

Compresión de imágenes utilizando Learning Multiresolution

F. ARÀNDIGA¹, A. COHEN², D. F. YÁÑEZ*¹

¹ *Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Valencia, Doctor Moliner, 46100 Burjassot. E-mails: Arandiga@uv.es, Dionisio.Yanez@uv.es.*

² *Laboratoire Jacques-Louis Lions, Univ. Pierre et Marie Curie, 75013 Paris, France. E-mail: cohen@ann.jussieu.fr.*

Palabras clave: Multiresolución, learning, compresión de imágenes

Resumen

Teoría estadística Learning juega un papel importante en muchas áreas científicas. Las transformaciones de multiresolución están basadas en operadores que nos permiten transitar entre dos niveles de resolución consecutivos. Utilizamos técnicas learning para construir uno de estos operadores multiescala en el contexto de la multiresolución de Harten: el operador predictor. Aplicamos esta nueva técnica de multiresolución (Learning Multiresolution) a la compresión de imágenes digitales y comparamos nuestros resultados con los obtenidos con otros métodos clásicos.

1. Introducción

La multiresolución de Harten nos permite obtener una reordenación multiescala de un conjunto de datos discretos, de modo que los datos transformados poseen unas propiedades mejores que los datos iniciales. En nuestro caso nos interesa la mejor compresión de los datos transformados. Tras aplicar el algoritmo de multiresolución a una información discreta inicial, podemos interpretar el resultado obtenido como una “aproximación” de la información inicial en un nivel de resolución menor, más unos “detalles” que nos permiten recuperar los datos iniciales. La técnica de reconstrucción utilizada habitualmente para la multiresolución está basada en la interpolación polinómica mediante un operador reconstrucción de los datos. En este trabajo proponemos una nueva técnica de predicción dentro de la multiresolución. Parece natural que si queremos predecir una serie de valores por una combinación (de cualquier tipo) de otros valores intentemos minimizar un funcional que nos indique la distancia entre el conjunto original y el conjunto aproximado.

En este trabajo formalizamos las bases de la técnica Learning Multiresolution que se basa en la minimización del funcional distancia entre dos pasos consecutivos de la multiresolución utilizando técnicas estadísticas Learning. Utilizamos esta técnica con un conjunto de combinaciones determinado para la compresión de imágenes digitales obteniendo buenos resultados.

2. Problema learning

Nosotros describimos un modelo general learning a través de tres componentes:

1. Un generador (G) de vectores $x \in \mathbb{R}^n$, establecido desde una fija pero desconocida función de probabilidad $F(x)$.
2. Un supervisor (S) que devuelve una valor de salida y (generalmente $y \in \mathbb{R}$ para cada vector de entrada x , de acuerdo con la función de distribución condicional $F(y|x)$, también fija pero desconocida¹.
3. Una máquina learning (LM), capaz de implementar un conjunto de funciones $g \in \mathcal{K}$, donde \mathcal{K} es una clase de funciones reales².

Por tanto el problema de learning es elegir desde el conjunto de funciones dado \mathcal{K} , la función que mejor se aproxime a la respuesta del supervisor. Así pues tenemos dos problemas, **escoger una buena clase de funciones** y dentro de esta clase **tomar la función que mejor se aproxime a la función supervisor**.

La selección de la función que mejor aproxima está basada en el conjunto de entrenamiento de l observaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) obtenidas de acuerdo con $F(x, y) = F(x)F(y|x)$ con $z_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, l$.

3. Problema learning general

Para elegir la mejor aproximación posible a la respuesta del supervisor dentro de la clase de funciones dada creamos una función de pérdida o discrepancia $L(y, g(x)) = Q(z, g)$ con $z = (x, y)$ entre la respuesta y del supervisor y la respuesta $g(x)$, con $g \in \mathcal{K}$, dada por la máquina learning a un vector x . Consideramos el valor esperado de la pérdida dado por el funcional *risk*:

$$R(g) = \int L(y, g(x))dF(x, y) = \int Q(z, g)dF(z) \quad (1)$$

Por tanto el objetivo del problema learning es encontrar la función ψ que minimice el funcional *risk* $R(g)$ sobre la clase de funciones \mathcal{K} donde la medida de probabilidad $F(x, y)$ es una medida de probabilidad no conocida pero i.i.d. con y_1, \dots, y_l dados.

