

## Homogeneización de problemas (elasto)hidrodinámicos en lubricación

G. BAYADA<sup>1</sup>, S. MARTIN<sup>2</sup>, C. VÁZQUEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Centre de Maths, INSA de Lyon Bat. L. da Vinci, INSA de Lyon, 69681-Villeurbanne Cedex.  
E-mail: Guy.Bayada@insa-lyon.fr*

<sup>2</sup> *Dépt. Mathématiques, Université Paris Sud, E-mail: sebastien.martin@math.u-psud.fr.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemáticas, Univ. de A Coruña, Campus Elvina s/n, 15071-A Coruña.  
E-mail: carlosv@udc.es.*

**Palabras clave:** Lubricación elastohidrodinámica, homogeneización, simulación numérica

### Resumen

El presente trabajo trata sobre la homogeneización de un problema de lubricación, utilizando técnicas de doble escala. Se plantea un problema acoplado de tipo Reynolds-Hertz con cavitación Elrod-Adams, que contempla la presencia de efectos debidos a superficies rugosas con oscilaciones periódicas. La geometría de la rugosidad depende de un pequeño parámetro asociado a la frecuencia de la misma. Entre las dificultades para la homogeneización del problema elastohidrodinámico destacamos el carácter no lineal asociado a la frontera libre del modelo de cavitación, los aspectos no locales del modelo de Hertz y la ley de viscosidad no lineal. Además de establecer los resultados de convergencia al problema homogeneizado, para un problema con datos reales se presentan resultados obtenidos con métodos numéricos adecuados, comparando el modelo dependiente del pequeño parámetro y el modelo homogeneizado.

## 1. Modelo matemático

La creciente presencia de dispositivos industriales, que conllevan contactos lubricados por capas delgadas de fluido, motiva el interés por proponer los modelos matemáticos más adecuados para la simulación numérica de los mismos [6]. En muchas situaciones prácticas es interesante la introducción de rugosidades periódicas en las superficies (deformables o no) durante la fabricación. En el marco de contactos lubricados entre superficies rugosas, se mostrará como las técnicas de homogeneización permiten obtener modelos matemáticos adecuados para la simulación numérica eficiente de los procesos. Los modelos matemáticos se basan en ecuaciones de tipo Reynolds para la presión del lubricante, relaciones no

lineales presión-saturación para la cavitación y leyes elásticas para la relación presión-deformación.

Para plantear el modelo de lubricación consideramos el dominio  $\Omega = ]-2l, l[ \times ]-l, l[$ ; la frontera de alimentación de lubricante  $\Gamma_\star = \{-2l\} \times ]-l, l[$  y  $\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_\star$ . Además, suponemos las siguientes aproximaciones parabólicas para la separación entre superficies rígidas en los contactos esfera-plano y cilindro-plano [6]:

$$h_r(x) = \begin{cases} h_0 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2R}, & \text{esfera-plano} \\ h_0 + \frac{x_1^2}{R}, & \text{cilindro-plano} \end{cases} \quad (1)$$

Las condiciones  $0 < h_0 \leq h_r(x) \leq h_1$ , siendo  $h_0$  y  $h_1$  constantes, se verifican en  $\Omega$ . Siguiendo la teoría del contacto hertziano, la relación presión-separación está dada por

$$h[p](x) = h_r(x) + \int_{\Omega} k(x, z)p(z) dz, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2)$$

donde  $h_r$  tiene la expresión (1) y  $k(x, z)$  viene dada por

$$k(x, z) = \begin{cases} c_0 \log \left| \frac{c_1 - z_1}{x_1 - z_1} \right| & \text{cilindro-plano} \\ \frac{c_0}{\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}} & \text{esfera-plano,} \end{cases} \quad (3)$$

donde  $c_0 > 0$  y  $c_1 \geq \max\{|x_1|, x \in \bar{\Omega}\}$ . Claramente  $k$  es positiva y existe  $\tilde{K} > 0$  tal que

$$\|k(x, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq \tilde{K} \quad (4)$$

uniformemente respecto de  $x$ . Además, suponemos la relación presión-viscosidad de Barus:

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p}, \quad (\alpha \geq 0, \mu_0 > 0) \quad (5)$$

