

Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Control Predictivo Basado en Modelo Aplicado a un
Motor de Inducción

Autor: Alberto Díaz Dorado

Tutor: Sergio Vázquez Pérez

Dep. Ingeniería Electrónica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Control Predictivo Basado en Modelo Aplicado a un Motor de Inducción

Autor:

Alberto Díaz Dorado

Tutor:

Sergio Vázquez Pérez

Profesor Contratado Doctor

Dep. Ingeniería Electrónica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2015

Agradecimientos

Quiero aprovechar la ocasión de la entrega del Trabajo de Fin de Grado, con el que concluyo mi formación universitaria de primer ciclo, para dar las gracias a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de toda una vida y por haber sido el impulso constante hacia todas mis metas.

También quiero dar las gracias a los maestros y profesores que han contribuido a que alcance este hito académica, y muy especialmente al tutor de mi trabajo, Sergio Vázquez Pérez, por su gran esfuerzo y dedicación, aun en la distancia.

Por último, agradezco a mis grandes amigos, los que siempre están ahí, haberme acompañado a lo largo de todo el camino y haberlo hecho mucho más divertido.

Resumen

Una de las muchas aplicaciones de los dispositivos de electrónica de potencia es el control de los motores eléctricos. En particular, el control del motor de inducción resulta un reto bastante atractivo por las muchas características ventajosas de este tipo de máquina, pero también por la complejidad del sistema. Desde la aparición de los inversores de potencia se han desarrollado esquemas de control que permiten modular el par electromagnético y la velocidad de la máquina para adaptarlos a las necesidades del usuario.

La aparición de microprocesadores cada vez más potentes en las últimas décadas ha abierto la puerta a nuevas técnicas de control, más complejas que las tradicionales y que requieren una mayor potencia de computación. Destaca entre todas ellas el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC), que lleva siendo empleado en la Ingeniería de Procesos desde los años 70 del siglo pasado pero que sólo recientemente ha encontrado su aplicación en el control de motores de inducción. Su idea fundamental es utilizar un modelo del sistema para predecir el impacto que tendrán sobre él las acciones de control, y así seleccionar las que producen un comportamiento óptimo.

Sin embargo, existen varios interrogantes abiertos sobre este nuevo esquema. Preguntas como el diseño de la función de coste que define el objetivo de control o la estabilidad misma del controlador siguen teniendo una respuesta incierta a día de hoy. El objetivo del presente trabajo es contextualizar las estrategias de control del motor de inducción, explicar el fundamento teórico de la técnica MPC y hacer una aproximación al tema del diseño de la función de coste y la estabilidad. Para validar los resultados se proponen simulaciones sobre un accionamiento eléctrico compuesto por una máquina asíncrona de rotor en jaula de ardilla y un inversor de dos niveles, que serán desarrolladas mediante la herramienta Simulink del entorno de programación matemática Matlab.

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Índice	ix
Índice de Tablas	xi
Índice de Figuras	xiii
Notación	xv
1 Introducción	1
2 Modelo vectorial de la máquina de inducción	3
2.1. <i>Limitaciones del modelo y sistemas de coordenadas</i>	3
2.2. <i>Los fasores espaciales</i>	4
2.3. <i>Fasores espaciales en distintos sistemas de referencia</i>	5
2.4. <i>Ecuaciones eléctricas del modelo</i>	6
2.4.1. <i>Modelo en variables trifásicas</i>	6
2.4.2. <i>Fasores espaciales: modelo matricial</i>	8
2.4.3. <i>Fasores espaciales: notación compleja</i>	9
2.5. <i>Ecuaciones mecánicas del modelo</i>	10
2.5.1. <i>El par electromagnético</i>	10
2.5.2. <i>La ecuación de movimiento</i>	10
3 Esquemas de Control de la Máquina de Inducción	13
3.1. <i>Control de la Máquina de Continua</i>	13
3.2. <i>Control Vectorial del Motor de Inducción</i>	15
3.3. <i>Control Avanzado y Control Predictivo (Predictive Control)</i>	18
4 Model Predictive Control (MPC)	21
4.1. <i>Modelado de sistemas</i>	21
4.2. <i>Controlador lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator, LQR)</i>	23
4.3. <i>Programación dinámica (Dynamic Programming, DP)</i>	24
4.4. <i>DP aplicada al LQR</i>	25
4.5. <i>Horizonte de predicción, controlabilidad y estabilidad</i>	28
4.6. <i>MPC, LQR y motor de inducción</i>	29
5 MPC aplicado a Accionamientos Eléctricos	31
5.1. <i>MPC con set de control continuo</i>	31
5.2. <i>Model Predictive Direct Current Control, MPDCC</i>	32
5.3. <i>Model Predictive Direct Torque Control, MPDTC</i>	33
6 MPC con Comportamiento Estable Acotado	35
6.1. <i>FCS-MPC cuadrático con horizonte de predicción unitario</i>	35
6.2. <i>Estabilidad del Sistema: Función de Lyapunov</i>	37

6.1.1	Límite al error de cuantización	37
6.1.2	Funcionamiento estable acotado	38
7	Resultados de Simulación sobre un Motor de Inducción	41
7.1.	<i>Controlador del motor de inducción como LQR</i>	41
7.2.	<i>Modelo de la máquina de inducción en espacio de estados</i>	43
7.3.	<i>Condiciones y propósito de la simulación</i>	45
7.4.	<i>Datos de la simulación</i>	46
7.5.	<i>Objeciones al comportamiento estable acotado</i>	48
7.6.	<i>Simulación: MPDTC</i>	51
7.7.	<i>Simulación: MPC con comportamiento estable acotado</i>	60
7.1.1	Efecto de la velocidad de sincronismo ω_g	63
7.1.2	Ajuste de la función de coste como solución de la <i>DARE</i>	67
8	Conclusiones	81
	Referencias	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 7-1: Parámetros de la simulación	46
Tabla 7-2: Parámetros del motor de inducción	47
Tabla 7-3: Punto de funcionamiento de la máquina y sintonía del PI	47
Tabla 7-4: Características del inversor de dos niveles	48
Tabla 7-5: Distorsión de corriente y rizado del par en MPDTC	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1: Corte transversal de una máquina asíncrona	3
Figura 3-1: Corte transversal de una máquina de corriente continua	14
Figura 3-2: Esquema de bloques del control vectorial (FOC) con orientación directa del flujo rotórico (DRFO)	18
Figura 5-1: Esquema de bloques del control vectorial (FOC) con orientación indirecta del flujo rotórico (IRFO)	32
Figura 5-2: Diagrama de bloques con MPC en el lazo de control de corriente	32
Figura 5-3: Model Predictive Direct Current Control	33
Figura 5-4: Model Predictive Direct Torque Control	34
Figura 7-1: Inversor de dos niveles conectado a una carga genérica [12]	47
Figura 7-2: Valor de c para diferentes valores de r y $q1$	50
Figura 7-3: Model Predictive Direct Torque Control	51
Figura 7-4: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$	52
Figura 7-5: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$	53
Figura 7-6: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$	53
Figura 7-7: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$	54
Figura 7-8: Flujo estatórico y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = \lambda_N$	54
Figura 7-9: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$	55
Figura 7-10: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$	56
Figura 7-11: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$	56
Figura 7-12: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$	57
Figura 7-13: Flujo estatórico y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$	57
Figura 7-14: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$	58
Figura 7-15: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$	58
Figura 7-16: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$	59

Figura 7-17: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$	59
Figura 7-18: Flujo estatórico y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$	60
Figura 7-19: Diagrama de bloques global	61
Figura 7-20: Model Predictive Control with Guaranteed Performance	62
Figura 7-21: Velocidad y par motor para $f_{g1} = 39\text{Hz}$	63
Figura 7-22: Problema de seguimiento para $f_{g1} = 39\text{Hz}$	64
Figura 7-23: Velocidad y par motor para $f_{g2} = 45\text{Hz}$	65
Figura 7-24: Problema de seguimiento para $f_{g2} = 39\text{Hz}$	65
Figura 7-25: Velocidad y par del motor con ω_g regulado mediante PI	66
Figura 7-26: Velocidad y par del motor con ω_g regulado por PI y función de coste mejorada	66
Figura 7-27: Velocidad y par motor del Ejemplo 1, Caso 1	69
Figura 7-28: Velocidad y par motor del Ejemplo 1, Caso 2	69
Figura 7-29: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente del Ejemplo 1, Caso 1	70
Figura 7-30: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente del Ejemplo 1, Caso 2	70
Figura 7-31: Espectro de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 1, Caso 1	71
Figura 7-32: Espectro de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 1, Caso 2	71
Figura 7-33: Problema de seguimiento en el Ejemplo 1, Caso 1	72
Figura 7-34: Problema de seguimiento en el Ejemplo 1, Caso 2	72
Figura 7-35: Velocidad y par electromagnético en el Ejemplo 2, Caso 1	74
Figura 7-36: Velocidad y par electromagnético en el Ejemplo 2, Caso 2	74
Figura 7-37: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 2, Caso 1	75
Figura 7-38: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 2, Caso 2	75
Figura 7-39: Velocidad y par del motor en el Ejemplo 3, Caso 1	77
Figura 7-40: Velocidad y par motor en el Ejemplo 3, Caso 2	77
Figura 7-41: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 3, Caso 1	78
Figura 7-42: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 3, Caso 2	78
Figura 7-43: Espectro armónico de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 3, Caso 1	79
Figura 7-44: Espectro armónico de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 3, Caso 2	79

Notación

\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales
\mathbb{N}^*	Conjunto de los números naturales menos el cero
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^n	Conjunto de los vectores de orden n sobre el conjunto de los números reales
$:=$	Definición
\triangleq	Definición
\in	Elemento de
\notin	No es elemento de
e.g.	<i>Exempli gratia</i> (por ejemplo)
$\sin(\cdot)$	Función seno
$\cos(\cdot)$	Función coseno
$\arg(\cdot)$	Función “argumento de”
$\min_x y$	Función “mínimo de y con respecto a x”
\subset	Incluido en
\subseteq	Incluido o igual a
i.e.	<i>Id est</i> (esto es)
$A \succeq 0$	Matriz semidefinida positiva
$A > 0$	Matriz definida positiva
$C_2(\theta)$	Matriz de giro (transformación de coordenadas)
A	(Mayúscula) Matriz
x	(Negrita) Vector
$ \cdot $	Norma euclidiana
\forall	Para todo
\times	Producto vectorial
$\alpha\beta$	Sistema de coordenadas solidario con el estator
dq	Sistema de coordenadas solidario con unos ejes rotatorios
:	Tal que
	Tal que
$P(\theta)$	Transformada de Park
C_1	Transformada de Clarke
j	Unidad imaginaria
\cup	Unión de conjuntos
x_{ref}, x^*	Valor de referencia

1 INTRODUCCIÓN

LOS motores eléctricos son una pieza fundamental del mundo en el que vivimos. Las sociedades modernas se caracterizan por el amplio uso de la energía eléctrica a todos los niveles y el motor eléctrico es la herramienta por excelencia para transformar esa energía en trabajo mecánico. Desde los motores de los trenes eléctricos hasta toda clase de utensilios domésticos, y desde potencias industriales hasta pequeños accionamientos eléctricos de precisión, los motores eléctricos son una piedra angular de la sociedad industrializada.

Aunque existen de alguna otra índole, los principales motores eléctricos son los de eje rotatorio. En esta familia cabe diferenciar tres miembros destacados: el motor de corriente continua, el motor de inducción y el motor síncrono. Tradicionalmente, el motor de corriente continua ha sido utilizado en aplicaciones de velocidad variable por la sencillez de su esquema de control. Para aplicaciones de velocidad fija se reservaba el motor de inducción, superior al de continua en prestaciones, fiabilidad y coste. En cuanto al motor síncrono, se ha utilizado principalmente en funciones de generador en centrales eléctricas.

El desarrollo de la electrónica de potencia cambió el paradigma. Los inversores de potencia permitían crear ondas sinusoidales de la amplitud y la frecuencia deseadas y así controlar la velocidad del motor de inducción, que de repente se volvía competitivo frente a los motores de corriente continua en aplicaciones de velocidad variable. Las numerosas ventajas de la máquina asíncrona –en términos de robustez, fiabilidad, rendimiento, coste de fabricación y explotación, etc.- justificaban la investigación en esta nueva línea. Ello requería desarrollar nuevos esquemas de control para esta máquina, esencialmente mucho más compleja que la máquina de continua.

Los controladores tradicionales han demostrado su valía en aplicaciones de velocidad variable, pero están restringidos en su desarrollo por sus propias limitaciones internas. No obstante, el avance en la capacidad de computación de los microprocesadores ha motivado la aparición de nuevos esquemas de control, por lo general bastante más complejos que los anteriores. Entre ellos se revela especialmente prometedor el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC), que utiliza modelos para predecir el comportamiento futuro del sistema y optimizar dicha predicción de acuerdo a una función de coste que evalúa la desviación del sistema respecto a los objetivos de control.

El MPC ha sido aplicado al control de motores de inducción de diferentes maneras. Los MPC *explícitos* calculan la acción óptima de control y la aplican al sistema mediante un modulador de tensión (PWM o SVM). Los MPC *directos*, por el contrario, tienen en cuenta la naturaleza discreta de los inversores (representada en el estado binario de los interruptores de potencia: abierto o apagado) y generan directamente la señal de control sin etapa de modulación intermedia.

A pesar de los buenos resultados obtenidos hasta la fecha, el MPC sigue planteando algunas cuestiones por resolver. No existe una técnica estandarizada para diseñar la función de coste y la estabilidad del sistema controlado aún no ha sido tratada rigurosamente en los accionamientos eléctricos. La complejidad de estos temas se deriva de la naturaleza del problema: la máquina de inducción es un sistema no lineal y variante en el tiempo, el inversor de potencia es un sistema discreto con un set de control finito y se trata, por lo general, de un problema de optimización multivariable, pues no sólo el par electromagnético sino también el flujo de la máquina debe ser controlado.

Estas son las cuestiones que se abordan en el presente trabajo. Sobre varias hipótesis de linealidad y con una elección cuidadosa del modelo se buscará expresar el problema de control del motor de inducción como un *problema lineal cuadrático*, el cual ha sido profusamente estudiado en la literatura. Bajo ciertas asunciones se tratará de extrapolar las conclusiones del problema lineal al problema real de la máquina asíncrona, prestando atención a los temas anteriormente citados: estabilidad y diseño de la función de coste.

El Capítulo 2 contiene la exposición del modelo del motor que se necesita como base para el controlador MPC. En el Capítulo 3 se hace una revisión de los diversos esquemas de control que existen hasta la fecha para el motor de inducción, incluyendo una explicación de la técnica tradicional de control vectorial. En el Capítulo 4 se proveen las bases teóricas del problema lineal cuadrático y del MPC, y en el Capítulo 5 se presentan las diversas aplicaciones que ha tenido el MPC en el control de la máquina asíncrona. El Capítulo 6 propone la adaptación del controlador de esta máquina como controlador lineal cuadrático (LQR), y finalmente en el Capítulo 7 se comprueba mediante simulación el funcionamiento del esquema de control propuesto. Por último, el breve Capítulo 8 final recoge las conclusiones más importantes de la monografía.

2 MODELO VECTORIAL DE LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN

TANTO las estrategias tradicionales de control vectorial como las estrategias de control predictivo se basan en el conocimiento del funcionamiento interno de la máquina de inducción. Existen modelos que describen de forma muy precisa, bajo ciertas condiciones, el comportamiento de la máquina ante excitaciones externas, como pueden ser las tensiones de fase y la carga mecánica.

Estos modelos de la máquina de inducción pertenecen al estado del arte y pueden consultarse en cualquier manual sobre máquinas eléctricas. Aquí se presentará un breve resumen de los modelos más frecuentemente usados en los esquemas de control, prestando especial atención a los modelos en cuadratura (los que sustituyen un sistema trifásico equilibrado de variables por dos variables en cuadratura) y a las diferentes nomenclaturas disponibles para esta clase de modelos: matricial y compleja. Se usará [1] como texto de referencia para todo el capítulo.

2.1. Limitaciones del modelo y sistemas de coordenadas

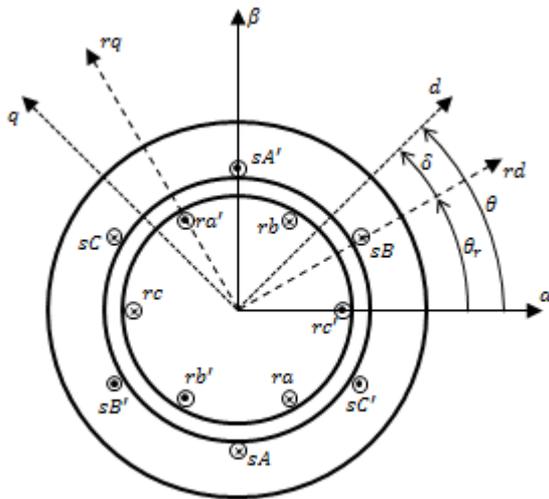


Figura 2-1: Corte transversal de una máquina asíncrona

En una aproximación general se considera una máquina de inducción de rotor bobinado, con arrollamientos trifásicos equilibrados y un único par de polos. Además, la permeabilidad del hierro se supone infinita y el flujo magnético se asume radial en el entrehierro (se desprecia, por tanto, el efecto ranura). Por último, se desprecian las pérdidas magnéticas en el hierro y los efectos de borde.

En la Fig. 2-1 se representa un corte transversal de la máquina, donde por simplicidad se sustituyen los arrollamientos distribuidos propios del motor de inducción por arrollamientos concentrados a ambos lados del entrehierro. Los arrollamientos están separados 120° entre sí.

En la figura se definen varios ángulos, que a su vez definen diferentes sistemas de coordenadas. El eje directo α de la máquina se hace coincidir con el eje

del arrollamiento (sA, sA') del estator, estableciendo los ejes solidarios con el estator $\alpha\beta$. El eje α es la referencia para definir el resto de ángulos y coordenadas de la máquina.

θ_r es el ángulo eléctrico del rotor, que se describe como el ángulo del eje del arrollamiento rotórico (ra, ra'). Este ángulo define a su vez los ejes (rd, rq): el sistema de referencia solidario con el rotor. Adicionalmente se define la velocidad eléctrica del rotor como:

$$\omega_r(t) = \frac{d\theta_r(t)}{dt} \quad (2-1)$$

Que coincide con la velocidad mecánica del rotor en máquinas de un solo par de polos. En motores con varios pares de polos se define la siguiente relación entre el ángulo eléctrico y el ángulo mecánico de la máquina:

$$\theta_r(t) = p\theta_m(t) \quad (2-2)$$

Donde p es el número de pares de polos. Por último, se define θ como el ángulo periférico, que es el la coordenada fundamental de la máquina. El ángulo θ define los ejes dq , que son un sistema de referencia genérico. El ángulo periférico está referido al estator; para referir una coordenada angular al rotor se emplea alternativamente el ángulo $\delta(t)$, definido como:

$$\delta(t) = \theta - \theta_r(t) \quad (2-3)$$

2.2. Los fasores espaciales

Los fasores espaciales constituyen una notación muy compacta de las magnitudes electromagnéticas de la máquina (corrientes, tensiones y enlaces de flujo) en ausencia de componente homopolar. Estos fasores pueden introducirse mediante la notación compleja o directamente mediante la reducción a dos ejes vía la Transformada de Park. Por brevedad se expondrá aquí éste último enfoque, si bien la introducción de los fasores espaciales vía notación compleja es de interés físico y matemático y puede consultarse en [1].

La Transformada de Park transforma las variables trifásicas abc al sistema en cuadratura $\alpha\beta 0$ o $dq0$, según se use un sistema de referencia estático o síncrono. Esta transformación tiene la particularidad de que la componente homopolar se anula en condiciones simétricas. Como se verá más adelante en el desarrollo del modelo, esto tiene importantes ventajas desde el punto de vista de la compacidad de las ecuaciones y el coste computacional. De forma general se define:

$$\mathbf{x}_{dq0} = \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = P(\theta)\mathbf{x}_{abc} \quad (2-4)$$

Donde \mathbf{x}_{abc} representa el valor instantáneo de variables trifásicas (por ejemplo, las corrientes de fase i_{abc}), $P(\theta)$ es la matriz de la transformada de Park a unos ejes definidos por el ángulo periférico θ y c es una constante. La transformada invariante en módulo utiliza el valor de la constante $c = 2/3$, mientras que la transformada invariante en potencia utiliza el factor $c = \sqrt{2/3}$. En esta monografía, salvo que se indique lo contrario, se empleará de forma general la transformada de Park invariante en módulo.

Además se define la transformada inversa como:

$$\mathbf{x}_{abc} = P^{-1}(\theta)\mathbf{x}_{dq0} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) & 1 \\ \cos(\theta - 4\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{dq0} \quad (2-5)$$

En condiciones simétricas, y sin pérdida de generalidad, la componente homopolar se anula y puede escribirse:

$$\mathbf{x}_{dq} = \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta - 4\pi/3) \\ -\sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = P(\theta) \mathbf{x}_{abc} \quad (2-6)$$

$$\mathbf{x}_{abc} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 4\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix} \mathbf{x}_{dq} \quad (2-7)$$

Por último, la Transformada de Park puede hacerse a los ejes estatoricos $\alpha\beta$ y entonces recibe el nombre particular de transformada de Clarke:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = P(\theta = 0) \mathbf{x}_{abc} \triangleq C_1 \mathbf{x}_{abc} \quad (2-8)$$

$$\mathbf{x}_{abc} = C_1^{-1} \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{\alpha\beta} \quad (2-9)$$

Donde C_1 denota la matriz de la transformada de Clarke. Quedan así introducidos los fasores espaciales, que no son sino el resultado de una transformación de las variables trifásicas a los ejes en cuadratura.

Vale la pena notar que todos los fasores espaciales también pueden expresarse en notación compleja sin más que hacer:

$$\mathbf{x}_{dq} = \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = x_d + jx_q = |\mathbf{x}_{dq}| \cdot e^{j\theta_x} \quad (2-10)$$

Donde j es la unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$, $|\cdot|$ es la norma euclidiana y θ_x es el ángulo del vector x respecto al eje real del estator α .

2.3. Fasores espaciales en distintos sistemas de referencia

Lo habitual en la Transformada de Park es transformar las variables trifásicas a un sistema de referencia solidario con el estator, con el rotor o con alguna magnitud eléctrica, como se verá más adelante (por ejemplo, con unos ejes alineados con el fasor espacial del flujo del rotor). Como se ha visto en el apartado anterior, cuando se hace la transformación a los ejes $\alpha\beta$ se habla de la Transformada de Clarke.

Como en lo sucesivo se van a manejar varios sistemas de referencia, conviene definir la transformación de variables entre sistemas de coordenadas diferentes. Sean dos sistemas de referencia generales (d_1, q_1) y (d_2, q_2) definidos respectivamente por los ángulos θ_1 y θ_2 . Entonces, la transformación de coordenadas entre las dos bases viene dada por:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{d2} \\ x_{q2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 - \theta_1) & \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ -\sin(\theta_2 - \theta_1) & \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{q1} \end{pmatrix} = C_2(\theta_2 - \theta_1) \mathbf{x}_1 = C_2 \mathbf{x}_1 \quad (2-11)$$

Y su inversa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{q1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{d2} \\ x_{q2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 - \theta_1) & -\sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) & \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{d2} \\ x_{q2} \end{pmatrix} = C_2^{-1}(\theta_2 - \theta_1)\mathbf{x}_2 = C_2(\theta_1 - \theta_2)\mathbf{x}_2\end{aligned}\quad (2-12)$$

En notación compleja esta transformación es aun más sencilla y se realiza mediante la exponencial compleja:

$$\mathbf{x}_2 = x_{d2} + jx_{q2} = \mathbf{x}_1 \cdot e^{-j(\theta_2 - \theta_1)} \quad (2-13)$$

$$\mathbf{x}_1 = x_{d1} + jx_{q1} = \mathbf{x}_2 \cdot e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \quad (2-14)$$

Si los ejes (d_1, q_1) se hacen coincidir con los ejes del estator $\alpha\beta$, entonces el ángulo θ_1 se anula y las expresiones se simplifican. Más aún, puede comprobarse que la transformada de Park no es más que el resultado de aplicar un cambio de coordenadas a la transformada de Clarke:

$$\begin{aligned}P(\theta) &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta - 4\pi/3) \\ -\sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix} \triangleq C_2(\theta)C_1 \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2-15)$$

Esta igualdad puede demostrarse teniendo en cuenta los desarrollos del coseno de la diferencia y del seno de la diferencia.

2.4. Ecuaciones eléctricas del modelo

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la máquina son válidas tanto en régimen permanente como en régimen transitorio. Pueden escribirse en varios conjuntos de variables (trifásicas o en cuadratura), con distinta nomenclatura (matricial o compleja) o aun en distintos marcos de referencia (estático, rotórico o genérico). A continuación se presentan las diferentes descripciones del modelo.

2.4.1. Modelo en variables trifásicas

Las ecuaciones diferenciales para el estator son:

$$u_{sA}(t) = R_s i_{sA}(t) + \frac{d\psi_{sA}(t)}{dt} \quad (2-16)$$

$$u_{sB}(t) = R_s i_{sB}(t) + \frac{d\psi_{sB}(t)}{dt} \quad (2-17)$$

$$u_{sC}(t) = R_s i_{sC}(t) + \frac{d\psi_{sC}(t)}{dt} \quad (2-18)$$

Donde $\mathbf{u}_{sABC}(t)$ son los valores instantáneos de las tensiones de fase del estator, $\mathbf{i}_{sABC}(t)$ son los valores instantáneos de las corrientes de fase del estator, y R_s es la resistencia de cada uno de los devandos estáticos. Por otra parte, $\boldsymbol{\psi}_{sABC}(t)$ son los valores instantáneos de los enlaces de flujo del estator, definidos como:

$$\psi_{sA} = \bar{L}_s i_{sA} + \bar{M}_s i_{sB} + \bar{M}_s i_{sC} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{ra} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{rb} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{rc} \quad (2-19)$$

$$\psi_{sB} = \bar{L}_s i_{sB} + \bar{M}_s i_{sA} + \bar{M}_s i_{sC} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{ra} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{rb} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{rc} \quad (2-20)$$

$$\psi_{sC} = \bar{L}_s i_{sC} + \bar{M}_s i_{sA} + \bar{M}_s i_{sB} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{ra} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{rb} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{rc} \quad (2-21)$$

Donde \bar{L}_s es la inductancia propia de cada arrollamiento estático, \bar{M}_s es la inductancia mutua entre las fases del estator, y \bar{M}_{sr} es el valor máximo de la inductancia mutua entre rotor y estator. El acoplamiento magnético entre dos fases del estator y el rotor es máximo cuando dichas fases están alineadas.

Análogamente se definen las ecuaciones diferenciales de tensión para el rotor:

$$u_{ra}(t) = R_r i_{ra}(t) + \frac{d\psi_{ra}(t)}{dt} \quad (2-22)$$

$$u_{rb}(t) = R_r i_{rb}(t) + \frac{d\psi_{rb}(t)}{dt} \quad (2-23)$$

$$u_{rc}(t) = R_r i_{rc}(t) + \frac{d\psi_{rc}(t)}{dt} \quad (2-24)$$

Siendo R_r la resistencia de cada uno de los devanados rotóricos. A su vez se definen los enlaces de flujo del rotor como:

$$\psi_{ra} = \bar{L}_r i_{ra} + \bar{M}_r i_{rb} + \bar{M}_r i_{rc} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{sA} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{sB} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{sC} \quad (2-25)$$

$$\psi_{rb} = \bar{L}_r i_{rb} + \bar{M}_r i_{ra} + \bar{M}_r i_{rc} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{sA} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{sB} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{sC} \quad (2-26)$$

$$\psi_{rc} = \bar{L}_r i_{rc} + \bar{M}_r i_{ra} + \bar{M}_r i_{rb} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 4\pi/3) i_{sA} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r + 2\pi/3) i_{sB} + \bar{M}_{sr} \cos(\theta_r) i_{sC} \quad (2-27)$$

Para expresarlo todo de forma compacta en una única ecuación matricial se sustituyen las expresiones de los flujos en las ecuaciones de tensión y se define el operador derivación $p = d/dt$. La ecuación resultante es la siguiente y la matriz Z se define más abajo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{sABC} \\ \mathbf{u}_{rabc} \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{sABC} \\ \mathbf{i}_{rabc} \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

$$Z = \begin{pmatrix} R_s + p\bar{L}_s & p\bar{M}_s & p\bar{M}_s & p\bar{M}_{sr} \cos \theta & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 \\ p\bar{M}_s & R_s + p\bar{L}_s & p\bar{M}_s & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 \\ p\bar{M}_s & p\bar{M}_s & R_s + p\bar{L}_s & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta \\ p\bar{M}_{sr} \cos \theta & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 & R_r + p\bar{L}_r & p\bar{M}_r & p\bar{M}_r \\ p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 & p\bar{M}_r & R_r + p\bar{L}_r & p\bar{M}_r \\ p\bar{M}_{sr} \cos \theta_2 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta_1 & p\bar{M}_{sr} \cos \theta & p\bar{M}_r & p\bar{M}_r & R_r + p\bar{L}_r \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

Donde se definen los ángulos $\theta = \theta_r$, $\theta_1 = \theta_r + 2\pi/3$ y $\theta_2 = \theta_r + 4\pi/3$. Es importante destacar aquí la complejidad del sistema, descrito por una matriz de 36 elementos donde todas las fases están acopladas entre sí y donde además aparecen coeficientes no lineales y dependientes del tiempo: de forma general, el ángulo del rotor será una función no lineal del tiempo.

Aunque estas ecuaciones se han desarrollado para una máquina de inducción de rotor bobinado trifásico, es muy corriente el diseño de rotores de máquinas de inducción como “jaula de ardilla”. Estos rotores pueden considerarse como un sistema polifásico, donde el número de fases depende del número de barras de la jaula de ardilla y del número de pares de polos de la máquina. No obstante, en construcciones simétricas puede representarse el rotor mediante un equivalente trifásico, con lo cual las ecuaciones superiores siguen siendo válidas. En el caso especial de la construcción en jaula de ardilla, el rotor está cortocircuitado y las tensiones rotóricas $(u_{ra} \ u_{rb} \ u_{rc})^T$ se anulan, simplificando las ecuaciones.

2.4.2. Fasores espaciales: modelo matricial

El modelo matricial de variables en cuadratura puede obtenerse sin más que aplicar la transformada de Park a la ecuación anterior:

$$C \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{u}_{rdq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{u}_{rdq} \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{rdq} \end{pmatrix} = ZC \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{rdq} \end{pmatrix}$$

Invirtiendo la matriz y eliminando la secuencia homopolar resulta:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{u}_{rdq} \end{pmatrix} = C^{-1}ZC \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{rdq} \end{pmatrix} = Z' \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{s\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{rdq} \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

Donde aparece la nueva matriz Z' :

$$\begin{pmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s + pL_s & 0 & pL_m \cos \theta_r & -pL_m \sin(\theta_r) \\ 0 & R_s + pL_s & pL_m \sin(\theta_r) & pL_m \cos \theta_r \\ pL_m \cos \theta_r & -pL_m \sin(\theta_r) & R_r + pL_r & 0 \\ pL_m \sin(\theta_r) & pL_m \cos \theta_r & 0 & R_r + pL_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} \quad (2-31)$$

Se definen aquí la inductancia del estator, la inductancia del rotor y la inductancia magnetizante como:

$$L_s = \bar{L}_s - \bar{L}_m \quad (2-32)$$

$$L_r = \bar{L}_r - \bar{L}_m \quad (2-33)$$

$$L_m = \frac{3}{2} \bar{M}_{sr} \quad (2-34)$$

Mediante esta transformación se reduce el número de ecuaciones de 6 a 4 y se pasa de 36 a 12 coeficientes. Hay que notar que en la formulación anterior las variables eléctricas están expresadas en sus referencias naturales (las variables del estator en los ejes estatóricos $\alpha\beta$ y las rotóricas en los ejes dq). Si las variables rotóricas se refieren al estator mediante un cambio de coordenadas, aparece un nuevo modelo:

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & C_2^{-1}(\theta_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{rd} \\ u_{rq} \end{pmatrix} = Z' \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & C_2^{-1}(\theta_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} = Z' \mathcal{D} \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix}$$

Invirtiendo y despejando aparece la nueva matriz Z'' :

$$\begin{pmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \\ u_{r\alpha} \\ u_{r\beta} \end{pmatrix} = Z'' \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} = \mathcal{D}^{-1} Z' \mathcal{D} \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

$$Z'' = \begin{pmatrix} R_s + pL_s & 0 & pL_m & 0 \\ 0 & R_s + pL_s & 0 & pL_m \\ pL_m & \omega_r L_m & R_r + pL_r & \omega_r L_r \\ -\omega_r L_m & pL_m & -\omega_r L_r & R_r + pL_r \end{pmatrix} \quad (2-36)$$

En este modelo, la dependencia con el ángulo θ_r se sustituye por la dependencia de la velocidad angular ω_r .

2.4.3. Fasores espaciales: notación compleja

Mediante la notación compleja puede alcanzarse una descripción mucho más compacta y manejable del sistema, que es además la más habitual en control vectorial. Previamente a la exposición de las ecuaciones diferenciales en notación compleja se definen los fasores espaciales de los enlaces de flujo. Teniendo en cuenta las definiciones de dichos enlaces de flujo (2-19) a (2-21) y (2-25) a (2-27) y las inductancias del estator, el rotor y magnetizante (2-32 a 2-34), se tiene:

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \mathbf{i}_s + L_m \mathbf{i}_r \quad (2-37)$$

$$\boldsymbol{\psi}_r = L_m \mathbf{i}_s + L_r \mathbf{i}_r \quad (2-38)$$

Donde los fasores espaciales de los flujos y las corrientes están expresados en un eje de coordenadas cualquiera.

Partiendo de la ecuación (2-35) y (2-36) y teniendo en cuenta la definición de los fasores espaciales, resulta el sistema:

$$\mathbf{u}_s = R_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt} \quad (2-39)$$

$$\mathbf{u}_r = R_r \mathbf{i}_r + \frac{d\boldsymbol{\psi}_r}{dt} - j\omega_r \boldsymbol{\psi}_r \quad (2-40)$$

Donde todos los fasores espaciales están expresados en los ejes solidarios con el estator. En notación matricial, el operador complejo j corresponde a la matriz $j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Junto con las ecuaciones para los enlaces de flujo, el modelo electromagnético de la máquina de inducción queda completo [ecuaciones (2-37) a (2-40)].

Aún cabe la posibilidad de expresar las ecuaciones de la máquina en un sistema de referencia general, que rota a una velocidad genérica $\omega_g(t)$ y tiene una posición instantánea $\theta_g(t)$, que no tiene por qué coincidir necesariamente con el sistema de referencia solidario al rotor. Utilizando la notación compleja para transformar las variables al nuevo sistema de referencia resulta:

$$\mathbf{u}_{sg} e^{j\theta_g} = R_s \mathbf{i}_{sg} e^{j\theta_g} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{sg} e^{j\theta_g}}{dt}$$

$$\mathbf{u}_{rg} e^{j\theta_g} = R_r \mathbf{i}_{rg} e^{j\theta_g} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{rg} e^{j\theta_g}}{dt} - j\omega_r \boldsymbol{\psi}_{rg} e^{j\theta_g}$$

Operando y simplificando resulta el modelo en un marco de referencia genérico, descrito por las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{u}_{sg} = R_s \mathbf{i}_{sg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{sg}}{dt} + j\omega_g \boldsymbol{\psi}_{sg} \quad (2-41)$$

$$\mathbf{u}_{rg} = R_r \mathbf{i}_{rg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{rg}}{dt} - j(\omega_r - \omega_g) \boldsymbol{\psi}_{rg} \quad (2-42)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{sg} = L_s \mathbf{i}_{sg} + L_m \mathbf{i}_{rg} \quad (2-43)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{rg} = L_m \mathbf{i}_{sg} + L_r \mathbf{i}_{rg} \quad (2-44)$$

2.5. Ecuaciones mecánicas del modelo

El modelo de la máquina de inducción queda completo mediante las ecuaciones que describen el comportamiento mecánico. Son la ecuación del par electromagnético y la ecuación de movimiento.