¹Este es el caso general que incluye el caso de que el supervisor utilice una función $y = g(x)$.

²La clase de funciones \mathcal{K} es un conjunto de funciones reales cualquiera, es decir:

$$\mathcal{K} \subset \{g|g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Ejemplos: $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\Pi_1^n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

En nuestro caso definiremos la función de pérdida como $Q(z, g) = L(y, g(x)) = (y - g(x))^2$.

Conocemos la función que minimiza el funcional (1) que es la llamada **función de regresión**,

$$\psi(x) = \int y dF(y|x) \quad (2)$$

pero desconocemos la función de distribución $F(y|x)$. Así, tenemos que

$$R(g) = \int (y - g(x))^2 dF(x, y) = \int (g(x) - \psi(x))^2 dF(x) + \int (y - \psi(x))^2 dF(x, y) \quad (3)$$

Notar que el segundo término de la ecuación (3) no depende de la función elegida. Así pues, minimizar el funcional es equivalente a minimizar el funcional:

$$R^*(g) = \int (g(x) - \psi(x))^2 dF(x) \quad (4)$$

El funcional R^* es el cuadrado de la distancia del espacio normado $(\mathcal{L}^2(F), \|\cdot\|_{2,F})^3$ entre una función de la clase admisible de funciones ($g \in \mathcal{K}$) y la función de regresión (ψ), es decir $R^*(g) = \|g - \psi\|_{2,F}^2$. Así pues, consideramos el siguiente problema: usando una muestra, encontrar en la clase admisible de funciones la función más cercana a la regresión en la métrica $(\mathcal{L}^2(F), \|\cdot\|_{2,F})$. La formulación del problema nos permite no tener que resolver un problema más general, como encontrar la función de distribución $F(x, y)$.

4. Problema learning empírico (ERM)

Para minimizar el funcional (1) con una función de distribución no conocida $F(z)$, se aplica el siguiente principio inductivo:

1. El funcional *risk* $R(g)$ se reemplaza por el llamado funcional risk empírico

$$R_{emp}(g) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l Q(z_i, g) \quad (5)$$

construido gracias al conjunto de entrenamiento $z_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, l$.

2. Aproximamos la función $Q(z, \psi)$, que es la función que minimiza el funcional $R(g)$ por la función $Q(z, \varphi)$ que es la función que minimiza el funcional empírico (5).

³Sea $F(x)$ una función de distribución definimos el espacio $(\mathcal{L}^2(F), \|\cdot\|_{2,F})$ como el espacio de funciones reales de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ cuya norma es

$$\|g\|_{2,F} = \left(\int (g(x))^2 dF(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Este principio es conocido como *Empirical Minimization inductive principle* (ERM principle).

En nuestro caso sustituyendo la función de pérdida en el funcional empírico que queremos minimizar tenemos que:

$$R_{emp}(g) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - g(x_i))^2 \quad (6)$$

Se prueba en [4] que la consistencia de este proceso depende de la dimensión VC (Vapnik-Chernovenkis)⁴ del conjunto de funciones pérdida que tomemos.

5. Multiresolución “à la Harten” en medias en celda en $[0, 1]^2$

Podemos encontrar más detalle de multiresolución “à la Harten” en [2], explicamos brevemente en que consiste en el contexto de medias en celda en $[0, 1]^2$.

Podemos considerar que nuestros datos, pertenecientes a un espacio V^k , provienen de aplicar un operador discretización a una cierta función f , donde k nos indica el nivel de resolución, de modo que con k mayor tendremos una mayor resolución.

Supongamos que tenemos una cierta función de dos dimensiones $f(x, y)$ integrable, mediante un operador que llamaremos discretización (\mathcal{D}_k , donde k nos indica el nivel de resolución) interpretamos los datos que tenemos como media de esta función en una malla dada. Sea $\{X^k\}_{k=0}^L$ una secuencia de discretizaciones de modo que $X^k = \{(x_i^k, y_j^k)\}$, $x_i^k = ih_k$, $y_j^k = jh_k$, $i, j = 0, \dots, N_k$, $N_k h_k = 1$, con $h_k = 2^{-k} h_0$, y sea $C_{i,j}^k = [x_{i-1}^k, x_i^k] \times [y_{j-1}^k, y_j^k]$. Teniendo en cuenta esta notación, los datos en el nivel de resolución k , $\bar{f}^k = \{\bar{f}_{i,j}^k\}_{i,j=0}^{N_k}$ pueden ser interpretados como:

$$\bar{f}_{i,j}^k = (\mathcal{D}_k f)_{i,j} = \frac{1}{\varsigma(C_{i,j}^k)} \int_{C_{i,j}^k} f(x, y) d(x, y) = \frac{1}{h_k^2} \int_{x_{i-1}^k}^{x_i^k} \int_{y_{j-1}^k}^{y_j^k} f(x, y) d(x, y) \quad (7)$$

