utilidades lineales. Sin embargo, traducido a la formulación del problema de diseño, sí que se tiene un problema sustancialmente diferente. Primero, la matriz de covarianza ya no coincide con $\left(\mu^2 \mathbf{Z}'\mathbf{P}\mathbf{Z}\right)^{-1}$ y, segundo, las valoraciones piloto $\boldsymbol{\delta}^p$ sí que participan en el problema.

Las incógnitas de este problema vuelven a ser los distintos perfiles $\mathbf{x}_j^m$ que se seleccionan del diseño completo $D(\mathbf{X})$. El tratamiento de los parámetros piloto, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$, no difiere del caso anterior, esto es, son fijados a priori por el analista.

Debido a que el término aleatorio $\boldsymbol{\varepsilon}$ se sigue comportando de la misma forma, la expresión de las probabilidades y, por tanto, la del logaritmo de la función de verosimilitud, es la misma que para el caso anterior. En la definición de las matrices de covarianza de los parámetros, se opta por el estimador robusto o de tipo *sándwich*, por no poder garantizarse, en general, el carácter semi-definido positivo de la inversa del *hessiano* del anterior logaritmo.

La función $r_m$ es la que define la no linealidad de las utilidades y nótese que, adicionalmente, ahora sí que es necesario establecer una regla de cálculo de las valoraciones piloto $\boldsymbol{\delta}^p$ en función de los parámetros piloto $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$, pues éstos participan en general de la matriz de covarianzas y, por tanto, la consideración de datos de elección, de rating o de ranking sí que influye en el proceso de diseño de los cuestionarios.

Por último, la función *f* es a través de la cual se mide el tamaño de una matriz de covarianza, que puede ser el determinante de ésta (*D_Error*), como en el caso anterior, o la traza de (*A_Error*), o cualquiera otra medida similar.

El segundo paso en la generalización del problema de diseño de un experimento es considerar que además de no partir sobre especificaciones previas sobre la parte determinista de las utilidades, tampoco se parte sobre disquisiciones de este tipo acerca de la parte aleatoria de éstas. La única asunción que se mantiene es que las partes aleatorias y deterministas de las utilidades son independientes, lo cual resulta poco restrictivo.

En este caso más general, las probabilidades asignadas a cada alternativa se dejan en función del tipo de distribución que se tome para las partes aleatorias $\boldsymbol{\varepsilon}$ y de la especificación que se haga de la parte determinista de las utilidades de las alternativas, las cuales se implementan a partir de las funciones $d_m$ y $r_m$ explicitadas más abajo. El único requisito que se exige a estas probabilidades, al igual que en los casos anteriores, es el cumplimiento de los postulados de la teoría *RUM* o de maximización de la utilidad aleatoria, de la cual se habrán de construir las expresiones siguientes,

$$P_j^m = g_m\left(d_m\left(r_m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p, \mathbf{X}\right), \boldsymbol{\varepsilon}\right); \forall j \in m\right)$$

De esta forma, el problema que se ha de resolver para construir una encuesta de valoración de preferencias es el que se muestra en el Cuadro 2.

$$
\begin{array}{ll}
MIN & f\left(\mathbf{\Omega}_{L\times L}\right) \\
s.a. & \mathbf{\Omega}_{L\times L} = \left[\nabla^2 w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y},\mathbf{X}\right)\right]^{-1} \mathbf{BHHH}_{L\times L}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y},\mathbf{X}\right)\left[\nabla^2 w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y},\mathbf{X}\right)\right]^{-1} \\
 & w\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y},\mathbf{X}\right) = \ln \prod_{m=1}^{M} \prod_{j=1}^{C_m} \left(P_j^m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X})\right)^{\delta_{mj}^p} \\
 & \mathbf{BHHH}_{L\times L}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p \middle| \mathbf{y},\mathbf{X}\right) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{C_m}\left(\delta_{mj}^p \nabla\left(\ln P_j^m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X})\right)' \nabla\left(\ln P_j^m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X})\right)\right) \\
 & P_j^m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X}) = g_m\left(d_m\left(r_m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{x}^m\right),\boldsymbol{\varepsilon}^m\right)\right) \ ; \ V_j^m = r_m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X}\right) \ ; \ \boldsymbol{\delta}^p = g\left(d\left(r_m\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p,\mathbf{X}\right),\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right) \\
 & \mathbf{x}_j^m \in D(\mathbf{X}), \forall j \in C_m, m = 1,\ldots,M
\end{array}
$$