2.5.1. El par electromagnético

Por simplicidad se omitirá aquí la deducción de las expresiones para el par electromagnético, que pueden consultarse en el capítulo 2.1.6 de [1]. La descripción más general del par electromagnético viene dada por:

$$T_e = \frac{3}{2} p \mathbf{i}_r \times \boldsymbol{\psi}_r = \frac{3}{2} p (i_{rd} \psi_{rq} - i_{rq} \psi_{rd}) = \frac{3}{2} p |\mathbf{i}_r| \cdot |\boldsymbol{\psi}_r| \cdot \sin(\gamma) \quad (2-45)$$

Donde \times representa el producto vectorial, p es el número de pares de polos y ambas variables están expresadas en el mismo sistema de referencia, sea cualquiera. Dado que γ representa el ángulo entre los vectores \mathbf{i}_r y $\boldsymbol{\psi}_r$, la expresión del par electromagnético no se ve afectada ante un cambio de coordenadas (la diferencia de ángulo se mantiene constante).

Manipulando la expresión anterior pueden obtenerse otras expresiones equivalentes del el par electromagnético, que pueden ser de utilidad dependiendo de las variables disponibles para su cálculo. Dichas expresiones son:

$$T_e = \frac{3}{2} p \cdot \boldsymbol{\psi}_s \times \mathbf{i}_s \quad (2-46)$$

$$T_e = \frac{3L_m}{2L_r} p \cdot \boldsymbol{\psi}_r \times \mathbf{i}_s \quad (2-47)$$

$$T_e = \frac{3}{2} L_m p \cdot \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s \quad (2-48)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{L_m}{L_m^2 - L_r L_s} p \cdot \boldsymbol{\psi}_s \times \boldsymbol{\psi}_r \quad (2-49)$$

2.5.2. La ecuación de movimiento

Se incorpora por último la ecuación de movimiento, que es necesaria especialmente en régimen transitorio (donde la velocidad de la máquina no es constante):

$$T_e - T_L = J \frac{d\omega_r}{dt} + D\omega_r \quad (2-50)$$

Aquí hay que advertir que ω_r es la primera derivada del ángulo eléctrico del rotor; esto es, la frecuencia de las magnitudes eléctricas del rotor:

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (2-51)$$

La relación entre los ángulos eléctrico y mecánico viene dada por el número de pares de polos según la ecuación (2-2), que se traslada a las velocidades angulares:

$$\omega_r(t) = p\omega_m(t) \quad (2-52)$$

Donde ω_m es la velocidad mecánica del rotor. Además, J es la inercia del rotor, expresada en $kg \cdot m^2$, y D es la constante de amortiguamiento, que representa las pérdidas mecánicas debidas a la fricción mecánica y aerodinámica. Al producto $D\omega_r$ se le llama par de amortiguamiento. Finalmente, T_L es el par de carga.

3 ESQUEMAS DE CONTROL DE LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN

MPC, also referred to as receding horizon control, is the only one among the so-called advanced control techniques (usually understood as techniques more advanced than a standard PID control) which has been extremely successful in practical applications in recent decades, exerting a great influence on research and development directions of industrial control systems.

- Patricio Cortés *et al*, *Predictive Control in Power Electronics and Drives*, 2008 -

TRADICIONALMENTE la máquina de corriente continua (“*máquina de continua*” o simplemente “*máquina DC*”) ha sido la preferida en aplicaciones de velocidad variable, dada la sencillez con la que pueden ser controlados el flujo magnético y el par a través de la corriente de campo y la corriente de armadura. No obstante, la necesidad de alimentar el circuito de armadura a través de escobillas y conmutador tiene un claro inconveniente: el rozamiento mecánico y el consiguiente desgaste. Como consecuencia de ello requiere mantenimiento periódico, no puede funcionar a altas velocidades por limitaciones del conmutador, tiene menos potencia específica que otros motores eléctricos y es en general una máquina más cara.

En la máquina asíncrona, la corriente del rotor se suministra por inducción magnética, lo que permite prescindir de las escobillas y el rozamiento mecánico. Este motor es superior al de continua en términos de simplicidad, robustez, fiabilidad, eficiencia, bajo coste, compactidad, potencia específica y coste de mantenimiento y fabricación. Además, puede conectarse directamente a la red eléctrica sin una etapa de rectificación intermedia, por lo que ha sido ampliamente empleado en aplicaciones de velocidad fija. No obstante, debido a su comportamiento altamente no lineal y los fuertes acoplamientos entre las distintas magnitudes electromagnéticas (tensiones, corrientes y enlaces de flujo), el control de la velocidad del motor de inducción es especialmente complejo. El desarrollo de la electrónica de potencia en las últimas décadas, que hace competitiva la combinación de inversor y máquina de inducción frente al motor de corriente continua, justifica la investigación de esquemas de control para el primero en velocidad variable.

En este Capítulo se presenta un breve resumen del funcionamiento del motor de corriente continua, seguido de una clasificación de los diferentes esquemas de control propuestos para el motor de inducción. Se explicará brevemente la técnica de control vectorial y se citarán algunas técnicas de control avanzado. Entre ellas se hará especial incapié en el Control Predictivo, distinguiendo sus diferentes versiones, y se acabará presentando el Control Predictivo Basado en Modelos (MPC por sus siglas en inglés), que será desarrollado en el capítulo siguiente.

3.1. Control de la Máquina de Continua

El funcionamiento y el control de la máquina de continua han sido ampliamente estudiados y pertenecen a la formación básica de cualquier Grado de Ingeniería Eléctrica. Se recogen aquí sus conceptos fundamentales con el fin de comparar esta máquina con el motor de inducción.

El motor de continua consta de dos circuitos eléctricos: el de la armadura, en el rotor, y el de excitación, en el estator. El esquema de la máquina se muestra en la Fig. 3-1. Como se explica a continuación, la corriente de armadura será la responsable de la producción de par, mientras que la corriente de excitación es necesaria para la imanación de la máquina.

El circuito de armadura se alimenta mediante las escobillas y su ecuación viene dada por

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_a \quad (3-1)$$

Donde U_a es la tensión continua aplicada en bornes de la máquina, R_a y L_a son, respectivamente, la resistencia y la inductancia parásita del circuito de armadura, i_a es la corriente continua de armadura y E_a es una fuerza electromotriz debida a la rotación de la máquina. La fuerza electromotriz queda descrita como

$$E_a = k_1 \psi_e \omega \quad (3-2)$$

Donde k_1 es una constante dependiente de parámetros de la máquina, ω es la velocidad del rotor y ψ_e es el flujo de excitación.

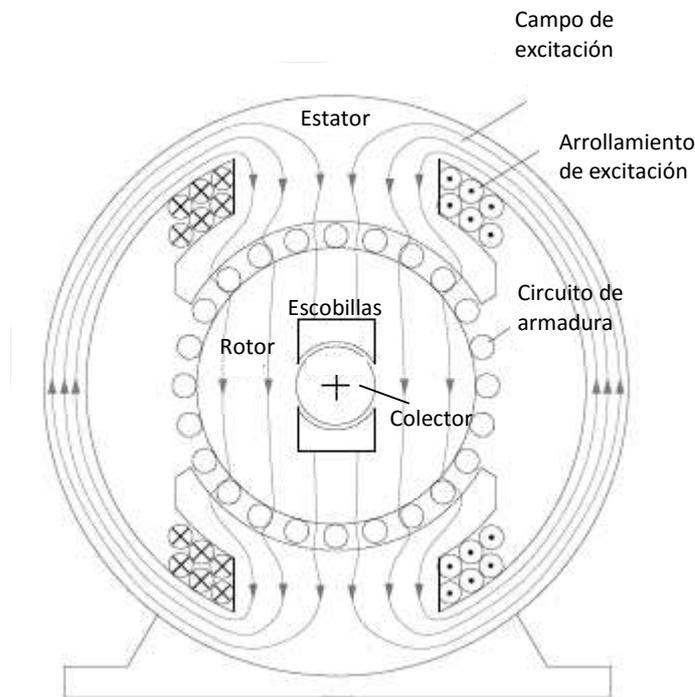


Figura 3-1: Corte transversal de una máquina de corriente continua

El flujo de excitación es producido a su vez por la corriente de excitación. En una aproximación lineal:

$$\psi_e = L_e i_e \quad (3-3)$$

Donde L_e es la inductancia del devanado de excitación. Por otra parte, el par electromagnético resulta de una aplicación directa de la Ley de Lorentz y se describe mediante:

$$T_e = k_1 \psi_e i_a = k_1 L_e i_e i_a \quad (3-4)$$

Atendiendo al conjunto de ecuaciones de la máquina, puede observarse por inspección que mediante el circuito de excitación puede controlarse la magnetización de la máquina (por ejemplo, para funcionamiento en debilitamiento de campo) y, una vez fijo el flujo magnético, la corriente de armadura es responsable del par

electromagnético. Mediante un control en cascada pueden controlarse de este modo la magnetización y la velocidad de la máquina.

3.2. Control Vectorial del Motor de Inducción

Las ecuaciones que gobiernan el motor de inducción (2-41) a (2-45) distan de ser tan sencillas como las del motor de continua. Las magnitudes son vectoriales y hay un fuerte acoplamiento entre las diversas variables. Especialmente compleja es la expresión del par, de la cual se recupera aquí la expresión (2-47):

$$T_e = \frac{3L_m}{2L_r} p \cdot \boldsymbol{\psi}_r \times \mathbf{i}_s = \frac{3L_m}{2L_r} p (i_{sq}\psi_{rd} - i_{sd}\psi_{rq}) \quad (3-5)$$

Con acoplamiento cruzado entre las componentes de \mathbf{i}_r y $\boldsymbol{\psi}_r$, aunque esto es extensible a \mathbf{i}_s y $\boldsymbol{\psi}_s$ como se vio en las ecuaciones (2-45) a (2-49).

La solución más popular con el advenimiento de los convertidores de potencia fue el llamado **Control de Campo** o **Control Vectorial** (*Field Oriented Control*, FOC). La idea fundamental es expresar las ecuaciones de la máquina en un sistema de referencia tal que una de las componentes del flujo estático o el flujo rotórico se anule (i.e. alineando el sistema de referencia arbitrario con el fasor espacial del flujo en cuestión). De este modo se consigue que uno de los términos del producto vectorial en (3-5) se anule y la expresión resultante es similar a la del par electromagnético en la máquina DC dado por (3-4), gracias a lo cual puede usarse el mismo esquema de control.

En la máquina de inducción se utiliza habitualmente control vectorial orientado según el flujo del rotor (*rotor-flux-oriented control*, RFOC), aunque también es posible implementar control vectorial orientado según el flujo del estator (*stator-flux-oriented control*) o aun según un tercer vector de flujo llamado flujo magnetizante (*magnetizing-flux-oriented control*), que es una función lineal de los dos primeros. En esta monografía se presentará el control vectorial orientado según el flujo del rotor, aunque todos los esquemas de control vectorial pueden consultarse en detalle en [1].

Sea $\theta_{\psi_r}(t)$ es el ángulo instantáneo del fasor espacial flujo del rotor respecto a los ejes estáticos $\alpha\beta$; i.e. $\theta_{\psi_r}(t) = \text{ang}\{\boldsymbol{\psi}_r(t)\}$. Las ecuaciones de la máquina pueden describirse entonces en el sistema de referencia solidario a θ_{ψ_r} que gira con velocidad $\omega_g(t) = d\theta_{\psi_r}(t)/dt$. Todas las magnitudes (tensiones, corrientes y flujos) deben trasladarse al nuevo marco de referencia utilizando (2-13). En particular, el fasor espacial del flujo del rotor se transforma como:

$$\begin{pmatrix} \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}_{rg} = \boldsymbol{\psi}_r \cdot e^{-j\theta_{\psi_r}} = (|\boldsymbol{\psi}_r| \cdot e^{j\theta_{\psi_r}}) \cdot e^{-j\theta_{\psi_r}} = |\boldsymbol{\psi}_r| = \Psi_r = \begin{pmatrix} \Psi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

Donde se ha incluido el subíndice g para distinguir el fasor espacial expresado en el marco de referencia dq solidario con el flujo del rotor. Como puede comprobarse, la componente en cuadratura del enlace del flujo se anula y la expresión del par electromagnético se reduce a:

$$T_e = \frac{3L_m}{2L_r} p \cdot \boldsymbol{\psi}_{rg} \times \mathbf{i}_{sg} = \frac{3L_m}{2L_r} p i_{sq}\psi_{rd} \quad (3-7)$$

Para esta clase de control vectorial hace falta expresar las ecuaciones de la máquina en función de \mathbf{i}_s y $\boldsymbol{\psi}_r$. Las ecuaciones (2-41) a (2-44) se repiten aquí por conveniencia:

$$\mathbf{u}_{sg} = R_s \mathbf{i}_{sg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{sg}}{dt} + j\omega_g \boldsymbol{\psi}_{sg} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{u}_{rg} = R_r \mathbf{i}_{rg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{rg}}{dt} - j(\omega_r - \omega_g)\boldsymbol{\psi}_{rg} \quad (3-9)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{sg} = L_s \mathbf{i}_{sg} + L_m \mathbf{i}_{rg} \quad (3-10)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{rg} = L_m \mathbf{i}_{sg} + L_r \mathbf{i}_{rg} \quad (3-11)$$

Aquí pueden despejarse \mathbf{i}_r en (3-11) y $\boldsymbol{\psi}_s$ en (3-10). Al sustituirlos en (3-8) y en (3-9) y desarrollar las ecuaciones escalares (parte real y parte imaginaria) resulta:

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + \sigma L_s \frac{di_{sd}}{dt} - \omega_g \sigma L_s i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_{rd}}{dt} - \omega_g \frac{L_m}{L_r} \psi_{rq}$$

$$u_{sq} = \omega_g \sigma L_s i_{sd} + R_s i_{sq} + \sigma L_s \frac{di_{sq}}{dt} + \omega_g \frac{L_m}{L_r} \psi_{rd} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_{rq}}{dt}$$

$$0 = -\frac{L_m}{L_r} R_r i_{sd} + \frac{R_r}{L_r} \psi_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} - (\omega_g - \omega_r) \psi_{rq}$$

$$0 = -\frac{L_m}{L_r} R_r i_{sq} + (\omega_g - \omega_r) \psi_{rd} + \frac{R_r}{L_r} \psi_{rd} + \frac{d\psi_{rq}}{dt}$$

Donde se ha definido $\sigma = 1 - L_m^2/L_r L_s$. Teniendo en cuenta que $\psi_{rq} = 0$ en virtud de (3-6) las ecuaciones anteriores se simplifican a:

$$u_{sd} = R_s i_{sd} + \sigma L_s \frac{di_{sd}}{dt} - \omega_g \sigma L_s i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_{rd}}{dt} \quad (3-12)$$

$$u_{sq} = \omega_g \sigma L_s i_{sd} + R_s i_{sq} + \sigma L_s \frac{di_{sq}}{dt} + \omega_g \frac{L_m}{L_r} \psi_{rd} \quad (3-13)$$

$$0 = -\frac{L_m}{L_r} R_r i_{sd} + \frac{R_r}{L_r} \psi_{rd} + \frac{d\psi_{rd}}{dt} \quad (3-14)$$

$$0 = -\frac{L_m}{L_r} R_r i_{sq} + (\omega_g - \omega_r) \psi_{rd} \quad (3-15)$$

Por inspección puede comprobarse que i_{sd} es responsable de establecer el flujo magnético a través de una dinámica de primer orden (3-14), mientras que i_{sq} controla el par electromagnético (3-7). i_{sd} y i_{sq} son análogas, respectivamente, a la corriente de excitación y la corriente de armadura en el motor de continua. El control de ambas corrientes, no obstante, es más complejo que en la máquina DC porque las ecuaciones de tensión (3-12) y (3-13) aparecen acopladas entre sí. Para el lazo de control de corriente pueden usarse sistemas de desacoplamiento (detallados en el Capítulo 4.1.1 de [1]) o directamente despreciarse dicho acoplamiento y suponer $i_{sd} = f(u_{sd})$; $i_{sq} = f(u_{sq})$ [2].

El problema del control vectorial se reduce en última instancia al correcto cálculo de $\boldsymbol{\psi}_r = \begin{pmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{pmatrix}$; o lo que es lo mismo, la magnitud Ψ_r y el ángulo θ_{ψ_r} respecto a los ejes $\alpha\beta$. Existen fundamentalmente dos técnicas para calcular estos valores, que se comentan sumariamente a continuación:

- a) **Orientación directa del flujo rotórico (DRFO: Direct Rotor Flux Orientation):** En este esquema se toman las ecuaciones (3-12) y (3-13) en el marco de referencia $\alpha\beta$ (i.e. $\omega_g = 0$) y se calcula el valor instantáneo del flujo rotórico como:

$$\psi_{r\alpha} = \frac{L_r}{L_m} \left[\int (u_{s\alpha} - R_s i_{s\alpha}) dt - \sigma L_s i_{s\alpha} \right] \quad (3-16)$$

$$\psi_{r\beta} = \frac{L_r}{L_m} \left[\int (u_{s\beta} - R_s i_{s\beta}) dt - \sigma L_s i_{s\beta} \right] \quad (3-17)$$

Donde \mathbf{u}_s y \mathbf{i}_s pueden medirse directamente en los devanados estat6ricos. El 6ngulo y la magnitud se hacen transformando a coordenadas polares las componentes de $\boldsymbol{\psi}_r$.

- b) Orientaci3n indirecta del flujo rot3rico (IRFO: *Indirect Rotor Flux Orientation*):** Utilizando las ecuaciones (3-14) y (3-15):

$$\frac{d\psi_{rd}}{dt} = -\frac{R_r}{L_r} \psi_{rd} + \frac{L_m}{L_r} R_r i_{sd} \quad (3-18)$$

$$\theta_{\psi_r} = \int \omega_g(t) dt = \int \left(\omega_r + \frac{L_m R_r}{L_r \Psi_r} i_{sq} \right) dt \quad (3-19)$$

Donde (3-18) es una ecuaci3n diferencial con t6rmino independiente variable con el tiempo que debe resolverse num6ricamente, mientras que (3-19) utiliza el resultado de (3-18) para calcular el desplazamiento angular θ_{ψ_r} .

En la Fig. 3-3 se ha dibujado el diagrama de bloques del control vectorial con orientaci3n directa del flujo rot3rico. El control vectorial con orientaci3n indirecta es id6ntico pero utiliza valores diferentes para determinar la magnitud y la posici3n del fasor espacial del flujo del rotor. Los bloques marcados con 3/2 y 2/3 representan la transformada de Clarke directa e inversa, respectivamente. Los bloques marcados con $e^{j\theta_{\psi_r}}$ y $e^{-j\theta_{\psi_r}}$ hacen la transformaci3n entre los ejes $\alpha\beta$ (Transformada de Clarke) y los ejes dq (Transformada de Park). Para hacer el cambio de coordenadas es necesario conocer la posici3n del fasor espacial del flujo rot3rico θ_{ψ_r} , que es calculado por el observador (*observer*) a partir de la medici3n de las corrientes y las tensiones del estator en el concepto de orientaci3n directa (para orientaci3n indirecta ser6a necesario medir adicionalmente la velocidad del eje del motor). En azul se ha representado el lazo de control de velocidad, que produce el valor de referencia i_{sq}^* (en virtud de la ecuaci3n (3-7), la componente en cuadratura de la intensidad estat3rica controla el par y, en 6ltima instancia, la velocidad de la m6quina). Por otra parte se ha distinguido en color marr3n el lazo de control de flujo, que permite calcular el valor de referencia i_{sd}^* . Adem6s se ha despreciado el acoplamiento de u_{sd} y u_{sq} con i_{sd} y i_{sq} , por lo que las referencias de las componentes de directa y cuadratura de \mathbf{i}_{sg} sirven para calcular la referencia de las componentes de directa y cuadratura de la tensi3n de alimentaci3n \mathbf{u}_{sg} .

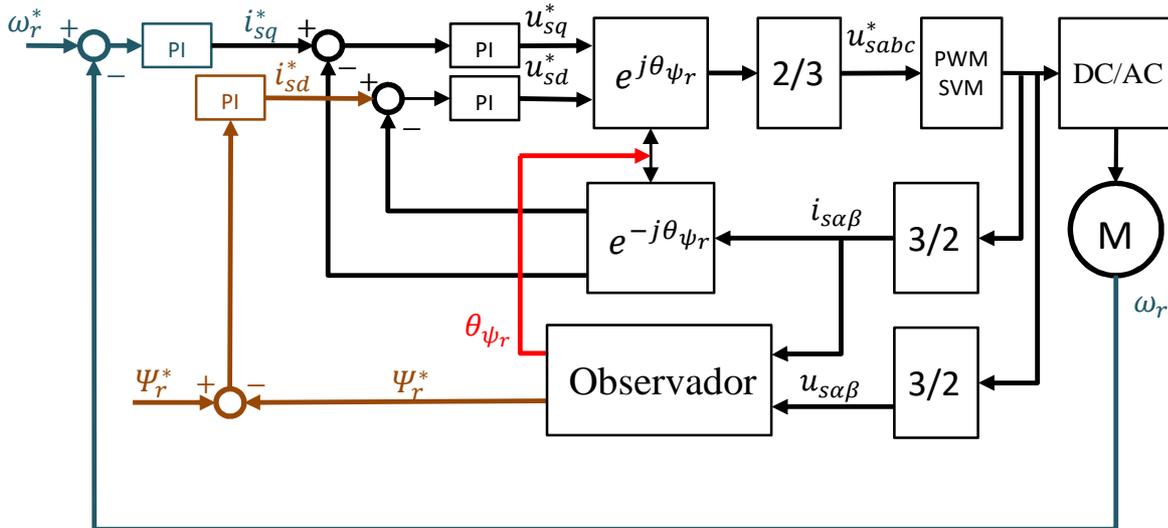


Figura 3-2: Esquema de bloques del control vectorial (FOC) con orientación directa del flujo rotórico (DRFO)

La tensión de referencia u_{sq}^* se transforma consecutivamente a los ejes $\alpha\beta$ y a variables trifásicas y se suministra la referencia u_{sabc}^* a un modulador PWM (*Pulse Width Modulation*) o SVM (*Space Vector Modulation*), que aplica dicha tensión al motor. El esquema de control puede completarse incluyendo el funcionamiento en debilitamiento de campo, que consiste en reducir el valor del flujo de la máquina para seguir aumentando la velocidad de la máquina por encima de la velocidad nominal sin sobrepasar la potencia nominal. Aquí se ha omitido por simplicidad.

3.3. Control Avanzado y Control Predictivo (*Predictive Control*)

El control vectorial ha sido aplicado con éxito en las aplicaciones de velocidad variable de los motores de inducción. No obstante, su dinámica está limitada por la estructura de control en cascada. El desarrollo de microprocesadores más rápidos y más potentes ha permitido la implementación de esquemas de control más complejos, que requieren una capacidad computacional mucho mayor que el FOC.

En [3] se hace una revisión de los diferentes conceptos de control avanzado para convertidores de potencia en general y accionamientos eléctricos en particular. Se entiende por control avanzado todo aquel que es superior al tradicional controlador lineal PID. En este sentido se citan el control por **lógica difusa** (de aplicación en sistemas de funcionamiento total o parcialmente desconocido) y el control de **modo deslizante** (*sliding mode control*). Sin embargo, las ventajas del **control predictivo** hacen que sea especialmente adecuado para el control de convertidores de potencia. Es el esquema de control avanzado que goza de mayor popularidad.

El concepto fundamental del Control Predictivo (PD, por sus siglas en inglés) es el uso de un modelo del sistema para predecir el comportamiento futuro de las variables controladas. Mediante esta información el controlador puede escoger la acción óptima de control de acuerdo a unos principios de optimización previamente definidos. Los esquemas de Control Predictivo pueden clasificarse, de hecho, atendiendo a su criterio de optimización. Según la aproximación realizada en [3] puede distinguirse entre PD basado en histéresis, PD basado en trayectorias, control deadbeat y MPC.

Los dos primeros tienen un interés relativo para el objetivo de esta monografía. Efectivamente existen controladores de histéresis y de trayectoria que utilizan modelos del sistema para predecir el comportamiento del mismo en función de la acción de control. No obstante, se trata de aplicaciones cuyo concepto fundamental no es el Control Predictivo y que en general no disfrutan de una gran popularidad.

El **Control Deadbeat**, por otra parte, es un método de control bien estudiado y firmemente establecido con sus ventajas y sus inconvenientes. En cada intervalo de muestreo se usa un modelo del sistema para calcular la acción de control que permite alcanzar el estado de referencia con error cero en el siguiente intervalo. En

accionamientos eléctricos, esta acción de control suele ser una tensión de referencia que debe ser provista por un inversor de potencia y que se aplica mediante un modulador (modulador por anchura de pulsos, PWM, o en espacio de estados, SVM). Aunque esta técnica de control es muy apropiada en aplicaciones que requieren una muy rápida respuesta dinámica, no tiene un buen comportamiento en régimen permanente y es frágil ante errores en los parámetros del modelo, ante una mala estimación del estado del sistema y ante dinámicas no modeladas.

Por último, el **Control Predictivo Basado en Modelos** (MPC, por sus siglas en inglés) utiliza un criterio de optimización más flexible que el Control Deadbeat, expresado mediante una **función de coste** que debe ser minimizada. A pesar del nombre, que especifica que es una versión del control predictivo que se basa en el uso de modelos, *todas* las aplicaciones de control predictivo se basan en el uso de modelos, como se ha explicado más arriba. El MPC se caracteriza y se distingue, sobre todo, por la función de coste anteriormente referida. Esta técnica también ha recibido el nombre de Control de Horizonte Deslizante (*receding horizon control*), pues el problema de minimización de la función de coste debe resolverse en cada intervalo de muestreo, como se verá más adelante.

En el ámbito del MPC puede hacerse una distinción entre los MPC con set de control continuo, donde las acciones de control deben ser producidas mediante un modulador, y el MPC con set de control discreto (FS-MPC, *Finite Set Model Predictive Control*). Aunque el planteamiento del problema de optimización es idéntico para estas dos técnicas, la naturaleza discreta de los inversores de potencia hace que el FS-MPC merezca una consideración aparte. Por último, si la solución al problema de minimización de la función de coste se obtiene de forma analítica, entonces se habla de MPC explícito (*explicit MPC*). En caso contrario (e.g. solución numérica por enumeración exhaustiva de las acciones de control) se habla de MPC implícito (*implicit MPC*).

4 MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC)

MPC is (...) a form of control in which the control action is obtained by solving online, at each sampling instant, a finite horizon optimal control problem in which the initial state is the current state of the plant. Optimization yields a finite control sequence, and the first control action in this sequence is applied to the plant.

- James Rawlings and David Mayne, *Model Predictive Control: Theory and Design*, 2009 -

EL Control Predictivo Basado en Modelos (MPC, por sus siglas en inglés) es la única técnica avanzada de control – entendiéndose aquí más avanzada que el tradicional controlador PID – que ha tenido un impacto significativo en la industria en general y en la ingeniería de procesos en particular [4]. Sólo recientemente y gracias al desarrollo de los microprocesadores, la comunidad de la electrónica de potencia ha empezado a incorporar el MPC a sus esquemas de control [3], [5].

El concepto fundamental que subyace al MPC es el uso de **modelos dinámicos** para **predecir** el comportamiento futuro del sistema controlado, y optimizar esta predicción de acuerdo a una **función de coste** para elegir la mejor acción de control en el momento presente [6]. Además, dado que las predicciones dependen del estado inicial del sistema, el problema de la estimación del estado –en base a estados anteriores y a las mediciones efectuadas– también es importante.

De entre las características del MPC destacan especialmente las siguientes, que lo distinguen de los sistemas de control tradicionales (e.g., control lineal PID) y lo hacen especialmente apropiado para determinadas aplicaciones:

- a) Se adapta con facilidad a **problemas multivariable**;
- b) incorpora de forma natural el tratamiento de **problemas de optimización con entradas discretas** (e.g., el estado de los interruptores de un convertidor de potencia) **o limitadas** (e.g. la saturación de una válvula);
- c) y permite introducir de forma sencilla **objetivos de control no lineales** en la función de coste (e.g. la frecuencia de conmutación de un convertidor de potencia).

En este Capítulo se presenta una introducción a los conceptos más generales del MPC, como base para su aplicación posterior al campo de los accionamientos eléctricos. Para este Capítulo se ha elegido el texto [6] como referencia.

4.1 Modelado de sistemas

Por explicado más arriba, la descripción y el modelado de sistemas representan un concepto central en el MPC. Con este fin se explicó el modelo dinámico de la máquina de inducción en el Capítulo 2 de la presente monografía. Se ofrece ahora un tratamiento más riguroso del tema del modelado de sistemas para introducir el MPC en base a definiciones genéricas.

De forma general, un sistema dinámico puede ser descrito mediante una función de sus entradas, salidas y las derivadas temporales de éstas. Para el MPC resulta de especial utilidad la llamada representación en **espacio de**

estados, donde se tiene en cuenta el estado del sistema para su descripción. La descripción de un sistema de primer orden en espacio de estados viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (4-1)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (4-2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4-3)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema; $u \in \mathbb{R}^m$ son las entradas; $y \in \mathbb{R}^p$ son las salidas y $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo. Las funciones f y g son absolutamente generales y pueden tomar cualquier forma.

No obstante, lo más habitual es que se manejen sistemas *lineales* –o, en su defecto, se linealicen los sistemas que no lo son-. En este caso el sistema admite una notación matricial que es muy compacta y facilita mucho su estudio y manipulación:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4-4)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (4-5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4-6)$$

Donde se ha incluido por generalidad la dependencia con el tiempo de las matrices del sistema. Las matrices $[A \ B \ C \ D]$ se denominan, respectivamente, matriz de estados, de entrada, de salida y de transmisión directa. Por simplicidad, la matriz D se omite en la mayoría de los casos.

En la mayoría de los algoritmos MPC, donde la optimización de la predicción del sistema es computada *online* por un microprocesador, resulta necesario obtener la *discretización* del sistema descrito en las ecuaciones (4-4) a (4-6). Para ello se usa un mantenedor de orden cero para la entrada (*zero-order-hold input*):

$$u(t) = u[k] = u_k, \quad \forall t \in [kT_s, (k+1)T_s] \quad (4-7)$$

Donde T_s es el periodo de muestreo. Aquí la notación como subíndice (u_k) o mediante corchetes ($u[k]$) es equivalente y se empleará una u otra atendiendo a criterios de claridad y compacidad. Bajo la condición (4-7) puede discretizarse el sistema, que queda definido por las ecuaciones:

$$x[k+1] = A_d[k]x[k] + B_d[k]u[k] \quad (4-8)$$

$$y[k] = C_d x[k] \quad (4-9)$$

$$x[k=0] = x_0 \quad (4-10)$$

Donde las matrices son [7]:

$$A_d[k] = e^{\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} A(\tau) d\tau} \quad (4-11)$$

$$B_d[k] = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \left(e^{\int_{\eta}^{(k+1)T_s} A(\tau) d\tau} \right) B(\eta) d\eta \quad (4-12)$$

$$C_d[k] = C \quad (4-13)$$

Las matrices así definidas representan un modelo discreto *exacto* del sistema. Se entiende por exacto que las

soluciones en los instantes de muestreo coinciden con las del sistema continuo para dichos instantes si se usa un mantenedor de orden cero en la entrada. Sin embargo, para modelos dependientes del tiempo no es práctico resolver de forma *online* las anteriores expresiones por su elevado coste computacional.

Una aproximación habitual consiste en suponer constante el valor de las matrices durante un periodo de muestreo (así como se hizo con las entradas del sistema). En ese caso las matrices (4-11) y (4-12) se simplifican:

$$A_d = e^{AT_s} \quad (4-14)$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B(\tau) d\tau \quad (4-15)$$

La aproximación anterior es de interés en el modelado del motor de inducción en espacio de estados, pues el sistema (descrito por la matriz A) depende del tiempo a través de la velocidad angular ω_m . Por último, vale la pena destacar aquí la llamada discretización de Euler. Ésta es la forma más sencilla de obtener modelos discretos y consiste en truncar el desarrollo en serie de las expresiones (4-14) y (4-15) en su coeficiente lineal. Resulta así:

$$A_d^{Eu}[k] = I + AT_s \quad (4-16)$$

$$B_d^{Eu}[k] = BT_s \quad (4-17)$$

Donde I denota la matriz identidad de las dimensiones apropiadas. Cabe hacer notar que aunque la discretización de Euler es la más sencilla y la más fácil de obtener, también es la más inexacta.

4.2. Controlador lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator, LQR)

El Control Lineal Cuadrático es un problema de optimización donde se asume un **sistema lineal e invariante en el tiempo** así como una **función de coste cuadrática**, como se presentará más adelante. El objetivo de control es llevar el sistema descrito por las ecuaciones (4-8) a (4-10) a un valor de referencia, definido por \mathbf{x}_{ref} . Además, se define un valor de referencia para la acción de control como aquel que hace falta para mantener el sistema en su estado de referencia en el régimen permanente. Matemáticamente decimos:

$$\mathbf{u}_{ref} = \mathbf{u}^* | A_d \mathbf{x}_{ref} + B_d \mathbf{u}^* = \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}_{ref} \quad (4-18)$$

De este punto en adelante se omitirá el subíndice d para referir las matrices discretas. Todas las matrices que aparezcan a continuación, salvo que se indique lo contrario, se referirán a sistemas discretos. Además, para indicar el estado de referencia se empleará indistintamente el subíndice \mathbf{x}_{ref} o el superíndice \mathbf{x}^* .

Adicionalmente se definen variables incrementales como la diferencia entre el valor instantáneo del estado o la entrada y sus valores de referencia, designadas con una tilde:

$$\tilde{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}_{ref} \quad \tilde{\mathbf{u}}[k] = \mathbf{u}[k] - \mathbf{u}_{ref}$$

Por simplicidad de notación se omitirá de ahora en adelante la tilde \sim para las variables incrementales. Alternativamente puede suponerse nulo el estado de referencia sin pérdida de generalidad, puesto que en ese caso el valor incremental coincide con la variable en cuestión. Se volverá a las variables incrementales cuando el contexto así lo requiera por motivos de claridad.

El estado futuro del sistema depende tanto del estado inicial (importancia de la *estimación del estado*) como de la secuencia de entradas aplicada (*problema de optimización*). La secuencia de entradas \mathbf{U}^N se define como las acciones de control aplicadas a lo largo de N intervalos de control, llamados **horizonte de predicción**, con $N \in \mathbb{N}^*$. El superíndice N se omitirá cuando sea evidente o no sea necesario precisarlo.

$$\mathbf{U}^N = \mathbf{U} = \{\mathbf{u}[0], \mathbf{u}[1], \mathbf{u}[2], \dots, \mathbf{u}[N-1]\} \quad (4-19)$$

Se define en este punto la **función objetivo** del Controlador Lineal Cuadrático (LQR) que evalúa escalarmente la desviación del sistema de su estado de referencia. La función de coste del LQR debe ser *cuadrática*, y el *coste* depende del estado inicial \mathbf{x}_0 y de la secuencia de entradas \mathbf{U} .

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}) = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}[k]^T Q \mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T R \mathbf{u}[k]) + \mathbf{x}[N]^T P \mathbf{x}[N] \quad (4-20)$$

La función V evalúa la desviación sobre el estado de referencia como una suma cuadrática ponderada de los errores (recordar aquí que las variables (\mathbf{x}, \mathbf{u}) son variables incrementales o, si se prefiere, que el estado de referencia es el origen). La matriz Q pondera la desviación respecto al estado de referencia, y la matriz R evalúa la desviación de la acción de control. Usualmente se reserva una ponderación diferente para el estado final, aquí la matriz P .

