Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904

por

José Ferreirós

La célebre crisis de fundamentos a principios del siglo XX es un aspecto bien conocido de la historia de la matemática, pero hay que decir que –como tantas veces sucede– en la mayor parte de las exposiciones no suele encontrarse el desarrollo real de la cuestión. La presentación habitual nos habla de cómo el descubrimiento de las antinomias hacia 1900 supuso una grave crisis para la concepción conjuntista de los fundamentos, que entonces estaba perfectamente asentada; a partir de ahí surgirían los diversos intentos de clarificar los fundamentos, que –según esta versión simplista– se reducen a tres: logicismo, intuicionismo, formalismo; y el debate más intenso tendría lugar en los años 1920, con los desarrollos enfrentados del programa de Hilbert y la matemática intuicionista, hasta llegar al sorprendente desenlace de los teoremas de incompletitud de Gödel. Poniéndonos un tanto estrictos, habría que decir que todas las afirmaciones anteriores son falsas, o cuando menos muy sesgadas.

El debate sobre fundamentos surgió en realidad durante los años 1870, sobre todo a propósito de la fundamentación del análisis y las definiciones de los números reales, pero también con motivo de la disputa entre la teoría de funciones riemanniana y weierstrassiana, y las publicaciones de Dedekind sobre teoría de números algebraica[2]. Fue sobre todo un debate alemán (al menos en esta primera parte, ampliado durante los años 1890 al resto del mundo matemático) y se consolidó una división entre los partidarios más radicales de los métodos modernos, aglutinados en torno a la Universidad de Göttingen,

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

[2]Sobre este tema pueden verse los primeros capítulos de mi libro [1999], o mi artículo [1998] en esta misma revista.

y los críticos de dichos métodos, centrados en la universidad más importante hasta los años 1890, Berlín, que tendían de forma más o menos acusada al constructivismo. La disputa tuvo que ver sobre todo con la cuestión de qué metodología puede admitirse, y con la aceptación de ciertos axiomas fundamentales: fue más que nada un debate entre *modernos* y *constructivistas*. Ahora bien, si hay que citar posiciones importantes, deberíamos mencionar del lado "moderno" el logicismo, el platonismo (Cantor, Gödel) y el formalismo (en varias versiones), y del lado constructivista el intuicionismo, el predicativismo (Poincaré, Weyl) y varios otros enfoques constructivistas (Skolem, etc.)[3].

En cuanto a la cuestión de cuándo se dieron las discusiones más intensas, lo cierto es que hubo varios *períodos calientes*: los años en torno a 1870, con las discusiones citadas más arriba, interviniendo personajes como Riemann, Weierstrass, Kronecker, Cantor y Dedekind; los años intermedios de la década de 1880, momento en el que ya hay una conciencia precisa de las posiciones en disputa (articulada por du Bois-Reymond, Cantor, Kronecker y Dedekind en diversos trabajos) y en el que la teoría de conjuntos adquiere protagonismo; los años 1900-1905, en los que no sólo se discutió a propósito de las antinomias, sino por el axioma de elección y el problema del continuo; o los años en torno a 1921, donde la idea de la *crisis* se presentó de un modo especialmente dramático.

En la presente ocasión, me gustaría discutir con detalle lo que sucedía hace exactamente 100 años. Y es que la segunda mitad de 1904 fue un momento álgido, casi diríamos que dramático, en el desarrollo de los acontecimientos. Los sucesos que nos van a interesar estuvieron directamente relacionados con la celebración del 3er Congreso Internacional de Matemáticos en Heidelberg (Alemania), del 8 al 13 de agosto. Allí fue donde Hilbert expuso un primer germen de las ideas que darían lugar a su célebre programa de fundamentación, pero sobre todo donde J. König presentó una demostración muy cuidadosa de que la cardinalidad del continuo no puede ser un alef. Esta conferencia de König causó sensación: el propio Cantor estaba presente, y la reacción fue de gran intensidad; hubo después una reunión informal de varios matemáticos donde el problema fue discutido en detalle. Finalmente, al mes siguiente, Zermelo dio con su demostración del teorema del buen orden y Hausdorff encontró el fallo de la prueba de König en un lema debido a Bernstein. Todos estos desarrollos estuvieron muy relacionados con el grupo de matemáticos de Göttingen y con la inspiración de David Hilbert (1862-1943).

[3]Una visión muy similar de la crisis se ofrece en el libro de De Lorenzo [1998]. Sobre las distintas posiciones en fundamentos, por desgracia no hay ningún libro muy bueno en nuestro idioma; pueden consultarse Fraenkel, Bar-Hillel y Levy [1973] o Feferman [1998], entre otras obras.

1. Hilbert, los primeros ICM y la implantación de la matemática moderna

Los primeros Congresos Internacionales tuvieron mucho que ver, precisamente, con la polémica entre modernos y constructivistas, contribuyendo de manera importante a la difusión de las nuevas ideas y la teoría de conjuntos que servía para codificarlas. Ya el primero, en 1897, sirvió para refrendar las nuevas ideas a través de las conferencias plenarias de Adolf Hurwitz (1859-1919) sobre desarrollos recientes en la teoría general de las funciones analíticas, y de Jacques Hadamard (1865-1963) sobre aplicaciones posibles de la teoría de conjuntos (donde apuntaba hacia el estudio de conjuntos de funciones en abstracto). Vale la pena indicar que, al celebrarse el Congreso en Zurich, donde Hurwitz era profesor, los matemáticos de Göttingen tuvieron la ocasión de imponer su orientación; recordemos que Hurwitz era discípulo del poderoso y muy influyente Felix Klein (1849-1925), el "ministro de exteriores" de la matemática alemana[4], además de amigo íntimo de Hilbert.