En la multiresolución de Harten se definen dos operadores los cuales nos permiten transitar entre dos niveles de resolución consecutivos, estos son el operador decimación, que nos permite pasar del nivel de resolución k al nivel de resolución $k - 1$.

$$\mathcal{D}_k^{k-1} : V^k \longrightarrow V^{k-1}$$

⁴[Dimensión VC para un conjunto de de funciones, Vapnik-1979]

Sea $A \leq Q(z, g) \leq B$, $g \in \mathcal{K}$, un conjunto de funciones reales y acotadas por las constantes A y B (A puede ser $-\infty$ y B puede ser ∞).

Consideramos el conjunto de indicadores del conjunto de funciones $Q(z, g)$, $g \in \mathcal{K}$,

$$I(z, g, \beta) = \theta\{Q(z, g) - \beta\}, \quad g \in \mathcal{K}, \quad \beta \in (A, B),$$

donde $\theta(t)$ es una función escalonada tal que:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La **dimensión VC del conjunto de funciones reales** $Q(z, g)$, $g \in \mathcal{K}$ esta definida como la dimensión del correspondiente conjunto de indicadores con parámetros $g \in \mathcal{K}$ y $\beta \in (A, B)$.

que es un operador lineal. En el contexto de medias en celda en $[0, 1]^2$ se define gracias a la aditividad de la integral como:

$$(\mathcal{D}_k^{k-1} \bar{f}^k)_{i,j} = \frac{1}{4}(\bar{f}_{2i,2j}^k + \bar{f}_{2i-1,2j}^k + \bar{f}_{2i,2j-1}^k + \bar{f}_{2i-1,2j-1}^k) = \bar{f}_{i,j}^{k-1} \quad (8)$$

y el operador predicción (no tiene porque ser lineal), con el cual vamos del nivel de resolución $k - 1$ al nivel de resolución k :

$$\mathcal{P}_{k-1}^k : V^{k-1} \longrightarrow V^k$$

Este operador lo definiremos más adelante mediante técnicas estadísticas Learning. Exigimos que los operadores predicción y decimación verifiquen la siguiente condición de consistencia, esta condición se produce de forma natural, si predecimos un conjunto de valores en un nivel $k - 1$ y después decimamos está predicción lo natural es que obtengamos el mismo conjunto de valores que teníamos inicialmente, esto se traduce en que $\mathcal{D}_k^{k-1} \mathcal{P}_{k-1}^k = I_{V^{k-1}}$. El recíproco, en principio, no es cierto, así $\mathcal{P}_{k-1}^k \mathcal{D}_k^{k-1} v^k$ constituye una aproximación a v^k , en esta afirmación nos basaremos para realizar nuestro operador predicción. Nuestra intención es que v^k y su aproximación estén muy cercanos (definiendo una métrica adecuada en el espacio V^k).

Definimos el error cometido en nuestra aproximación como

$$e^k = v^k - \mathcal{P}_{k-1}^k \mathcal{D}_k^{k-1} v^k = (I_{V^k} - \mathcal{P}_{k-1}^k \mathcal{D}_k^{k-1}) v^k \quad (9)$$

notar así que, conocido $v^{k-1} = \mathcal{D}_k^{k-1} v^k \in V^{k-1}$ y e^k , podemos recuperar v^k , y por tanto v^k posee la misma información que el conjunto $\{v^{k-1}, e^k\}$, es decir $v^k \equiv \{v^{k-1}, e^k\}$. El error cometido, se puede ver en [2] pertenece al núcleo del operador decimación, i.e. $e^k \in \mathcal{N}(\mathcal{D}_k^{k-1})$, por tanto en el conjunto $\{v^{k-1}, e^k\}$ tenemos información redundante que podemos eliminar. Así, tenemos en medias en celda en $[0, 1]^2$ que