Q y R evalúan el coste de cada intervalo de muestreo (*stage cost*), mientras que P evalúa el coste del estado final (*final cost*). Asignar valores a dichas matrices constituye el problema de sintonización (*tuning*) y no es ni mucho menos trivial. Siguiendo la notación de [8], de aquí en adelante se denotará la suma cuadrática por:

$$\mathbf{x}^T P \mathbf{x} := |\mathbf{x}|_P^2 \quad (4-21)$$

La función objetivo puede reescribirse entonces como:

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}) = \sum_{k=0}^{N-1} (|\mathbf{x}_k|_Q^2 + |\mathbf{u}_k|_R^2) + |\mathbf{x}_N|_P^2 \quad (4-22)$$

El problema de control cuadrático queda así formulado como la búsqueda de la secuencia de entrada \mathbf{U} que minimiza la función de coste V :

$$\mathbf{U}^{opt} = \arg \left(\min_{\mathbf{U}} V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}) \right) \quad (4-23)$$

Donde $\arg(\cdot)$ quiere decir *argumento de* (\cdot) . Lo habitual es que las matrices $[Q, R, P]$ sean escogidas como matrices diagonales pero esto no es necesario. Si se asume, sin embargo, que Q y R son matrices semidefinidas positivas (i.e. todos sus autovalores son mayores o iguales que 0) y que la matriz P es definida positiva [8] (i.e. todos sus autovalores son mayores que 0). Matemáticamente decimos:

$$Q, R \succeq 0, \quad P > 0$$

4.3. Programación dinámica (Dynamic Programming, DP)

Los problemas de optimización donde la función de coste está compuesta de la suma de varios términos, cada uno de ellos dependiente del término anterior de la serie, se denominan **problemas de optimización multietapa** (*multistage optimization problem*). El problema central que debe resolver el LQR (4-23) es un ejemplo de problema de optimización multietapa, ya que cada estado $\mathbf{x}[k]$ dentro del horizonte de predicción N (i.e. $k \leq N$) depende del estado anterior $\mathbf{x}[k - 1]$ y de la acción de control aplicada en dicho estado $\mathbf{u}[k - 1]$.

Formalmente puede presentarse un problema de esta clase como la optimización de una función del tipo:

$$f(w, x) + g(x, y) + h(y, z) \quad (4-24)$$

Este problema puede abordarse en diferentes versiones. En la que resulta de interés para su aplicación al LQR se toma una de las variables como parámetro y se optimiza el resto. Matemáticamente, hay que solucionar el problema:

$$[\mathbf{x}^{opt}, y^{opt}, z^{opt}] = \arg \left(\min_{x,y,z} \{f(w, x) + g(x, y) + h(y, z)\} \right) \quad \text{sujeto a } w = cte \quad (4-25)$$

La semejanza con el problema del Control Lineal Cuadrático será explicada más adelante. Baste por ahora adelantar que cada variable (w, x, y, z) corresponde a un par compuesto por un estado del sistema y una acción de control.

Dada la especial estructura del problema, la solución puede obtenerse optimizando una secuencia de problemas simples de una sola variable definidos así:

$$\mathbf{x}^{opt} = \arg \left\{ \min_x \left[f(w, x) + \min_y \left(g(x, y) + \min_z h(y, z) \right) \right] \right\} \quad \text{sujeto a } w = cte \quad (4-26)$$

En primer lugar se resuelve el problema del lazo más interior, planteado en la variable z . El valor óptimo (mínimo) y la solución al problema en z vienen dados por:

$$h^{opt}(y) = \min_z h(y, z) \quad z^{opt}(y) = \arg \left(\min_z h(y, z) \right)$$

Aquí hay que remarcar que los valores óptimos z^{opt} y h^{opt} para este problema dependen de la variable y . Inmediatamente se aborda el siguiente problema de optimización anidado, planteado en la variable y . El valor óptimo y la solución son respectivamente:

$$g^{opt}(x) = \min_y \{g(x, y) + h^{opt}(y)\}, \quad y^{opt}(x) = \arg \left[\min_y \{g(x, y) + h^{opt}(y)\} \right]$$

Como ocurriera en el caso anterior, esta vez la solución óptima para la variable y es función de la variable restante x . El valor óptimo del problema de optimización planteado en (4-25) así como la solución en x resultan:

$$f^{opt}(w) = \min_x \{f(w, x) + g^{opt}(x)\} \quad x^{opt}(w) = \arg \left(\min_x \{f(w, x) + g^{opt}(x)\} \right)$$

Si el interés se centra en la primera variable x , entonces la función $x^{opt} = x^{opt}(w)$ era el objetivo principal y se ha obtenido de una forma eficiente. Esta clase de solución anidada pertenece a las llamadas técnicas de **programación dinámica** (*DP*, por sus siglas en inglés). En particular, la versión aquí presentada se conoce como *backward DP* porque primero se despeja la “última variable” z y se prosigue en orden inverso hasta llegar a la primera variable a optimizar (x). Una vez que se llega a la primera variable, la de mayor interés, puede conocerse el valor óptimo del resto de variables como función de aquella. El número de variables a optimizar [x, y, z, \dots] puede ser, teóricamente, tan alto como se desee.

4.4. DP aplicada al LQR

La Programación Dinámica puede utilizarse para resolver la optimización del LQR presentado en la Sección 4.2. Para ello, conviene reescribir la ecuación (4-22) de la siguiente manera:

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}) = \sum_{k=0}^{N-1} \{\ell(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k])\} + \ell_N(\mathbf{x}[N]) \quad \text{sujeto a } \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad (4-27)$$

Donde $\ell[k]$ representa el *coste de etapa*, y ℓ_N , el *coste terminal*:

$$\ell[k] := \mathbf{x}[k]^T \mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \mathbf{u}[k]^T \mathbf{R}\mathbf{u}[k]$$

$$\ell_N := \mathbf{x}[N]^T \mathbf{P}\mathbf{x}[N]$$

La función de coste tiene la misma estructura formal que la ecuación (4-24), así que puede solucionarse mediante la técnica de *backward DP*. Para ello conviene reordenar la función de coste de manera que pueda optimizarse sobre la última etapa $k = N - 1$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}} V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}) = & \min_{u[0], x[0], \dots, u[N-2], x[N-1]} \{ \ell(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0]) + \ell(\mathbf{x}[1], \mathbf{u}[1]) + \dots \} \\ & + \min_{u[N-1], x[N]} \{ \ell(\mathbf{x}[N-1], \mathbf{u}[N-1]) + \ell_N(\mathbf{x}[N]) \} \end{aligned} \quad (4-28)$$

Sujeto en todo caso a la ecuación de estado $\mathbf{x}[k+1] = A\mathbf{x}[k] + B\mathbf{u}[k]$. Aquí puede comprobarse que cada variable (w, x, y, z) en la ecuación (4-24) corresponde aquí un par de la forma $[\mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$. La optimización de cada etapa se realiza, como cabía esperar, sobre la acción de control que se aplica en la etapa ($\mathbf{u}[k]$) y el estado así alcanzado ($\mathbf{x}[k+1]$). La técnica *backward DP* empieza por optimizar el último término anidado; en este caso:

$$\min_{u[N-1], x[N]} \{ V_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) \} = \min_{u[N-1], x[N]} \{ \ell(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + \ell_N(\mathbf{x}_N) \} \quad (4-29)$$

La optimización se hace sobre \mathbf{u}_{N-1} y \mathbf{x}_N . Hay que notar que el estado \mathbf{x}_{N-1} aparece en esta etapa como un *parámetro*: como se vio en la Sección 4.3., se obtendrán el coste óptimo $V_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-1})$ y la solución óptima $[\mathbf{u}_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-1}), \mathbf{x}_N^{opt}(\mathbf{x}_{N-1})]$ como función del *estado anterior*. La optimización puede hacerse de forma analítica según [8]: para ello reescribimos la función de coste de la última etapa en forma matricial:

$$V_{N-1} = |\mathbf{x}|_Q^2 + |\mathbf{u}|_R^2 + |A\mathbf{x} + B\mathbf{u}|_P^2 = \mathbf{x}^T (A^T P A + Q) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T (B^T P B + R) \mathbf{u} + 2\mathbf{u}^T B^T P A \mathbf{x} \quad (4-30)$$

El mínimo de la función de coste (4-30) se halla extrayendo la derivada parcial respecto a la entrada e igualando a 0:

$$\frac{\partial V_{N-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 2(B^T P B + R) \mathbf{u} + 2B^T P A \mathbf{x} = 0 \quad (4-31)$$

Siendo la solución óptima que minimiza la función de coste:

$$\mathbf{u}_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-1}) = K_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} \quad (4-32)$$

Donde

$$K_{N-1} = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (4-33)$$

Se ha encontrado, por tanto, una **ley de control K** que permite calcular la entrada óptima al sistema como función del estado actual del mismo. Si recuperamos las variables incrementales la expresión completa de la solución es:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{N-1}^{opt} = K_{N-1} \tilde{\mathbf{x}}_{N-1} \Leftrightarrow \mathbf{u}_{N-1}^{opt} = K_{N-1} (\mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{u}_{ref} \quad (4-34)$$

Finalmente, conocida la entrada óptima al sistema \mathbf{u}_{N-1}^{opt} pueden calcularse el estado óptimo \mathbf{x}_N^{opt} y el coste óptimo V_{N-1}^{opt} como:

$$\mathbf{x}_N^{opt} = \mathbf{x}_N^{opt}(\mathbf{x}_{N-1}) = (A + B K_{N-1}) \mathbf{x}_{N-1} \quad (4-35)$$

$$V_{N-1}^{opt} = V_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-1}) = \mathbf{x}_{N-1}^T \Pi_{N-1} \mathbf{x}_{N-1} \quad (4-36)$$

Donde la matriz de coste Π_{N-1} se obtiene introduciendo la solución (4-34) y (4-35) en la función de coste de etapa (4-30) y teniendo en cuenta la propiedad general de las matrices $(AB)^T = B^T A^T$ y que para matrices simétricas se verifica $A^T = A$:

$$\Pi_{N-1} = Q + A^T P A + K_{N-1}^T (R + B^T P B) K_{N-1} + 2K_{N-1}^T B^T P A$$

Sustituyendo el valor de K dado por (4-33) en la expresión anterior obtenemos

$$\Pi_{N-1} := \Pi[N-1] = Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (4-37)$$

La función $V_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-1})$ define el *cost to go* en la última etapa del horizonte de predicción N : el coste desde un estado cualquiera \mathbf{x}_{N-1} al estado \mathbf{x}_N bajo la función de control óptima recogida en (4-34). En este punto puede continuarse con la siguiente etapa de optimización del *backward DP*. Expresamos la optimización de la etapa como:

$$\min_{\mathbf{u}_{[N-2]}, \mathbf{x}_{[N-1]}} \{ \ell(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + V^{opt}(\mathbf{x}_{N-1}) \}$$

Donde \mathbf{x}_{N-2} hace de parámetro. La estructura del problema de optimización es idéntica a la de (4-29) y la solución (ley de control, acción de control óptima, estado óptimo y coste óptimo de etapa) se obtiene de forma inmediata sin más que sustituir $P = \Pi_{N-1}$ según la ecuación (4-36):

$$K_{N-2} = -(B^T \Pi_{N-1} B + R)^{-1} B^T \Pi_{N-1} A \quad (4-38)$$

$$\mathbf{u}_{N-2}^{opt} = K_{N-2}(\mathbf{x}_{N-2} - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{u}_{ref} \quad (4-39)$$

$$\mathbf{x}_{N-1}^{opt} = \mathbf{x}_{N-1}^{opt}(\mathbf{x}_{N-2}) = (A + B K_{N-2}) \mathbf{x}_{N-2} \quad (4-40)$$

$$V_{N-2}^{opt} = V_{N-2}^{opt}(\mathbf{x}_{N-2}) = \mathbf{x}_{N-2}^T \Pi_{N-2} \mathbf{x}_{N-2} \quad (4-41)$$

La nueva matriz de coste tiene la misma expresión que (4-37) actualizada a la nueva etapa de optimización:

$$\Pi_{N-2} = Q + A^T \Pi_{N-1} A - A^T \Pi_{N-1} B (R + B^T \Pi_{N-1} B)^{-1} B^T \Pi_{N-1} A$$

La recurrencia de Π_{N-1} a Π_{N-2} se llama **iteración recursiva de Riccati** (*backward Riccati iteration*) y se define para el caso general como:

$$\Pi_{k-1} = \Pi[k-1] = Q + A^T \Pi_k A - A^T \Pi_k B (R + B^T \Pi_k B)^{-1} B^T \Pi_k A \quad (4-42)$$

Con $k = N, N-1, \dots, 1$ y *condición final*:

$$\Pi(N) = P \quad (4-43)$$

Resumiendo, mediante la Programación Dinámica puede obtenerse una **ley de control óptima explícita** para cada estado del sistema. La matriz K describe la ley de control como una función lineal del estado del sistema y permite calcular tanto la *acción óptima de control* como el *coste mínimo* de cada etapa:

$$K(k) := K_k = -(B^T \Pi_{k+1} B + R)^{-1} B^T \Pi_{k+1} A \quad (4-44)$$

$$\mathbf{u}_k^{opt} = \mathbf{u}_k^{opt}(\mathbf{x}_k) = K_k \mathbf{x}_k \quad (4-45)$$

$$V_k^{opt} = V_k^{opt}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T \Pi_k \mathbf{x}_k \quad (4-46)$$

Sujetos a la recursión (4-42) y (4-43). Por último, la evolución del sistema en bucle cerrado es

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_K \mathbf{x}_k = (A + BK) \mathbf{x}_k \quad (4-47)$$

4.5. Horizonte de predicción, controlabilidad y estabilidad

En la Sección anterior se ha definido una ley de control K para el LQR. Por inspección puede comprobarse que dicha ley de control depende de la iteración de Riccati y, por tanto, de la condición final (4-43). Dado un sistema descrito por las matrices $[A, B]$ y una vez elegidas las matrices de ponderación $[Q, R, P]$, el grado de libertad que resta para definir la ley de control es exclusivamente el horizonte de predicción N –en otras palabras: el número de pasos de iteración de la Recursión de Riccati–.

La ley de control $K = K(k)$ es la óptima para dicho horizonte de control escogido; i.e., producirá el coste mínimo de la función $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}^N)$ a lo largo de las N etapas si se aplica en cada una de ellas. Sin embargo, que dicha ley de control sea óptima *no garantiza que el sistema controlado sea estable* (página 20 en [6]).

El sistema será estable si la parte real de todos los autovalores de la matriz en bucle cerrado $A_K = A + BK$ definida en (4-43) es menor que la unidad. En caso contrario, $\mathbf{x}_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. Aunque la matriz K (4-44) define la ley de control óptima para las matrices (Q, R, P) y el horizonte de predicción N escogidos, no garantiza que todos los autovalores de A_K sean estables. Previamente a la definición de estabilidad, será interesante definir la **controlabilidad** de un sistema.

Un sistema se dice controlable si, para cualquier par de estados (\mathbf{x}, \mathbf{z}) del espacio de estados, se puede alcanzar el estado \mathbf{z} desde el estado \mathbf{x} en un tiempo finito. Se dice en ese caso que *\mathbf{x} es controlable hasta \mathbf{z}* . Por tanto, un sistema lineal discreto definido por (4-8) y (4-10) es controlable si existe un tiempo finito M y una secuencia de entradas \mathbf{U}^M que permite llevar el sistema desde cualquier \mathbf{x} hasta cualquier \mathbf{z} . Matemáticamente puede decirse:

$$\begin{aligned} & \text{Sistema estable si } \exists \mathbf{U}^M = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(M-1)\} \text{ tal que} \\ & \mathbf{z} = A^M \mathbf{x} + \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{M-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(M-1) \\ \mathbf{u}(M-2) \\ \dots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-48)$$

Si el sistema es controlable, entonces puede alcanzarse el estado de referencia \mathbf{z} en un número finito de pasos y a partir de ahí el coste de etapa de la función de coste será 0; i.e., el sistema ya no se desviará de su referencia. El siguiente resultado es una herramienta útil para determinar la controlabilidad de un sistema:

Lema de Hautus para la controlabilidad de un sistema ([6], página 23): Un sistema definido por las matrices $A_{n \times n}$ y $B_{n \times m}$ es controlable si, y sólo si,

$$\text{rank}[\lambda I - A \quad B] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (4-49)$$

Donde \mathbb{C} es el conjunto de los números complejos, I es la matriz unidad de dimensiones apropiadas y $\text{rank}(\cdot)$ denota el rango de la matriz (\cdot) . En una formulación más práctica, la condición (4-49) puede sustituirse por

$$\text{rank}[\lambda I - A \quad B] = n \quad \forall \lambda \in \text{eig}(A) \quad (4-50)$$

Donde $\text{eig}(\cdot)$ es el conjunto de los autovalores de (\cdot) .

Para estudiar la **estabilidad** del sistema (i.e., la posibilidad de alcanzar un régimen permanente) se plantea el problema del LQR con un horizonte de predicción infinito, cuya función de coste viene dada por:

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T Q \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T R \mathbf{u}_k \quad (4-51)$$

Donde se omite la matriz de coste terminal por tratarse de una serie infinita. El siguiente lema define la estabilidad del sistema:

Lema de Convergencia LQR (página 23 en [6]): Para (A, B) controlables, el LQR con horizonte infinito y $Q, R > 0$ produce un sistema convergente en bucle cerrado

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\kappa_\infty(\mathbf{x}_k) \quad (4-52)$$

La demostración puede consultarse en la Sección 1.3 de [6]. Se sabe por las ecuaciones (4-45) y (4-46) que la ley de control óptima y el coste óptimo están dados por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = K\mathbf{x} \quad (4-53)$$

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \Pi \mathbf{x} \quad (4-54)$$

$$K = -(B^T \Pi B + R)^{-1} B^T \Pi A \quad (4-55)$$

Donde la matriz Π está dada por la iteración de Riccati. Sin embargo, en el problema de horizonte infinito la condición final (4-43) se sustituye por [6]:

$$\Pi_{k-1} = \Pi_k = \Pi_\infty = \Pi \quad (4-56)$$

Y la iteración de Riccati se reescribe como

$$\Pi = Q + A^T \Pi A - A^T \Pi B (B^T \Pi B + R)^{-1} B^T \Pi A \quad (4-57)$$

Que recibe el nombre de **Ecuación algebraica discreta de Riccati** (*discrete algebraic Riccati equation, DARE*). En vista de que el controlador (4-51) produce un sistema estable en bucle cerrado (4-52) si (A, B) es controlable, y que la ley de control (4-53) existe y depende de (4-55) y este a su vez de (4-57), el Lema de Convergencia LQR garantiza que, si (A, B) es controlable, entonces existe una solución para la *DARE* y los autovalores de $A_K = A + BK$ son asintóticamente estables para dicha solución. Otra implicación de lo anterior es que **buscar la ley de control que satisface la *DARE* equivale a resolver el problema de control lineal cuadrático con horizonte infinito**.

4.6. MPC, LQR y motor de inducción

El Control Lineal Cuadrático expuesto en la Sección 4.2 es un problema de **control óptimo** sujeto a condiciones de linealidad, independencia del tiempo y función de coste cuadrática. La Programación Dinámica (DP), propuesta en la Sección 4.3 y aplicada en la Sección 4.4, puede ser usada para calcular explícitamente la ley de control $\kappa(\cdot)$ que define la acción de control óptima para cada estado del sistema en un problema LQ.

El MPC es una **estrategia de control** que comparte la optimalidad del LQR sin las limitaciones de linealidad, independencia del tiempo y ausencia de restricciones en entradas, estados y salidas. Las restricciones pueden consistir tanto en que las variables quedan limitadas a valores discretos (i.e. los vectores de tensión de un inversor) o están acotadas (i.e. la saturación de una válvula). A todo ello el MPC añade el concepto de horizonte deslizante (*receding horizon*) y la solución *online* del problema de optimización en cada intervalo de muestreo. Sin embargo, el concepto fundamental del LQR se traslada inalterado al MPC: se trata, en definitiva, de un problema de optimización.

La técnica DP no es más que una *técnica de optimización* y teóricamente podría usarse para resolver cualquier problema MPC. Como en el LQR, se trataría de buscar la ley de control explícita $\kappa(\cdot)$ que definiera la acción de control óptima para cada estado del sistema. No obstante, una solución DP puede resultar muy difícil de hallar, cuando no imposible, para la mayoría de los problemas de optimización –salvo en problemas muy simples o directamente problemas LQ-. Con todo, hay que hacer notar aquí que la solución del MPC es independiente de

la técnica de optimización escogida: dado un estado \mathbf{x}_k , la acción de control óptima \mathbf{u}_k encontrada mediante cualquier procedimiento (i.e. enumeración exhaustiva de entradas cuando éstas pertenecen a un conjunto discreto y finito) verifica $\mathbf{u}_k = \kappa(\mathbf{x}_k)$, aunque la función κ sea desconocida (i.e. las soluciones implícita y explícita del problema coinciden).

La ventaja de la formulación general del MPC es que la acción de control óptima puede computarse *online*, resolviendo en cada intervalo de muestreo el problema de optimización sobre un horizonte de control finito, sin necesidad de conocer la ley de control $\kappa(\cdot)$. Una vez hallada la secuencia óptima \mathbf{U}^{opt} se aplica la primera acción de control a la planta y el problema de optimización vuelve a plantearse en el siguiente intervalo de muestreo, lo que proporciona una cierta realimentación y hace el sistema más robusto frente a perturbaciones y errores del modelo. Sin embargo, el MPC de horizonte deslizante no deja de ser en su planteamiento un esquema de control en bucle abierto. Gracias a esta característica, entre otras, puede implementarse con bajo coste computacional y ha demostrado ser muy efectivo, si bien garantizar la estabilidad del sistema controlado sigue siendo un tema pendiente, como se verá más adelante.

La máquina de inducción es un ejemplo ilustrativo sobre las dificultades de implementación de la técnica DP a un problema de MPC. Como variables de estado del motor de inducción suele escogerse una pareja del conjunto $\mathbb{E} = \{\mathbf{i}_s, \mathbf{i}_r, \boldsymbol{\psi}_s, \boldsymbol{\psi}_r\}$, siendo más conveniente una elección u otra en función del esquema de control adoptado. Los problemas para encontrar una solución DP (explícita) son:

1. El sistema es dependiente del tiempo a través de la velocidad del rotor $\omega_r(t)$.
2. Las acciones de control son discretas y están limitadas a los posibles estados del inversor que alimenta a la máquina. Cuantos más niveles tenga el inversor, un mayor número de tensiones de entrada estará disponible, pero pertenecerán en todo caso a un conjunto discreto y finito.
3. Si bien la ecuación de estado (4-1) es lineal, la ecuación de salida (4-2) no lo es. Los objetivos de control más habituales son el par electromagnético (2-45) y el módulo del enlace de flujo del estator $|\boldsymbol{\psi}_s| = \Psi_s$. Ambas son funciones no lineales de las variables de estado enumeradas más arriba.
4. Por último, en la función de coste pueden –y suelen- incluirse objetivos de control no lineales, como pueden ser la frecuencia de conmutación de los interruptores del inversor, las corrientes máximas admisibles en el estator o el contenido armónico de estas corrientes. Un ejemplo de función de coste para el motor de inducción que incluye limitación de corriente puede ser:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |t_e - t_e^*|_{w_1}^2 + |\Psi_s - \Psi_s^*|_{w_2}^2 + K_{oc}(|\mathbf{i}_s| > I_{max})$$

Donde K_{oc} tomará el valor 0 si la corriente \mathbf{i}_s se mantiene por debajo del límite impuesto pero un valor muy elevado (mucho mayor que los pesos w_1 y w_2) si excede dicho valor. De esta forma, los estados con sobrecorrientes producirán un coste muy elevado y serán descartados de la solución óptima. Renunciar a los objetivos de control no lineales supone renunciar a una de las principales ventajas del MPC frente a los controladores lineales.

Estas características hacen que sea muy complejo plantear el problema de control del motor de inducción en términos LQ y prácticamente imposible buscar una solución DP (i.e., una ley de control). Esta problemática será expandida y analizada en detalle en la Sección 7.1. No obstante, puede adelantarse que la característica (2), si el número de acciones de control es reducido, permite solucionar el problema de optimización *online* mediante simple enumeración. Dado un estado \mathbf{x}_k , el número de posibles estados \mathbf{x}_{k+1} es finito y puede evaluarse la función de coste para cada uno de ellos. Lo mismo aplica a una secuencia de N estados. De entre todas las secuencias de entradas posibles a partir de un estado inicial y en un número finito de etapas, se escogerá la que produzca el menor coste. Este principio de optimización es especialmente aplicable cuando el horizonte de predicción es pequeño o incluso unitario; no obstante, el número de posibles estados crece exponencialmente con N y puede volverse rápidamente imposible de computar *online*. Éste es un problema típico de los MPC con un amplio horizonte de predicción.

5 MPC APLICADO A ACCIONAMIENTOS ELÉCTRICOS

Therefore, the main field of MPC applications can be found in process engineering, where the sample periods are rather long; papers published on MPC for drive control have a predominant theoretical character and show simulation results only.

- Arne Linder & Ralph Kennel, *Model Predictive Control for Electrical Drives*, 2005 -

LOS esquemas tradicionales de control para la máquina de inducción han sido presentados en el Capítulo 3, incluyendo fundamentalmente Control Vectorial (*Field Oriented Control*, FOC) y Control Predictivo (*Predictive Control*, PC). En el Capítulo 4 se han provisto las bases teóricas del Control Predictivo Basado en Modelos (MPC), introducido a través del Controlador Lineal Cuadrático (LQR) y de la Programación Dinámica (DP) como ejemplo de solución para el problema de optimización.

El propósito del presente capítulo es mostrar las diferentes aplicaciones que ha tenido el MPC en el control de motores eléctricos. Esta técnica de control es nueva, ya que a mediados de la década pasada aún se especulaba con su viabilidad en aplicaciones industriales [2]. No obstante, en los últimos diez años ha tenido gran desarrollo y ha sido implementado con éxito de diferentes formas, de las que quiere hacerse un repaso general.

5.1. MPC con set de control continuo

Las primeras aplicaciones MPC ([2], [9]) seguían basadas en esquemas de control vectorial. En la Fig. 5-1 se reproduce la versión de orientación indirecta del flujo rotórico del FOC (i.e. calculando la posición y la magnitud del flujo a partir de la medición de i_s y ω_r). Los esquemas MPC pertenecientes a este grupo se limitaban a sustituir el lazo interno de control de corriente del FOC por una etapa de control predictivo, tal como se detalla en la Fig. 5.2. En cambio, mantienen tanto el lazo externo de control de velocidad y flujo del FOC, así como el modulador (PWM o SVM) propio de los controladores tradicionales.

El control predictivo tiene la ventaja sobre el control vectorial de que puede optimizar la acción de control con vista a varios horizontes de predicción. Sin embargo, tal como afirma [10], el funcionamiento en régimen permanente no experimenta ningún cambio significativo cuando se sustituye el lazo de control de corriente por una etapa de control predictivo. En realidad, la dinámica sigue limitada por el control en cascada, aunque efectivamente pueda hacerse más rápido el lazo de control de corriente. Los parámetros de valoración del régimen permanente más empleados en general y en [10] en particular son las **pérdidas de conmutación**, la **distorsión de las corrientes de entrada** y el **rizado del par electromagnético**. Por otra parte, los resultados en [9] demuestran que el control predictivo produce una respuesta dinámica más rápida que el lazo de control de corriente ante pequeños cambios en la señal de referencia (*small-signal operation*). Sin embargo, esta aplicación, por su gran parentesco con el control tradicional, no explota todo el potencial del MPC.

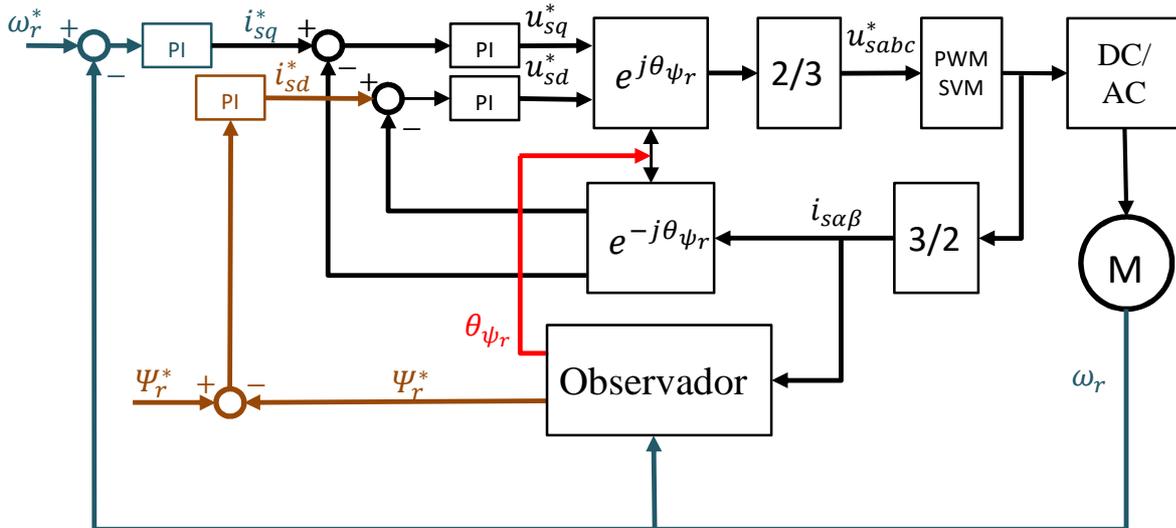


Figura 5-1: Esquema de bloques del control vectorial (FOC) con orientación indirecta del flujo rotórico (IRFO)

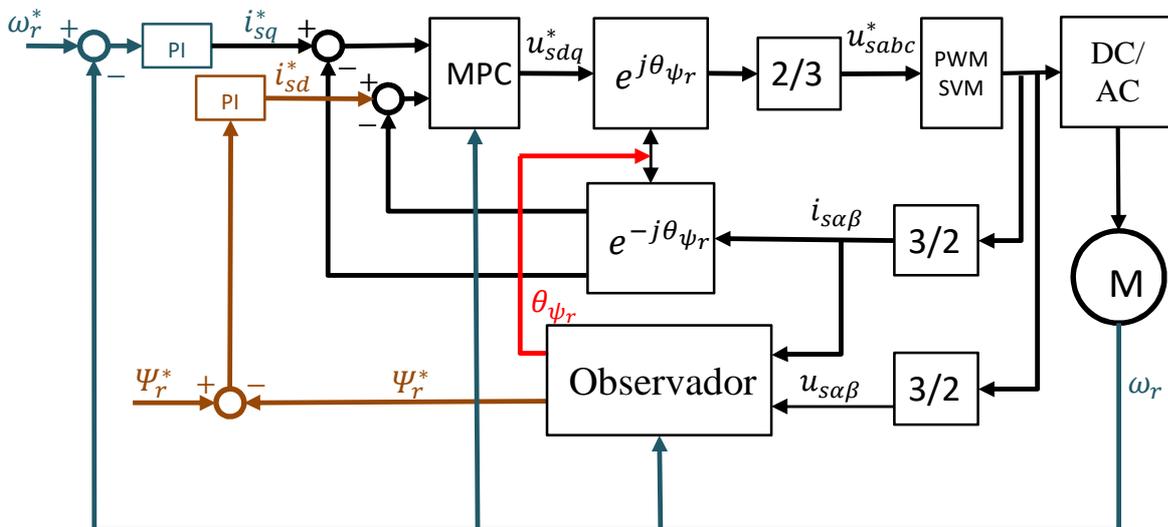


Figura 5-2: Diagrama de bloques con MPC en el lazo de control de corriente

5.2. Model Predictive Direct Current Control, MPDCC

La implementación directa del control de corriente vía MPC (*MPDCC*, por sus siglas en inglés) va un paso más allá que la idea presentada en la Sección 5.1: *tanto* el lazo de control de corriente *como* el modulador se sustituyen por una etapa de control predictivo. El diagrama de flujo está representado en la Fig 5.3.

En esta versión, el lazo exterior de control de par y flujo proporciona al MPC las referencias de corriente en el plano $\alpha\beta$. El controlador calcula el estado óptimo del inversor en sucesivas etapas de **predicción de trayectorias** y **minimización de la función de coste** y envía directamente las señales a los interruptores de potencia sin pasar por un modulador intermedio.

Esta aplicación aprovecha la flexibilidad y versatilidad del MPC para conseguir resultados superiores a los del FOC. Frente al control lineal, limitado en su criterio de control, el MPC permite incluir objetivos de control no lineales para mejorar el funcionamiento del accionamiento eléctrico, tales como pueden ser las pérdidas de conmutación del inversor. Esta aproximación ha sido propuesta en [10]. En el mismo artículo se demuestra que

$$\begin{pmatrix} t_e \\ \psi_s \end{pmatrix} = g(x)$$

Donde x es el vector de estado compuesto por un par cualquiera del conjunto $\mathbb{E} = \{i_s, i_r, \psi_s, \psi_r\}$. La aplicación MPDTC también se ha aplicado exitosamente con horizontes de predicción unitarios [12]. No obstante, como también advierte [10], las prestaciones del accionamiento eléctrico disminuyen notablemente si se reduce el horizonte de predicción.

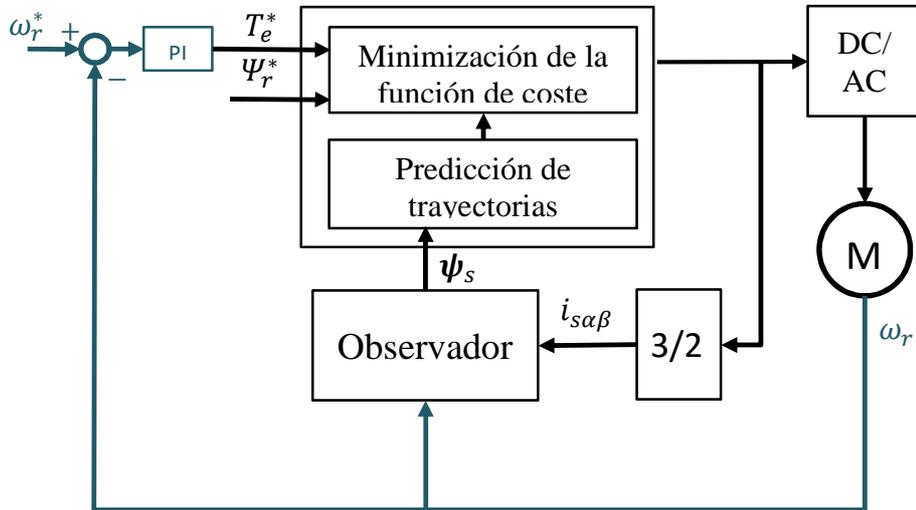


Figura 5-4: Model Predictive Direct Torque Control

6 MPC CON COMPORTAMIENTO ESTABLE ACOTADO

EL controlador MPC ya ha sido utilizado con éxito en el control de convertidores de potencia en general y de accionamientos eléctricos en particular. No obstante, como se ha mencionado anteriormente, se trata de una técnica de control muy reciente y aún hay problemas prácticos y teóricos que no han sido resueltos o ni siquiera han sido tratados. Entre los primeros puede citarse el problema del coste computacional para largos horizontes de predicción. En cuanto a los segundos, temas como el diseño de la función de coste y la estabilidad del sistema controlado no han sido estudiados en profundidad.

En la Sección 4.5 se presentaron condiciones de estabilidad para el LQR, pero limitadas a condiciones muy concretas. Una de ellas, de especial relevancia, es que sólo se garantiza la estabilidad del sistema para un horizonte de control infinito. En el control de motores eléctricos, por la propia naturaleza del problema y las limitaciones técnicas de computación, un horizonte de predicción de esa clase es implanteable. Más aún: como se explicó en la Sección 4.6, la fuerza del MPC radica en que permite realizar la labor de control solucionando online el problema de optimización en cada intervalo de muestreo; esto es, sin necesidad de encontrar una ley de control explícita $\kappa(\cdot)$. No obstante, la ausencia de dicha ley de control supone una dificultad adicional para evaluar la estabilidad del sistema.