El segundo congreso fue otro asunto, ya que se celebró en París, y los franceses –con la excepción de Hadamard– mantenían cierta distancia con respecto a las polémicas fundacionales, y actitudes metodológicas más bien tradicionales. Este era el caso desde luego de todo un *decano* de la matemática francesa como Charles Hermite (1822-1901), pese al papel que desempeñó en la transmisión de ideas alemanas a Francia. El modo de trabajo de Hermite estaba lejos de los métodos modernos: trabajaba con expresiones analíticas conocidas, y la búsqueda de principios fundamentales no era lo suyo; se interesó especialmente por las ideas de Weierstrass, mientras que los nuevos enfoques de Dedekind y Cantor le resultaron totalmente ajenos[5]. Sin duda, algunas de las contribuciones francesas avanzaban ideas importantes para la matemática moderna, pero lo hacían de una manera relajada, sin la radicalidad de un Riemann, Dedekind, Cantor o Hilbert. En todo caso, muchos de ellos mostraban simpatía por las tesis críticas de Kronecker, como se había demostrado en los artículos filosóficos de Henri Poincaré (1854-1912) desde 1894, y como se demostraría en las discusiones de Baire, Borel, Lebesgue y Hadamard sobre el axioma de elección en 1905.

Claro está que nuestra memoria es siempre muy parcial, y el congreso de 1900 se recuerda sobre todo por la conferencia que impartió Hilbert[6]. Conviene aclarar que no se trató de una conferencia plenaria, sino de una comunicación en la Sección de "Bibliografía e Historia" (!); pero en la publicación final de las

[4]La frase, muy apropiada, es de Fraenkel [1967], 152. Klein era también importante como "ministro del interior", gracias a sus relaciones con el verdadero Ministro, a su papel en la DMV, etc.

[5]Ver por ejemplo los comentarios de M. Noether [1902], 384.

[6]Ver Gray [2003].

actas del congreso, se decidió incluir el texto de Hilbert junto a las conferencias plenarias “dada su gran importancia”.

El vivaz y atrevido Hilbert, siempre activo y original, decidió hacer un intento de “levantar el velo” de lo que el futuro deparaba a las matemáticas. Naturalmente, su verdadera intención era contribuir a determinar ese futuro, como también estaba haciendo entonces, con otros medios, su mentor y aliado Felix Klein. De los 23 problemas que había seleccionado, Hilbert sólo tuvo tiempo para discutir 10, pero en todo caso decidió empezar con el *problema del continuo* de Cantor. No era una decisión casual, sino toda una declaración de intenciones y una apuesta sobre dónde estaría el futuro de las matemáticas: ¡el futuro pertenecía a los modernos! Hilbert mostraba sus afinidades de la manera más radical, poniéndose del lado de Cantor, de sus números transfinitos y de sus ideas más especulativas.

Georg Cantor
(1845-1918)

David Hilbert
(1862-1943)

Vale la pena comentar un par de detalles al respecto, por la importancia que tienen para lo que sigue. Además de recordar el principal problema pendiente de la teoría cantoriana, que el propio Cantor –sumido ahora en crisis mentales– llevaba años sin mencionar públicamente[7], Hilbert dedicaba la mitad de su discusión a un segundo problema, el del buen orden. Un conjunto ordenado [de números] está dotado de un *buen orden* cuando “no sólo en

[7]De todos modos, Hilbert y sus colaboradores sabían muy bien que Cantor llevaba años planeando un artículo donde discutiría las antinomias y daría una interesante “demostración” del teorema de buen orden. Ver Purkert & Ilgauds [1987]. También lo sabían otros, como Dedekind [Cantor 1932], o Hausdorff [Purkert 2002], a través de sus contactos con el propio Cantor.

el propio conjunto, sino también en cada uno de sus subconjuntos, existe un primer número [elemento]”. Obviamente, el conjunto de los números reales en su orden habitual no está bien ordenado, y surge la pregunta de si es posible reordenarlos de manera que se les dote de un buen orden, cuestión

> que en opinión de Cantor debe contestarse afirmativamente. Me parece sumamente deseable que *obtengamos una demostración directa de esta notable afirmación de Cantor*, digamos, mediante la determinación real [y concreta] de un tal ordenamiento de los números reales... (Hilbert 1900, 299).

Hoy sabemos que Hilbert estaba pidiendo algo imposible, al menos con los métodos y los axiomas de la teoría de conjuntos tal como hoy la conocemos. Y es que su formulación, curiosamente, parece pedir una determinación *constructiva* del buen orden en cuestión. Lo cual nos recuerda que, pese a ser el autoproclamado paladín de los métodos modernos en matemáticas, Hilbert a menudo recurrió a la utilización de elementos kroneckerianos o constructivos (como sucede, por cierto, en su famoso programa fundacional basado en la teoría de la demostración).

También nos interesa mencionar algo del segundo problema presentado por Hilbert. De nuevo, estaba elegido estratégicamente para enfatizar la importancia de los métodos modernos: se trata del *problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética* [de $\mathbb{R}$], lo que servía para llamar la atención hacia la nueva axiomática de inspiración conjuntista. Y de nuevo hay una última parte en la discusión de este problema que apunta a los sucesos que nos van a interesar. Hilbert destacaba la importancia de la demostración de consistencia al establecer la célebre y polémica tesis de que tal demostración basta para afirmar la “existencia matemática” de los números reales en tanto *concepto* matemático y, más concretamente, en tanto *conjunto infinito* (el continuo). Y pasaba a decir que exactamente en el mismo sentido existen también:

> las clases de números [ordinales transfinitos] y las potencias [o cardinales transfinitos] superiores de Cantor. Pues tengo la convicción de que también la existencia de estos últimos podrá ser demostrada en el sentido que acabo de indicar, igual que la del continuo, y contrariamente a lo que sucede con el conjunto de absolutamente todas las potencias o alefs de Cantor; conjunto para el cual, como puede mostrarse, no es posible establecer un sistema de axiomas consistente, en el sentido que establecido por mí, y que por tanto resulta ser, en mi terminología, un concepto que no existe matemáticamente. (Hilbert 1900, 301).

Tenemos aquí la primera indicación publicada de la existencia de antinomias en la teoría de conjuntos, pero era una indicación tan vaga que probablemente no fue comprendida. El caso es que Hilbert y los matemáticos de Göttingen conocían, gracias a cartas de Cantor fechadas en 1897 y 1899, las antinomias del "conjunto" de todos los ordinales (habitualmente llamada de Burali-Forti) y el "conjunto" de todos los cardinales (de Cantor)[8]. A esto precisamente se refiere Hilbert en su última frase, en lo que parece ser una dudosa aplicación inversa de su principio sobre la existencia matemática, ya que de la inexistencia como conjunto demostrada por Cantor concluye la inexistencia de un sistema axiomático consistente.