La formulación fuerte del problema consiste en encontrar  $(p, \theta)$  tal que:

$$\begin{aligned} x \in \Omega^+ & : \begin{cases} \nabla \cdot (h^3[p](x) e^{-\alpha p(x)} \nabla p(x)) = 6\mu_0 s \frac{\partial}{\partial x_1} (\theta(x) h[p](x)) \\ p(x) > 0 \quad \text{and} \quad \theta(x) = 1 \end{cases} \\ x \in \Omega_0 & : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} (\theta(x) h[p](x)) = 0 \\ p(x) = 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq \theta(x) \leq 1 \end{cases} \\ x \in \Sigma & : \begin{cases} h^3[p](x) e^{-\alpha p(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial n} = 6\mu_0 s (1 - \theta(x)) h[p](x) \cos(\vec{n}, \vec{i}) \\ p(x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} 6\mu_0 s \theta h[p] - h^3[p] e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial n} &= 6\mu_0 s \theta_\star h[p] & \text{en } \Gamma_\star, \\ p &= 0 & \text{en } \Gamma, \end{aligned}$$

donde  $s$  denota la velocidad relativa de la superficie inferior en la dirección  $x_1$ ,  $\theta_\star \in [0, 1]$  es un parámetro de alimentación,  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a  $\Sigma$  exterior a  $\Omega_0$  e  $\vec{i}$  es el vector unitario en la dirección  $x_1$ . Asimismo, los conjuntos son:

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{x \in \Omega, p(x) > 0\} && \text{(región lubricada),} \\ \Omega_0 &= \{x \in \Omega, p(x) = 0\} && \text{(región cavitada),} \\ \Sigma &= \partial\Omega^+ \cup \Omega && \text{(frontera libre)}\end{aligned}$$

Entonces, una formulación variacional del problema está dada por:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Encontrar } (p, \theta) \in V \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} h^3[p] e^{-\alpha p} \nabla p \cdot \nabla v = 6\mu_0 s \left( \int_{\Omega} \theta h[p] \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Gamma_\star} \theta_\star h[p] v \right), \quad \forall v \in V \\ p \geq 0, \quad p(1-\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{c.p.d. en } \Omega \end{cases}$$

donde  $V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}$  y  $\theta_\star \in L^\infty(\Gamma_\star)$ ,  $0 \leq \theta_\star(z) \leq 1$ , c.p.d. en  $\Gamma_\star$ .

Para modelar el caso de superficies rugosas, introducimos el conjunto  $Y = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , de modo que la separación sin deformación se escribe:

$$h_r^\varepsilon(x) = h_r(x) + \lambda \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

donde  $h_r$  se define en (1) y el patrón de rugosidad,  $\lambda$ , verifica:

- (i)  $\lambda \in C_{\bar{1}}(Y) = \{v \in C^0(Y), v \text{ es } Y \text{ periódica}\}$ ,
- (ii)  $\exists \lambda_{\text{máx}} > 0, \quad \|\lambda\|_{L^\infty(Y)} \leq \lambda_{\text{máx}} < h_0$ .

A continuación se definen las separaciones efectivas:

**Definición 1** Para  $q \in L^\infty(\Omega)$ , sean  $h[q]$  y  $h_\varepsilon[q]$  las funciones:

$$\begin{aligned}h[q](x, y) &= h_r(x) + \lambda(y) + \int_{\Omega} k(x, z)q(z) dz, \quad (x, y) \in \Omega \times Y, \\ h_\varepsilon[q](x) &= h[q] \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad x \in \Omega.\end{aligned}\tag{6}$$

Se introduce una formulación variacional del problema rugoso:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} \text{Find } (p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in V \times L^\infty(\Omega) \text{ such that:} \\ \int_{\Omega} h_\varepsilon^3[p_\varepsilon] e^{-\alpha p_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \nabla v = 6\mu_0 s \left( \int_{\Omega} \theta_\varepsilon h_\varepsilon[p_\varepsilon] \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Gamma_\star} \theta_\star h_\varepsilon[p_\varepsilon] v \right), \quad \forall v \in V \\ p_\varepsilon \geq 0, \quad p_\varepsilon(1-\theta_\varepsilon) = 0, \quad 0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1 \quad \text{c.p.d. en } \Omega \end{cases}$$

**Teorema 1** Con las notaciones y condiciones precedentes y cierta hipótesis técnica, para cada  $\varepsilon > 0$ , el problema  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  tiene solución  $(p_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  verificando las estimaciones:

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3, \quad \|p_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_4, \quad \|\theta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\tag{7}$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  solo dependen de  $\mu_0, s, \alpha, h_0 - \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}, h_1, \tilde{K}, \theta_\star, \Omega, \Gamma_\star, r^\star$ .