El trabajo [8], recientemente publicado, propone una de las primeras aproximaciones al problema del diseño de la función de coste y de la estabilidad en MPC para aplicaciones de electrónica de potencia. El concepto fundamental es representar los convertidores de potencia como sistemas lineales con entradas discretas y una función de coste cuadrática como la del LQR. Bajo estas condiciones y haciendo uso de la **Teoría de Estabilidad de Lyapunov** se propone un diseño de la función de coste que garantiza que el estado final del sistema queda confinado a un entorno finito del valor de referencia.

6.1. FCS-MPC cuadrático con horizonte de predicción unitario

El modelo genérico del sistema es lineal, discreto e invariante en el tiempo. Se repite aquí por conveniencia la descripción del sistema en espacio de estados:

$$\mathbf{x}[k + 1] = A_{n \times n} \mathbf{x}[k] + B_{n \times m} \mathbf{u}[k] \quad (6-1)$$

Con $\mathbf{x} \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$. Mediante esta descripción se restringe \mathbf{u} a un suconjunto finito de \mathbb{R}^m , dado por:

$$\mathbf{u}[k] \in \mathbb{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\} \quad (6-2)$$

Que son los vectores de tensión que puede producir el inversor. Se definen además el estado de referencia del sistema, representado por $\mathbf{x}_{ref} \in \mathbb{R}^n$, y la entrada de referencia, que verifica:

$$\mathbf{x}_{ref} = (I - A)^{-1} B \mathbf{u}_{ref} \quad (6-3)$$

Donde I representa la matriz unidad de las dimensiones apropiadas. Conviene hacer notar en este punto que si bien la ecuación (6-3) es lineal y continua, las entradas del sistema son discretas (6-2), de modo que de forma general puede afirmarse que $\mathbf{u}_{ref} \notin \mathbb{U}$.

Se define además una función de coste cuadrática idéntica a la que se propuso en el LQR (4-20) pero particularizada a un horizonte de predicción unitario:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}|_Q^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}|_R^2 + |\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{ref}|_P^2 \quad (6-4)$$

Donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$ y se cumple $Q, R \succcurlyeq 0$ y $P \succ 0$. Hay que notar que, dado que el estado actual del sistema es un parámetro del problema de optimización, el término $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}|_Q^2$ es una constante y contribuye por igual al coste de todas las acciones de control elegidas. Se mantiene aquí sin embargo por interés teórico, como se verá más adelante. Asimismo conviene destacar que restringiendo la función de coste a esta formulación se pierde gran parte de la flexibilidad del MPC, pues sólo pueden controlarse variables de estado y no una salida cualquiera del sistema, como pueden ser el par electromagnético y la magnitud del flujo en una máquina de inducción.

El problema, así planteado, coincide con el LQR salvo por la restricción de las entradas al conjunto discreto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$. La solución libre $\mathbf{u}_{uc}^{opt}[k]$ (*uc* por las iniciales en inglés de *unconstrained*) se calcula como en (4-34):

$$\mathbf{u}_{uc}^{opt}[k] = K(\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{u}_{ref} \quad (6-5)$$

Donde

$$K = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \quad W = B^T P B + R \quad (6-6)$$

Aquí, a diferencia del LQR con horizonte de predicción $N > 1$, no ha lugar a la iteración de Riccati. La ley de control K se calcula sin necesidad de un proceso de iteración. La solución obtenida (6-5) podría aplicarse mediante un modulador como se explicó en la Sección 5.1 con los inconvenientes ya señalados. Sin embargo, la imprecisión introducida por el modulador hace difícil evaluar la estabilidad del sistema.

En [8] se opta por una aproximación diferente: buscar la *mejor* acción de control restringida al set de control \mathbb{U} . La solución óptima en el FCS-MPC *no* es necesariamente la *cuantización* de la solución libre (i.e. el vector $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ cuya diferencia con $\mathbf{u}_{uc}^{opt} \in \mathbb{R}^m$ es mínima) [8]. Antes al contrario, para obtener el óptimo *restringido* (*constrained*, en inglés) la cuantización debe hacerse sobre una transformación lineal del set de control, gobernada por la matriz W . Así queda definida la solución óptima como:

$$\mathbf{u}^{opt}[k] = W^{-1/2} q_{\mathbb{V}}(W^{1/2} \mathbf{u}_{uc}^{opt}[k]) \quad (6-7)$$

$$\mathbb{V} = W^{1/2} \mathbb{U} \quad (6-8)$$

Donde $q_{\mathbb{K}}(\cdot)$ es el operador *cuantización en el espacio genérico* \mathbb{K} . La *operación de cuantización* y el *error de cuantización* se definen sobre un subespacio vectorial genérico $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$ como

$$q_{\mathbb{K}}(\mathbf{u}_{uc}) = \arg \min_{\mathbf{u}_i \in \mathbb{K}} \|\mathbf{u}_{uc} - \mathbf{u}_i\| \quad (6-9)$$

$$\eta_{\mathbb{K}} = \mathbf{u}_{uc} - q_{\mathbb{K}}(\mathbf{u}_{uc}) \quad (6-10)$$

Donde $q_{\mathbb{K}}(\cdot) \subset \mathbb{K} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u}_{uc} \in \mathbb{R}^m$. Particularizando a los espacios \mathbb{U} y \mathbb{V} , la solución óptima restringida puede reescribirse teniendo en cuenta las ecuaciones (6-7), (6-9) y (6-10):

$$\mathbf{u}^{opt}[k] = \mathbf{u}_{uc}^{opt}[k] + W^{-1/2} \eta_{\mathbb{V}}(\mathbf{x}[k]) \quad (6-11)$$

Sustituyendo (6-5) y (6-11) en (6-1) se obtiene el lazo de control en bucle cerrado:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B(K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{u}_{ref} + W^{-1/2}\eta_V(\mathbf{x})); \\ \mathbf{x}_{k+1} &= (A + BK)\mathbf{x} - BK\mathbf{x}_{ref} + B\mathbf{u}_{ref} + BW^{-1/2}\eta_V(\mathbf{x}); \\ \mathbf{x}_{k+1} &= (A + BK)\mathbf{x} - BK\mathbf{x}_{ref} - A\mathbf{x}_{ref} + \mathbf{x}_{ref} + BW^{-1/2}\eta_V(\mathbf{x}); \\ \mathbf{x}_{k+1} &= A_K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{x}_{ref} + BW^{-1/2}\eta_V(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{6-12}$$

Donde se ha utilizado (6-3) para desarrollar $B\mathbf{u}_{ref}$ y se ha mantenido $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}$. Además se ha definido la matriz en bucle cerrado

$$A_K := A + BK\tag{6-13}$$

6.2. Estabilidad del Sistema: Función de Lyapunov

La **convergencia LQR** presentada en la Sección 4.5 no es suficiente para asegurar la estabilidad del sistema controlado. El MPC es un problema más amplio y particularmente suele estar restringido a un set de entradas discreto. Tal es el caso de los convertidores de potencia. Por ello es necesario extender el concepto de estabilidad: se seguirá aquí la aproximación realizada en los capítulos 2.4 y 2.5 de [6], también particularizada para el caso de los convertidores de potencia en [8] y más propiamente en el apéndice de ésta última. En lo sucesivo se supondrá un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo descrito en espacio de estados por la ecuación siguiente:

$$\mathbf{x}[k + 1] = A\mathbf{x}[k] + B\mathbf{u}[k]\tag{6-14}$$

Con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, $A_{n \times n}$ y $B_{n \times m}$. Es decir, el set de control \mathbb{U} es discreto y finito.

6.1.1 Límite al error de cuantización

Establecer la estabilidad del sistema requiere en primer lugar que se determine un límite para el error de cuantización en (6-12). Se define así el *set nominal de entradas* como:

$$\bar{\mathbb{U}} \triangleq \{\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m: |\bar{\mathbf{u}}| \leq \bar{\mathbf{u}}_{max}\}\tag{6-15}$$

Donde $\bar{\mathbf{u}}_{max} \in (0, \infty)$ es un parámetro de diseño. Si la entrada óptima al sistema (6-5) se restringe al set nominal de entradas, entonces el error de cuantización también está limitado como:

$$|\eta_U| \leq \Delta_q \triangleq \max_{\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathbb{U}}} |q_U(\bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mathbf{u}}| \leq \infty\tag{6-16}$$

Y esto es la motivación para definir una *región terminal* como:

$$\mathbb{X}_f \triangleq \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}| \leq b = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{max} - |\mathbf{u}_{ref}|}{|K|} \right\}\tag{6-17}$$

Donde debe notarse que la región terminal depende del parámetro de diseño $\bar{\mathbf{u}}_{max}$.

Todo estado \mathbf{x} de la región terminal produce una entrada óptima libre (6-5) que pertenece al set nominal de entradas $\bar{\mathbb{U}}$:

$$\mathbf{u}_{uc}^{opt} = \kappa(\mathbf{x}) \in \bar{\mathbb{U}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}_f \quad (6-18)$$

Como consecuencia de (6-16), el error de cuantización estará acotado para todos los estados comprendidos en la región terminal:

$$|\eta_{\mathbb{U}}(\mathbf{u}_{uc}^{opt})| \leq \Delta_q \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}_f \quad (6-19)$$

6.1.2 Funcionamiento estable acotado

Seguidamente se usarán los teoremas de estabilidad de Lyapunov (Capítulo 2.4 en [6]) para establecer el funcionamiento estable acotado del sistema. Se dice que una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una **función práctica de Lyapunov** en una región $A \subseteq \mathbb{R}^n$ para el sistema (6-14) si existe un set compacto $\Omega \subseteq A$ y constantes positivas a_1, a_2, a_3, d, σ y $l > 1$ que verifican:

$$V(\mathbf{x}) \geq a_1 |\mathbf{x}|^l \quad \forall \mathbf{x} \in A \quad (6-20)$$

$$V(\mathbf{x}) \leq a_2 |\mathbf{x}|^l + d \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (6-21)$$

$$V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \leq -a_3 |\mathbf{x}|^l + \sigma \quad (6-22)$$

Se habla aquí de estabilidad *práctica* porque sólo se garantiza la estabilidad a un entorno de la referencia, y no a su valor exacto. El teorema que garantiza la estabilidad es:

Teorema 1: Si el sistema (6-14) admite una función práctica de Lyapunov en la región A , entonces es asintóticamente estable en A .

El teorema anterior implica que encontrar una función de Lyapunov para el sistema controlado es condición suficiente para asegurar la existencia de un controlador $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})$ (i.e., comprende la condición de **controlabilidad LQR** dada por (4-48)).

Es habitual ensayar la función de coste cuadrática del LQR como función de Lyapunov [6]. En particular, en [8] se demuestra que la función de coste

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}|_Q^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}|_R^2 + |\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{ref}|_P^2 \quad (6-23)$$

Es una función de Lyapunov para $a_1 = \lambda_{min}(P)$, $a_2 = \lambda_{max}(P)$, $a_3 = \lambda_{min}(Q)$, $d = 0$, $\sigma = |W|\Delta_q^2$ y $l = 2$ si se verifica la condición:

$$\Delta_q^2 \leq \frac{b^2}{|W|} (a_1 - a_2 + a_3) \quad (6-24)$$

Y además la matriz P ha sido elegida como solución de la Ecuación algebraica discreta de Riccati presentada en (4-57) y recuperada aquí por conveniencia:

$$P = Q + A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (6-25)$$

En la ecuación (6-24), b ha sido definido como en (6-17) y las funciones $\lambda_{min}(\cdot)$ y $\lambda_{max}(\cdot)$ representan el menor y el mayor autovalor de la matriz (\cdot) . Si se verifican las condiciones (6-24) y (6-25), entonces puede definirse un *entorno de estabilidad* dado por

$$D_\delta \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}| \leq \delta\} \quad (6-26)$$

$$\delta^2 = \frac{a_4 a_2}{a_1 a_3} \Delta_q \quad (6-27)$$

Y asegurarse la siguiente condición de *estabilidad práctica*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ref}| \leq \delta \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}_{MPC} \quad (6-28)$$

Donde la *región de atracción* \mathbb{X}_{MPC} se define como la intersección de la región terminal \mathbb{X}_f y una cierta función $g(\mathbf{x})$:

$$\mathbb{X}_{MPC} = \mathbb{X}_f \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) < 0\} \quad (6-29)$$

Sujeto a:

$$g(\mathbf{x}) = -a_3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}|^2 + \sigma \Delta_q \quad (6-30)$$

La demostración puede consultarse en el apéndice de [8]. La región \mathbb{X}_{MPC} es de interés porque permite expandir la región terminal \mathbb{X}_f en tanto se mantenga la restricción impuesta por las ecuaciones (6-28) y (6-29).

En resumen: si el error de cuantización está limitado por (6-15) y (6-16), si se diseña la matriz de ponderación P de acuerdo a (6-25) y además se verifica la condición (6-24), entonces cualquier estado inicial \mathbf{x}_0 perteneciente a la *región de atracción* \mathbb{X}_{MPC} (6-29) será controlado a la *región terminal* \mathbb{X}_f (6-17). En \mathbb{X}_f el error de cuantización está efectivamente acotado y entonces el sistema será controlado al *entorno de estabilidad práctica* D_δ (6-26), donde permanecerá confinado.

7 RESULTADOS DE SIMULACIÓN SOBRE UN MOTOR DE INDUCCIÓN

(...) Because of the time-varying nature of the problem, it is impossible to obtain a controller by solving an infinite horizon optimal control problem. It is possible, however, to determine for each \mathbf{x}_k and each $k \in \mathbb{N}$, the MPC action $\kappa_N(\mathbf{x}_k)$. Hence, MPC makes it possible to solve an otherwise intractable problem.

J. Rawlings and D. Mayne, *Model Predictive Control: Theory and Design*, Capítulo 2.5.1.2

EL estudio teórico de [8] ha sido probado con éxito en dos aplicaciones diferentes: un convertidor Buck DC-DC que debe alimentar con tensión constante una carga resistiva y un inversor de dos niveles que debe producir una señal sinusoidal para alimentar una carga RL. En ambas se definieron la región de atracción X_{MPC} , la región terminal X_f y la región de estabilidad práctica D_δ , se diseñó la función de coste de acuerdo a (6-25) y se confirmó el objetivo de confinar el sistema a un entorno del valor de referencia.

La aplicación del MPC con garantía de funcionamiento a un motor de inducción plantea nuevos interrogantes. En el presente Capítulo se explican las dificultades encontradas para adaptar la solución propuesta en [8] a la máquina de inducción, se deriva el modelo en espacio de estados en dicha máquina, se explica el esquema de control propuesto, se presentan los resultados obtenidos en simulación y se hace una valoración de los mismos.

7.1. Controlador del motor de inducción como LQR

En esta Sección se recupera de forma ordenada y comprensiva (ya fue adelantado en la Sección 4.6) el problema de formular el controlador de la máquina de inducción como un LQR, requisito necesario para aplicar el MPC con comportamiento estable acotado (MPC-GP, *Model Predictive Control with Guaranteed Performance*) como ha sido propuesto en [8]. Conviene recordar aquí que el LQR está sujeto a la condición de un sistema lineal e invariante con el tiempo así como a una función de coste cuadrática. Matemáticamente decimos que un sistema general

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \quad (7-1)$$

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, k) \quad (7-2)$$

$$V = V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}^N) \quad \text{sujeto a (7-1)} \quad (7-3)$$

Puede ser controlado por un LQR si verifica:

$$\text{Linealidad: } f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k \quad (7-4)$$

$$\text{Independencia del tiempo: } A_k = A, B_k = B \quad \forall k \quad (7-5)$$

$$\text{Coste cuadrático: } V(\mathbf{x}_0, \mathbf{U}^N) = \sum_{k=0}^N (|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ref}|_Q^2 + |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}|_R^2) + |\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{ref}|_P^2 \quad (7-6)$$

Sobre el motor de inducción caben las siguientes consideraciones:

1. Linealidad:

Las ecuaciones del modelo de la máquina (2-41) a (2-44) son lineales en el set $\mathbb{E} = \{\mathbf{i}_s, \mathbf{i}_r, \boldsymbol{\psi}_s, \boldsymbol{\psi}_r\}$. Esto quiere decir que el motor de inducción admite una representación como espacio de estados si el espacio de estados comprende cualquier pareja del set anterior. No obstante, el modelo es no lineal en ω_r (velocidad del rotor), que aparece multiplicando a las variables de \mathbb{E} en las ecuaciones (2-41) a (2-44). Tampoco es lineal en el par electromagnético dado por (2-45), que depende del producto cruzado de las componentes de cualquier pareja del set \mathbb{E} . Por último, tampoco es lineal en otras variables de posible interés como la magnitud del flujo estátorico, que es una función no lineal del fasor espacial del flujo, i.e. $\Psi_s = \|\boldsymbol{\psi}_s\| = \text{sqrt}(\boldsymbol{\psi}_{sd}^2 + \boldsymbol{\psi}_{sq}^2)$.

Esto quiere decir que podrá elegirse cualquier par de variables de \mathbb{E} para representar el estado del sistema, pero no podrá sustituirse alguna de ellas por ω_m , t_e o Ψ_s manteniendo la linealidad. Como se explicará más adelante, esto tendrá consecuencias a la hora de definir la función de coste.

2. Independencia del tiempo:

Elegir el espacio de estados para representar la máquina de inducción de entre las variables de \mathbb{E} aporta la garantía de que el sistema resultante es lineal. Por otra parte, la velocidad de la máquina ω_r podrá ser considerada constante dentro del horizonte de predicción e incorporada al modelo como un parámetro. Sin embargo, esto no obvia la dependencia temporal del sistema.

La teoría de estabilidad de Lyapunov expuesta sumariamente en la Sección 6.2 ha sido desarrollada para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Es muy difícil encontrar una función de coste dependiente del tiempo que sea función práctica de Lyapunov, pero caben diferentes aproximaciones a este problema.

El concepto más simple es suponer el sistema *invariante* en el tiempo; i.e. $\omega_r(t) = cte \forall t > 0$. Ello exige que el motor funcione desde el instante inicial en el entorno del régimen permanente definido por la velocidad de funcionamiento. Para aplicar esta idea, el motor es llevado al régimen permanente empleando un MPC tradicional y entonces se cambia de esquema de control al MPC con comportamiento estable acotado descrito en el Capítulo 6.

Una aproximación más avanzada pasa por asumir la naturaleza variante de $\omega_r(t)$ y reformular el problema de control en cada intervalo de muestreo; i.e., recalculando las matrices que describen el sistema y la ley de control. Esta solución es computacionalmente mucho más exigente, puesto que la solución al problema de optimización debe calcularse *online*.

Por último, por lo que se explica en el apartado inmediatamente posterior a éste, será necesario expresar las ecuaciones de la máquina de inducción en un sistema de referencia síncrono. Esto implica que se incorpora el término $\omega_g(t)$ en las ecuaciones (velocidad de giro de los ejes síncronos). Ajustar esta velocidad angular es tanto como controlar la frecuencia de las corrientes de alimentación al sistema, que como ya se sabe no es proporcional a la velocidad de giro del motor (de ahí el nombre de máquina *asíncrona*). Más adelante se explicará la influencia de este parámetro en el funcionamiento del motor y se propone un lazo de control PI para decidir el valor óptimo de $\omega_g(t)$, lo que quiere decir que éste será un parámetro más dependiente del tiempo.

3. Función de coste cuadrática:

La forma de la función de coste dada por (7-6) es probablemente el mayor inconveniente para la formulación del control de la máquina de inducción como LQR.

En primer lugar, la función de coste cuadrática así planteada sólo penaliza los estados y las entradas del sistema. Las salidas no tienen consideración. Por tanto, los objetivos de control deben ser tratados como variables de estado. Sin embargo, las consideraciones hechas más arriba bajo el epígrafe de **Linealidad** revelan que este puede ser un problema importante, dado que sólo las variables del set \mathbb{E} pueden ser incluidas como variables de estado preservando la linealidad del sistema. Esto abre dos alternativas: bien se linealiza la función de salida en torno al punto de funcionamiento y se incluyen el par electromagnético y el flujo como variables de estado (lo que nuevamente reduce el funcionamiento del controlador al entorno del punto de trabajo), bien se plantea el MPC como un problema de control de corriente (o, alternativamente, de flujo, pues entre dichas variables rige una transformación lineal). Las simulaciones realizadas adoptan este último concepto.

En segundo lugar, la función de coste exige que se definan \mathbf{x}_{ref} y \mathbf{u}_{ref} como objetivos de control, relacionadas por

$$\mathbf{x}_{ref} = (I - A)^{-1}B\mathbf{u}_{ref} = T\mathbf{u}_{ref} \quad (7-7)$$

Esto resulta trivial si se toman el par electromagnético y la magnitud del flujo del estator como variables controladas, pues dicha referencia puede asumirse como constante en relación a la velocidad del cambio de las magnitudes eléctricas. Sin embargo, las objeciones planteadas anteriormente desaconsejan la elección de par y flujo como variables controladas. Dada la naturaleza alternante de las corrientes y los enlaces de flujo en el motor de inducción, sólo es posible establecer una referencia $\mathbf{x}_{ref} = cte$ si se describe el sistema en unos ejes síncronos solidarios con alguna de las variables de estado. Esto es: no cabe elegir el marco estático como sistema de referencia.

Por último, la definición de un estado de referencia \mathbf{x}_{ref} no garantiza la existencia de una entrada de referencia \mathbf{u}_{ref} que satisfaga (7-7). Es condición necesaria para que exista \mathbf{u}_{ref} que el sistema (7-7) sea compatible. En el caso del motor de inducción se tiene que el vector de estados tiene cuatro variables (i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{4 \times 1}$) y el vector de entrada sólo dos (i.e. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{2 \times 1}$). Resultan así del sistema (7-7) cuatro ecuaciones para dos incógnitas, con los coeficientes recogidos en la matriz $T_{4 \times 2} = ((I - A)^{-1}B)_{4 \times 2}$. Si todas las filas de la matriz T son linealmente independientes, entonces el sistema es incompatible y no puede definirse un vector \mathbf{u}_{ref} . En función de la pareja elegida como variables de estado puede conseguirse que dos filas de la matriz D se anulen, permitiendo resolver el sistema. Esta idea pretende llamar la atención sobre la importancia de la elección de las variables de estado de entre el set \mathbb{E} .

7.2. Modelo de la máquina de inducción en espacio de estados

En base a las consideraciones anteriores se resuelve construir un modelo en espacio de estados del motor de inducción, dependiente del tiempo y con dos variables del conjunto $\mathbb{E} = \{\mathbf{i}_s, \mathbf{i}_r, \boldsymbol{\psi}_s, \boldsymbol{\psi}_r\}$ como variables de estado para garantizar la linealidad del sistema. Las ecuaciones de partida (2-41 a 2-44) se repiten aquí por conveniencia:

$$\mathbf{u}_{sg} = R_s \mathbf{i}_{sg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{sg}}{dt} + j\omega_g \boldsymbol{\psi}_{sg} \quad (7-8)$$

$$\mathbf{u}_{rg} = R_r \mathbf{i}_{rg} + \frac{d\boldsymbol{\psi}_{rg}}{dt} - j(\omega_r - \omega_g) \boldsymbol{\psi}_{rg} \quad (7-9)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{sg} = L_s \mathbf{i}_{sg} + L_m \mathbf{i}_{rg} \quad (7-10)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{rg} = L_m \mathbf{i}_{sg} + L_r \mathbf{i}_{rg} \quad (7-11)$$

Operando con las ecuaciones y despejando las derivadas temporales de $\boldsymbol{\psi}_s$ y $\boldsymbol{\psi}_r$ resulta el modelo en espacio de estados descrito por las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_s}{dt} = \left(\frac{R_s}{\sigma L_m} - \frac{1}{\tau_s} - j\omega_g \right) \boldsymbol{\psi}_s - \frac{L_m R_s}{\sigma L_r L_s} \boldsymbol{\psi}_r + \boldsymbol{v}_s \quad (7-12)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_r}{dt} = -\frac{L_s}{L_m \sigma \tau_r} \boldsymbol{\psi}_s + \frac{\omega_g - \omega_m}{\sigma \tau_r} \boldsymbol{\psi}_r \quad (7-13)$$

Donde ω_g es la velocidad de los ejes síncronos dq , j es el operador complejo $\sqrt{-1}$ y se definen las constantes:

$$\tau_s = \frac{L_s}{R_s}, \quad \tau_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad \sigma = \frac{L_m^2}{L_s L_r} - 1 \quad (7-14)$$

Hay que notar que dichas constantes no coinciden en ningún caso con las expuestas en el Capítulo 2 y son estrictamente propias de esta monografía. Las ecuaciones (7-12) y (7-13) integran el modelo del sistema en espacio de estados descrito por:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \quad (7-15)$$

Donde se definen:

$$\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{\psi}_s \quad \boldsymbol{\psi}_r)^T = (\psi_{sd} \quad \psi_{sq} \quad \psi_{rd} \quad \psi_{rq})^T \quad (7-16)$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}_s^T = (v_{sd} \quad v_{sq})^T \quad (7-17)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_s}{\sigma L_m} - \frac{1}{\tau_s} & \omega_g(t) & -\frac{L_s}{L_m \sigma \tau_r} & 0 \\ -\omega_g(t) & \frac{R_s}{\sigma L_m} - \frac{1}{\tau_s} & 0 & -\frac{L_s}{L_m \sigma \tau_r} \\ -\frac{L_s}{L_m \sigma \tau_r} & 0 & \frac{1}{\sigma \tau_r} & \omega_g(t) - \omega_r(t) \\ 0 & -\frac{L_s}{L_m \sigma \tau_r} & -(\omega_g(t) - \omega_r(t)) & \frac{1}{\sigma \tau_r} \end{pmatrix} \quad (7-18)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7-19)$$

Las expresiones (7-15) a (7-19) describen el sistema en forma continua. Para la aplicación del MPC es preciso obtener un modelo discreto, para lo cual existen las diversas alternativas comentadas en la Sección 4.1 sobre modelado de sistemas. La discretización exacta según las ecuaciones (4-11) y (4-12) es irrealizable en la práctica al ser $\omega_r(t)$ una función desconocida del tiempo. La discretización exacta que asume el modelo invariante en el tiempo (i.e. $\omega_r = cte$ durante el tiempo de muestreo T_s) dada por (4-14) y (4-15) ofrece mejores resultados que la discretización de Euler, como demuestra el resultado de [6] y [7]. Sin embargo, para el objetivo de esta monografía se ha considerado suficiente el grado de exactitud proporcionado por la discretización de Euler (la cual, cabe recordar, no es más que la linealización de las ecuaciones 4-14 y 4-15). Se repite aquí por conveniencia la discretización de Euler:

$$\boldsymbol{x}[k+1] = A_d[k]\boldsymbol{x}[k] + B_d\boldsymbol{u}[k] \quad (7-20)$$

Donde

$$A_d[k] = A(t)T_s + I \quad (7-21)$$

$$B_d = BT_s \quad (7-22)$$

Donde T_s es el tiempo de muestreo e I es la matriz identidad de las dimensiones apropiadas (aquí $I_{4 \times 4}$). De aquí en adelante se omitirá el subíndice d para denotar las matrices del sistema discreto: todas las matrices del resto del Capítulo, salvo que se indique lo contrario, se referirán al sistema discretizado (7-20).

El modelo queda completo con la ecuación que expresa el par electromagnético como resultado del producto vectorial de los flujos del estator y el rotor.

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{L_m}{L_m^2 - L_r L_s} p \cdot \psi_s \times \psi_r \quad (7-23)$$

7.3. Condiciones y propósito de la simulación

El objetivo de la simulación es **probar la viabilidad del sistema de control propuesto en [8] en un motor de inducción**. Para ello se realizan diversas simulaciones con diferentes condiciones de funcionamiento y se ha valorado el resultado. No sólo la estabilidad, sino también la distorsión armónica de las corrientes de fase del inversor y el rizado del par electromagnético son estudiados como criterios de valoración.

Por el contrario, **no** son objetivo de esta monografía estudiar la **robustez** del algoritmo ni el **coste computacional** del mismo. Dichos objetivos tienen un carácter eminentemente práctico y tienen más sentido en ensayos de laboratorio que en simulaciones por ordenador.

En cuanto a la robustez, en este trabajo se ha supuesto que el modelo de la máquina es perfecto, de modo que las predicciones también lo son salvo la imprecisión inherente a la discretización por Euler. Por tanto se obvia el problema de determinación del estado propio de todo controlador MPC: el estado es conocido con absoluta precisión en todo momento. Tampoco se incorpora cualquier clase de filtro de Kalman que permita corregir el estado y las predicciones en función de medidas reales de la máquina. Se elimina por tanto el *feedback* que suele caracterizar a estos sistemas de control en bucle abierto, que no es necesario al utilizar un modelo perfecto de la máquina.

En cuanto al coste computacional, es un tema que directamente no ha sido tenido en cuenta. Los algoritmos se han implementado en toda su complejidad sin recurrir a ninguna técnica de optimización. Los ensayos en simulación permiten esta licencia, si bien no hay que perder de vista que sería un tema de gran importancia de cara a implementar el algoritmo en un sistema real.

En consideración de las dificultades expuestas en la Sección 7.1 se han realizado las simulaciones en diferentes escenarios. De esta manera se ha intentado estudiar el MPC con garantía de funcionamiento bajo diferentes condiciones, que lo aproximan más o menos al modelo propuesto en [8].

En primer lugar se presenta el control del motor de inducción mediante un MPDTC (*Model Predictive Direct Torque Control*, expuesto en la Sección 5.2) tradicional como el propuesto en [12]. Este controlador funciona en el arranque y lleva el motor exitosamente al régimen permanente. Se utilizará como modelo de referencia para evaluar el resto de simulaciones.

Posteriormente se estudia la viabilidad de aplicación del algoritmo MPC-GP [8] al motor de inducción y se exponen resultados bajo unas condiciones muy concretas: se supone que la variación en las velocidades angulares (ω_r , ω_g) es despreciable y que la matriz de estado del sistema es invariante en el tiempo; i.e. $A = cte$.

7.4. Datos de la simulación

Las simulaciones se han desarrollado en el entorno de simulación **Simulink**, perteneciente al programa de cálculo matemático **Matlab**. Los elementos principales del modelo son el **modelo de la máquina asíncrona**, el **inversor de dos niveles**, el bloque **S-Function** que implementa el control automático, el lazo externo de control de velocidad y el bloque **Powergui** necesario para el funcionamiento del inversor trifásico.

La simulación se realiza en **tiempo discreto** con paso fijo de integración T_{int} . El controlador funciona a una frecuencia de muestreo constante $T_s < T_{int}$ y controlador de velocidad a una frecuencia notablemente menor $T_{PI} \ll T_s$. Además intervienen en la simulación otros tiempos, todos ellos recogidos en la Tabla 7-1:

Parámetro	Significado	Valor/[s]
T_{int}	Tiempo de integración	$5 \cdot 10^{-6}$
T_s	Tiempo de muestreo del MPC	$5 \cdot 10^{-5}$
T_{PI}	Tiempo de muestreo del lazo de control de velocidad	10^{-3}
T_{SIM}	Tiempo total de simulación	3
t_{torque}	Retraso en la conexión de la carga al motor	0.6
$t_{delay(\omega)}$	Retraso en la introducción del lazo de control de velocidad (antes sólo se controla el flujo)	0.2
t_0	Retraso para el cambio de esquema de control (ver Sección 7.7 más adelante)	1.5

Tabla 7-1: Parámetros de la simulación

La máquina asíncrona es de rotor en jaula de ardilla y sus parámetros y valores nominales se presentan en la Tabla 7-2. Se ha utilizado la máquina empleada en la investigación [12] a fin de facilitar la comparación de resultados con un esquema MPC tradicional. Todos los valores se definen de acuerdo a como fueron presentados en el Capítulo 2:

Parámetro	Significado	Valor
p	Número de pares de polos	2
J	Momento de inercia	$0.035 [kg \cdot m^2]$
F	Factor de fricción	$0 [N \cdot m \cdot s]$
L_m	Inductancia magnetizante	$0.154 [H]$
L_s	Inductancia del estator	$0.161 [H]$
L_r	Inductancia del rotor	$0.165 [H]$
R_s	Resistencia del rotor	$0.97 [\Omega]$
R_r	Resistencia del rotor	$1.83 [\Omega]$

V_N	Tensión nominal	380 [V]
f_N	Frecuencia nominal	50 [Hz]
ω_N	Velocidad nominal	1440 [rpm]
T_N	Par nominal	26.53 [N.m]

Tabla 7-2: Parámetros del motor de inducción

Por otra parte, el punto de funcionamiento queda definido por los siguientes valores de referencia. Se incluye en la misma tabla la sintonía del controlador PI del lazo de control de velocidad:

Parámetro	Significado	Valor
Ψ_{sN}	Referencia para la magnitud del flujo del estator	1.1 [V.s]
$T_{LOAD} = T_N$	Carga mecánica	26.53 [N.m]
$\omega^* = 0.83\omega_N$	Velocidad de referencia	1195.2 [rpm]
P_{PI}	Ganancia del PI	10
$I_{PI} = \frac{1}{T_{I,PI}}$	Ganancia del término integral del PI	5
PI_{max}	Saturación superior del PI	30
PI_{min}	Saturación inferior del PI	-30

Tabla 7-3: Punto de funcionamiento de la máquina y sintonía del PI

Como convertidor de potencia se ha usado un inversor de dos niveles tal como el que se muestra en la Fig. 7-1. El inversor consta de seis interruptores, cada uno de ellos formado por un IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*) y un diodo en antiparalelo. Los IGBT son ideales en cuanto a retrasos de conmutación y tienen las propiedades que se indican en la Tabla 7-4. La fuente de tensión también se considera ideal; i.e., el rizado de la tensión del bus de continua es nulo.

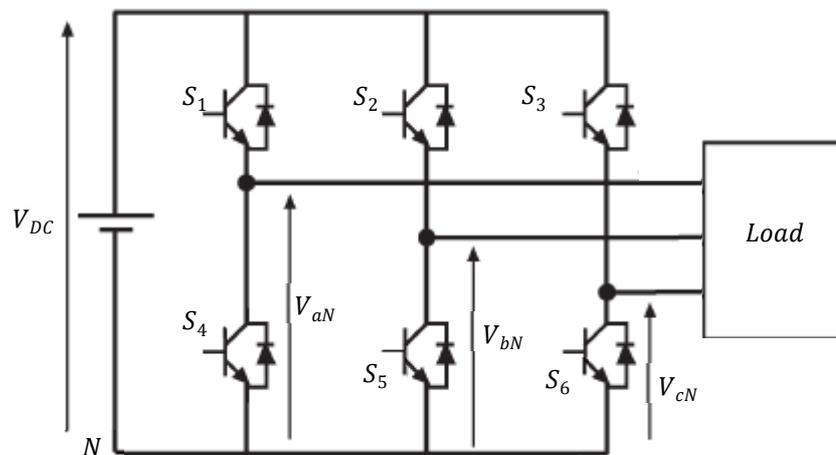


Figura 7-1: Inversor de dos niveles conectado a una carga genérica [13]

Parámetro	Significado	Valor
V_{DC}	Tensión del bus de continua	700 [V]
R_{ON}	Resistencia interna del IGBT	10^{-3} [Ω]
R_{Sn}	Resistencia <i>snubber</i> del IGBT	10^{-5} [Ω]

Tabla 7-4: Características del inversor de dos niveles

No todas las combinaciones de interruptores son posibles. En particular, no pueden conectarse al mismo tiempo los dos interruptores de una misma rama. De hacerlo se cortocircuitaría la fuente de tensión. Esta peculiaridad hace que sea posible definir el estado de cada rama del inversor con un valor binario: 1 si se conecta el interruptor superior (S_1, S_3, S_5), 0 si se conecta el inferior (S_2, S_4, S_6). De esta forma, el estado del inversor queda caracterizado por un vector de la terna:

$$\mathbf{s}_{abc} = \begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

El inversor de dos niveles recibe ese nombre porque las tensiones de fase respecto al terminal negativo de la fuente de tensión (V_{aN}, V_{bN}, V_{cN}) sólo pueden tomar los valores ($V_{DC}, 0$). Utilizando los vectores de estado \mathbb{S} pueden expresarse las tensiones de fase como

$$\begin{pmatrix} V_{aN} \\ V_{bN} \\ V_{cN} \end{pmatrix} = V_{DC} \begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{pmatrix}$$

Y el fasor espacial de tensión puede expresarse como

$$\mathbf{v}_s = V_{DC} P(\theta) \mathbf{s}_{abc} = V_{DC} \mathbf{s} \quad (7-24)$$

Donde $P(\theta)$ es la Transformada de Park según (2-4) y \mathbf{s} es el vector de estado del inversor expresado en el plano dq (en el plano $\alpha\beta$ si se particulariza la Transformada de Park a la Transformada de Clarke). \mathbf{v}_s es el vector de entrada en el sistema en espacio de estados (7-20) y para la Transformada de Clarke define el set de control del inversor de dos niveles como:

$$\mathbf{v}_s \in \mathbb{U} = C_1 V_{DC} \mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (7-25)$$

7.5. Objeciones al comportamiento estable acotado

En la Sección 7.1 se han explicado los problemas de afrontar el control de la máquina de inducción como un problema lineal cuadrático y se han expuesto las variantes de solución que existen. En la Sección 7.2 se ha derivado el modelo del sistema en espacio de estados, descrito por las matrices (7-18) y (7-20), y en la Sección 7.3 se han dado valores concretos a los parámetros del motor cuyo funcionamiento se simulará. Para aplicar el MPC con comportamiento estable acotado procede, en siguiente lugar, comprobar el cumplimiento de la inecuación (6-24) que prueba que la función de coste ponderada por las matrices (Q, R, P) es una función práctica de Lyapunov y el sistema es por tanto controlable a un entorno de estabilidad práctica D_δ .