El genial Cantor, arrollador tanto por su personalidad impetuosa como por su capacidad creativa en matemáticas, vio enseguida grandes posibilidades en las antinomias. En primer lugar, demostraban que las ideas logicistas de Dedekind y otros no eran sostenibles, y por tanto le parecía que venían en apoyo de su visión metafísica de la teoría de conjuntos. En segundo lugar, pronto comprendió que la antinomia de los ordinales transfinitos podía dar rendimientos matemáticos (véanse las cartas a Hilbert y a Dedekind de 1899, en los trabajos citados en la nota anterior). La idea era la siguiente: supongamos que un conjunto C no tiene por cardinal un alef, entonces debe ser posible establecer una biyección entre sus elementos y los ordinales, pero no sólo con un segmento de los ordinales (lo que haría del cardinal de C un alef), sino con *todos* los ordinales. Ahora bien, un conjunto equipotente con un "conjunto inconsistente" debe ser también inconsistente, y lo mismo debe suceder con C, por contener un subconjunto inconsistente.

Pero este razonamiento intuitivo debía ser precisado, y los principios no estaban claros para Cantor. Por eso buscó la ayuda de matemáticos de orientación más lógica como Dedekind y Hilbert, pero tampoco aquí encontró la ayuda necesaria. Finalmente, tras años planeando una tercera parte de sus *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos* (publicados en 1895 y 1897 por los *Mathematische Annalen*), la cuestión se quedó en el tintero. Sin embargo, el mismo argumento intuitivo fue publicado en nuestro famoso año de 1904 por el inglés Philip Jourdain (1879-1921), quien sostuvo correspondencia con Cantor, Frege y Russell, y sería luego el primero en escribir sobre la historia de la teoría de conjuntos (véase Jourdain 1904).

Volviendo a Hilbert, con lo anterior habrá bastado para entender la naturaleza de su apuesta y el gran papel que desempeñó con sus intervenciones y escritos en la difusión de los métodos modernos y la teoría de conjuntos. Pero hay que acordarse también y sobre todo de su influencia directa sobre el amplio grupo de matemáticos que se reunía en Göttingen. Felix Bernstein (1878-1956), por ejemplo, había estudiado en Halle con Cantor, pero escribió su tesis bajo la dirección de Hilbert[9]; el título era *Investigaciones en teoría de conjuntos*, y

[8]Cantor encontró estos argumentos en 1896, mientras trabajaba en su presentación sistemática de la teoría de conjuntos transfinitos. Ver Cantor [1932], Cantor [1991], Dedekind [1932], vol. 3, Purkert & Ilgauds [1987].

[9]Una dirección nunca muy atenta, fuera de la asignación del tema y las orientaciones iniciales: en el mismo año se presentaron ¡ocho tesis bajo su dirección! Sólo volvemos a encontrar tesis sobre temas de conjuntos y fundamentos en 1910 con K. Grelling, y en 1918 con H. Behmann (Hilbert [1935], 431-33).

la fecha de la defensa marzo de 1901. En este trabajo, Bernstein ofrecía una demostración de la siguiente ecuación entre alefs -que como veremos traería secuelas-: $\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha}$ (Bernstein 1901, 50). También Ernst Zermelo (1871-1953) ha dejado escrito que fue precisamente la influencia decisiva de Hilbert lo que le condujo de la matemática aplicada en que trabajó al habilitarse (hidrodinámica, mecánica estadística) a la teoría de conjuntos y la lógica[10].

Ya en el invierno de 1900-1901 Zermelo impartía en Göttingen un curso sobre teoría de conjuntos, que parece haber sido el primero sobre la materia en cualquier universidad, y enseguida descubrió la antinomia del conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos (habitualmente llamada de Russell). También Hilbert había buscado su propio camino en el campo de las antinomias, llegando a formular una que a su entender era "puramente matemática", pero que resulta sin duda menos relevante que las habituales[11].

Así pues, en Göttingen era bien conocido el problema de las antinomias antes de que tuviera lugar el notable intercambio de cartas entre Russell y Frege, y la publicación de los libros de ambos que dieron a conocer la cuestión a bombo y platillo en 1903: respectivamente, *The Principles of Mathematics*[12] y el segundo volumen de *Grundgesetze der Arithmetik*. Es más, Bernstein (que conoció el asunto de primera mano) nos informa de que la cuestión había sido discutida, sin llegar a un resultado claro, en varias de las *Naturforscherversammlungen* alemanas, esto es, los congresos de científicos, en los cuales había siempre una sección de matemáticas (Bernstein 1905, 187). Pero quizá los de Göttingen no supieron reflexionar con suficiente profundidad sobre la naturaleza del problema planteado. Hilbert creía poder responder al desafío de las antinomias mediante demostraciones de consistencia que emplearían "métodos de demostración conocidos" (1900, 300). Zermelo no parece haberse preocupado en exceso a la vista de su antinomia, que sin embargo era toda una demostración de contradicción para las ideas habituales –las de Dedekind, Frege, el primer Hilbert, y Russell– acerca de los conjuntos[13]. Todo parece indicar que fue la respuesta inequívoca de Frege, secundada por Russell, lo que finalmente les hizo conscientes del alcance de la situación.

Como diría el propio Hilbert retrospectivamente, la antinomia de Zermelo-Russell tuvo "un efecto realmente catastrófico en el mundo matemático" (Hilbert 1927, 169). Por cierto tiempo, el propio Hilbert creyó que Kronecker estaba en lo cierto al exigir una restricción radical de los métodos y axiomas admitidos[14]. Pero su confianza en la matemática moderna, su fecundidad de

[10] Peckhaus [1990].

[11] Sobre Zermelo, ver Rang & Thomas [1981], y sobre Hilbert, Peckhaus & Kahle [2002].

[12] No confundir con los *Principia Mathematica* de 1910-1913, escritos por Whitehead y Russell.

[13] Hay que insistir en que Cantor no era defensor de la llamada teoría "ingenua" de conjuntos -basada en el axioma de comprehensión-, razón por la cual las antinomias no le afectaban a él sino a Dedekind; sobre este tema, vease Purkert & Ilgauds [1987], o mi [1999].