$$(\mathcal{D}_k^{k-1} e^k)_{i,j} = \frac{1}{4}(e_{2i,2j}^k + e_{2i-1,2j}^k + e_{2i,2j-1}^k + e_{2i-1,2j-1}^k) = 0 \quad (10)$$

gracias a la cual, podemos eliminar la información redundante de $\{e^k\}$. Tomamos las siguientes combinaciones lineales de los errores de aproximación:

$$\begin{cases} d_{i,j;a}^k = \frac{1}{4}(e_{2i,2j}^k + e_{2i-1,2j}^k - e_{2i,2j-1}^k - e_{2i-1,2j-1}^k) \\ d_{i,j;b}^k = \frac{1}{4}(e_{2i,2j}^k - e_{2i-1,2j}^k + e_{2i,2j-1}^k - e_{2i-1,2j-1}^k) \\ d_{i,j;c}^k = \frac{1}{4}(e_{2i,2j}^k - e_{2i-1,2j}^k - e_{2i,2j-1}^k + e_{2i-1,2j-1}^k) \end{cases} \quad (11)$$

de modo que tenemos una correspondencia unívoca entre la información contenida en el nivel de resolución k y la información en el nivel de resolución $k - 1$ más los detalles:

$$\{\bar{f}_{i,j}^k\}_{i,j=1}^{J_k} \equiv \{\{\bar{f}_{i,j}^{k-1}\}, \{d_{i,j;a}^k\}, \{d_{i,j;b}^k\}, \{d_{i,j;c}^k\}\}_{i,j=1}^{J_{k-1}}$$

Así pues, tendremos que definir un operador predicción que nos permita transitar desde el nivel $k - 1$ hasta el nivel k , habitualmente este operador se define con interpolación polinómica (ver [2]), en este trabajo lo definiremos utilizando técnicas learning, podemos ver más detalle en [5].

6. Funciones lineales dentro de los polinomios en n variables de primer grado

La elección de la clase de funciones \mathcal{K} que utilizamos para minimizar el funcional es uno de los principales problemas de las técnicas estadísticas learning. En este trabajo tomaremos como clase el conjunto de funciones:

$$\mathcal{K} = \{g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_i x_i : b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\} \subset \Pi_1^n(\mathbb{R})$$

Podemos ver en [5] que al tomar esta clase de funciones tenemos consistencia y convergencia del proceso learning que definiremos más adelante. Además en el contexto de la multiresolución para medias en celda (ver [2, 5]) nos aproximamos mejor en norma dos entre dos pasos sucesivos utilizando esta técnica que con cualquier otro operador predicción que tomemos.

7. Learning Multiresolution para medias en celda en $[0, 1]^2$

En [5] podemos ver con detalle la explicación de Learning Multiresolution general en el contexto de medias en celda. Vamos a explicar brevemente Learning Multiresolution para el espacio de funciones definido, \mathcal{K} , tomando un stencil de $(2s + 1) \times (2s + 1)$ puntos en el contexto de medias en celda en $[0, 1] \times [0, 1]$. Así pues, tomamos la clase

$$\mathcal{K} = \{g(x_1, \dots, x_{(2s+1)^2}) = \sum_{i=1}^{(2s+1)^2} b_i x_i : b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq (2s + 1)^2\} \subset \Pi_1^{(2s+1)^2}(\mathbb{R})$$

Con la misma notación que antes, sea el conjunto de medias en celda $\bar{f}^{k-1} = \{\bar{f}_{i,j}^{k-1}\}_{i,j=1}^{N_{k-1}}$ con $N_{k-1} = N_k/2$ en el nivel $k - 1$, entonces el operador predictor tendrá que obtener la media de la función f en las celdas $C_{2i,2j}^k, C_{2i,2j-1}^k, C_{2i-1,2j}^k, C_{2i-1,2j-1}^k$ con $i, j = 1, \dots, N_{k-1} = N_k/2$. Tomamos un stencil centrado de $(2s + 1) \times (2s + 1)$ puntos, es decir tomaremos, $\mathcal{S}(s) = \{\bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1}\}_{l_1, l_2=-s}^s$, con $i, j = 1, \dots, N_{k-1} = N_k/2$, sea $l = (N_{k-1} - 2s)^2$. Como la clase de funciones elegida es \mathcal{K} entonces nuestro problema se reduce a minimizar las funciones:

$$\tilde{R}_{emp}^\gamma(x) = \frac{1}{l} \sum_{i,j=1+s}^{N_{k-1}-s} (y_{\gamma, i, j}^k - \sum_{l_1, l_2=-s}^s b_{l_1, l_2} \bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1})^2$$

con $\gamma = 1, \dots, 4$, $y_{1, i, j}^k = \bar{f}_{2i, 2j}^k$, $y_{2, i, j}^k = \bar{f}_{2i, 2j-1}^k$, $y_{3, i, j}^k = \bar{f}_{2i-1, 2j}^k$, $y_{4, i, j}^k = \bar{f}_{2i-1, 2j-1}^k$ y $x = (b_{l_1, l_2})_{l_1, l_2=-s}^s \in \mathbb{R}^{(2s+1)^2}$ un vector⁵ de dimensión $(2s + 1)^2$.

Sean $(a_{l_1, l_2}^\gamma)_{l_1, l_2=-s}^s \in \mathbb{R}^{(2s+1)^2}$ los vectores que minimizan las funciones \tilde{R}_{emp}^γ con $\gamma = 1, \dots, 4$, entonces defino el operador predictor como,

⁵Para simplificar la notación denotamos como $(b_{l_1, l_2})_{l_1, l_2=-s}^s \in \mathbb{R}^{(2s+1)^2}$ al vector cuyas entradas serían:

$$b_{l_1, l_2} = b_{(l_1+s+1)+(l_2+s)(2s+1)} \quad -s \leq l_1, l_2 \leq s$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_{k-1}^k \bar{f}^k)_{2i,2j} &:= \sum_{l_1, l_2 = -s}^s a_{l_1, l_2}^1 \bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1}; & (\mathcal{P}_{k-1}^k \bar{f}^k)_{2i, 2j-1} &:= \sum_{l_1, l_2 = -s}^s a_{l_1, l_2}^2 \bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1} \\
 (\mathcal{P}_{k-1}^k \bar{f}^k)_{2i-1, 2j} &:= \sum_{l_1, l_2 = -s}^s a_{l_1, l_2}^3 \bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1}; & (\mathcal{P}_{k-1}^k \bar{f}^k)_{2i-1, 2j-1} &:= \sum_{l_1, l_2 = -s}^s a_{l_1, l_2}^4 \bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1}
 \end{aligned}$$

con $i, j = 1, \dots, N_{k-1} = N_k/2$.

Punto de vista algebraico

Para minimizar las funciones $\tilde{R}_{emp}^1, \tilde{R}_{emp}^2, \tilde{R}_{emp}^3$ y \tilde{R}_{emp}^4 podemos reescribir el problema de forma algebraica. Construimos una matriz A de dimensión $(N_{k-1} - 2s)^2 \times (2s + 1)^2$ cuyas entradas serán los valores en medias en celda de nivel $k - 1$, es decir, sean las filas de la matriz A :

$$\tilde{A}_{(i-s)+(N_{k-1}-2s)(j-s-1)} = (\bar{f}_{i+l_1, j+l_2}^{k-1})_{l_1, l_2 = -s}^s \quad (1+s) \leq i, j \leq (N_{k-1} - s)$$

entonces

$$A = [\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{(N_{k-1}-2s)^2}]^T$$

y definimos los vectores B^1, B^2, B^3 y B^4 de tamaño $(N_{k-1} - 2s)^2$ como los valores de las medias en celda en el nivel k , es decir:

$$\begin{aligned}
 B_{(i-s)+(N_{k-1}-2s)(j-s-1)}^1 &= \bar{f}_{2i, 2j}^k, & B_{(i-s)+(N_{k-1}-s-1)(j-2)}^2 &= \bar{f}_{2i, 2j-1}^k, \\
 B_{(i-s)+(N_{k-1}-2s)(j-s-1)}^3 &= \bar{f}_{2i-1, 2j}^k, & B_{(i-s)+(N_{k-1}-2s)(j-s-1)}^4 &= \bar{f}_{2i-1, 2j-1}^k
 \end{aligned}$$

con $(1+s) \leq i, j \leq (N_{k-1} - s)$.