## 2. Modelo homogeneizado

En esta sección se establece el problema homogeneizado, que se obtiene utilizando las técnicas de desdoblamiento periódico [5]. Las demostraciones de los siguientes resultados se puede encontrar en [3]. En primer lugar, se tiene:

**Lema 1** *Existe  $p_0 \in V$  tal que  $p_\varepsilon \rightharpoonup p_0$  en  $H^1(\Omega)$  y  $p_\varepsilon \rightarrow p_0$  en  $L^2(\Omega)$ . Además, se tiene el resultado de convergencia de doble-escala:*

- (i) *La sucesión  $p_\varepsilon$  converge en doble escala a  $p_0$ . Además, existe  $p_1 \in L^2(\Omega; H^1_{\mathfrak{h}}(Y)/\mathbb{R})$  y una subsucesión  $\varepsilon'$ , también denotada  $\varepsilon$ , tal que  $\nabla p_\varepsilon$  converge en doble escala a  $\nabla p_0 + \nabla_y p_1$ .*
- (ii) *Existe  $\theta_0 \in L^2(\Omega \times Y)$  y una subsucesión  $\varepsilon''$ , denotada  $\varepsilon$ , tal que  $\theta_\varepsilon$  converge en doble escala a  $\theta_0$ .*

Además,  $p_0 \geq 0$  c.p.d. en  $\Omega$ .

La demostración es consecuencia de las estimaciones del Teorema 1 y lemas previos que aparecen en [3]. Además se tiene el siguiente resultado para el par  $(p_0, \theta_0)$ :

$$0 \leq \theta_0 \leq 1 \quad \text{y} \quad p_0 (1 - \theta_0) = 0 \quad \text{c.p.d. en} \quad \Omega \times Y.$$

**Teorema 2** *El problema homogeneizado se puede escribir en la forma:*

$$(\mathcal{P}^*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (p_0, \Xi_1, \Xi_2) \in V \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} e^{-\alpha p_0} \mathcal{A}[p_0] \cdot \nabla p_0 \nabla \phi = 6\mu_0 s \left( \int_{\Omega} \underline{b}^0[p_0] \nabla \phi + \int_{\Gamma_\star} \theta_\star \widehat{h}[p_0] \phi \right), \quad \forall \phi \in V \\ p_0 \geq 0 \quad \text{and} \quad p_0 (1 - \Xi_i) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad \text{c.p.d. en} \quad \Omega \end{array} \right.$$

$$\text{con } \widetilde{f}(x) = \int_Y f(x, y) dy, \quad y$$

$$\mathcal{A}[p_0] = \begin{pmatrix} \widetilde{a}[p_0] - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{W}_1^\star}{\partial y_1} \right] & - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{W}_2^\star}{\partial y_1} \right] \\ - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{W}_1^\star}{\partial y_2} \right] & \widetilde{a}[p_0] - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{W}_2^\star}{\partial y_2} \right] \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^0[p_0] = \begin{pmatrix} \Xi_1[p_0] \mathfrak{h}_1^\star[p_0] \\ \Xi_2[p_0] \mathfrak{h}_2^\star[p_0] \end{pmatrix},$$

con las notaciones ( $i = 1, 2$ ):

$$\mathfrak{h}_i^\star[p_0] = \widetilde{b}[p_0] - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{\chi}_i^\star}{\partial y_i} \right], \quad \mathfrak{h}_i^0[p_0] = \left[ \theta_0 b[p_0] \right] - \left[ a[p_0] \frac{\partial \widetilde{\chi}_i^0}{\partial y_i} \right],$$

y definiendo los siguientes cocientes ( $i = 1, 2$ ):

$$\Xi_i[p_0] = \frac{\mathfrak{h}_i^0[p_0]}{\mathfrak{h}_i^\star[p_0]}$$

A continuación se garantiza la existencia de soluciones del problema con saturación isotrópica.

**Teorema 3** *El problema  $(\mathcal{P}^*)$  admite una solución  $(p_0, \Xi, \Xi)$  con  $p_0 (1 - \Xi) = 0$  y  $0 \leq \Xi \leq 1$  c.p.d. en  $\Omega$ .*

### 3. Ejemplos numéricos

En esta sección, la simulación numérica de contactos micro-elastohidrodinámicos ilustra los resultados teóricos de convergencia de la sección anterior. Para la solución del problema dependiente de  $\varepsilon$  y el homogeneizado correspondiente, se usa una iteración de punto fijo entre el problema hidrodinámico y el elástico. Además, el hidrodinámico se resuelve mediante un método de características para el término convectivo combinado con elementos finitos y un método de dualidad para el operador maximal monótono asociado al modelo de Elrod-Adams. El problema elástico se aproxima mediante una fórmula de cuadratura apropiada en la expresión (2) con los puntos medios de las aristas como nodos de cuadratura. Estas técnicas se han usado en [7] en ausencia de rugosidad.