[14] Reminiscencias de Paul Bernays en Reid [1970].

ideas y su optimismo natural acabaron imponiéndose. La reacción fue presentada precisamente en la conferencia plenaria que impartió, ya como gran figura consagrada de la matemática a nivel mundial, en el Congreso Internacional de 1904. Esta reacción consistió en desarrollar su idea de 1900 sobre las demostraciones de consistencia como garantes de la existencia de conjuntos. Para ello, modificó sensiblemente sus planteamientos con respecto al tipo de métodos que sería necesario aplicar, recurriendo a métodos propios del constructivismo de Kronecker a fin de establecer una demostración de consistencia puramente sintáctica.

En 1900 Hilbert esperaba resolver la cuestión aplicando métodos conocidos de la teoría de los irracionales, con lo que seguramente quería referirse sin más a métodos conjuntistas habituales, como el de las cortaduras de Dedekind o el de las sucesiones fundamentales de Cantor[15]. Esta primera reacción consistía, pues, en intentar demostrar la consistencia de los axiomas elaborando un modelo mediante métodos conjuntistas, justamente a la manera cómo Dedekind había mostrado (1888) que había modelos de sus axiomas para la aritmética. Pero era una reacción ingenua, al no advertir todavía el alcance del desafío que las antinomias planteaban. Por cierto, es importante tener en cuenta que durante los años 1890 Hilbert fue un seguidor del logicismo de Dedekind. Todavía en 1899, en la introducción de su curso sobre geometría euclidea que acabó de preparar las famosas ideas de *Grundlagen der Geometrie*, leemos que "las leyes de la lógica pura" incluyen a "toda la aritmética", respecto a lo cual remite al libro de Dedekind, donde se explican "las relaciones entre lógica y aritmética"[16].

Tras la antinomia de Zermelo-Russell, y los análisis ofrecidos por Frege y el propio Russell, quedaba claro que el problema exigía un tratamiento más profundo:

> las paradojas de la teoría de conjuntos [...] muestran, a mi parecer, que las concepciones y medios de investigación prevalentes en la lógica, entendida en el sentido tradicional, no están a la altura de las rigurosas exigencias que impone la teoría de conjuntos...
>
> La aritmética es considerada a menudo como una parte de la lógica [...]. Pero, si observamos con atención, advertimos que en la exposición tradicional de las leyes lógicas se emplean ya ciertos conceptos fundamentales aritméticos, por ejemplo el concepto de conjunto [!] y hasta cierto punto también el de número. Así nos encontramos

[15] A favor de esto habla el contenido del curso impartido en 1897-1898, y de nuevo en 1899-1900, sobre *Zahlbegriff und Quadratur des Kreises* [El concepto de número y la cuadratura del círculo]. Agradezco a W. Sieg, que se encarga de editar el futuro volumen de Springer conteniendo estas lecciones, su amabilidad al poner el manuscrito a mi disposición. Ver también Sieg [1999] y Sieg [2002].

[16] Ver el trabajo todavía inédito de M. Hallett (borrador de 1996), y la edición de este curso que se publicará en breve en Springer.

> moviéndonos en círculos, y por ello es necesario un desarrollo parcialmente simultaneo de las leyes de la lógica y de la aritmética, si es que pretendemos evitar las paradojas. (Hilbert 1904, 130-31)

Este comentario sobre el concepto de conjunto indica que las antinomias han forzado a Hilbert a cambiar radicalmente su opinión acerca de los conjuntos: si todavía en 1899 eran "lógica pura", de acuerdo con Dedekind, ahora son un concepto matemático, y en particular "aritmético" (lo cual debe entenderse en el contexto de la idea amplia –conjuntista– de aritmética que surgió durante la *aritmetización* del análisis y la matemática pura). Resulta típico de Hilbert el hablar de esta cuestión como si los cambios de enfoque no le hubieran afectado a él mismo íntimamente.

El desarrollo planteado en esta conferencia, publicada al año siguiente, empleaba ideas lógicas muy rudimentarias, tomadas sobre todo de la lógica proposicional y la lógica de la identidad, para con ellas formular simbólicamente los axiomas aritméticos de Dedekind sin incluir el axioma de inducción (Hilbert 1904, 133). A continuación, una investigación combinatoria de las igualdades derivables a partir de estos principios formales mostraba que no es posible deducir una contradicción. De aquí, Hilbert (1904, 134) extraía la consecuencia de que "la afirmación de la *existencia del infinito*", o sea, de un conjunto infinito, "está justificada". Esta consecuencia se basaba en que los axiomas tratados exigen un dominio infinito para cumplirse; como puede verse, a estas alturas la demostración de consistencia seguía siendo un medio para establecer la existencia de conjuntos. Luego, se prometía una prueba de consistencia para el sistema axiomático completo, con axioma de inducción.

En resumen, la conferencia que comentamos constituía un avance significativo en la dirección del programa que se desarrollaría a partir de 1920, pero todavía muy lejos de advertir las dificultades implicadas, y lejos sobre todo de contar con un análisis satisfactorio de los principios lógicos necesarios. A este respecto, la influencia de Whietehead y Russell en los años 1910 fue muy importante para los de Göttingen, y el curso impartido por Hilbert en 1917-1918 supuso un avance muy notable[17].

Por su novedad, las ideas planteadas por Hilbert en esta conferencia atrajeron la atención de autores importantes como Poincaré en 1905 y 1908, Mario Pieri en 1906, y L. E. J. Brouwer en 1907 y 1908. El primero y el último no dejarían de señalar deficiencias que Hilbert acabó por aceptar y solventar en su teoría de la demostración madura, desarrollada junto a Paul Bernays en los años 1920. Como ha indicado Sieg, es probable que la certera crítica de Henri Poincaré (1854-1912) haya retrasado mucho el desarrollo de la teoría de la demostración. Poincaré insistió una y otra vez en que sólo es posible dar una demostración sintáctica de consistencia empleando la inducción matemática sobre las fórmulas del sistema:

[17]Sobre este tema debe consultarse Sieg [1999], que puede complementarse con Mancosu [1999].