***Cuadro 2.*** *Problema general de diseño*

Las únicas variables del problema son los perfiles de atributos a construir $\mathbf{x}_j^m \in D(\mathbf{X}), \forall j \in C_m, m = 1,\ldots,M$, y la especificación del resto de relaciones funcionales incluidas en el problema, $g_m$, $d_m$ y $r_m$, es la que da lugar a la diferente tipología de procesos de diseño no lineal de experimentos.

Como se puede observar, la formulación que se acaba de proponer demuestra la dependencia que existe entre las etapas de diseño del cuestionario y de estimación de los parámetros del modelo de preferencias que se utilice. Esta dependencia, unida a la necesidad de suponer valores piloto en el proceso de diseño, se incluye en la parte inferior del esquema de la Figura 2, la cual complementa a la introducida al principio de este trabajo.

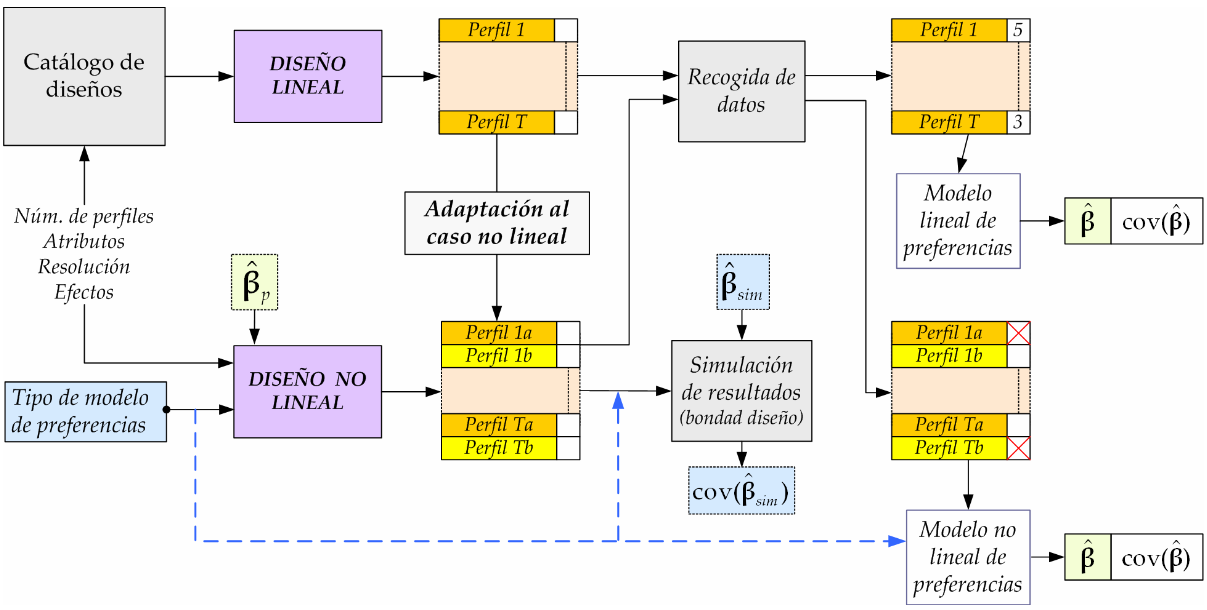


***Figura 2.*** *Diferentes estrategias de construcción de cuestionarios*

## 8. Conclusiones

En el trabajo se han expuesto los conceptos generales aplicables a la metodología de análisis de preferencias y a la de construcción de cuestionarios, exponiendo una breve reseña de ambas disciplinas en sus versiones lineal y no lineal. Así, y mediante la relajación de las hipótesis impuestas por los modelos no lineales de preferencias más simples y la generalización de las expresiones lineales para la utilidad de las alternativas, se formula un *problema general de diseño no lineal de experimentos*, donde se muestra la relación existente entre el modelo de preferencias que se decida emplear y el criterio para construir el cuestionario correspondiente. En este sentido, se muestra cómo el empleo de modelos de preferencias no lineales ha de aumentar su rendimiento al aplicarse sobre preferencias recogidas con cuestionarios construidos mediante el empleo de técnicas de diseño no lineal, y no con cuestionarios adaptados directamente del caso lineal.