Con estas definiciones nuestro problema se reescribe como:

$$\tilde{R}_{emp}^\gamma(x) = (N_{k-1} - 2s)^2 \|Ax - B^\gamma\|_2^2 \quad \gamma = 1, \dots, 4 \quad x = ((b_{l_1, l_2})_{l_1, l_2 = -s}^s)^T$$

Por tanto nuestro problema queda reducido a minimizar la norma dos de un sistema.

8. Experimentos numéricos

Realizamos compresión de imágenes utilizando Learning Multiresolution. Las imágenes que tomaremos serán imágenes de tamaño 512×512 en escala de grises desde 0 a 255. Como acabamos de ver, el problema queda reducido a minimizar la norma dos de un sistema. Por tanto hallaremos un conjunto de “*filtros*” que nos servirán como predicción de un paso a otro. Hemos explicado como hacer Learning Multiresolution en un solo paso (LM-fa), en [5] se prueba que podemos tomar un funcional conjunto para todos los pasos (LM), obteniendo así un número menor de filtros. Como puede ser costoso el almacenamiento de estos filtros (por ser números reales), convertimos dichos filtros en enteros comprendidos entre 0 y 255 (es decir como un pixel más de la imagen). Esto provoca que los resultados al realizar cuantización (ver [2]) sean peores. Para evitar esta pérdida tomamos los contornos de la imagen y realizamos tantas muestras como direcciones del contorno tengamos (en nuestro

caso 5: constante, horizontal, vertical y diagonal). Construimos cinco funcionales con cada una de las muestras y hallamos el mínimo de cada funcional. Tomamos la media de la función en la celda $C_{i,j}^{k-1}$ del paso $(k-1)$ -ésimo, analizamos si está marcada como contorno y en que dirección. Dependiendo de si está marcada como contorno o no, utilizamos como predictor el mínimo del funcional correspondiente a la muestra de los puntos constantes si no está marcada como contorno o el correspondiente a la muestra de la dirección con la que está marcada dicha media (LM-CC). Si realizamos compresión con pérdida muy baja podemos ver que los resultados utilizando Learning Multiresolution son buenos.

Medimos en nuestros experimentos numéricos el número de ceros, la norma dos y PSNR⁶.

Comparamos nuestros resultados con los obtenidos en [1] y [2] utilizando técnicas de multiresolución basadas en interpolación polinómica no lineal (métodos ENO, ENO-SR, ver [2, 3]). También comparamos con interpolación lineal. En todos nuestros ejemplos tomamos tanto para el aprendizaje como para la interpolación stenciles 3×3 . Realizamos los experimentos con cuantización $\epsilon = 0,5$ y $\epsilon = 4$ utilizando error control (ver [2]).

	$\epsilon = 0,5$			$\epsilon = 4$		
	$\ \cdot\ _2$	PSNR	Nnz	$\ \cdot\ _2$	PSNR	Nnz
LIN	1.02	47.92	163464	3.32	37.73	43331
LM	1.02	47.91	159600	3.49	37.65	44812
LM-fa	1.02	47.92	158720	3.33	37.79	43844
LM-CC	1.03	47.89	157507	3.42	37.74	42896
ENO-SR	1.04	48.12	177275	3.50	37.27	49246
ENO-2D	1.03	47.81	176537	3.45	37.40	45993

Tabla 1: Resultados obtenidos con la imagen *peppers*

Agradecimientos

Investigación financiada en parte por el proyecto MEC Ref. MTM2005-07214. 2005-2008 y en parte por el proyecto AP2005-0996. El autor [*] está financiado por una beca FPU del MEC AP2005-0996.

Referencias

- [1] M. Doblas, *Interpolación adaptada a contornos y aplicaciones* GrAN Report 04-04 (2004).
- [2] F. Arandiga, R. Donat, *Nonlinear multiscale decompositions: The approach of A. Harten*, Numerical Algorithms, 23(2000), 175–216.
- [3] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S.R. Chakravarthy, *Uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes*, J. Comput. Phys, 71 (1987) 231–303.
- [4] V. N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning*, Springer, 1995.
- [5] D. F. Yáñez, *Compresión de imágenes digitales. Learning Schemes*, Tr. Investigación, G. Anims, 2007.

⁶ $PSNR = 20 \log_{10}(\frac{255}{\|v-\tilde{v}\|_2})$, donde v es la discretización de la imagen original y \tilde{v} es la aproximación a la imagen.