> Así, el razonamiento de Hilbert no sólo asume el principio de inducción, sino que presupone que este principio nos viene dado, no como una simple definición, sino como un juicio sintético *a priori*. (Poincaré 1905, 1059)

Esta objeción, y la conclusión filosófica de Poincaré, admitían respuesta, pero esta respuesta sólo se dio en los años 1920, y es posible que, entretanto, Hilbert considerara que aquí había una dificultad insalvable.

La conferencia fue también una influencia muy importante para el húngaro Gyula König, quien desarrolló ideas relacionadas en un libro de 1914, *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, el cual a su vez fue tenido en cuenta por John von Neumann en su búsqueda de una demostración de consistencia para la aritmética. Este libro se inscribía en la tradición de las ideas de Dedekind y el primer Hilbert sobre la lógica, combinadas con elementos provenientes de Kronecker y otros originales; sus planteamientos están bastante alejados de la lógica y la teoría de conjuntos posterior. Pero aquí König nos interesa por otra razón, y es que fue una figura clave en el Congreso de 1904 y en los acontecimientos subsiguientes.

2. König y los problemas del continuo y el buen orden

Gyula [Julius] König (1849-1913) había estudiado medicina en Viena, pero el contacto con la teoría de funciones weierstrassiana, en Heidelberg y a través de Königsberger, motivó su paso al campo de la matemática con una tesis sobre funciones elípticas. De vuelta a Budapest tras un semestre escuchando a los maestros de Berlín, König desarrolló un papel importante en el ascenso del nivel matemático en su tierra natal. Era un hombre serio, meticuloso, y muy riguroso como matemático, tanto en sus clases como en sus escritos. Su obra más importante fue *Introducción a la teoria general de las cantidades algebraicas* [*Einleitung in die Allgemeine Theorie der Algebraischen Grössen*] (Leipzig, Teubner, 1903), un trabajo que desarrollaba las ideas de Kronecker sobre números y curvas algebraicas en 1882, y que contribuyó al desarrollo de la teoría de ideales polinomiales.

Gyula König (1849-1913)

Vemos así que nuestro hombre estaba sólidamente situado del lado de la matemática berlinesa, si bien hay motivos para pensar que no compartió el reduccionismo de Kronecker (sin ir más lejos, su misma comunicación de 1904, pero sobre todo el libro de 1914). Lo que resulta claro, en todo caso, es que a la hora de tratar problemas de teoría de números y álgebra König prefería los métodos más tradicionales y constructivos de Kronecker, sin ningún género de dudas, frente a los métodos conjuntistas y modernos de Dedekind.

Para su comunicación al Congreso Internacional de 1904, König escogió precisamente el primer problema de Hilbert, anunciando una solución negativa: el cardinal del continuo *no puede ser* ninguno de los alefs de Cantor. Según B. Szénássy, el título de la conferencia de König, *'Zum Kontinuumproblem'*, y el conocimiento de lo que iba a plantear causaron tal impacto que se suspendieron las reuniones de las demás secciones, para que todos los participantes pudieran escucharla[18]. El contenido de la charla no defraudó: el autor mostraba dominar los conceptos de la teoría de conjuntos, y todos sus desarrollos originales eran correctos. Esto sucedía el día 10 de agosto, dos días antes de que Hilbert impartiera su conferencia.

König demostró que la suma **a** de una sucesión creciente de cardinales transfinitos satisface la desigualdad $\mathbf{a}^{\aleph_0} > \mathbf{a}$. Además, dado que $\aleph_{\beta+\omega} = \aleph_\beta + \aleph_{\beta+1} + ...$, se debe cumplir la desigualdad

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\beta+\omega}. \tag{1}$$

A continuación, König apelaba a una ecuación de la aritmética de cardinales transfinitos demostrada por Bernstein en su tesis de tres años antes, la ecuación mencionada más arriba:

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha}. \tag{2}$$

Suponiendo que el cardinal del continuo $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$ fuese un alef, digamos $\mathbf{c} = \aleph_\beta$, entonces podemos sustituir en la ecuación (2) de Bernstein $\aleph_\mu = \aleph_{\beta+\omega}$, con lo que obtendríamos

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\beta+\omega},$$

en contradicción con el resultado (1) de König. Por tanto, concluía König, el supuesto cantoriano de que el cardinal del continuo es un alef resulta contradictorio.

Según las actas del Congreso, tras la conferencia de König hubo intervenciones de Cantor, Hilbert y Arthur Schoenflies, quien era también un miembro del círculo de Klein y Hilbert, y uno de los matemáticos más activos, por aquellos años, en temas de teoría de conjuntos (aunque sus trabajos resultaron a menudo deficientes). Es una pena que las reminiscencias publicadas por matemáticos no sean siempre de fiar, porque tenemos una descripción conmovedora de la reacción de Cantor en Heidelberg:

> Entonces Cantor tomó la palabra en un estado de profunda agitación. No dejó de expresar su agradecimiento a Dios por haberle

[18]B. Szénássy, *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century* (Berlin, Springer, 1992). Del mismo autor existe una biografía de König publicada en húngaro (Budapest, 1965).

> permitido vivir esta refutación de sus errores. Los periódicos informaron sobre la notable conferencia de König. El gran duque de Baden se hizo informar de estos asuntos sensacionales a través de Felix Klein. (Kowalewski 1950, 198-203)

No sabemos si esta hermosa historia es cierta, porque no consta que Kowalewski estuviera presente en Heidelberg, y sí, en cambio, que en su libro cuenta mal algunos otros detalles del episodio[19]. Más bien nos consta, a través de un testigo presencial, que Cantor trató febrilmente de contradecir a König:

> Es característico de Cantor que desde el principio considerase el resultado de König como inválido, a pesar de sus exactas demostraciones. [Nota al pie: Le regocijaba decir, en broma, que no sentía desconfianza hacia el König [Rey], sino sólo hacia su Ministro]. (Schoenflies 1922, 100)

Tras el Congreso, varios matemáticos alemanes se encontraron casualmente en la hermosa localidad alpina de Wengen, Suiza, lo que dio lugar a discusiones sobre el tema. Estuvieron presentes Hilbert, Hausdorff, Schoenflies y también Kurt Hensel, quien representaba más bien al bando berlinés; también se acercó hasta allí Cantor, quien se encontraba de vacaciones no muy lejos. A raíz de estas discusiones, el problema del continuo se convirtió para Hausdorff "casi en una monomanía"[20]. Pronto llegaron a la idea de que el error estaba en la tesis de Bernstein, ya que su ecuación, demostrada por inducción transfinita, probablemente no era válida en el paso a ordinales límite. Y precisamente es a estos casos que König aplicaba el resultado: recordemos que sustituía $\aleph_\mu = \aleph_{\beta+\omega}$, donde el subíndice designa un ordinal límite (que no tiene antecesor inmediato). La carta de Hausdorff da a entender que Cantor, nuevamente, acababa de anunciar una demostración de su hipótesis del continuo, pero Hausdorff se muestra muy escéptico al respecto, y concluye: "parece pues que su problema n° 1 se encuentra, tras al congreso de Heidelberg, precisamente donde Ud. lo dejó en el congreso de París". Pero no era así, como pronto veremos.