Como ya se ha expuesto, el sistema es dependiente del tiempo y la matriz $A(t)$ toma valores diferentes en función de los valores instantáneos de $\omega_r(t)$ (medida real de la máquina) y $\omega_g(t)$ (parámetro de diseño). Dado que la matriz P se elige como solución de la *DARE*, y que la *DARE* depende de las matrices ($A(t), B, Q, P$), la

función de coste es también una función del tiempo (y, por tanto, así lo es la garantía de estabilidad (6-24)).

Sin embargo, valga en primera aproximación considerar el régimen permanente de funcionamiento de la máquina. El régimen permanente lo definen la velocidad de funcionamiento $\omega_r(t) = \omega_N$ y la velocidad de sincronismo $\omega_g(t)$, que depende del valor de la carga. Se han realizado simulaciones de velocidad controlada mediante un algoritmo MPDTC (explicado en detalle en la Sección siguiente) y se ha llegado al valor de la velocidad de sincronismo en régimen permanente $\omega_g(t) \approx 2\pi * 42 \text{rad/s}$. Para estos valores restan las matrices Q y R como parámetros ajustables: en función de como se sintonicen, la matriz P tomará diferentes valores y podrá comprobarse la condición de estabilidad (6-24). Sean las matrices (Q, R) genéricas:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

En [8] se propone definir Q como la matriz identidad (i.e. $Q = I_{4 \times 4}$) y utilizar r como parámetro ajustable. No obstante, se ha comprobado que la condición (6-24) no se verifica para ningún valor de $r \geq 0$. Como ejemplo se presenta el caso $r = 0.25$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 14.63 & 0 & 6.24 & -0.97 \\ 0 & 14.63 & 0.97 & 6.24 \\ 6.24 & 0.97 & 82.39 & 0 \\ -0.97 & 6.24 & 0 & 82.39 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\min}(P) = 14.05 \quad \lambda_{\max}(P) = 82.98 \quad \lambda_{\min}(Q) = 1$$

Se recupera aquí por conveniencia la inecuación de estabilidad:

$$\frac{\Delta_q^2}{b^2} \leq \frac{1}{|W|} (a_1 - a_2 + a_3) = c \quad (7-26)$$

Donde los valores a_{123} corresponden a los autovalores de la línea superior. Los términos Δ_q^2 y b^2 son siempre positivos. Además, $|W|$ también lo es porque se ha exigido que las matrices Q y R sean semidefinidas positivas. No obstante, el signo del miembro derecho de la inecuación (aquí denominado por la letra c) sí puede ser negativo en función de los valores a_1, a_2 y a_3 . Por inspección se comprueba fácilmente que si $c < 0$, entonces la inecuación nunca se cumplirá, porque el miembro de la izquierda es siempre positivo con independencia de los valores Δ_q^2 y b^2 , los cuales dependen del set nominal de control definido por $\bar{\mathbf{u}}_{\max}$. Dicho de otro modo: $c < 0$ es condición suficiente para que no se verifique la inecuación de estabilidad, aun previamente a la definición del set de control nominal.

En el caso concreto arriba expuesto se comprueba

$$W = \begin{pmatrix} 0.27 & 0 \\ 0 & 0.27 \end{pmatrix} \quad |W| = 0.2679$$

Y finalmente se opera para verificar que *no* se cumple la condición de estabilidad:

$$c = -253.53 < 0$$

En [8] se propone que se cambie el valor de r si no se cumple la condición de estabilidad. No obstante, se ha probado este método mediante un algoritmo de fuerza bruta (i.e. ensayando valores de r desde 0.0001 hasta 5) y en ningún caso se cumple la condición (7-23). Más aún: en vista de que los valores q_1 y q_2 ponderan magnitudes diferentes del vector de estado del sistema, se ha optado por probar también diferentes valores de la matriz Q . En este caso se ha optado por mantener $q_2 = 1$ y probar diferentes valores para r y q_1 (nuevamente mediante un algoritmo de fuerza bruta).

Para r se han ensayado valores en el intervalo (0.0001, 5). Para q_2 se ha hecho lo propio en el intervalo (1,2500). Los resultados se muestran en la Fig. 7-2.

Puede comprobarse que $c = \frac{(\lambda_{min}(P) - \lambda_{max}(P) + \lambda_{min}(Q))}{|W|} < 0$ para todos los valores ensayados. Observando la tendencia con r, q_1 crecientes, puede concluirse razonablemente que no se encontrarán valores de sintonía con los que pueda verificarse eventualmente la condición de estabilidad, aun a expensas de definir el set nominal de control y comprobar si los valores absolutos cumplen la inecuación.

En conclusión: para la máquina ensayada, en el régimen permanente expuesto más arriba, no existe función de coste calculada según [8] que verifique la condición de estabilidad, luego tampoco puede asegurarse el comportamiento estable acotado según la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Esto no quiere decir que no exista una función de coste que sea función práctica de Lyapunov, ni mucho menos que no exista dicha función para ningún otro motor de inducción. No obstante, por el alcance de la presente monografía el estudio se limitará a este caso concreto. En lo sucesivo se demostrará que si bien la teoría de [8] no es suficiente para garantizar el comportamiento estable acotado, su propuesta para diseñar la función de coste produce notables mejoras frente a las fórmulas de sintonía puramente heurísticas que suelen emplearse (e.g. [12]).

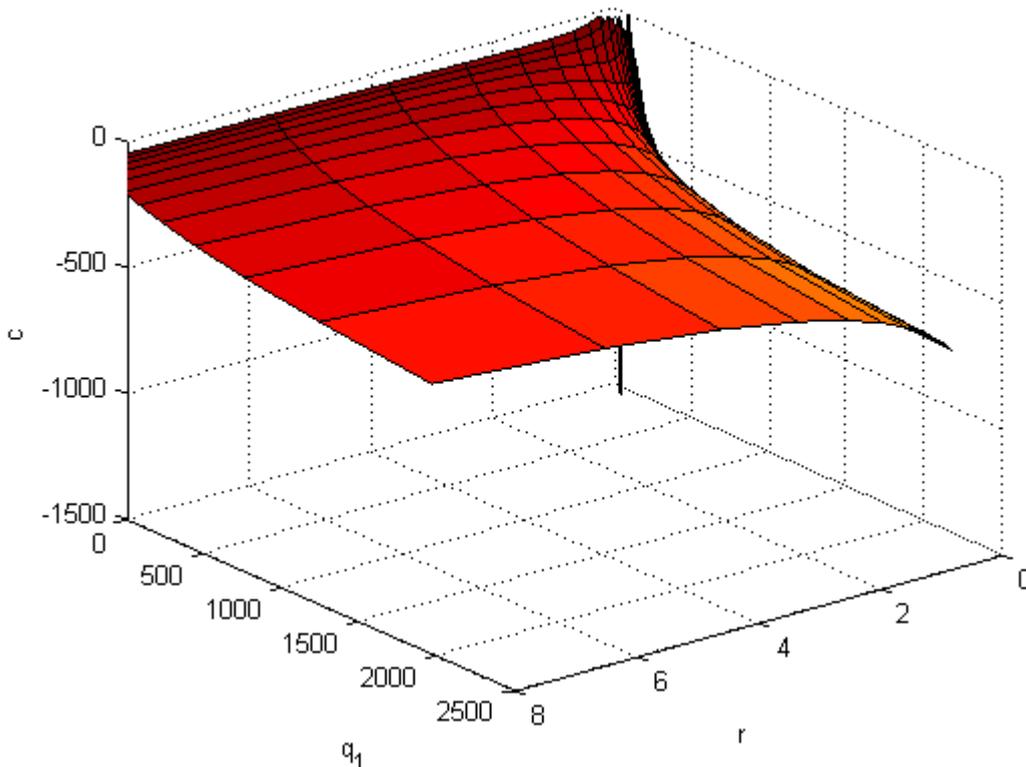


Figura 7-2: Valor de c para diferentes valores de r y q_1

7.6. Simulación: MPDTC

Esta simulación replica los resultados obtenidos en [12]. El diagrama de bloques del controlador se representa en la Fig. 7-3 y consta de un lazo externo de control de velocidad y de la etapa de control predictivo. Todos los fasores espaciales están expresados en el marco de referencia $\alpha\beta$ solidario con el estator. La función de coste de este controlador contempla un horizonte de predicción unitario y penaliza el error en el par electromagnético y en el enlace de flujo del estator:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{u}_j) = |t_{e,j} - t_{e,ref}|^2 + \lambda |\Psi_{s,j} - \Psi_{s,ref}|^2 \quad (7-27)$$

Donde λ es un factor de peso. La ecuación (7-20) está sujeta a

$$\mathbf{x}_j[k + 1] = A(\omega_m)\mathbf{x}[k] + B\mathbf{u}_j[k] \quad (7-28)$$

$$t_{e,j} = \frac{3}{2}p \frac{L_m}{L_m^2 - L_r L_s} (\boldsymbol{\psi}_{s,j} \times \boldsymbol{\psi}_{r,j}) \quad (7-29)$$

$$\Psi_{s,j} = \|\boldsymbol{\psi}_{s,j}\| = \sqrt{\psi_{s\alpha,j}^2 + \psi_{s\beta,j}^2} \quad (7-30)$$

En [12] se aconseja sintonizar la función de coste *normalizando* ambos términos; esto es, refiriéndolos a su valor nominal. Siendo estos valores T_N y Ψ_{sN} los definidos en la Tabla y teniendo en cuenta que los términos son cuadráticos, el factor de peso que da igual valor a ambos objetivos de control es

$$\lambda_N = \frac{T_N^2}{\Psi_{sN}^2} = 581.5036 \quad (7-31)$$

Adicionalmente se presentan simulaciones con tres valores diferentes de λ para comentar la influencia del factor de peso en el funcionamiento del controlador.

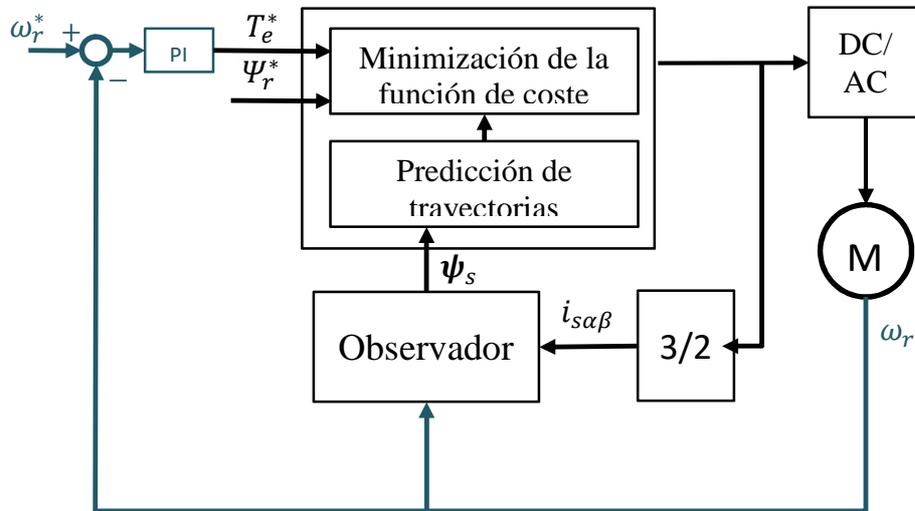


Figura 7-3: Model Predictive Direct Torque Control

Las Fig. 7-4 a 7-7 presentan los resultados de la simulación con $\lambda = \lambda_N$. En la Fig. 7-4 se recoge el comportamiento mecánico el motor: velocidad angular y par. El motor se arranca en vacío ($T_{load} = 0$) y la velocidad evoluciona de forma aproximadamente lineal (par aproximadamente constante, limitado por la saturación del control de velocidad) hasta que se estabiliza en el punto de funcionamiento. Cuando se conecta la carga en el tiempo $t = T_{torque}$ tiene lugar un breve transitorio: la velocidad se reduce, pero el lazo de control

de velocidad aumenta la referencia del par electromagnético y el controlador MPC vuelve a llevar el motor a su punto de funcionamiento.

En la Fig. 7-5 se muestra el problema de seguimiento del enlace de flujo estático y un detalle de las corrientes del estator en régimen permanente. El flujo tiene una dinámica muy rápida y se mantiene en una banda relativamente estrecha en el entorno de su valor de referencia. Las corrientes, por su parte, muestran una forma claramente sinusoidal *aunque* no se ha controlado en ningún momento su valor y su frecuencia. Estas corrientes se han estudiado mediante el análisis de Fourier de la corriente de la fase *a* del estator, cuyo espectro se recoge en la Fig. 7-6 tanto en escala lineal como logarítmica. Pueden observarse los armónicos 5°, 7°, 11° y 13° claramente definidos. Además no hay armónicos por encima de la mitad de la frecuencia de muestreo, que es la frecuencia de conmutación máxima para esta clase de controlador. En este caso $f_s = 1/T_s = 20000\text{Hz}$. El armónico fundamental está en los 42Hz (la frecuencia de giro del ángulo eléctrico es 39.84Hz) y la Distorsión Armónica Total toma un valor $THD(\%)_{I_a} = 37.91$.

Seguidamente se ha estudiado el rizado del par electromagnético, cuyo espectro aparece en la Fig. 7-7. El armónico fundamental es evidentemente la componente de continua y la distorsión es $THD(\%)_{T_e} = 7.22$. Los armónicos se concentran, como cabría esperar, en torno a los 1000Hz , que es la frecuencia de muestreo del lazo de control de velocidad.

Por último, en la Fig. 7-8 se representa la trayectoria del vector de estados (flujo del estator y flujo del rotor). Dicha trayectoria es una circunferencia centrada en el origen, como cabría esperar para un fasor rotatorio.

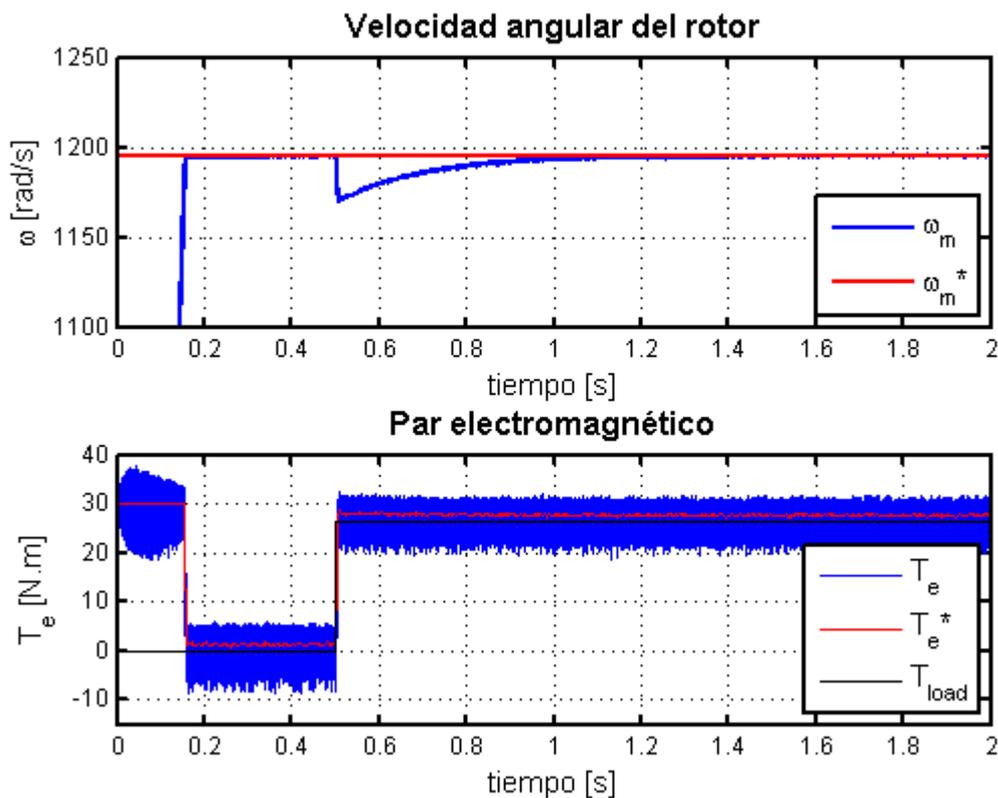


Figura 7-4: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$

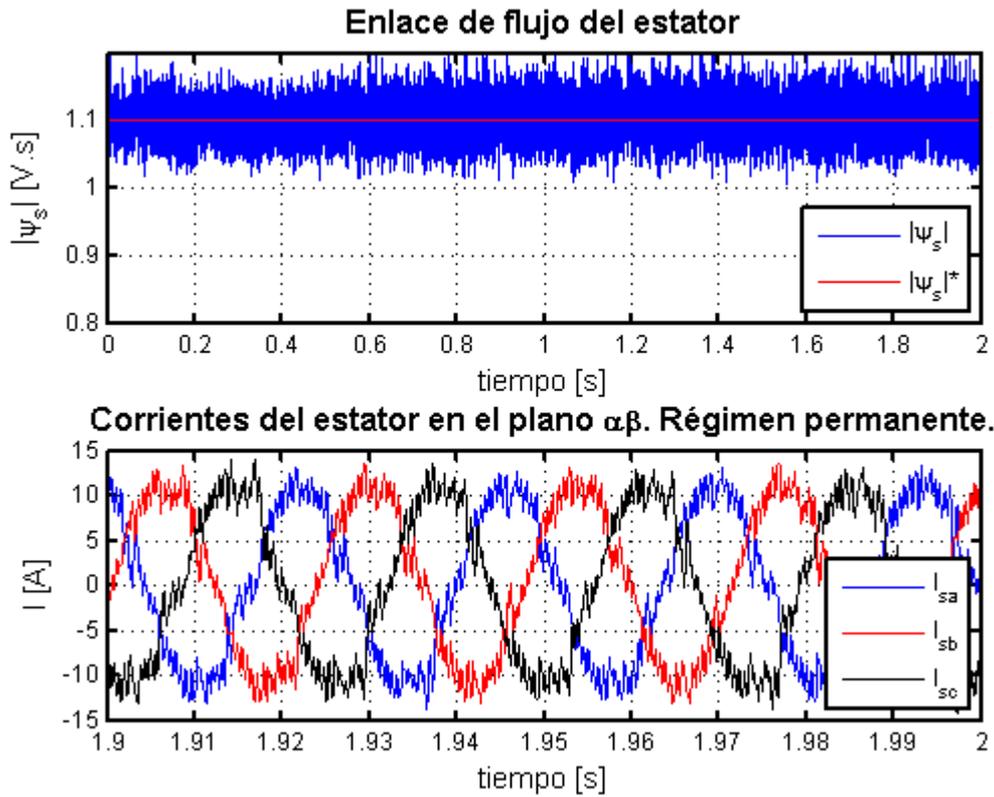


Figura 7-5: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$

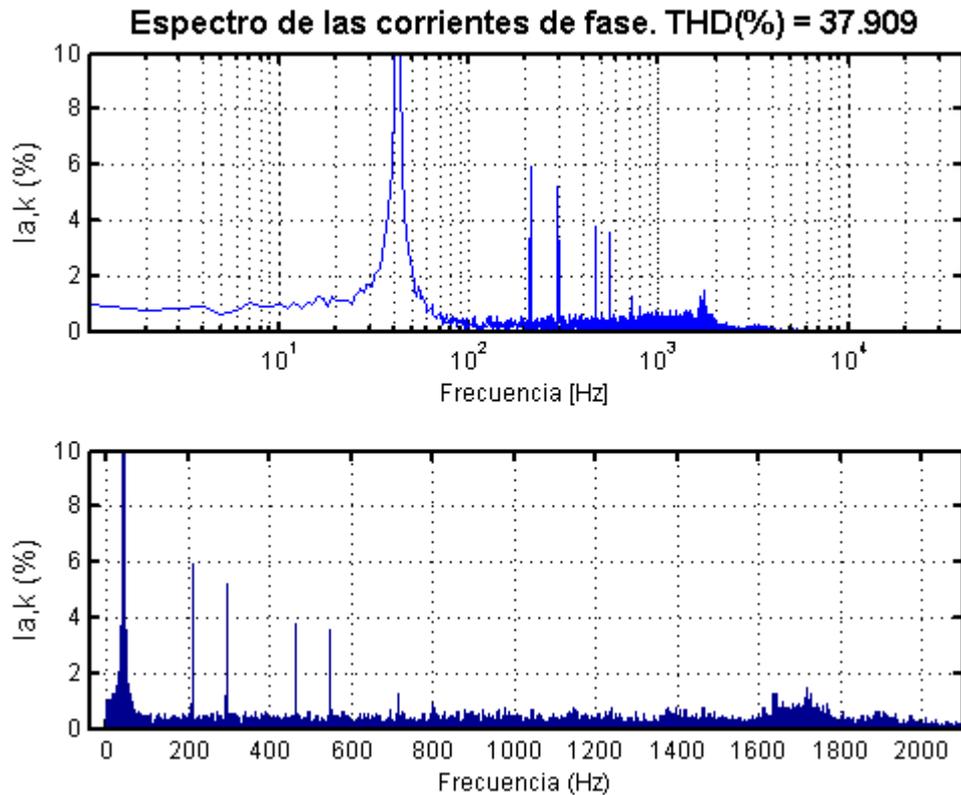


Figura 7-6: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$

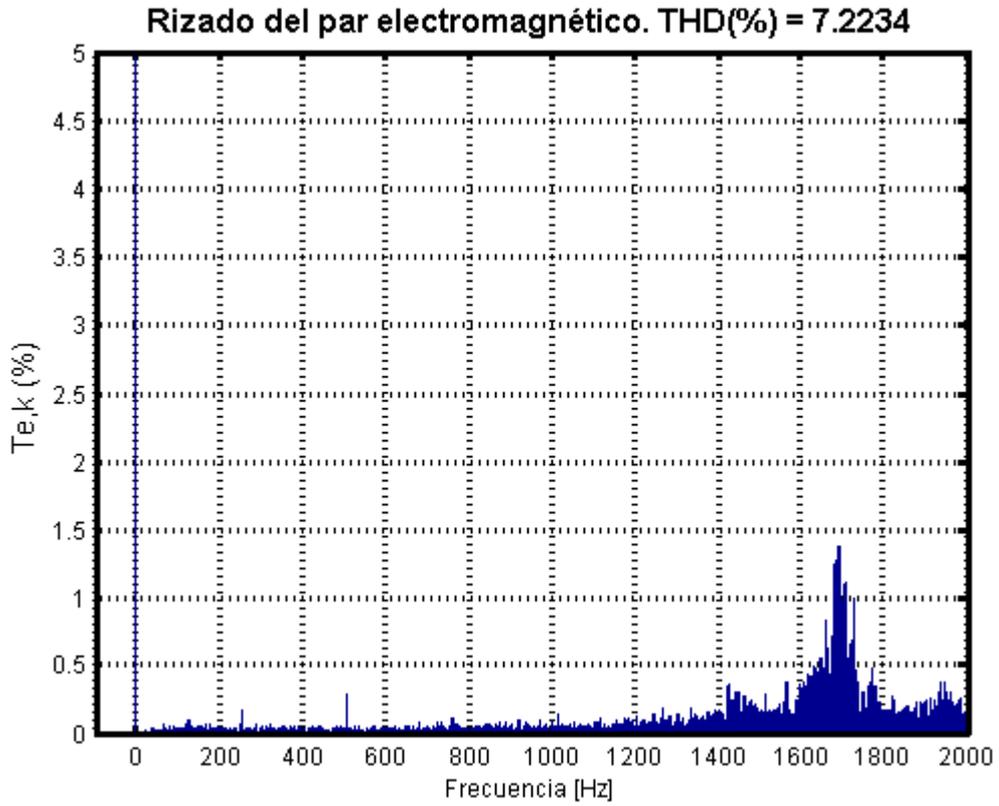


Figura 7-7: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = \lambda_N$

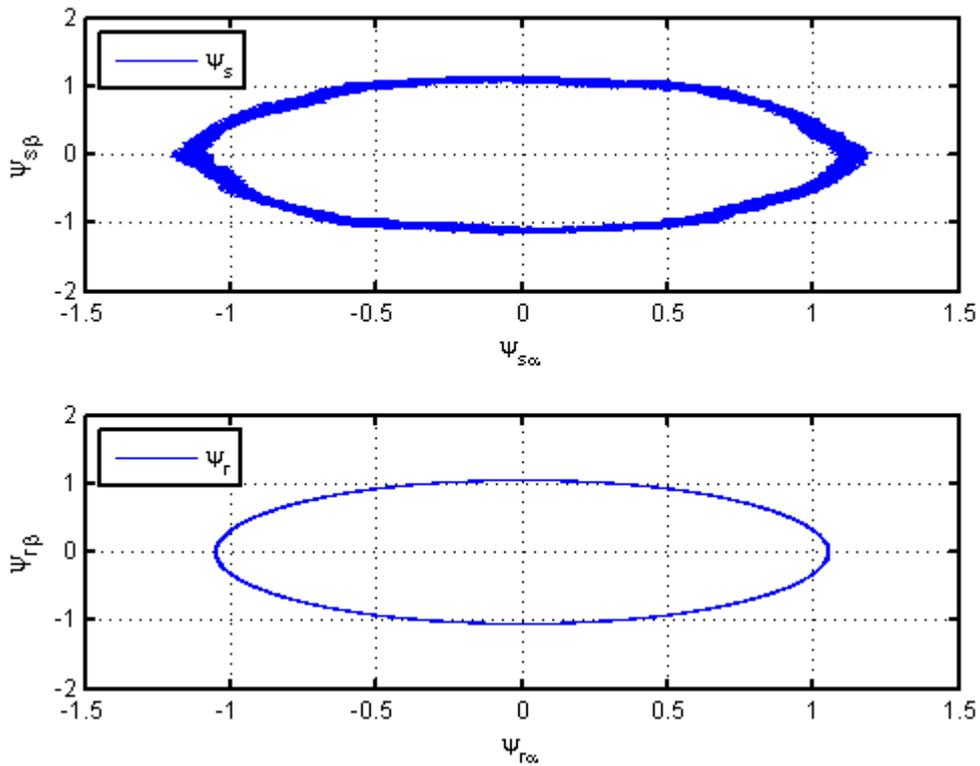


Figura 7-8: Flujo estático y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = \lambda_N$

Para completar el estudio del MPDTC se incluyen a continuación simulaciones que muestran el efecto de variar el factor de peso λ sobre el funcionamiento del motor. Las figuras 7-9 y 7-10 corresponden a un valor $\lambda_1 = \lambda_N/10$; esto es, un orden de magnitud menor. Con esta sintonización se le da 10 veces menos importancia al seguimiento del flujo o, alternativamente, 10 veces más importancia al seguimiento del par. En la Fig. 7-9 se observa que el comportamiento mecánico del motor es muy similar al representado en la Fig. 7-4; no obstante, el comportamiento de las magnitudes eléctricas empeora considerablemente. En la Fig. 7-10 se observa que el seguimiento de la referencia de flujo es peor y que el carácter sinusoidal de las corrientes de fase resulta severamente perjudicado. La distorsión de la corriente y del par electromagnético tienen los valores $THD(\%)_{I_a} = 50.72$ y $THD(\%)_{T_e} = 7.27$. Por último, la representación de los fasores espaciales del flujo del estator y del rotor en la Fig. 7-13 refuerza las conclusiones anteriores, pues la típica trayectoria en circunferencia se ve claramente deformada.

Por último se incluyen simulaciones con un factor de peso 10 veces mayor al nominal; i.e. $\lambda_2 = 10\lambda_N$. La Fig. 7-14 muestra que la evolución de la velocidad del motor no cambia de forma apreciable. Sin embargo, en la Fig. 7-15 se observa que el seguimiento de la referencia de flujo ha mejorado y unido a ello se ha reducido la distorsión de las corrientes.