## Referencias


BATES, J.J. and G. TERZIS (1992):"*Surveys involving adaptive stated preference techniques*", in Survey and Statistical Computing, edited by A. Westlake et al., Elsevier Science Publishers B.V.

CONNOR, W. S., and S. YOUNG (1961): *Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors at Two and Three Levels*. Washington DC: National Bureau of Standards, Department of Commerce.

CONNOR, W. S., and M. ZELEN (1959): *Fractional Factorial Experiment Designs for Factors at Three Levels*. Washington DC: National Bureau of Standards, Department of Commerce.

BOX, G., W. HUNTER, Y J. HUNTER (1978): *Statistics for Experimenters*. J. Wiley & Sons

FISHER, R. A. (1935): *The Design of Experiments*. London: Oliver & Boyd.

GRILICHES, Z. (1957): "*Specification Bias in Estimates of Production Functions*," Journal of Farm Economics, 39, 8-20.

GRILICHES, Z., and V. RINGSTAD (1970): *Economies of Scale and the Form of the Production Function*. Amsterdam: North Holland.

HAHN, G. J., and S. S. SHAPIRO (1966): "*A Catalogue and Computer Program for the Design and Analysis of Orthogonal Symmetric and Asymmetric Fractional Factorial Experiments*," Schenectady, NY: General Electric Research and Development Center, 110.

HICKS, J, R. (1957): *Value and capital: and inquiry into some fundamental principles of economic theory*. Oxford, UK. Oxford Clarendon Press.

IBÁÑEZ, J. N. (2006): *Modelado de Decisiones de Transporte mediante Análisis de Elección Discreta y Diseño No Lineal de Experimentos*. Tesis Doctoral. Univ. de Sevilla.

KANNINEN, B. (2002): *Optimal Design for Multinomial Choice Experiments*. Journal of Marketing Research, 39, 214-227.

KUHFELD, W. F., R. D. TOBIAS, and M. GARRATT (1994): "*Efficient Experimental Design with Marketing Research Applications*," Journal of Marketing Research, 21, 545-57.

LAZARI, A.G., ANDERSON, D.A. (1994) *Design of Discrete Choice Set Experiments for Estimating Both Attribute and Availability Cross Effects*, Journal of Marketing Research, 31: 375-383

LOUVIERE, J. (1988): *Analyzing Decision Making*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

LOUVIERE, J. J., D. A. HENSHER, and J. D. SWAIT (2000): *Stated Choice Methods: Analysis and Application*. Cambridge University Press.

MCFADDEN (2001): *Economic Choices*. American Economic Review, 91, 351–378.

MCLEAN, R. A., and V. L. ANDERSON (1984): *Applied Factorial and Fractional Designs*. New York: Marcel Dekker.

MONTGOMERY, D. C. (1996): *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Sons.

MUNDLAK, Y. (1963): "*Estimation of Production and Behavioral Functions from a Combination of Cross-Section and Time-Series Data*," in Measurement in Economics, ed. by C. F. Christ. Stanford: Stanford University Press.

SAMUELSON, P. (1948): *Economics: an introductory analysis*. New York. McGraw-Hill Book Co.

SÁNDOR, Z., and M. WEDEL (2001): "*Designing Conjoint Choice Experiments Using Managers' Prior Beliefs*," Journal of Marketing Research, 38, 430-44.

ZWERINA, K. (1997): *Discrete Choice Experiments in Marketing*. Heidelberg: Physica-Verlag.