La figura de Felix Hausdorff (1868-1942) es digna de algunos comentarios. Uno de los fundadores de la topología, se había formado inicialmente en matemática aplicada, pero acabó orientándose a la matemática pura con trabajos sobre teoría de conjuntos, teoría de la medida, análisis funcional y álgebra. En los años finales del siglo XIX publicaba libros filosóficos de orientación nietzscheana bajo el pseudónimo de Paul Mongré; estos libros, y en especial los temas epistemológicos de *El caos en interpretación cósmica* [*Das Chaos in kosmischer Auslese*, 1898], parecen haber sido el origen de su interés

[19] A Kowalewski [1950] se debe la difundida historia de que fue Zermelo quien encontró el error, y precisamente el dia después de la conferencia de König, pero esto parece ser falso [Purkert 2002].

[20] Carta a Hilbert de 29/09/1904, citada en Purkert [2002].

por la teoría de conjuntos[21]. Al ser profesor en Leipzig, pudo entablar contacto directo con Cantor, si bien no debieron discutir sobre temas filósoficos, porque sus opiniones eran francamente contrarias: el religioso Cantor consideraba a Nietzsche como un perverso corruptor de la juventud. Pero todo indica que Hausdorff, un hombre sensible y muy interesante, agudo e inteligente, supo muy bien evitar la confrontación. Es más, se preocupó siempre de agradar a Cantor, cuya situación de locura seguramente le entristecía; por este motivo le dedicó su magnífico manual sobre teoría de conjuntos llamándole "creador" de la misma. La vida de Hausdorff acabó de manera trágica: separado de la Universidad por los nazis en 1935, ya que era judío, siguió viviendo en Alemania hasta que, sabiendo que los enviarían a un campo de concentración, él, su mujer y la hija de ésta se suicidaron en 1942.

Todavía antes de acabar el año 1904, los anales de la DMV (Asociación Matemática Alemana) publicaban un artículo de Hausdorff titulado '*Sobre el concepto de cardinalidad en la teoría de conjuntos*'. En este trabajo señalaba el error debido a Bernstein, y demostraba en cambio la validez de la siguiente ecuación:

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot \aleph_{\mu-1^{\aleph_\alpha}}.$$

Hausdorff indicaba expresamente que tanto el resultado de Bernstein como la conclusión extraída por König debían considerarse no demostrados. Con ello, liberaba a las ideas cantorianas de una pesada carga y devolvía la situación al estado anterior al gran Congreso.

Felix Hausdorff
(1868-1942)

Ernst Zermelo
(1871-1953)

[21]Ver Purkert [2002], que es la introducción al primer volumen publicado de sus obras en Springer.

Pero había más. Cinco dias antes de la carta de Hausdorff, el 24 de septiembre, Zermelo había redactado una carta dirigida también a Hilbert con la intención de que se publicara próntamente en los *Annalen*, como de hecho sucedió. La carta trataba, cómo no, de los temas discutidos por Hilbert en su problema 1, y ofrecía una refutación indirecta de los resultados de König. El título: '*Demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado*'; demostración basada en el axioma de elección, y que por tanto era lo más alejado de una prueba constructiva que pudiera esperarse. Por supuesto, si la demostración de Zermelo era correcta, el continuo puede ser bien ordenado y por tanto su cardinalidad es un alef.

La carta de Zermelo (fechada en el hermoso pueblo de Münden, situado no muy lejos de Göttingen) era el resultado de discusiones habidas la semana anterior con Erhard Schmidt (1876-1959), otro hombre del círculo de Hilbert que se doctoraría bajo su dirección en 1905 y acabaría siendo un influyente catedrático en Berlín[22]. Merece la pena resaltar que Zermelo (1904, 516) era explícito al afirmar que la idea de basar la demostración en el axioma de elección se debía a Schmidt. Al final de su vida, Zermelo se quejaría de que muchas de sus contribuciones en lógica y teoría de conjuntos no eran tenidas en cuenta, mientras que su nombre aparecía sólo asociado a un axioma cuya autoría nunca había reclamado.

En el artículo de 1904 se lee: "Este principio lógico [!] no admite, por cierto, ser reducido a otro aún más simple, pero es empleado en deducciones matemáticas sin discusión en todos los casos". Las palabras de Zermelo serían rápidamente desmentidas por la intensa polémica que rodeó al axioma y a su demostración. Polémica que debió complacerle, ya que este hombre genial y singular –aunque de mala salud– siempre fue un gran aficionado a las discusiones fuertes. Antes de la polémica sobre teoría de conjuntos tuvo otra famosa con el físico Boltzmann, y más tarde cargaría sobre Poincaré. Cuenta Fraenkel (1967, 149) que en algún momento, seguramente de los años 1940 o 1950, le preguntó a Schmidt por qué su buen amigo Zermelo ya no publicaba; la respuesta fue que no lo hacía "porque ya no podía enfadar a nadie con sus publicaciones".