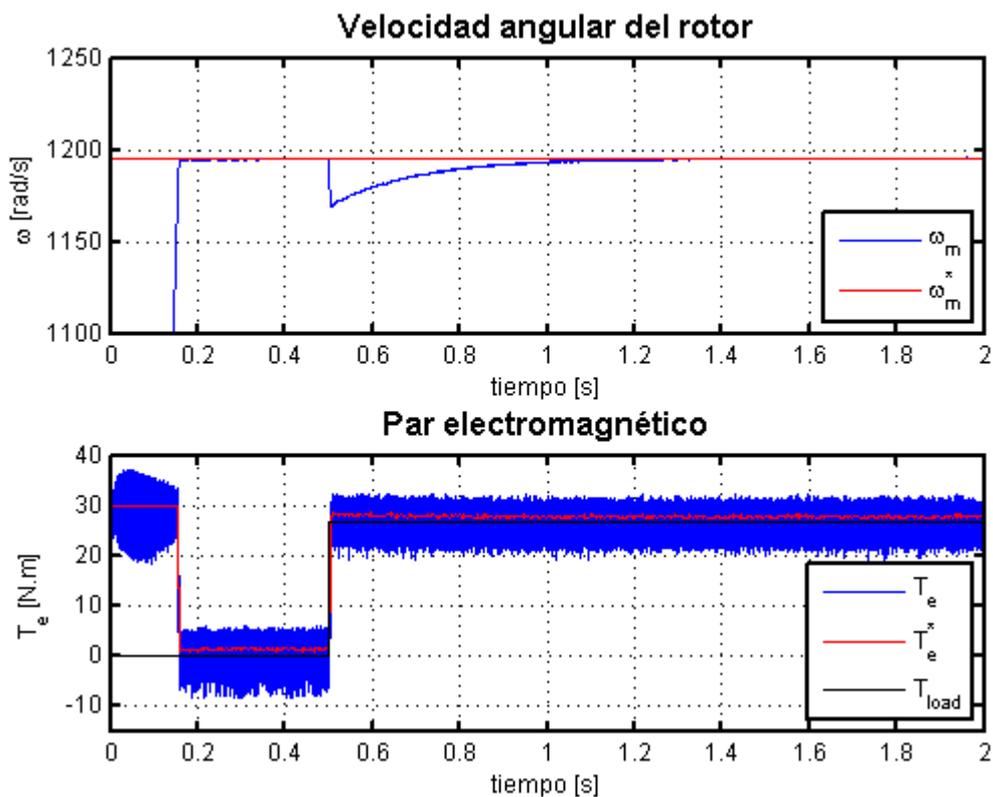


Figura 7-9: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$

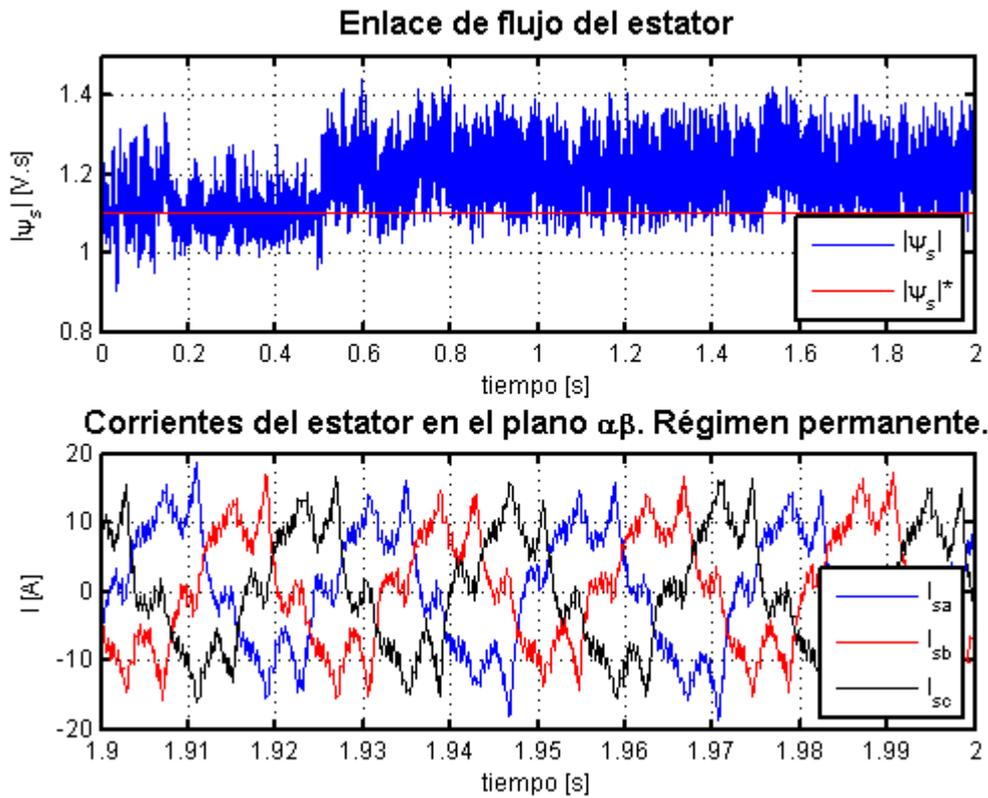


Figura 7-10: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$

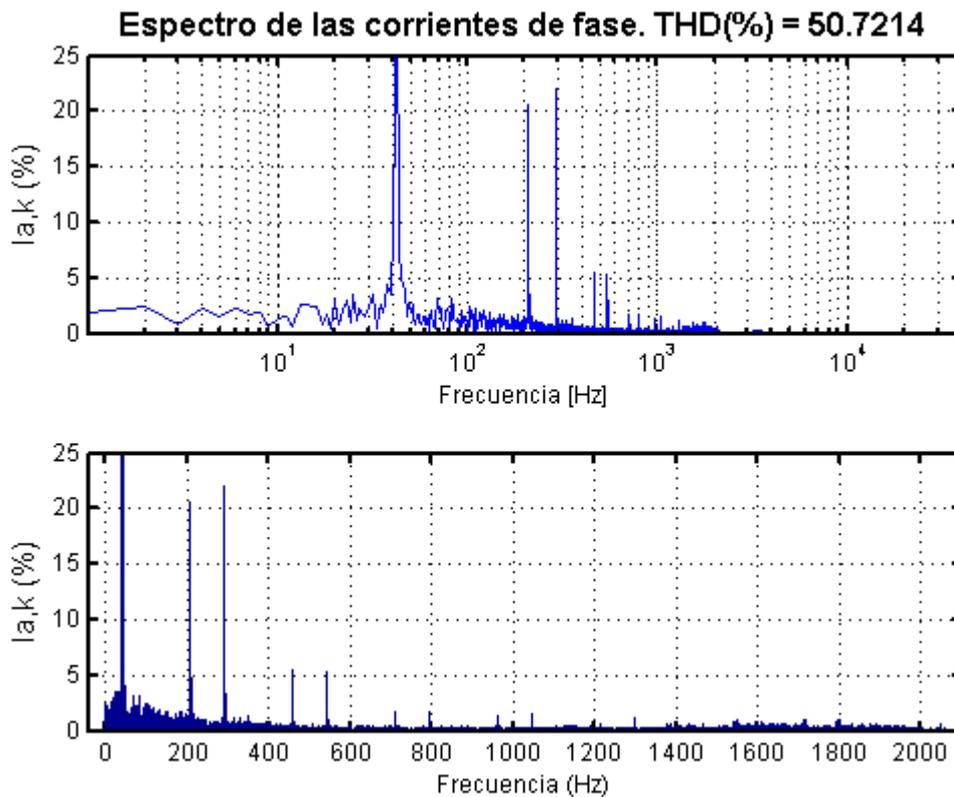


Figura 7-11: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$

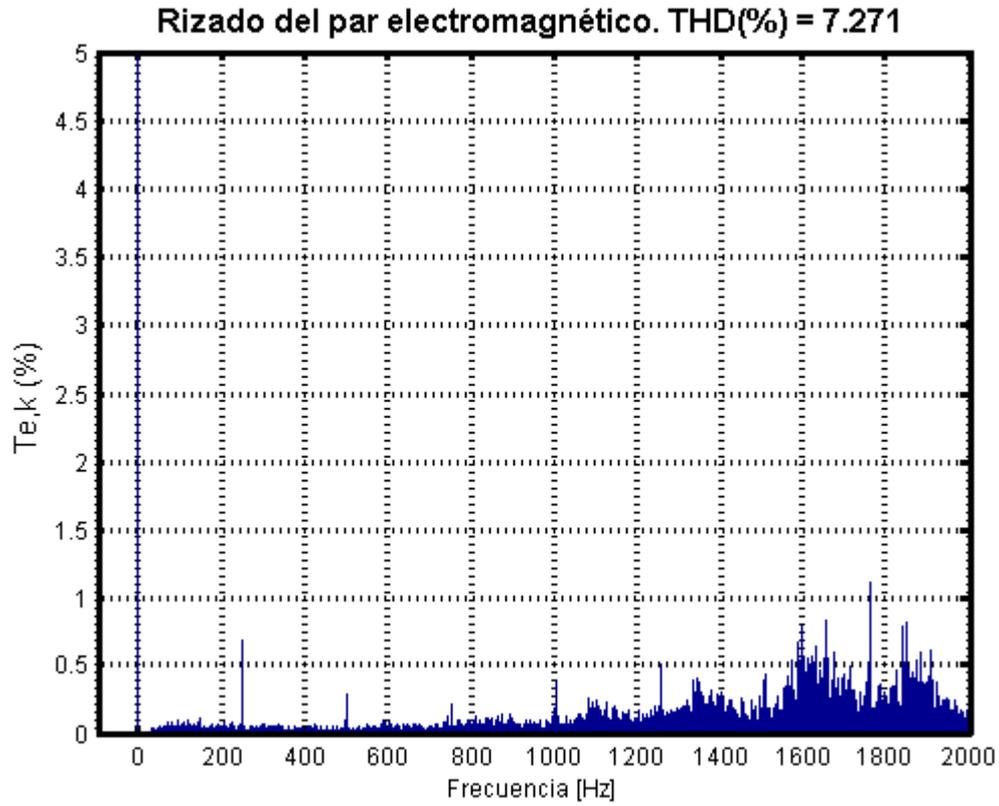


Figura 7-12: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$

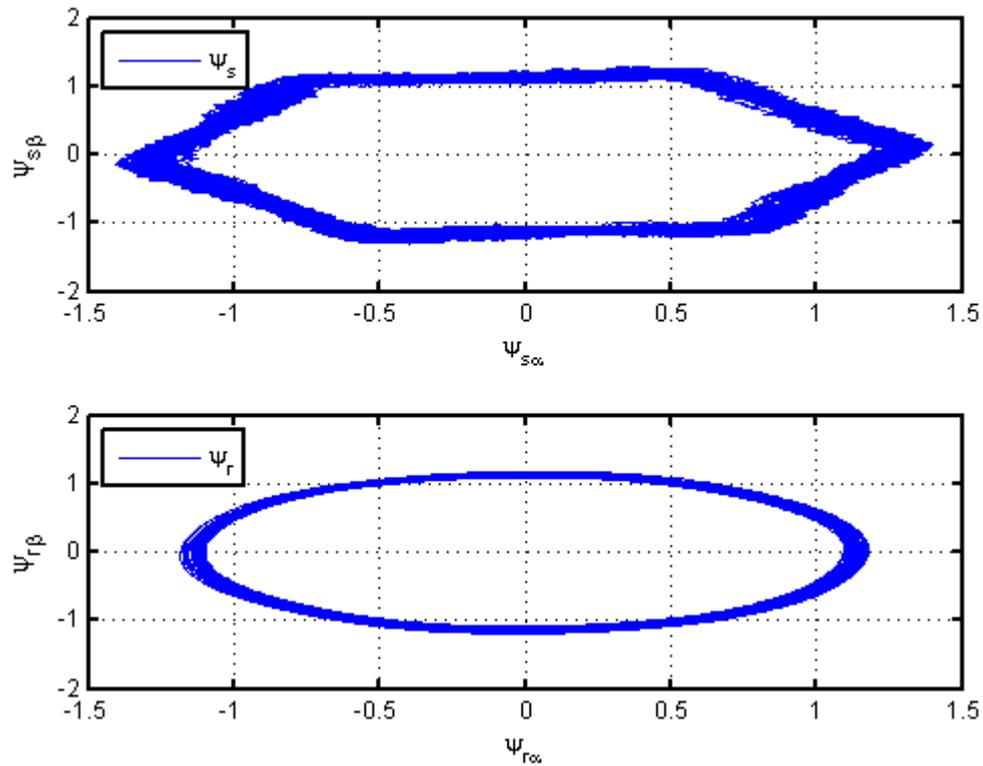


Figura 7-13: Flujo estático y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = \lambda_N/10$

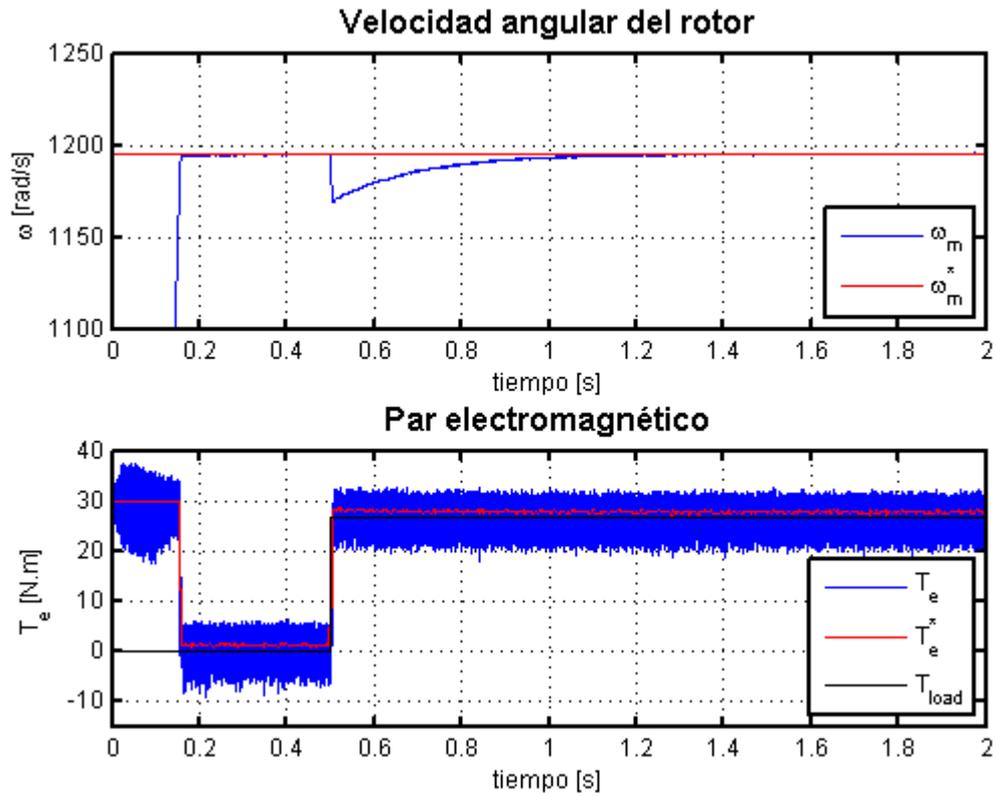


Figura 7-14: Velocidad y par del motor controlado en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$

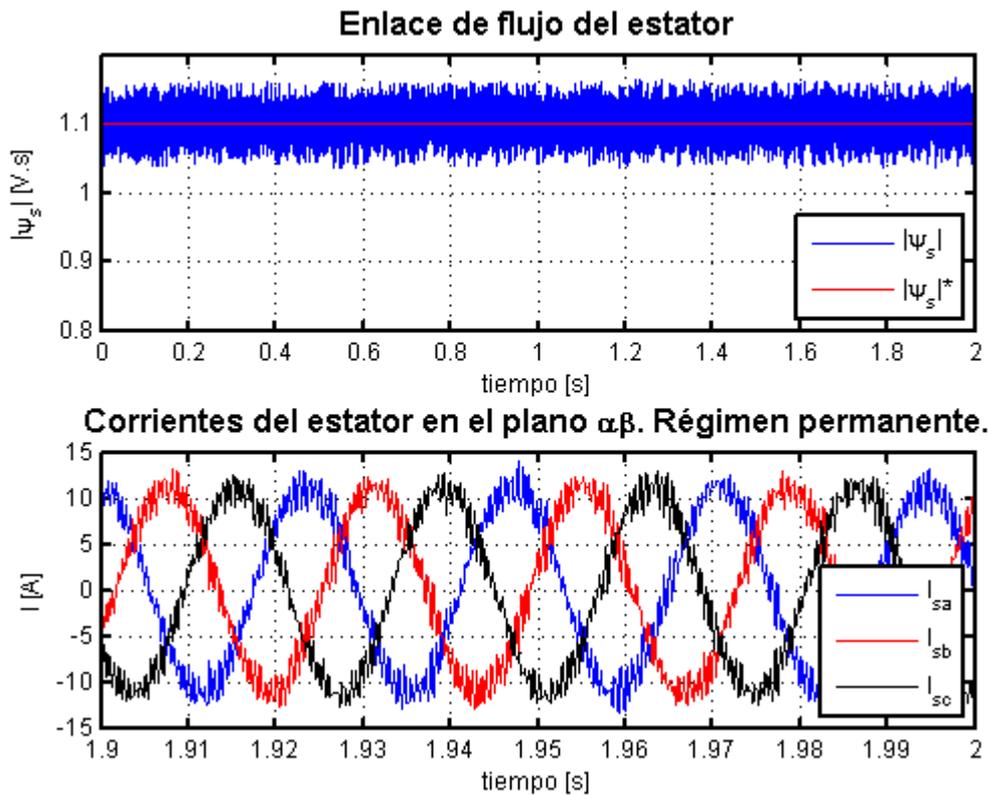


Figura 7-15: Enlace de flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$

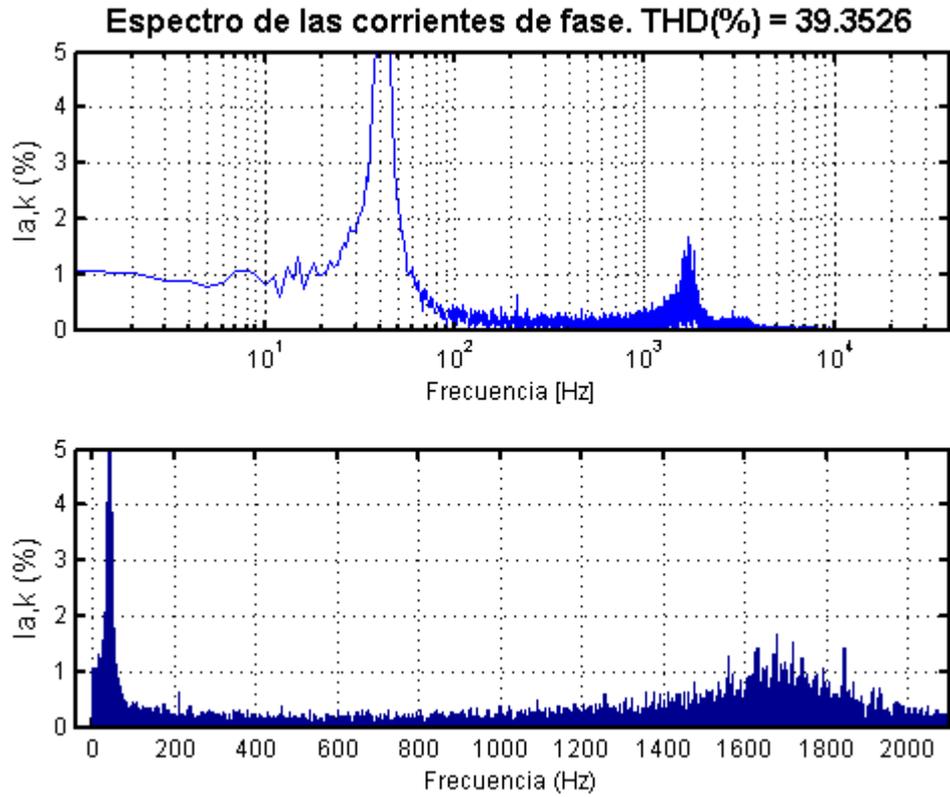


Figura 7-16: Espectro armónico de la corriente de la fase a del estator en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$

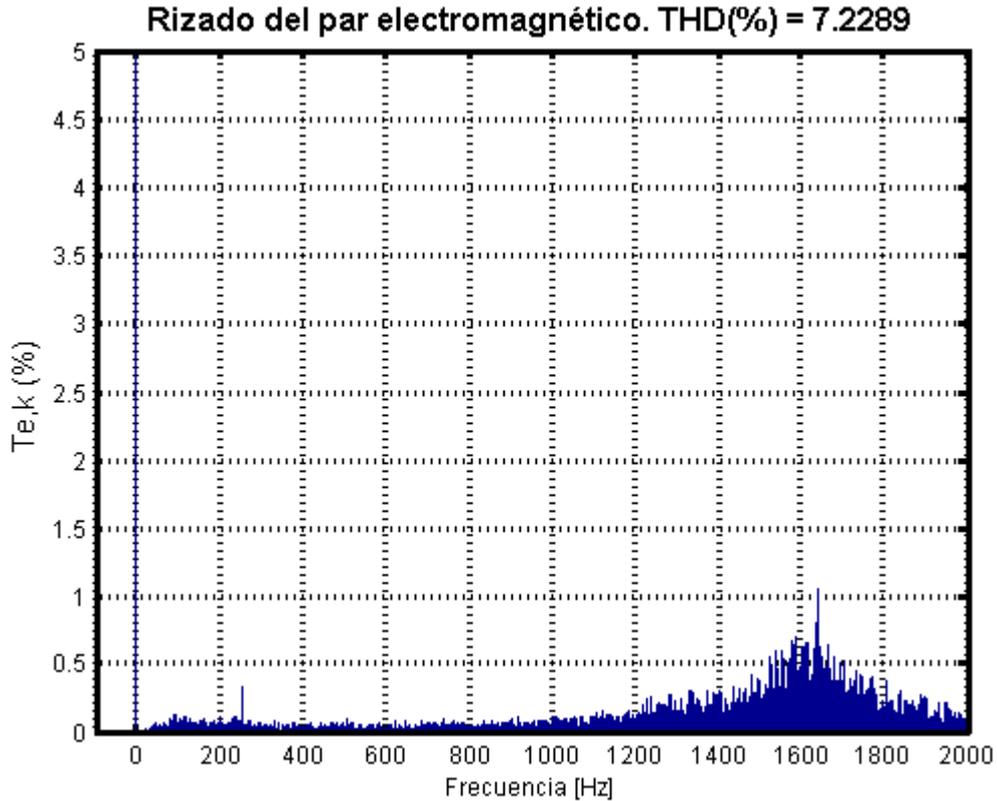


Figura 7-17: Espectro armónico del rizado del par electromagnético en MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$

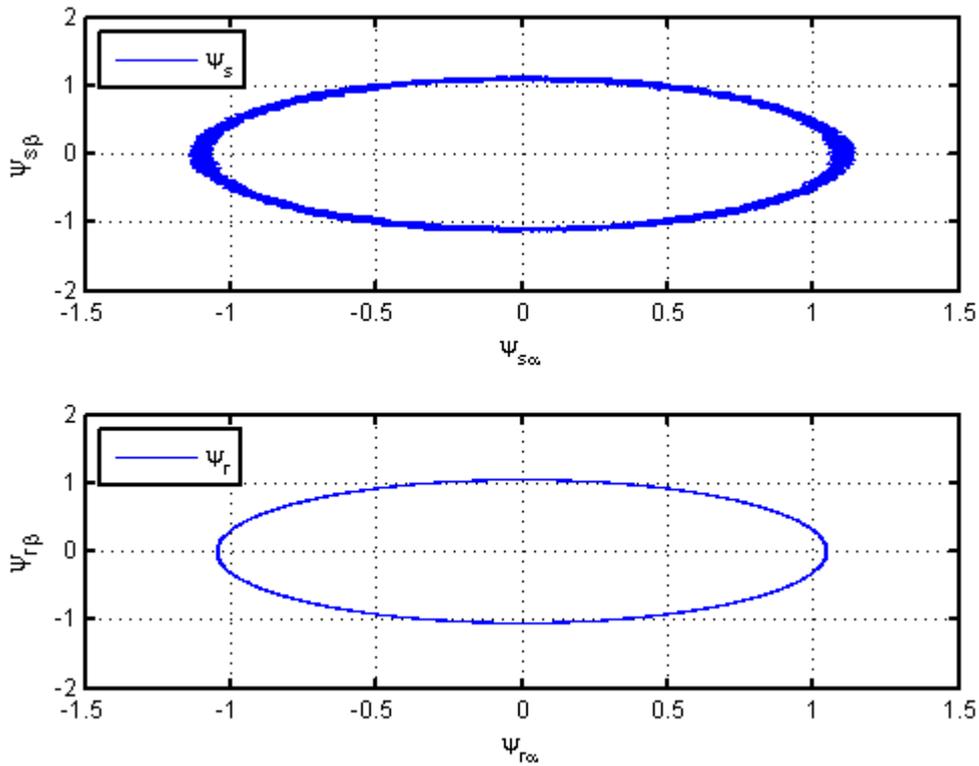


Figura 7-18: Flujo estático y rotórico en el plano $\alpha\beta$ en régimen permanente para MPDTC con $\lambda = 10\lambda_N$

Los valores de la distorsión del par electromagnético y de la corriente de entrada se resumen en la Tabla mostrada a continuación.

Factor de peso	$THD(\%)_{I_a}$	$THD(\%)_{T_e}$
$\lambda_N = T_N^2 / \Psi_{sN}^2$	37.91	7.22
$\lambda_1 = \lambda_N / 10$	50.72	7.27
$\lambda_2 = 10\lambda_N$	39.35	7.23

Tabla 7-5: Distorsión de corriente y rizado del par en MPDTC

El resultado de la THD_{I_a} para λ_2 parece contraintuitivo, ya que las corrientes de la Fig. 7-15 se antojan más sinusoidales que las de la Fig. 7-5. No obstante, esto queda explicado si se estudia el espectro de dicha corriente en la Fig. 7-16. En comparación con la Fig. 7-6 los armónicos se han trasladado a frecuencias mucho más altas: aunque la THD sea similar, esos armónicos son mucho más fáciles de filtrar que los que puedan encontrarse a bajas frecuencias.

7.7. Simulación: MPC con comportamiento estable acotado

Para el motor de inducción que se está considerando no es posible garantizar el comportamiento estable acotado de acuerdo a la teoría de estabilidad de Lyapunov, tal y como se explicó en la Sección 7.5. Sin embargo, se comprueba que la propuesta de elegir la matriz P de ponderación como solución de la Ecuación algebraica discreta de Riccati (*DARE*), si bien en este caso no es suficiente para garantizar la estabilidad, sí que produce

resultados superiores a los de una sintonía puramente heurística.

En las simulaciones siguientes, el motor ha sido arrancado y establecido en el régimen permanente mediante el MPDTC presentado en la Sección 7.6. En el instante t_0 se hace el cambio en el esquema de control al MPC diseñado según [8], que se seguirá llamando MPC-GP (*Model Predictive Control with Guaranteed Performance*) a pesar de la advertencia hecha en el apartado anterior sobre el comportamiento estable acotado. Para cambiar de un controlador a otro es necesario referir las variables de estado (i.e. ψ_s y ψ_r) al sistema de referencia general solidario con el fasor espacial del flujo del estator.

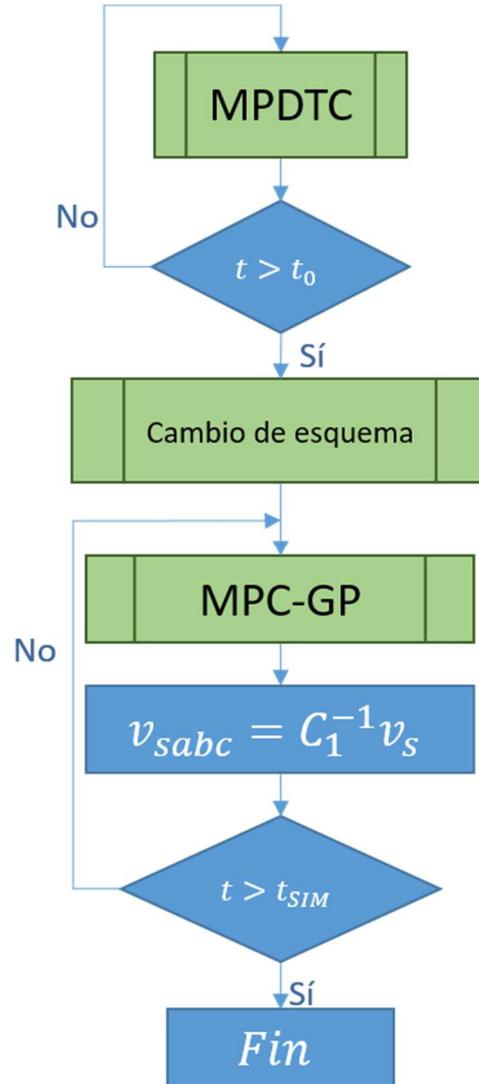


Figura 7-19: Diagrama de bloques global

El diagrama de bloques de todo el proceso se ilustra en la Fig. 7-19. El bloque correspondiente al MPDTC fue explicado en la Sección anterior. En cuanto al cambio del esquema de control, el punto crítico es la medida del ángulo θ_s que hace falta para referir las variables al marco de referencia sincrónico. Una vez superada la etapa de transición se entra por fin en el esquema de control MPC-GP, cuyo esquema más sencillo se representa en la Fig. 7-20. En primer lugar se actualiza la posición del marco de referencia en base al parámetro ω_g , que por tanto regula la frecuencia de las magnitudes eléctricas de la máquina (corrientes y flujos). Posteriormente se calcula la entrada óptima al sistema de acuerdo a lo explicado en el Capítulo 6, se calcula el estado siguiente x_1 y se refiere el vector de entrada al sistema de referencia del estator deshaciendo la transformación de coordenadas. Finalmente este vector de tensión se transforma de nuevo al plano abc y puede enviarse como señal de control a los interruptores del convertidor de potencia (última etapa del bucle en la Fig. 7-19).

Se ha advertido que se trata del esquema más simple porque cabe complicarlo bastante. Las matrices (A, B, K, W) , que en algoritmo propuesto han sido calculadas *offline*, pueden actualizarse en cada intervalo de muestreo con la velocidad instantánea del rotor ω_r , incrementando el coste computacional pero mejorando la exactitud del modelo. Por otra parte, cabe adaptar la velocidad de sincronismo ω_g en cada intervalo de muestreo para controlar la velocidad de sincronismo de las corrientes y los flujos y así controlar, en última instancia, la velocidad de la máquina.

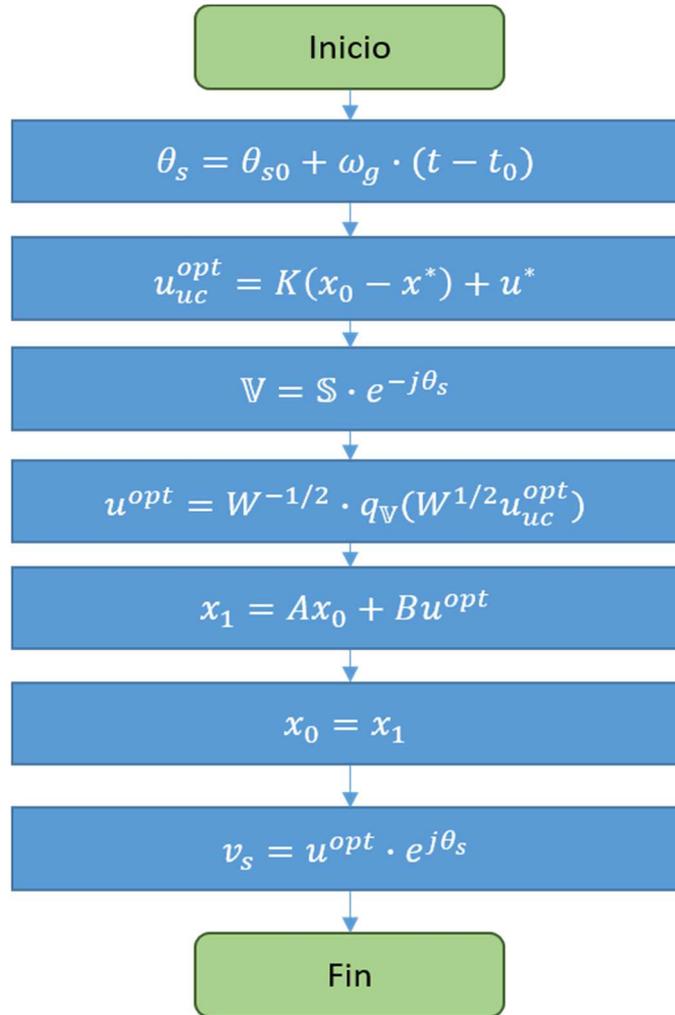


Figura 7-20: Model Predictive Control with Guaranteed Performance

El estado de referencia se ha definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \psi_{sd}^* \\ \psi_{sq}^* \\ \psi_{rd}^* \\ \psi_{rq}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.0 \\ 0.89 \\ -0.15 \end{pmatrix} \quad (7-32)$$

Donde la referencia para ψ_s ha sido la magnitud nominal del flujo del estator Ψ_{SN} y ψ_r se ha elegido de manera que el par desarrollado sea el par de carga:

$$\psi_{rq}^* = \frac{2}{3p} \frac{L_m}{L_m^2 - L_r L_s} \frac{T_{LOAD}}{\Psi_{SN}} \quad (7-33)$$

$$\psi_{rd}^* = \sqrt{\Psi_{rN}^2 - \psi_{rq}^*} \quad (7-34)$$

Donde se ha elegido $\Psi_{rN} = 0.9 [V \cdot s]$.

7.7.1. Efecto de la velocidad de sincronismo ω_g

En este apartado se estudia el efecto que tiene la elección de ω_g para el funcionamiento del motor. Como ya se ha explicado, ω_g establece la velocidad de giro del fasor de referencia ψ_s^* que el sistema está obligado a seguir. Por tanto ω_g determina la frecuencia del flujo del estator, que es tanto como decir que determina la frecuencia de sincronismo de la corriente de alimentación, ya entre ambas magnitudes existe una relación lineal.

Para la función de coste se ha seguido un diseño muy sencillo y que está lejos del óptimo, pero que es suficiente para ilustrar el efecto de la velocidad de sincronismo sobre el sistema:

$$Q = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

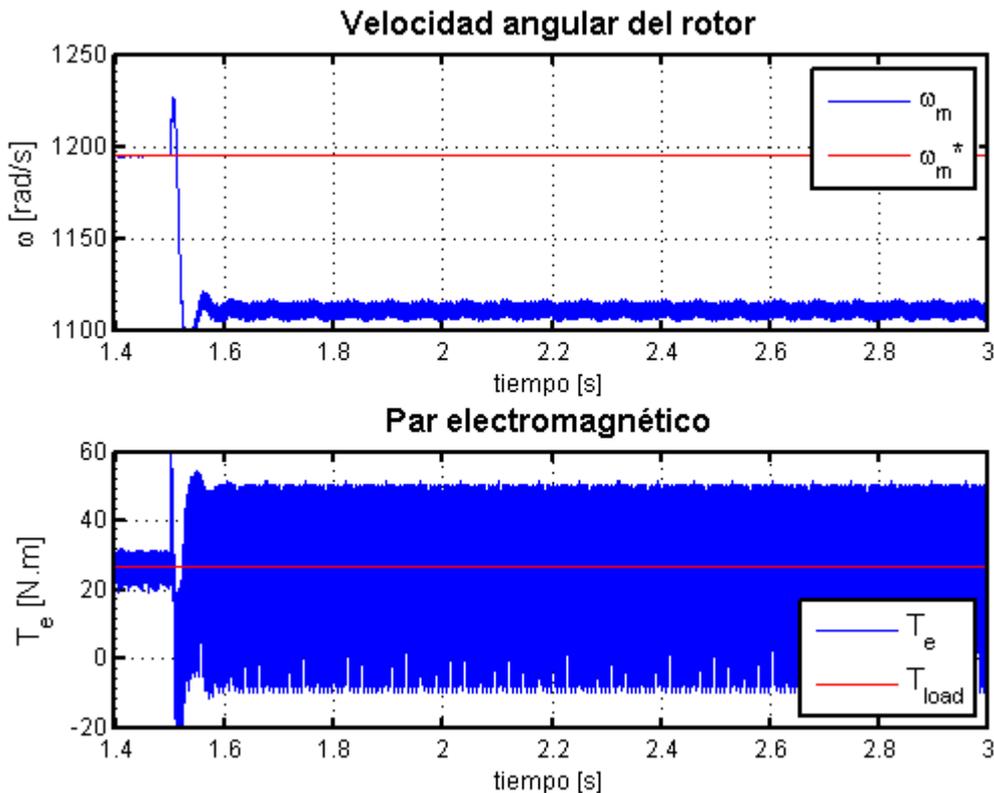


Figura 7-21: Velocidad y par motor para $f_{g1} = 39Hz$

En el motor de inducción, la velocidad de sincronismo determina la velocidad de giro de la máquina para una carga dada. En la Fig. 7-21 se ilustra la velocidad del motor y el par electromagnético para $\omega_{g1} = 2\pi \cdot 39 \text{ rad/s}$, mientras que en la Fig. 7-22 se recoge el problema de seguimiento del estado de referencia.

Lo primero que debe observarse es que la velocidad en régimen permanente del sistema queda por debajo de la velocidad de referencia. En el instante $t_0 = 1.5[s]$ se produce el cambio de esquema de control y tiene lugar un pequeño transitorio que lleva el motor a su nuevo punto de funcionamiento, definido por la velocidad de sincronismo. El par electromagnético tiene un rizado inadmisibles y de hecho las corrientes que demanda el motor

para producir los valores extremos del par superan ampliamente el límite de amperaje del motor, pero esto es problema de la sintonía de la función de coste. Lo que sí se comprueba es que el par medio es aproximadamente el par de referencia (i.e. el par de carga) y y la velocidad de la máquina se mantiene constante.

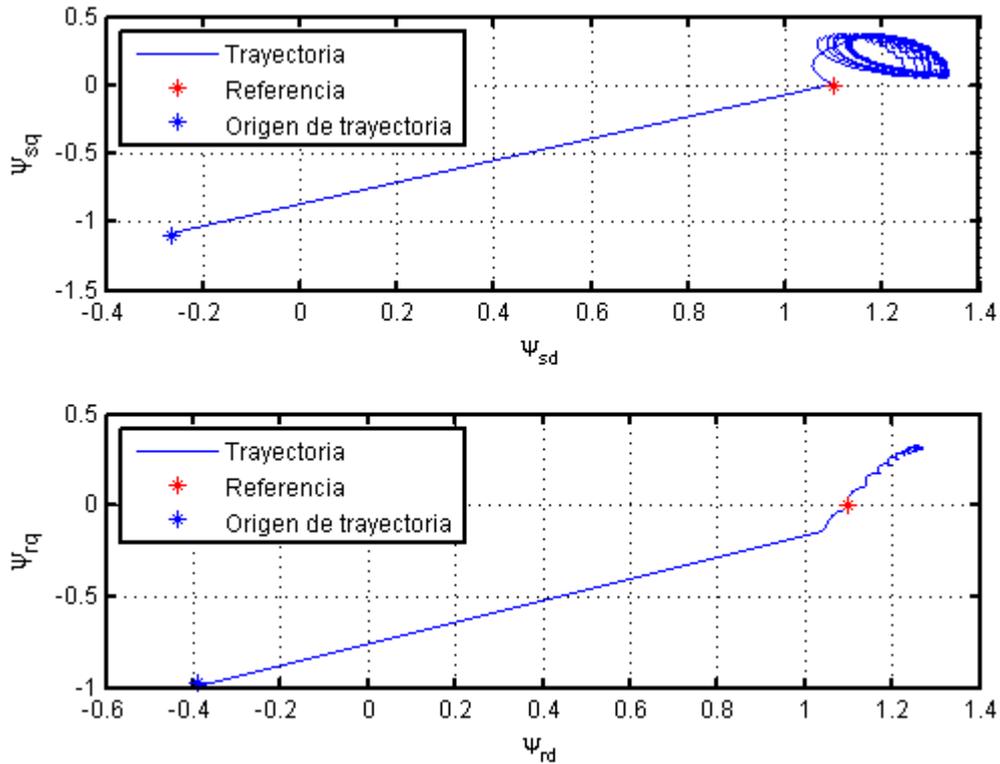


Figura 7-22: Problema de seguimiento para $f_{g1} = 39Hz$

En la Fig. 7-22 se aprecia el cambio de esquema de control. El punto marcado como ‘Origen de la trayectoria’ corresponde al instante t_0 ; ahí se produce el cambio de coordenadas al plano dq y el vector de estado se mantiene en el entorno de la referencia aunque con un visible error de *offset*.

En las Fig. 7-23 y 7-24 se presentan resultados homólogos para una velocidad de sincronismo superior $\omega_{g2} = 2\pi \cdot 45Hz$. La velocidad del motor queda por encima de la velocidad de referencia y el problema de seguimiento muestra una característica diferente.

Estos resultados motivan la introducción de un controlador lineal PI para ajustar la velocidad $\omega_g(t)$ del sistema. Se hace en un lazo de control de velocidad, donde la salida del PI es proporcional al error de seguimiento de la velocidad y a la integral del mismo. Los resultados se muestran en la Fig. 7-21, donde el PI se ha sintonizado de forma heurística llegando a los valores $P_{pi} = 0.5$ y $1/T_i = 20$. Aunque se consigue confinar la velocidad del motor a una estrecha banda alrededor del valor de referencia, la eficacia del PI se constata especialmente cuando se hace una buena elección de los factores de peso de la función de coste (como se explicará en el epígrafe siguiente). La simulación de la Fig. 7-23 corresponde a los siguientes parámetros de la función de coste y del PI:

$$q_1 = \lambda_N \quad q_2 = 1 \quad r = 0.25 \quad P_{pi} = 1 \quad 1/T_i = 10$$

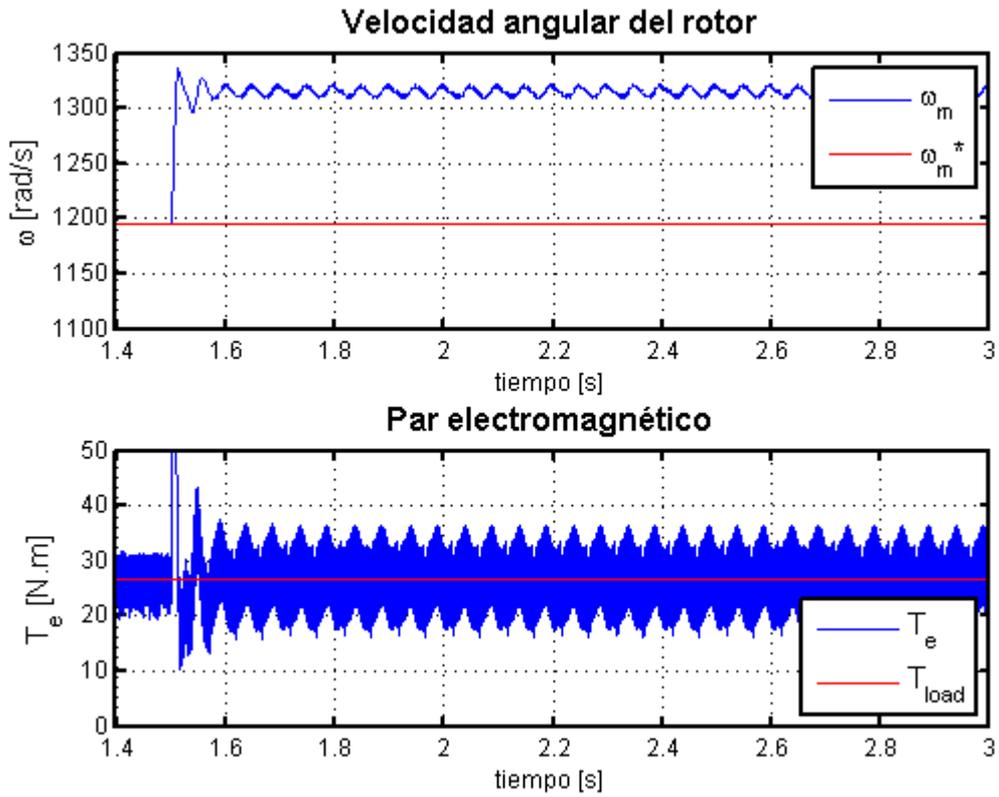


Figura 7-23: Velocidad y par motor para $f_{g2} = 45\text{Hz}$

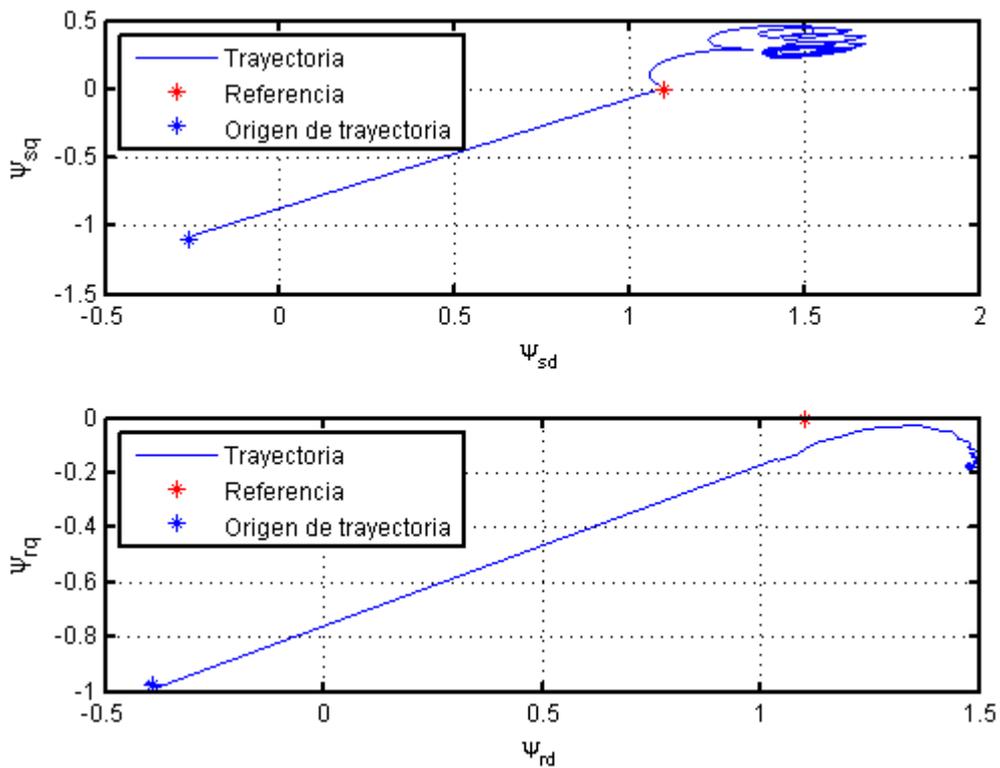


Figura 7-24: Problema de seguimiento para $f_{g1} = 39\text{Hz}$

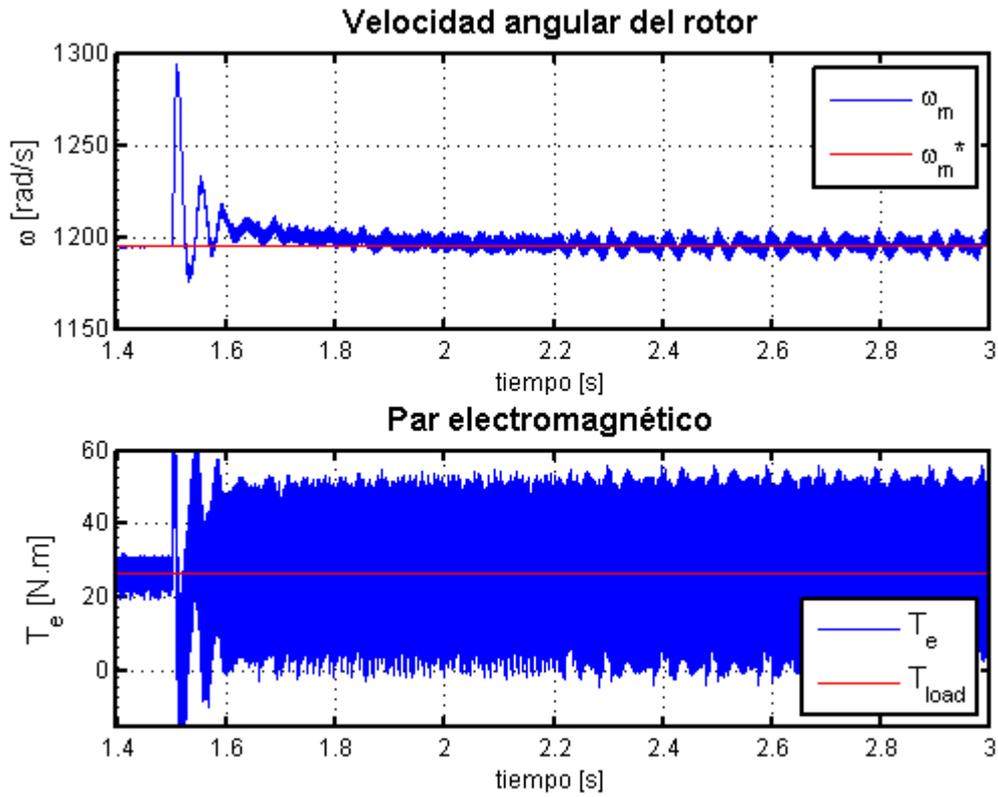


Figura 7-25: Velocidad y par del motor con ω_g regulado mediante PI

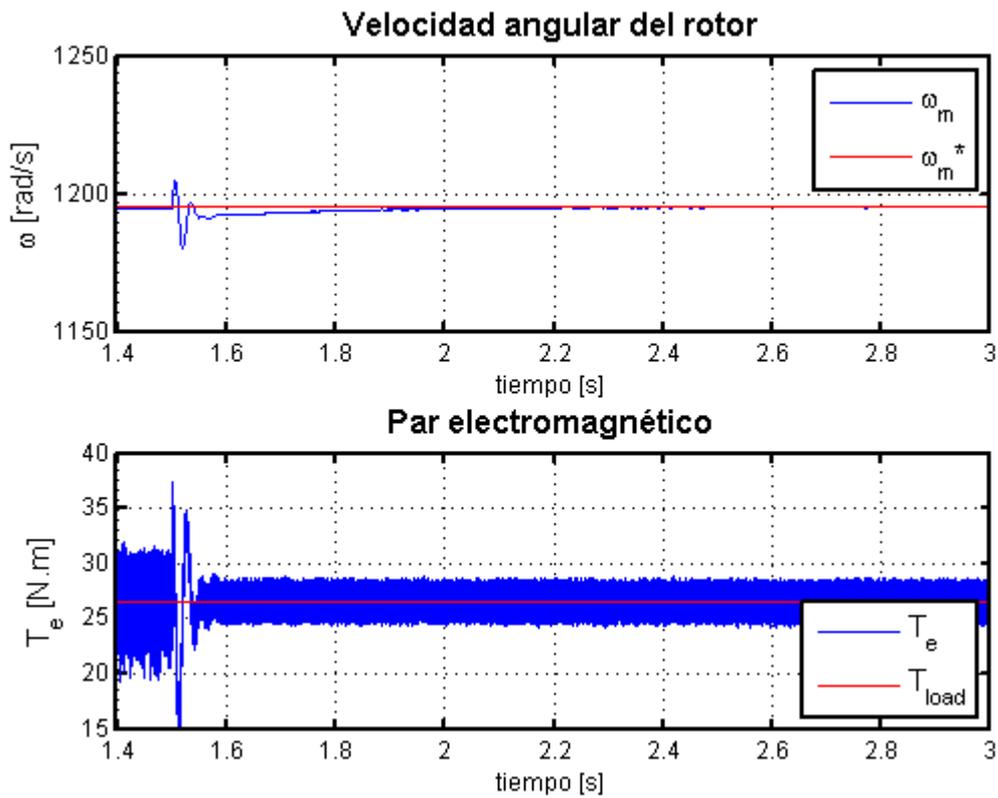


Figura 7-26: Velocidad y par del motor con ω_g regulado por PI y función de coste mejorada

7.7.2. Ajuste de la función de coste como solución de la DARE

Un concepto fundamental del MPC con comportamiento estable acotado es la elección de la matriz de ponderación P como solución de la Ecuación algebraica discreta de Riccati, lo que es equivalente a utilizar un LQR con horizonte de predicción infinito. Como se ha explicado en la Sección 7.3, esto no es suficiente para garantizar el comportamiento estable acotado del motor de inducción concreto con el que se ha trabajado en esta monografía. Sin embargo, resulta una estrategia de sintonía de la función de coste muy adecuada: constituye una mejora clara sobre la sintonía puramente heurística, especialmente cuando se desconoce por completo un punto de partida para los factores de peso.

Las siguientes simulaciones pretenden ilustrar esta idea. En todas ellas se emplea un lazo de control de la velocidad de sincronismo ω_g con los mismos parámetros del controlador PI y para R se define un valor constante.

Por otra parte, se hace la aproximación de que ω_m y ω_g no se desvían excesivamente de sus valores de referencia y por tanto se toma la matriz A como invariante en el tiempo. Esto implica que las matrices K y W (i.e. la ley de control) sólo dependen de la matriz Q y de la matriz, si se elige la matriz P como solución de la DARE, o directamente de la matriz P si ésta se elige de forma heurística. Por mayor claridad, se recuperan aquí las ecuaciones del Capítulo 4 que explican cómo se obtiene la ley de control del LQR. Para un horizonte de control unitario:

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{ref}|_Q^2 + |\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ref}|_R^2 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{ref}|_P^2 \quad (7-35)$$

$$K = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (7-36)$$

$$W = B^T P B + R \quad (7-37)$$

$$DARE: P = Q + A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (7-38)$$

$$\mathbf{u}_{uc}^{opt} = K(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{ref}) + \mathbf{u}_{ref} \quad (7-39)$$

$$\mathbf{u}^{opt} = W^{-1/2} q_{\mathbb{V}}(W^{1/2} \mathbf{u}_{uc}^{opt}) \quad (7-40)$$

$$\mathbb{V} = W^{1/2} \mathbb{U} \quad (7-41)$$

Donde \mathbb{U} es el set de control. Como ya ha sido explicado, la solución al problema de minimización de la función de coste (7-35) es idéntica bien se encuentre explícitamente la ley de control $\mathbf{u}^{opt} = \kappa(\mathbf{x})$ (*explicit MPC*), bien se encuentre la entrada de control óptima por enumeración comprensiva de todos los elementos del set de control (*implicit MPC*). Así pues, la ley de control (sea explícita o implícita) sólo depende del estado de referencia $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ y de las matrices de ponderación (Q, R, P) .

En principio puede parecer que la ley de control no depende de la matriz Q , ya que el primer término de la función de coste (7-35) es una constante al tratarse \mathbf{x}_0 de un parámetro. Estrictamente es cierto; no obstante, si se desea elegir la matriz P como solución de la DARE, es preciso tener en cuenta la definición de la matriz Q (que no es sino el peso relativo que se le da a cada uno de los elementos del vector de estados). A modo de resumen se expone a continuación la dependencia funcional de la ley de control con los parámetros de diseño para el caso en el que la matriz P se elige de forma heurística (P^h) y para el caso donde se toma como solución de la Ecuación algebraica discreta de Riccati (P^{DARE}, Q^h):

$$\begin{array}{l}
\text{Caso 1: } P = P^h \\
\left. \begin{array}{l} K = f(A, B, R, P^h) \\ A = cte \\ B = cte \\ R = cte \end{array} \right\} K = f(P^h) \\
\\
\text{Caso 2: } \left\{ \begin{array}{l} P = P^{DARE} \\ Q = Q^h \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} K = f(A, B, R, P^{DARE}) \\ P^{DARE} = g(A, B, Q^h, P) \\ A = cte \\ B = cte \\ R = cte \end{array} \right\} K = f(Q^h)
\end{array}$$

Donde el superíndice h quiere decir que la matriz se ha elegido de forma heurística. En realidad, el Caso 1 equivale a obtener la ley de control del LQR con horizonte de predicción unitario, mientras que el Caso 2 proporciona la ley de control del LQR son horizonte infinito. A continuación se presentan tres ejemplos donde se comparan las dos variantes: en primer lugar se elige la matriz P de forma heurística; en segundo lugar, se elige como matriz Q la matriz P anterior y la nueva matriz P se obtiene como solución de la $DARE$. En todos los casos se utilizará una matriz R dada por:

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (7-42)$$

7.7.2.1. Ejemplo 1

Para el primer ejemplo se propone utilizar una matriz de ponderación de estado de la forma:

$$P_1^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7-43)$$

Se presenta ahora la matriz K correspondiente a los casos 1 y 2; esto es, la ley de control correspondiente al LQR de horizonte de predicción unitario e infinito, respectivamente:

$$K_1 = \begin{pmatrix} -173 & -2.30 & -0.456 & 0 \\ 2.30 & -173 & 0 & -0.456 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (7-44)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -2.13 & -0.027 & -0.912 & 0.126 \\ 0.027 & -2.13 & -0.126 & -0.912 \end{pmatrix} \quad (7-45)$$

En lo que sigue se presentan las gráficas correspondientes al Caso 1 y al Caso 2. Para facilitar la comparación, se ha preferido mostrar cada pareja de gráficas homónimas (e.g. las gráficas correspondientes a la velocidad y el par electromagnético de los dos casos) en una sola página.

La diferencia entre los dos casos resulta muy evidente. En las Fig. 7-27 y 7-28 se comprueba inmediatamente que la ley de control para el LQR de horizonte de predicción infinito (imagen inferior) produce un mucho mejor seguimiento de la velocidad de referencia y un par electromagnético mucho más estable, además de restringido a una banda más estrecha. En las Fig. 7-29 y 7-30 se observa que el seguimiento del flujo es mucho mejor en el Caso 2. Asimismo, mientras que las corrientes del Caso 1 aparecen absolutamente distorsionadas, muestran una forma más cercana a la senoide en el caso contrario.

Una cuantificación de lo anterior se muestra en las Fig. 7-31 y 7-32: comparando el espectro armónico de las corrientes estatóricas no cabe duda de que la ley de control del Caso 2 produce mucha menor distorsión. Por último, como constatación de todo lo anunciado, se comprueba efectivamente que el seguimiento de la referencia es mucho peor cuando se utiliza la ley de control del LQR con horizonte de predicción unitario (Fig. 7-33 y 7-34).

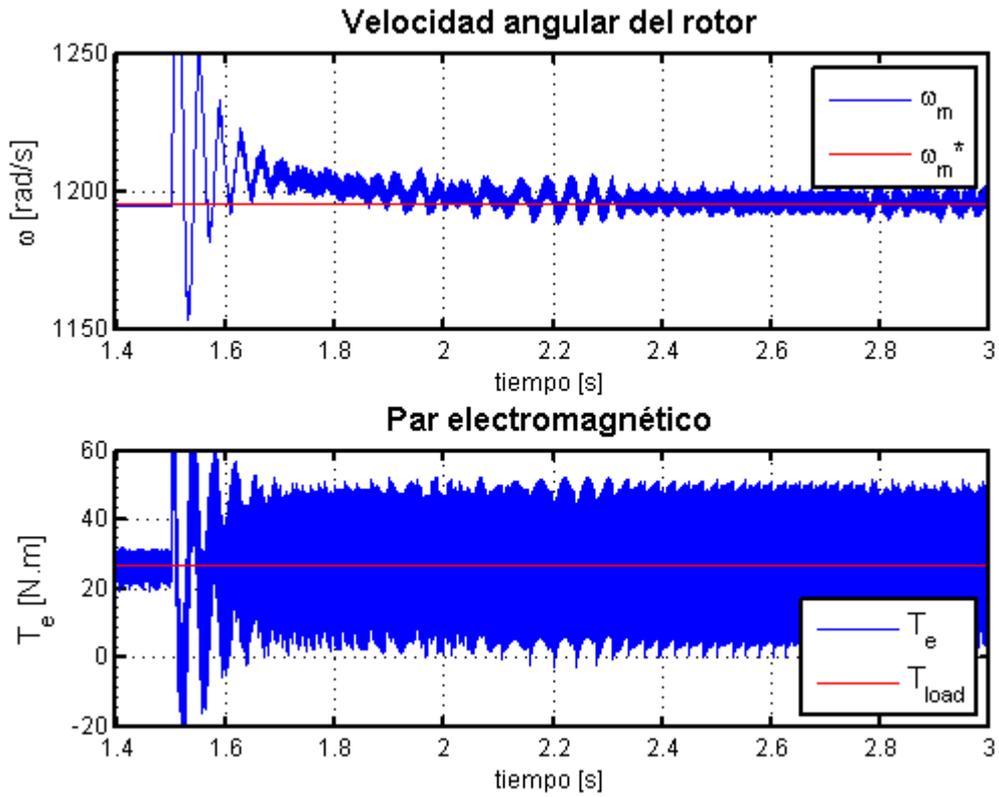


Figura 7-27: Velocidad y par motor del Ejemplo 1, Caso 1

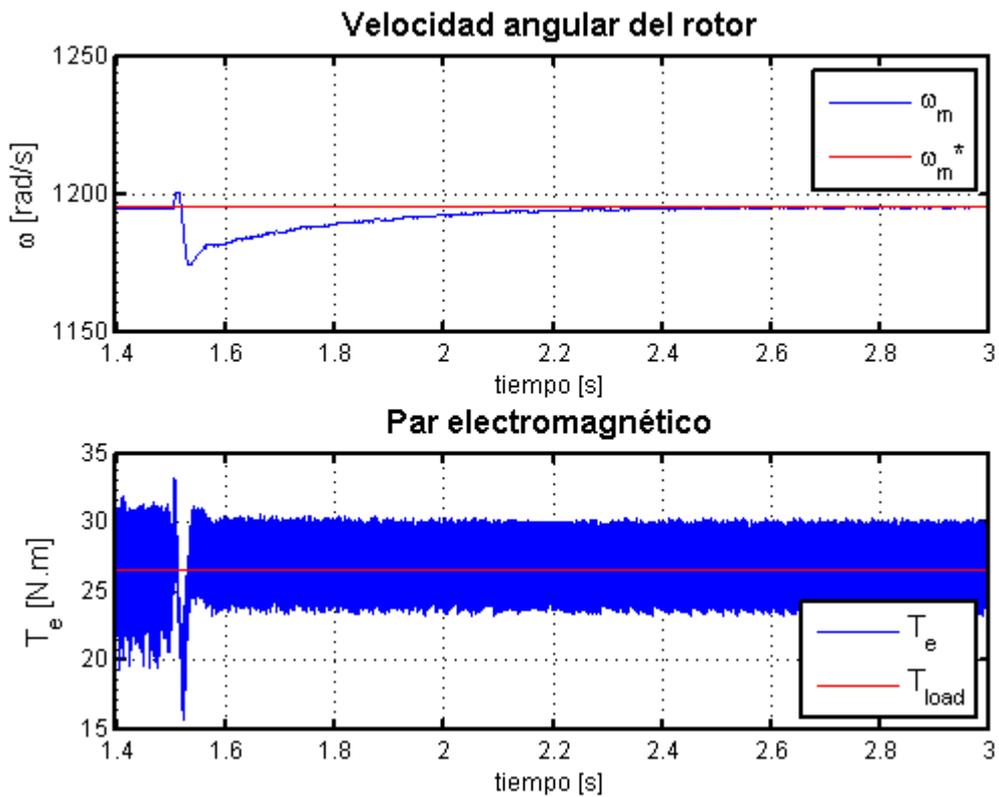


Figura 7-28: Velocidad y par motor del Ejemplo 1, Caso 2

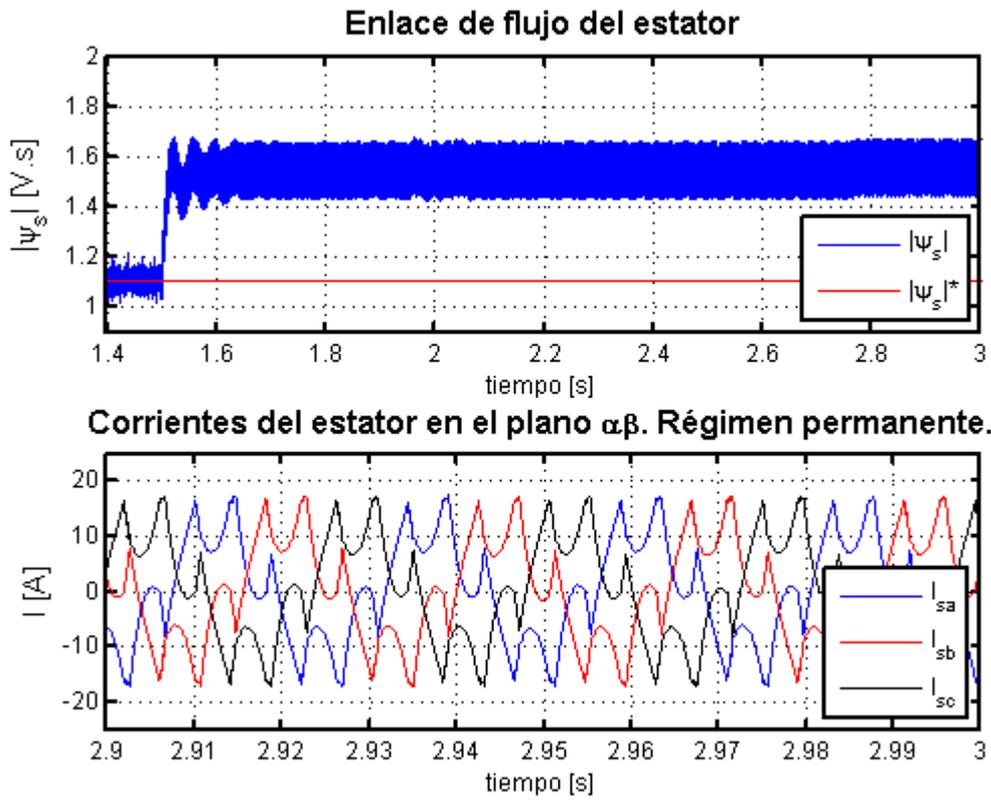


Figura 7-29: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente del Ejemplo 1, Caso 1

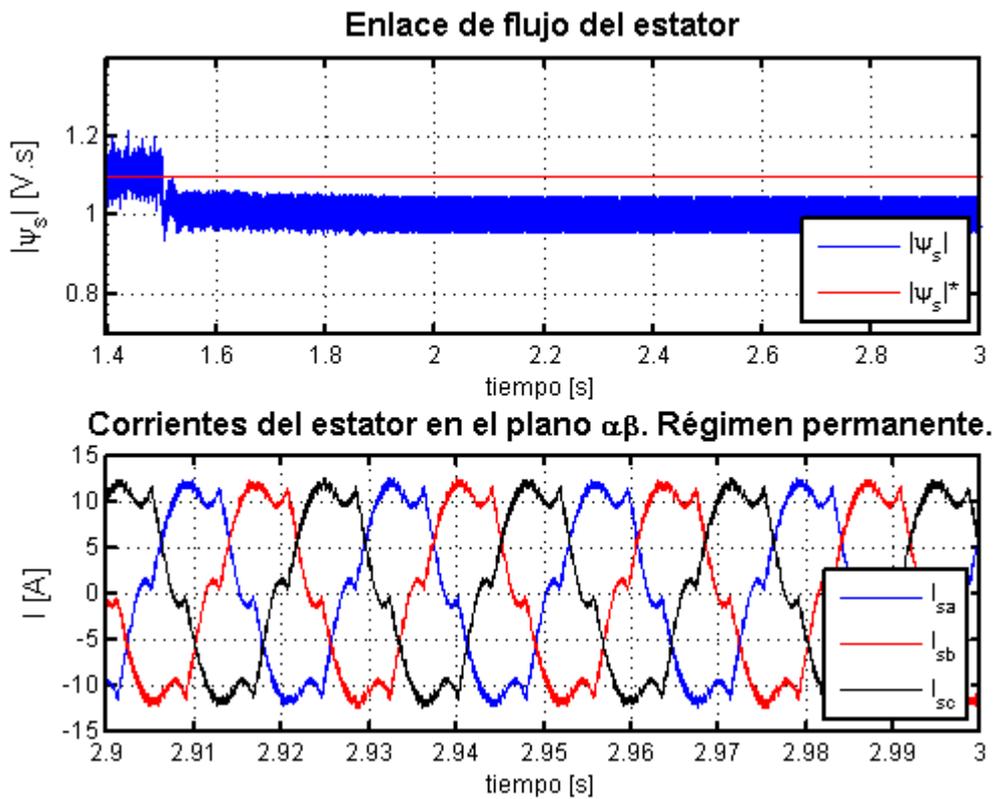


Figura 7-30: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente del Ejemplo 1, Caso 2

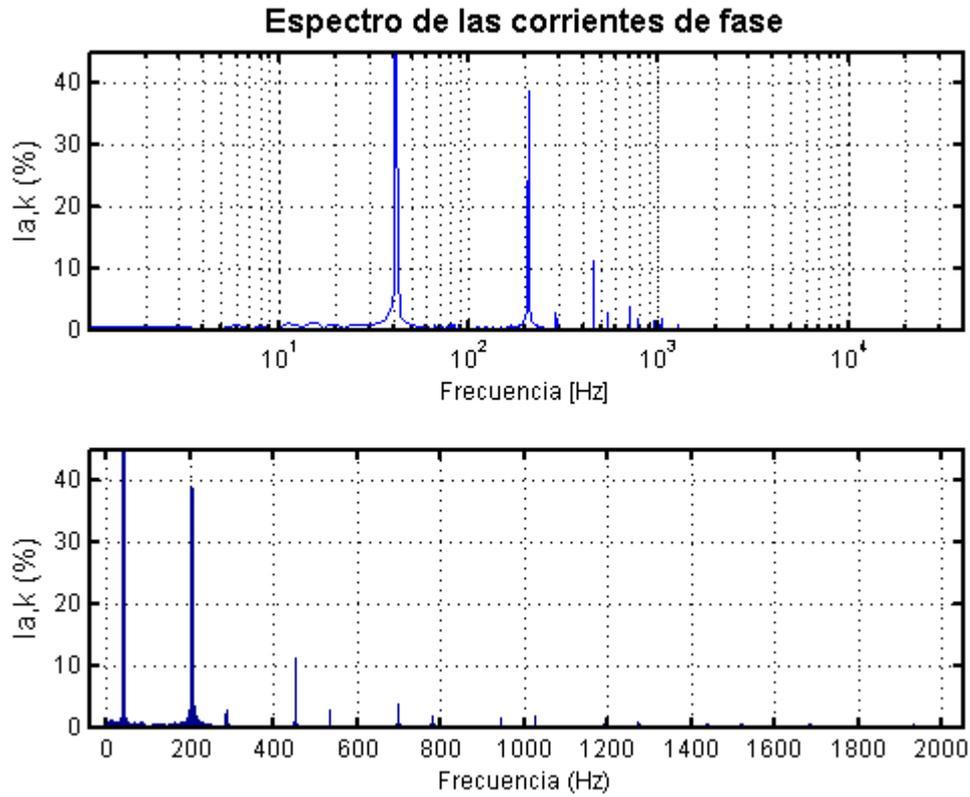


Figura 7-31: Espectro de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 1, Caso 1

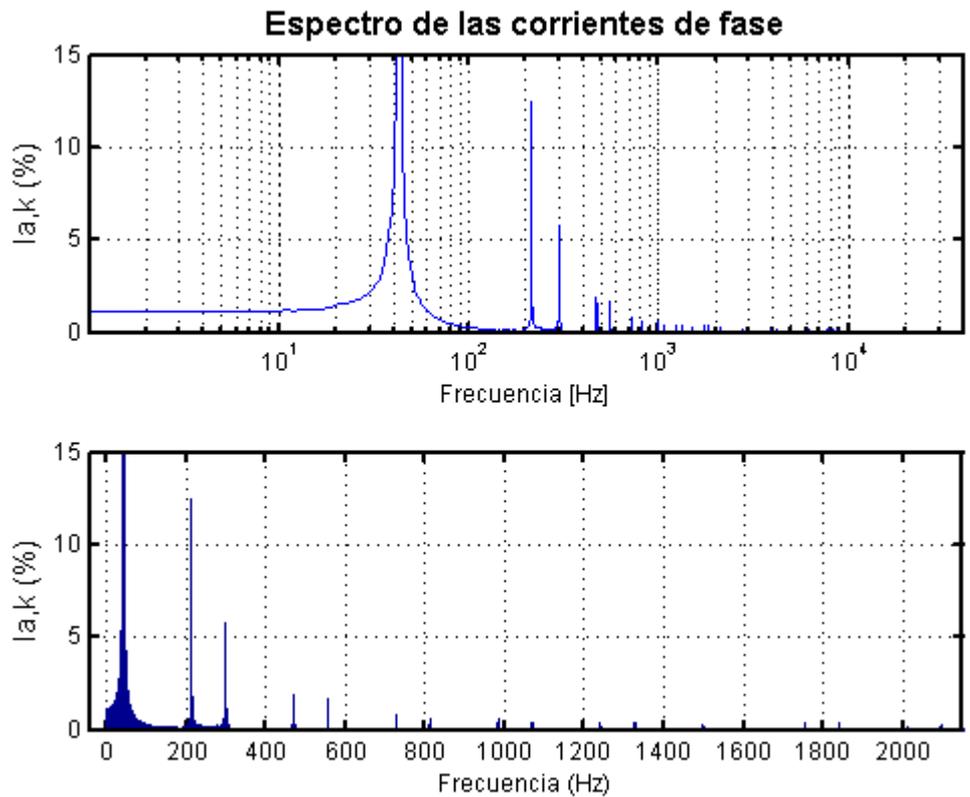


Figura 7-32: Espectro de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 1, Caso 2

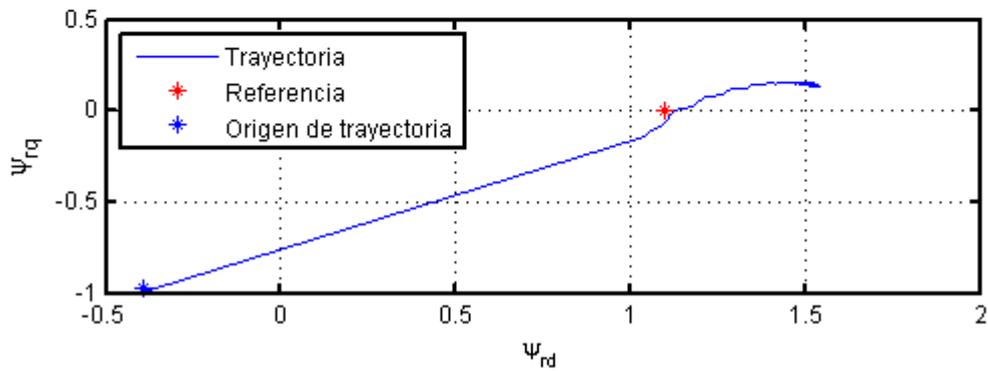
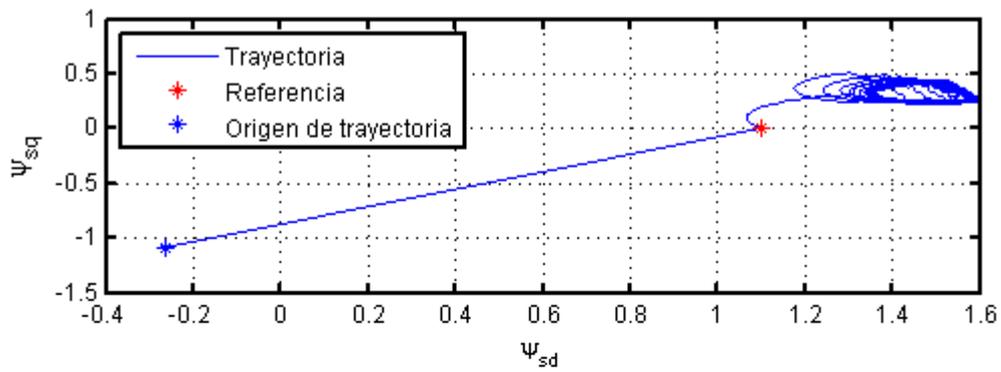


Figura 7-33: Problema de seguimiento en el Ejemplo 1, Caso 1

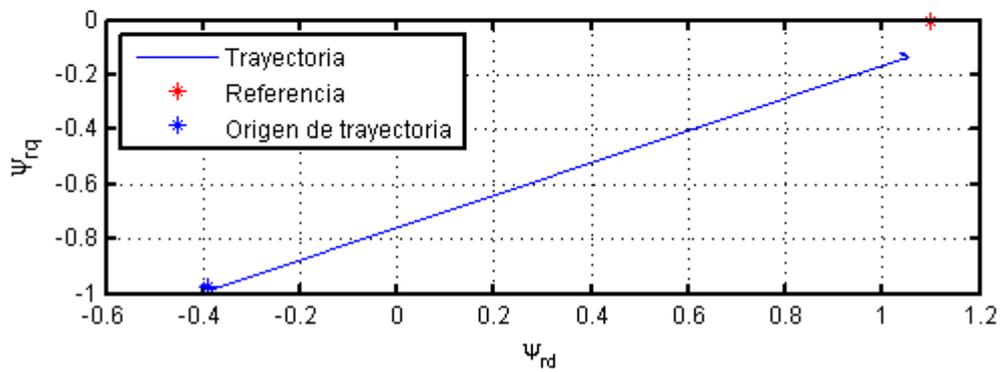
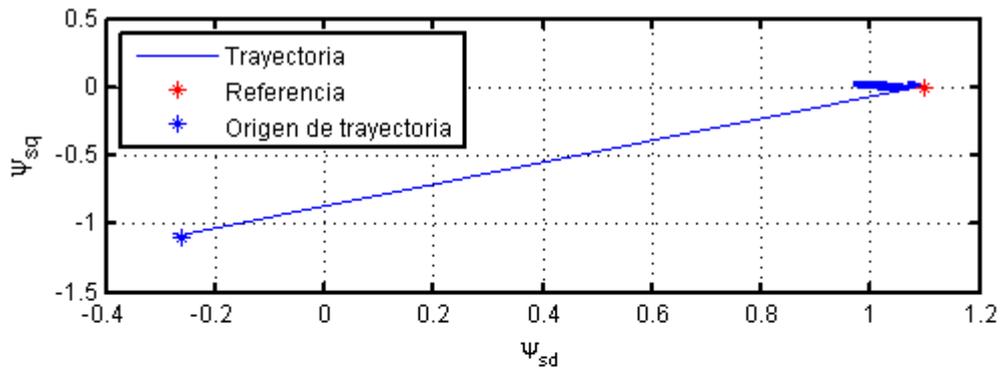


Figura 7-34: Problema de seguimiento en el Ejemplo 1, Caso 2

7.7.2.2. Ejemplo 2

En el segundo ejemplo se elige una matriz de ponderación que prima el seguimiento del flujo del estator. Se considera que el seguimiento de la referencia Ψ_{sN} es necesario tanto para mantener el flujo de la máquina como para producir el par, mientras que el seguimiento de la referencia del flujo del rotor sólo contribuye a lo segundo. Esta línea de pensamiento conduce a definir una matriz de coste de la forma:

$$P_2^h = \begin{pmatrix} \lambda_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7-46)$$

Donde $\lambda_N = 581.5036$ ha sido definido en la ecuación (7-31). Nuevamente se define la ley de control para los Casos 1 y 2 (horizonte de predicción unitario frente a horizonte de predicción infinito):

$$K_1 = \begin{pmatrix} -23.18 & -0.31 & -0.10 & 0.0002 \\ 0.31 & -23.18 & -0.0002 & -0.10 \end{pmatrix} \quad (7-47)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -22.24 & -0.29 & -0.06 & 0 \\ 0.29 & -22.24 & 0 & -0.06 \end{pmatrix} \quad (7-48)$$

En esta ocasión salta a la vista que las matrices son mucho más similares que en el Ejemplo 1. Como cabría esperar, los resultados de la simulación para los dos Casos son muy parecidos.