Y sin embargo, a pesar de las discusiones en 1905 y años posteriores, la afirmación de Zermelo no era ni mucho menos falsa. Del axioma de elección dependen numerosos resultados del análisis aceptados entonces, y había sido utilizado implícitamente por múltiples autores, incluyendo no sólo a Dedekind y Cantor, sino también algunos que enseguida serían sus detractores, como los franceses René Baire (1874-1932) y Henri Lebesgue (1875-1941). No parece

[22]Erhard Schmidt –figura importante en el análisis funcional, cuyo nombre es conocido sobre todo por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt– hace el número 30 de las sorprendentes 69 tesis dirigidas por Hilbert (quien por cierto no había dirigido ninguna en sus primeros años como profesor en Königsberg, la ciudad de los puentes y de Kant, que era precisamente su ciudad natal).

casualidad que fuera precisamente un especialista en análisis como Schmidt quien sugirió emplear el axioma a Zermelo.

Cabe pensar que fue precisamente la demostración del teorema de buen orden propuesta por Zermelo, que ponía al descubierto el carácter de principio de existencia radicalmente no constructivista de este axioma, lo que motivó la posterior desconfianza. Trabajos como el desarrollado por König habían arrojado graves dudas sobre la validez de la afirmación cantoriana de que la cardinalidad del continuo es un alef. Cada vez se hacía más claro que el problema era muy especial, y se sospechaba con mayor insistencia que es imposible determinar explícitamente un buen orden de $\mathbb{R}$, de manera constructiva y empleando sólo, digamos, propiedades como las registradas en los axiomas de Hilbert para $\mathbb{R}$. En este contexto, la fuerza demostrativa del axioma de elección arrojaba sospechas sobre su aceptabilidad.

También puede haber sido importante el mero hecho de formular el axioma de manera explícita y directa; esto solo había sucedido una vez en el pasado, en un trabajo de Giuseppe Peano publicado en 1890, ¡y el gran analista y lógico había dado como obvio que un principio así no es admisible![23] La cuestión del principio de elección había sido discutida también en un trabajo de 1902 por un matemático cercano a Peano –aunque discípulo de C. Segre–: Beppo Levi (1876-1961), quien por cierto acabó emigrando a Argentina bajo la presión del fascismo italiano. Esta vez la cuestión se consideraba abierta y pendiente de demostración, si bien Levi indicaba que, ¡en el caso de tratar con conjuntos bien ordenados!, sí que está asegurada la existencia del conjunto electivo. Al hilo de la polémica, Borel haría notar de nuevo que el principio de elección y el principio del buen orden son equivalentes (cada uno es deducible del otro), lo que en su opinión mostraba que el problema aún no estaba resuelto.

Vemos que el contexto estaba más que maduro para el surgimiento de intensas polémicas entre los miembros de la comunidad matemática internacional. De hecho, al año siguiente se dio un fenómeno inédito: el volumen 60 (1905) de la revista *Mathematische Annalen* publicaba toda una serie de artículos discutiendo el teorema de Zermelo y el axioma de elección. No es casualidad que de nuevo fuera en los *Annalen* de Klein y Hilbert donde salían a relucir estos asuntos (conviene recordar que el *Journal de Crelle*, revista de los berlineses, resultaba irrelevante para matemáticos interesados en la teoría de conjuntos).

El volumen empezaba con una reimpresión del trabajo de König tal como se publicaba en las actas del Congreso de 1904, con la retirada explícita de la conclusión inicial por ser inválida la ecuación de Bernstein. Seguía un trabajo de Schoenflies que planteaba dudas, no respecto al axioma, sino respecto al recurso por parte de Zermelo a cierto tipo de conjuntos bien ordenados, que había llamado "γ-conjuntos", creyendo que su empleo produciría nuevas

[23] Sobre esta cuestión debe consultarse Moore [1982], que dedica una sección específicamente a las objeciones de los italianos.

paradojas; esto fue uno de los motivos por los que Zermelo ofrecería otra demostración más completa y elegante del resultado en 1908. En tercer lugar, Bernstein ofrecía sus reflexiones en el sentido de que el conjunto de todos los ordinales es admisible, pero es un conjunto que no admite un buen orden. La idea de admitir conjuntos no bien-ordenables iba directamente en contra del trabajo de Zermelo, pero paradójicamente Bernstein no tenía problemas en admitir el axioma de elección[24].

En cuarto y último lugar venía el corto pero muy interesante artículo de Émile Borel (1871-1956), quien reconocía haberlo escrito directamente a invitación de Hilbert, y que está fechado el 1 de diciembre de 1904. Borel volvía a plantear el contenido del trabajo de Zermelo bajo una forma condicional: antes de Zermelo era conocido que, dado un conjunto C bien ordenado, se puede asignar un elemento distinguido a cada subconjunto de C; Zermelo había obtenido el resultado novedoso de que, inversamente, la solución al problema de asignar un elemento distinguido entraña la existencia de un buen orden para el conjunto. Pero Borel enfatizaba que esto no constituye una solución completa del problema, ya que todavía es necesario "dar un medio cuando menos teórico para determinar el elemento distinguido m' de un subconjunto cualquiera" de C. Y esto le parecía sumamente difícil en casos como el de C igual al conjunto de los números reales (Borel 1905, 194).

En resumen, Borel se negaba a aceptar la validez general del axioma de elección y pedía algún reemplazo para el mismo de naturaleza constructiva. En apoyo de su punto de vista citaba una carta de Baire, en la que éste decía: "dudo que se pueda jamás encontrar una medida común entre el continuo... y los conjuntos bien ordenados; tenemos ahí, en mi opinión, dos cosas cada una de las cuales no está definida más que virtualmente, y hay posibilidades de que estas dos virtualidades sean irreductibles" (Borel 1905, 195).

3. Conclusión

A partir de estos artículos publicados en 1905, el debate dejó de ser primordialmente entre autores alemanes, y pasó definitivamente a internacionalizarse (proceso que había empezado, como hemos dicho, en los años 1890). Hubo una intensa discusión en Francia, pero también en Inglaterra, etc. De lo que se trataba, a fin de cuentas, era de entender las implicaciones metodológicas de la matemática moderna, y de alcanzar un acuerdo sobre la admisibilidad de sus métodos. El axioma de elección fue el tema central porque contradecía muy directamente las preferencias vagamente constructivistas de la mayoría de los matemáticos. De modo que la nueva discusión que hubo a partir de 1905, aunque complicada con la inmiscusión de cuestiones sobre lógica y sobre

[24] Uno se pregunta si los diversos errores cometidos en sus trabajos no habrán sido la causa por la cual Bernstein se dedicó, a partir de este momento, a cuestiones bien alejadas de la teoría de conjuntos, sobre todo de matemática aplicada.

las paradojas, no era a fin de cuentas sino una versión ampliada y refinada del viejo debate que venía existiendo desde 1870.

Como previó Steinitz en su célebre trabajo de 1910 sobre teoría general de cuerpos, el axioma de elección fue siendo aceptado cada vez más, al irse advirtiendo su importancia y la imposibilidad de reducirlo a algo más elemental. También es cierto lo que diría Gödel muchos años después: que difícilmente puede encontrarse un principio que refleje mejor el espíritu de la teoría de conjuntos, con su insistencia desde la primera hora en los subconjuntos *arbitrarios*, que aquel axioma. El desarrollo de la teoría de conjuntos axiomática y la lógica mostró cómo evitar las viejas antinomias, y puso de relieve la plena aceptabilidad del axioma. Con esto quedan indicadas las respuestas principales a la mayor parte de las cuestiones que se pusieron sobre el tapete en aquel agitado año de 1904. Queda el problema del continuo como último elemento pendiente.

Todos sabemos que el método del *forcing* de Cohen estableció la independencia de la hipótesis de Cantor con respecto a los axiomas conjuntistas, y muchos han visto en esto la solución al primer problema de Hilbert. Pero esta idea no deja de ser paradójica, pues el papel fundamental y básico que desempeñan los números reales contrasta con nuestra incapacidad de responder con sí o no a la sencilla pregunta de Cantor: ¿es todo subconjunto de $\mathbb{R}$ o bien enumerable, o bien equipotente a $\mathbb{R}$? Si consideramos que esta pregunta no admite respuesta unívoca, parece que estamos dando la razón, a fin de cuentas, a Baire con su idea del continuo como virtualidad irreductible (ver el final de la sección anterior). Una vez más, y como advirtió Leibniz hace ya tres siglos, el *laberinto del continuo* nos confunde.

Referencias

[1] F. Bernstein, *Untersuchungen zur Mengenlehre.* Tesis doctoral. Göttingen & Halle, 1901.

[2] – Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen, *Math. Ann.* 60 (1905), 187–193.

[3] E. Borel, Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, *Math. Ann.* 60 (1905), 194–195.

[4] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 1932. Reimpreso en G. Olms, 1966.

[5] – *Briefwechsel.* Berlin, Springer, 1991.

[6] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg, 1888. Reimpreso en Dedekind 1932. Traducción en Alianza Univ./UAM, 1997.

[7] – *Gesammelte Werke*, vol. III. Braunschweig, Vieweg, 1932.

[8] J. De Lorenzo, *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Madrid, Tecnos, 1998.

[9] S. Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford, Oxford Univ. Press., 1998.

[10] J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Basel, Birkhäuser, 1999.

[11] – El enfoque conjuntista en matemáticas, La Gaceta de la RSME, 1 (1998), 389–412

[12] A. Fraenkel, *Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*. Stuttgart, Deutsche Verlags-Anstalt, 1967.

[13] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1973.

[14] J. Gray, *El desafío de Hilbert*. Madrid, Crítica, 2003.

[15] M. Hallett, Hilbert on geometry, number and continuity. Inédito, borrador de 1996, aparecerá en *The Bulletin of Symbolic Logic*.

[16] F. Hausdorff, Der Potenzbegriff in der Mengenlehre. *Jahresbericht der DMV* 13 (1904), 569–571.

[17] D. Hilbert, Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900. Reimpreso en D. Hilbert 1935.

[18] – Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik, *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematikerkongress*, Leipzig, Teubner, 1905. Trad. inglesa en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, 1967, 129–138.

[19] – Die Grundlagen der Mathematik, *Abh. math. Sem. Hamb. Univ.* 6 (1928), nº 1/2, 65–85.

[20] – *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III. Berlin, Springer, 1935.

[21] Ph. Jourdain, On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates. *Philos. Magazine*, serie 6 (1904), VII, 61–75.

[22] G. Kowalewski, *Bestand und Wandel – Meine Lebenserrinerungen – zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik*, Munich, Oldenbourg, 1950.

[23] B. Levi, Intorno alla teoria degli aggregatti, *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rendiconti XXXV* (1902), 863–868.

[24] P. Mancosu, Between Russell and Hilbert: Behmann on the foundations of mathematics, *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999), 303–330.

[25] G.H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, Berlin, Springer, 1982.

[26] M. Noether, Charles Hermite, *Math. Ann.* 55 (1902), 337–385.

[27] V. Peckhaus, 'Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschiessen': Ernst Zermelo in Göttingen. *Hist. & Phil. of Logic* 11 (1990), 19–58.

[28] V. Peckhaus & R. Kahle. Hilbert's Paradox, *Historia Mathematica* 29 (2002), 157–175.

[29] H. Poincaré, Les mathématiques et la logique, *Revue de métaph. et de morale* 13 (1905), 815–835. Traducción en W. Ewald, *From Kant to Hilbert*, Oxford Univ. Press, vol. 2, 1021–1038.

[30] W. Purkert, *Grundzüge der Mengenlehre* - Historische Einführung, en F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, tomo II: *Grundzüge der Mengenlehre*, Berlin, Springer, 2002.

[31] W. Purkert & H. J. Ilgauds, *Georg Cantor 1845-1918*, Basel, Birkhäuser, 1987.

[32] B. Rang & W. Thomas, Zermelo's discovery of the 'Russell paradox', *Historia Mathematica* 8 (1981), 15–22.

[33] C. Reid, *David Hilbert*. Berlin, Springer, 1970.

[34] A. Schoenflies, Zur Erinnerung an Georg Cantor. *Jahresbericht der DMV* 31 (1922), 97–106.

[35] W. Sieg, Hilbert's Programs: 1917-1922, *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999), 1–44.

[36] – Beyond Hilbert's Reach?, en D. B. Malament, ed., *Reading Natural Philosophy: Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics*, Open Court, 2002, pp. 363–405.

[37] E. Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.* 59 (1904), 514–516.

José Ferreirós Domínguez
Deprtamento de Filosofía y Lógica
Universidad de Sevilla
C/ Camilo José Cela, s/n
41018 – Sevilla
Correo electrónico: josef@us.es