En las Fig. 7-35 a 7-38 se muestran las gráficas correspondientes a la velocidad del motor, el par electromagnético, el flujo del estator y las corrientes en régimen permanente. La primera observación es que el comportamiento es prácticamente indistinguible para los Casos 1 y 2. La segunda observación es que con la valoración del vector de estados (7-46) se obtienen resultados mucho mejores que en el Ejemplo 1.

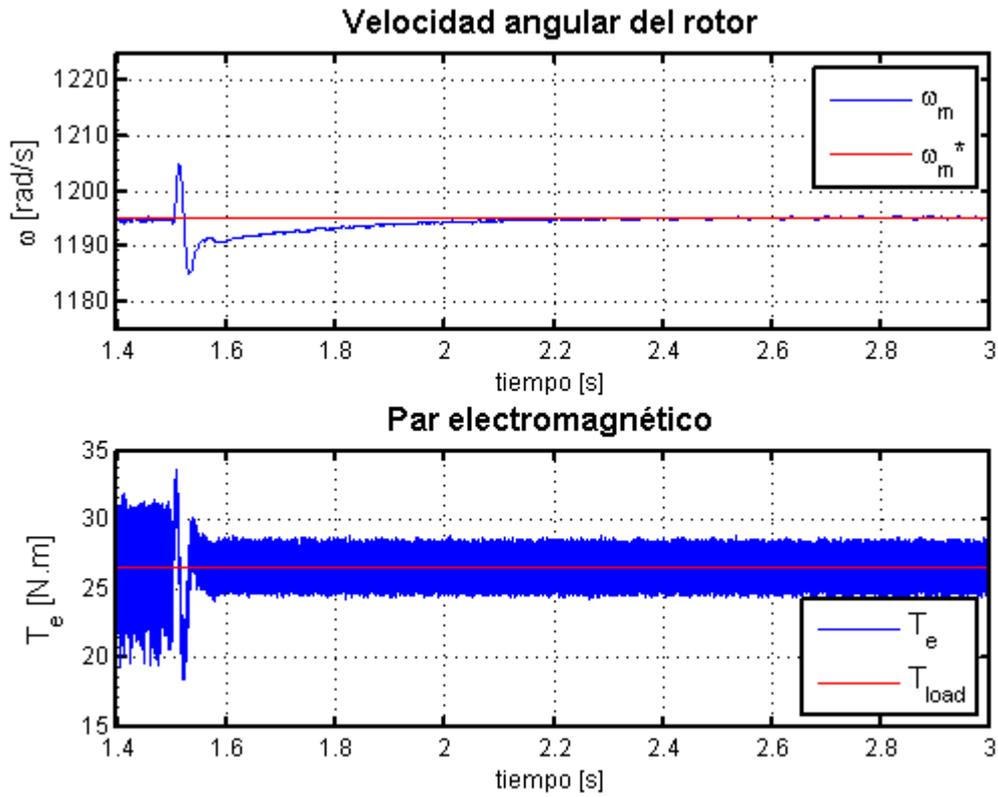


Figura 7-35: Velocidad y par electromagnético en el Ejemplo 2, Caso 1

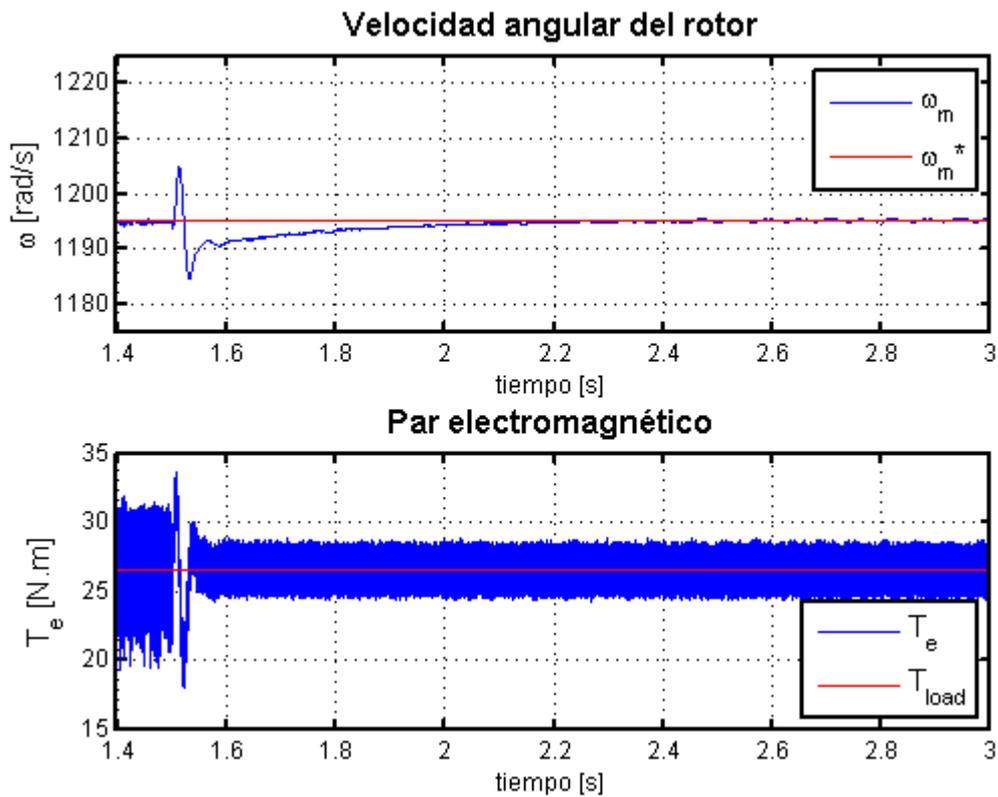


Figura 7-36: Velocidad y par electromagnético en el Ejemplo 2, Caso 2

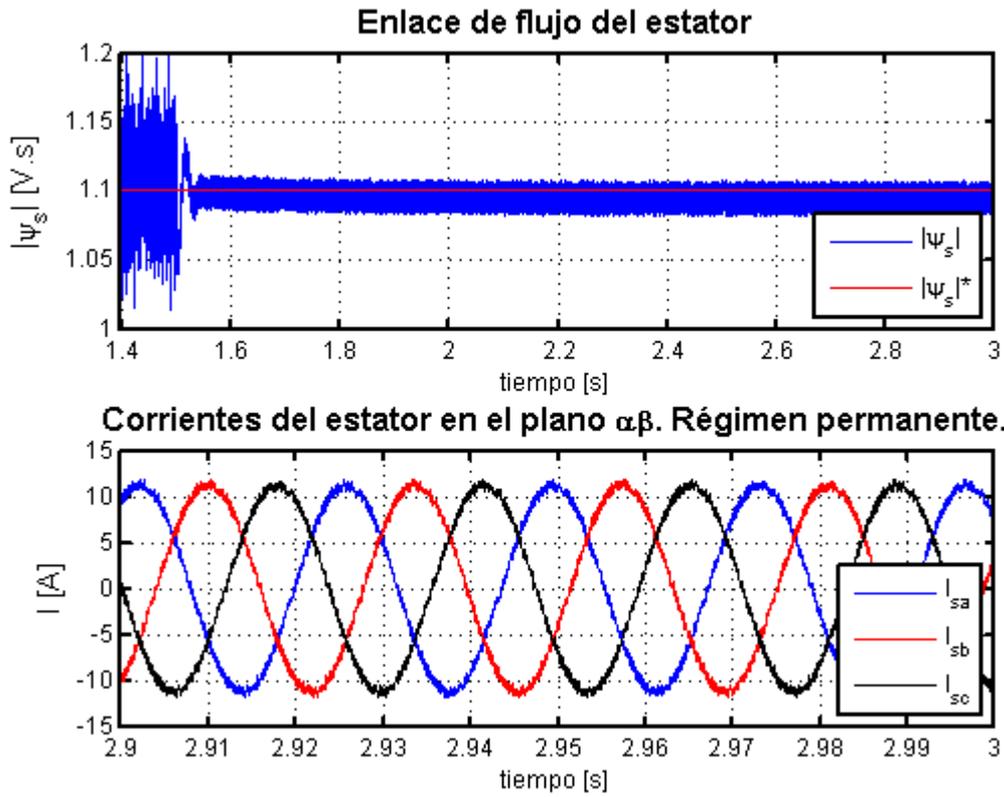


Figura 7-37: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 2, Caso 1

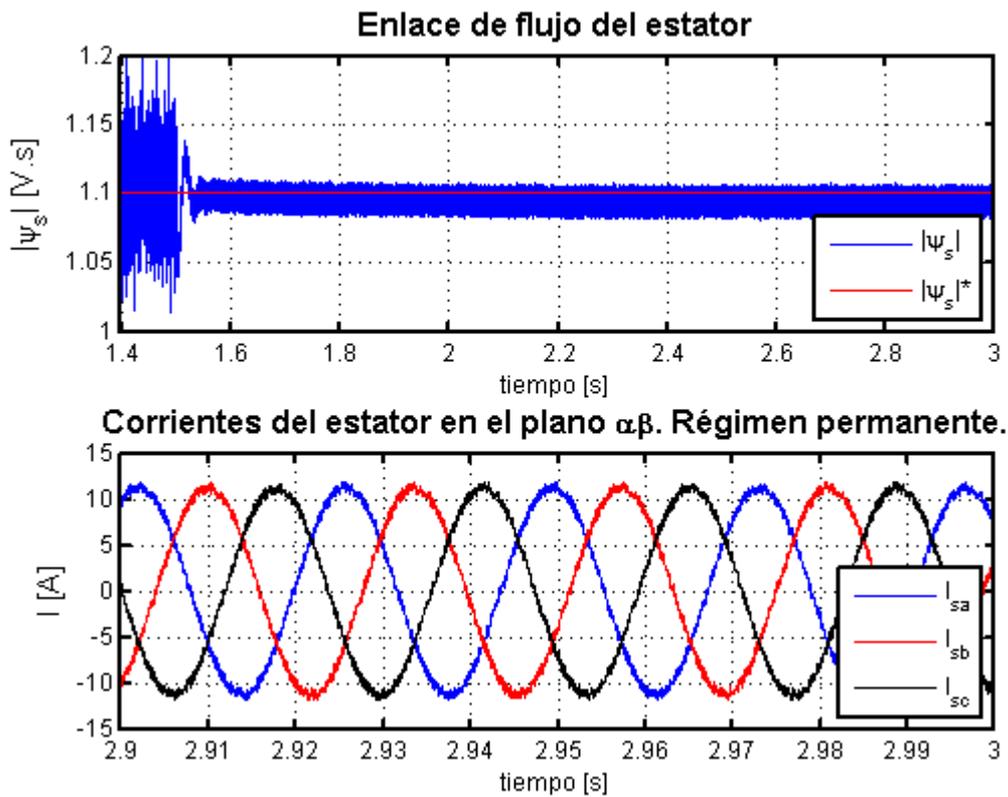


Figura 7-38: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 2, Caso 2

7.7.2.3. Ejemplo 3

Este último ejemplo es especialmente ilustrativo sobre las ventajas de apoyarse en la Ecuación algebraica de Riccati para diseñar la función de coste. En esta ocasión se propone un razonamiento contrario al anterior: se hace la suposición de que es preferible primar el seguimiento del flujo del rotor, asignándole un factor de peso mucho mayor que al flujo del estator. La matriz de coste es la que sigue:

$$P_3^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (7-49)$$

Los Casos 1 y 2 son coincidentes con los propuestos en los Ejemplos previos y las respectivas matrices de control son:

$$K_1 = \begin{pmatrix} -4.34 & -0.037 & -45.66 & 3.17 \\ 0.037 & -4.34 & -3.17 & -45.66 \end{pmatrix} \quad (7-50)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -0.17 & -0.0023 & -0.0005 & 0 \\ 0.0023 & -0.17 & 0 & -0.0005 \end{pmatrix} \quad (7-51)$$

En vista de que las matrices K_1 y K_2 corresponden a leyes de control diferentes, cabe esperar comportamientos diferentes del sistema. Las Fig. 7-39 a 7-44 demuestran que la ley de control del Caso 2 es superior en todos los aspectos a la del Caso 1: el seguimiento de la velocidad de referencia es mejor y con menos esfuerzo del par electromagnético, las corrientes están mucho menos distorsionadas y se observa un espectro armónico mucho menos contaminado. Sólo en el flujo del estator se observa un error similar (en el Caso 1 por exceso, en el Caso 2 por defecto), consecuencia del poco peso que se le ha dado en la matriz de coste (7-49).

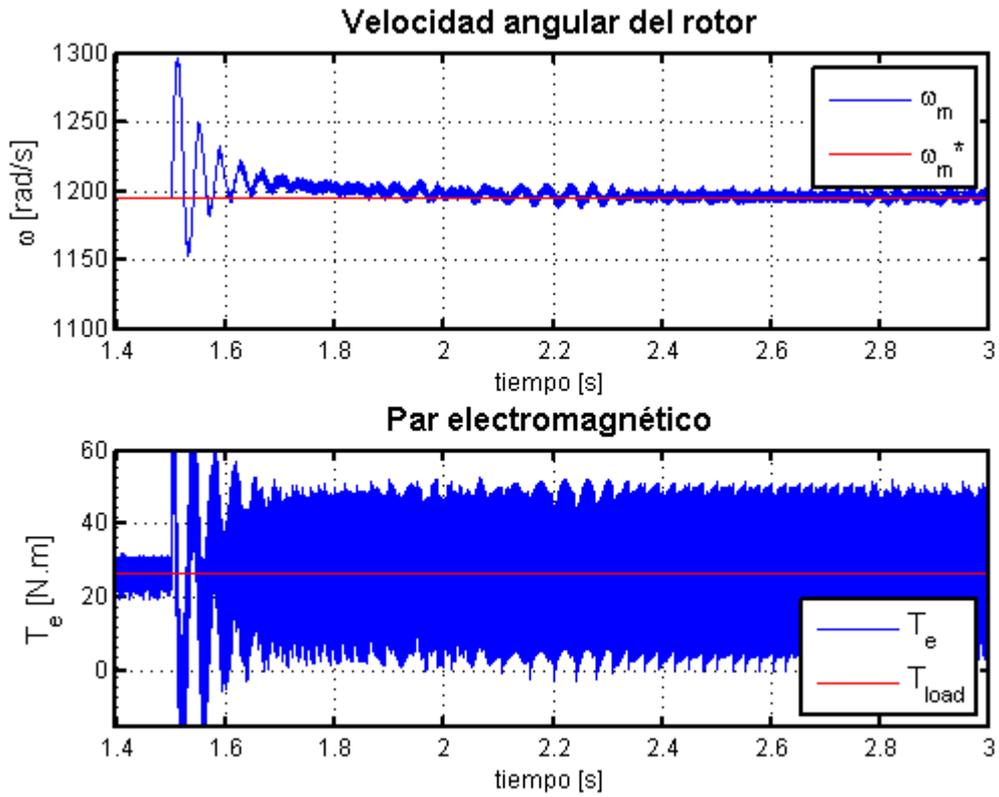


Figura 7-39: Velocidad y par del motor en el Ejemplo 3, Caso 1

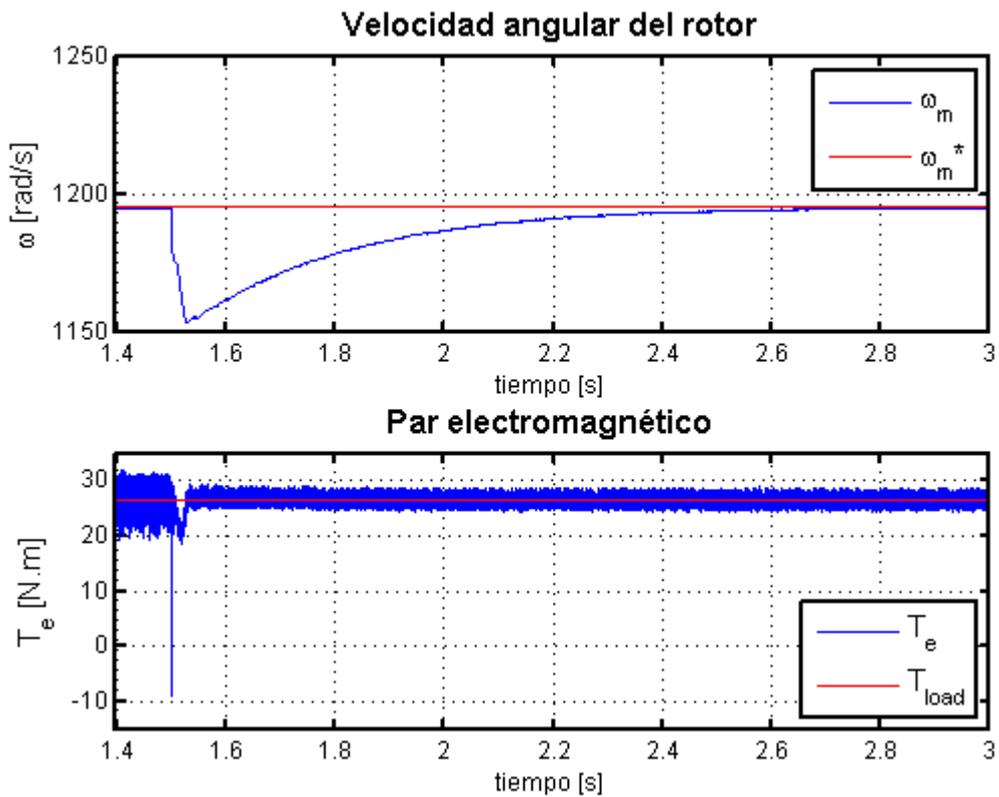


Figura 7-40: Velocidad y par motor en el Ejemplo 3, Caso 2

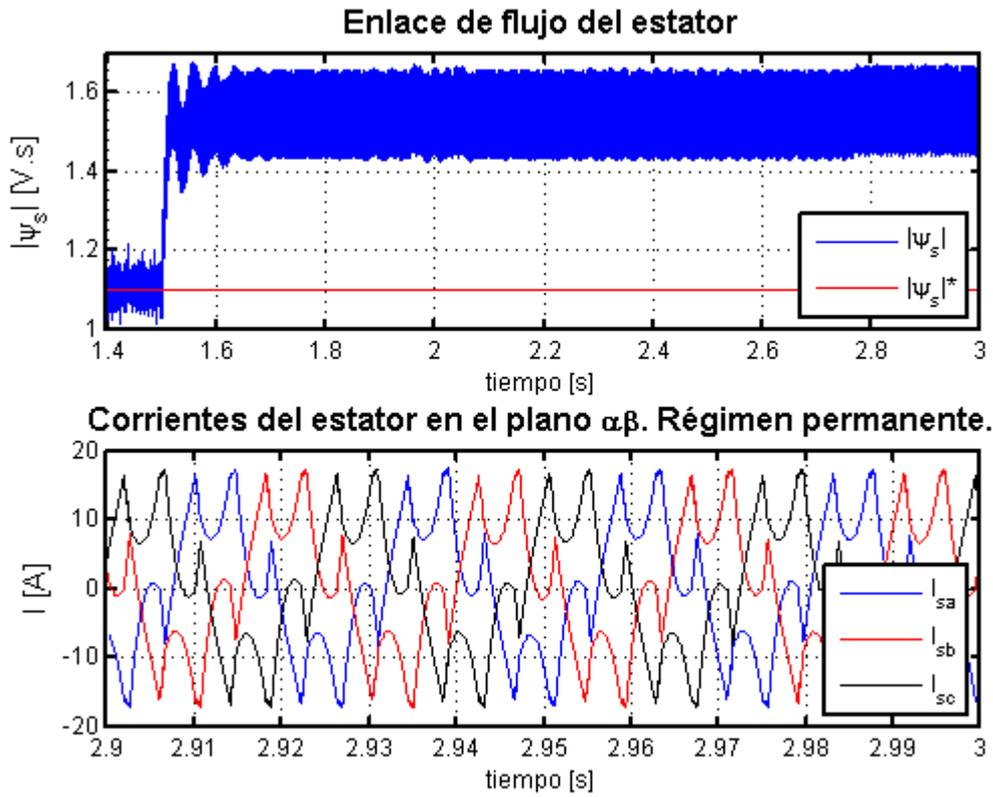


Figura 7-41: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 3, Caso 1

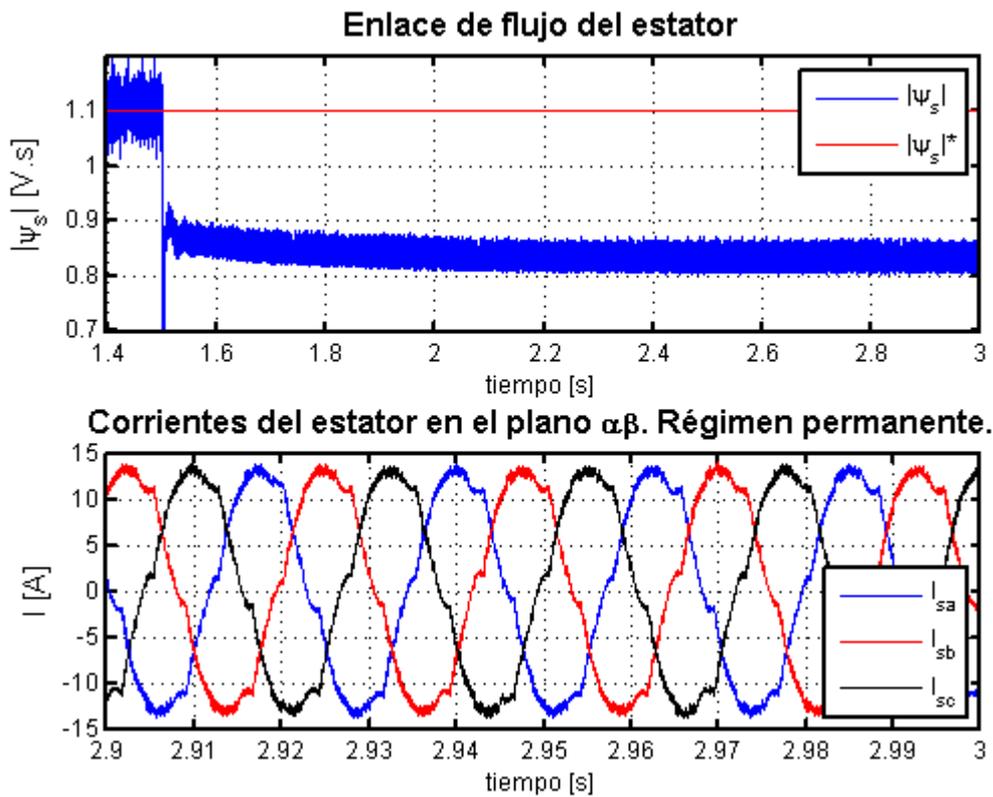


Figura 7-42: Flujo del estator y detalle de corrientes en régimen permanente en el Ejemplo 3, Caso 2

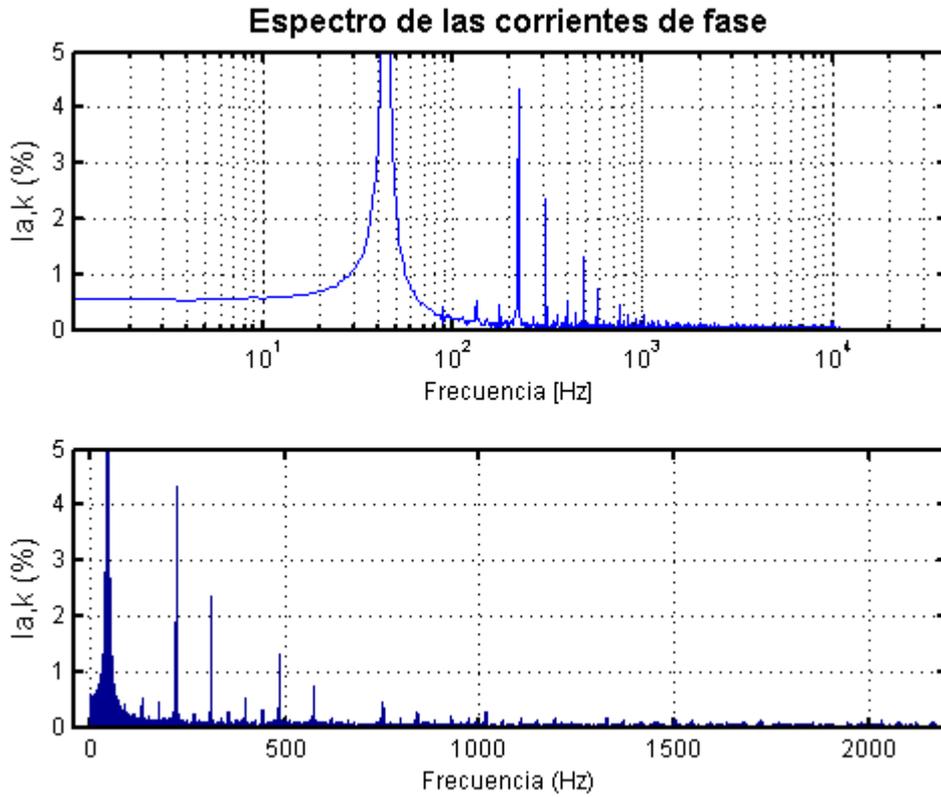


Figura 7-43: Espectro armónico de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 3, Caso 1

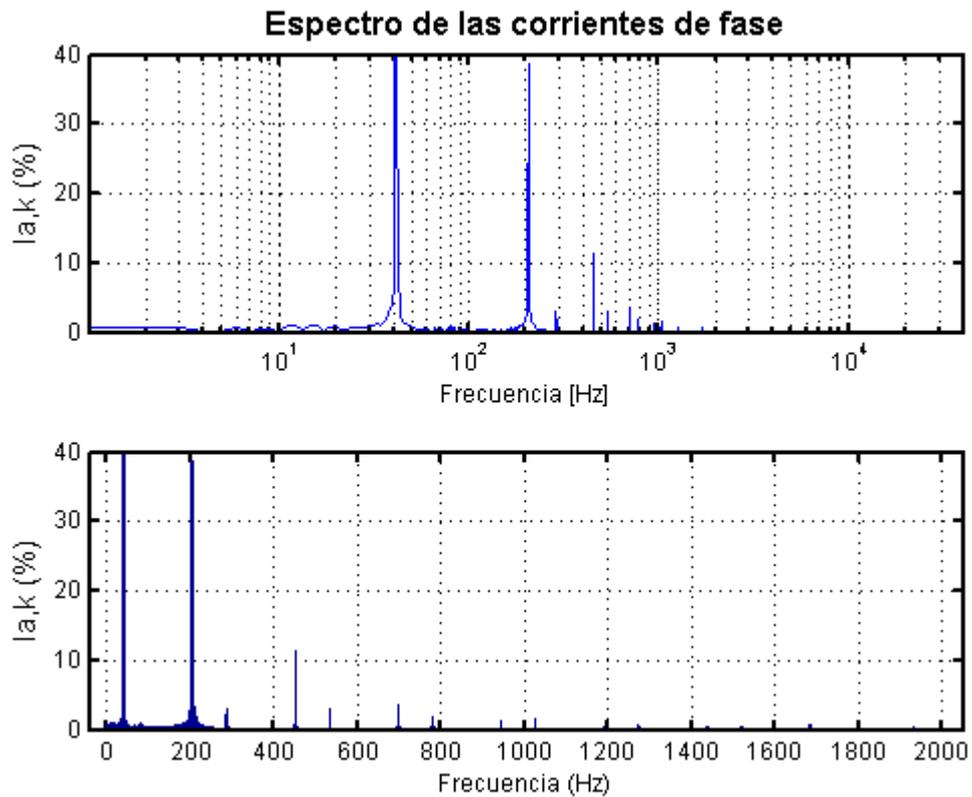


Figura 7-44: Espectro armónico de la corriente de la fase 'a' del estator en el Ejemplo 3, Caso 2

8. CONCLUSIONES

A lo largo de la monografía se ha presentado el modelo electromecánico del motor de inducción y se ha hecho una exposición de los principales esquemas de control para este tipo de máquina. Se ha profundizado en el fondo teórico del Control Predictivo Basado en Modelos (MPC) y se han comentado las aplicaciones que ha tenido en la literatura como controlador de la máquina asíncrona. Por último, se ha abordado el problema muy escasamente tratado en la literatura de la estabilidad del MPC y se ha particularizado ese estudio al control del motor de inducción.

En el Capítulo 7 se ha propuesto una aplicación del MPC con comportamiento estable acotado para dicho motor. Como se ha explicado en el lugar apropiado, los resultados han sido desiguales, pues por una parte se ha conseguido una mejora en el diseño de la función de coste, mientras que por otra parte no se ha conseguido asegurar la estabilidad del sistema. En el presente Capítulo se exponen sumariamente las conclusiones que se desprenden del presente estudio:

1. Se ha analizado la dificultad de expresar el control del motor de inducción como un problema de **control lineal cuadrático**, como primer paso para implementar un MPC con comportamiento estable acotado. Se han destacado los obstáculos que plantea tal formulación y se ha propuesto una solución en forma de control del flujo estatórico y el flujo rotórico en el plano dq .
2. Se ha derivado el modelo discreto en espacio de estados de la máquina empleando los fasores espaciales de los flujos del rotor y el estator como variables de estado (i.e. como espacio de estados).
3. Se ha estudiado la posibilidad de garantizar el comportamiento estable acotado de un motor de inducción concreto con parámetros reales, con resultado negativo. Dicho estudio ha pretendido ser lo más comprensivo posible, incluyendo un algoritmo de fuerza bruta que agotó todas las posibilidades dentro de la aproximación propuesta en [8]. Que no se haya encontrado una garantía de estabilidad en este sentido no significa, ni mucho menos, que la estabilidad no pueda asegurarse de alguna otra forma.
4. Se ha simulado con éxito el controlador MPDTC propuesto en [12], que posteriormente se ha utilizado para llevar la máquina al régimen permanente y ensayar así los nuevos esquemas de control propuestos.
5. Pese a las limitaciones encontradas y la imposibilidad de garantizar el comportamiento estable acotado, se ha propuesto un nuevo esquema de control para el motor de inducción. Este esquema está limitado al régimen permanente, no tiene en cuenta el coste computacional del algoritmo y obvia el problema de la robustez frente a imprecisiones del modelo, entre otras condiciones de validez.
6. Se ha estudiado la importancia del parámetro ω_g en el nuevo esquema de control propuesto. Se ha detectado su influencia directa sobre la velocidad final del motor y se ha propuesto un lazo de control PI que permite ajustar dicha velocidad. Los resultados se han confirmado en simulación con éxito notable.
7. Se han evaluado las ventajas de elegir la matriz de coste P como solución de la Ecuación algebraica discreta de Riccati. Se ha corroborado que en toda circunstancia este criterio de diseño supone una mejora sobre la elección puramente heurística de los factores de peso (Ejemplo 1, Sección 7.1.2.1) o la que sigue un razonamiento erróneo (Ejemplo 3, Sección 7.1.2.3). Se comprueba que esta aproximación teórica supone una alternativa real para la elección de las matrices de peso en algoritmos MPC.

REFERENCIAS

- [1] P. Vas, *Vector Control of AC Machines*, New York: Oxford University Press, 1990.
- [2] A. Linder y R. Kennel, «Model Predictive Control for Electrical Drives,» *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pp. 1793-1799, 2005.
- [3] P. Cortés, M. P. Kazmierkowski, R. M. Kennel, D. E. Quevedo y J. Rodríguez, «Predictive Control in Power Electronics and Drives,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, nº 12, pp. 4312-4324, 2008.
- [4] J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*, Essex, England: Prentice Hall, 2002.
- [5] S. Vázquez, J. I. León, L. G. Franquelo, J. Rodríguez, H. A. Young, A. Márquez y P. Zanchetta, «Model Predictive Control: A Review of its Applications in Power Electronics,» *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 8, nº 1, pp. 16-31, 2014.
- [6] J. B. Rawlings y D. Q. Mayne, *Model Predictive Control: Theory and Design*, Madison, Wisconsin: Nob Hill Publishing, 2009.
- [7] C. A. Rojas, J. I. Yuz, C. A. Silva y J. Rodríguez, «Comments on "Predictive Torque Control of Induction Machines Based on State-Space Models",» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, nº 3, pp. 1635 - 1638, 2014.
- [8] R. P. Aguilera y D. E. Quevedo, «Predictive Control of Power Converters: Designs With Guaranteed Performance,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 11, nº 1, pp. 53-63, 2015.
- [9] R. Kennel, A. Linder y M. Linke, «Generalized Predictive Control (GPC) - Ready for Use in Drive Applications?,» *Conf. Record of PESC'01 (Power Electronics Specialists Conference)*, vol. 4, pp. 1839-1844, 2001.
- [10] T. Geyer, «A Comparison of Control and Modulation Schemes for Medium-Voltage Drives: Emerging Predictive Control Concepts versus Field Oriented Control,» *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 56, nº 6, pp. 1380-1389, 2011.
- [11] P. Karamanakos, T. Geyer, N. Oikonomou, F. D. Kieferndorf y S. Manias, «Direct Model Predictive Control: A Review of Strategies That Achieve Long Prediction Intervals for Power Electronics,» *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 8, nº 1, pp. 32-43, 2014.
- [12] H. Miranda, P. Cortés, J. I. Yuz y J. Rodríguez, «Predictive Torque Control of Induction Machines Based

on State-Space Models,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, n° 6, pp. 1916-1924, 2009.

- [13] P. Cortés, G. Ortiz, J. I. Yuz, J. Rodríguez, S. Vázquez y L. G. Franquelo, «Model Predictive Control of an Inverter With Output LC Filter for UPC Applications,» *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, n° 6, pp. 1875-1883, 2009.