En los ejemplos abordamos la simulación de un contacto bola-plano que, escrito en variables adimensionales en el dominio  $\Omega = ]-4, 2[ \times ]-2, 2[$ , plantea el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (p_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in V \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} h_\varepsilon^3[p_\varepsilon] e^{-\alpha p_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla v = \beta \left( \int_{\Omega} \theta_\varepsilon h_\varepsilon[p_\varepsilon] \frac{\partial v}{\partial x_1} + \int_{\Gamma_\star} \theta_\star h_\varepsilon[p_\varepsilon] v \right), \quad \forall v \in V \\ p_\varepsilon \geq 0, \quad p_\varepsilon (1 - \theta_\varepsilon) = 0, \quad 0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1 \quad \text{c.p.d. in } \Omega, \end{array} \right.$$

donde la separación efectiva se escribe en la forma  $h_\varepsilon[p_\varepsilon](x) = h_r^\varepsilon(x) + h_d[p_\varepsilon](x)$ , siendo

$$\begin{aligned} h_r^\varepsilon(x) &= h_0 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \alpha_1 \sin\left(\frac{12\pi(x_1 + 4)}{\varepsilon}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{8\pi(x_2 + 2)}{\varepsilon}\right), \\ h_d[p_\varepsilon](x) &= \frac{2}{\pi^2} \int \frac{p_\varepsilon(z)}{\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}} dz. \end{aligned}$$

con los parámetros  $h_0 = 0,6$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,85h_0, 0)$  para la rugosidad transversal y  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0,85h_0)$  para la rugosidad longitudinal. Se consideran  $\alpha = 0,42$ ,  $\beta = 2,062$  y  $\theta_\star = 0,3$ . De este modo el problema homogeneizado puede escribirse en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (p_0, \Xi) \in V \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} e^{-\alpha p_0} \begin{pmatrix} a_1[p_0] & 0 \\ 0 & a_2[p_0] \end{pmatrix} \cdot \nabla p_0 \nabla \phi = \beta \left( \int_{\Omega} \Xi b[p_0] \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \int_{\Gamma_\star} \theta_\star c[p_0] \phi \right), \quad \forall \phi \in V \\ p_0 \geq 0, \quad p_0 (1 - \Xi) = 0, \quad 0 \leq \Xi \leq 1, \quad \text{c.p.d. en } \Omega \end{array} \right.$$

En la Tabla 1 presentamos los coeficientes funcionales  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  y  $c$  del problema homogeneizado para los casos de rugosidad transversal y longitudinal obtenidos mediante MATHEMATICA. La separación en el caso rígido sin rugosidad viene dada por:

$$h_r(x) = h_0 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

En este resumen sólo mostramos el caso de rugosidad transversal y remitimos al trabajo [3] para el caso de rugosidad longitudinal.

Aunque se ha verificado la convergencia con el uso de distintas malla, simplemente presentamos los resultados para  $\Delta x_1 = 0,025$  y  $\Delta x_2 = 0,05$  (38400 triángulos y 19521 vértices). Además, se toma el paso de tiempo artificial  $\Delta t = \Delta x_1$ ; los test de parada en todos los algoritmos son  $\delta = 10^{-5}$  en error relativo en la norma  $L^2$  discreta entre dos

	Rugosidad transversal	Rugosidad longitudinal
$h[p](x, y)$	$h_r(x) + h_d[p](x) + \alpha_1 \sin(2\pi y_1)$	$h_r(x) + h_d[p](x) + \alpha_2 \sin(2\pi y_2)$
$a_1[p_0]$	$2 \frac{((h_r + h_d[p])^2 - \alpha_1^2)^{5/2}}{2(h_r + h_d[p])^2 + h_r^2}$	$(h_r + h_d[p])^3 + \frac{3}{2} (h_r + h_d[p]) \alpha_2^2$
$a_2[p_0]$	$(h_r + h_d[p])^3 + \frac{3}{2} (h_r + h_d[p]) \alpha_1^2$	$2 \frac{((h_r + h_d[p])^2 - \alpha_2^2)^{5/2}}{2(h_r + h_d[p])^2 + \alpha_2^2}$
$b[p_0]$	$2(h_r + h_d[p]) \frac{(h_r + h_d[p])^2 - \alpha_1^2}{2(h_r + h_d[p])^2 + \alpha_1^2}$	$(h_r + h_d[p])$
$c[p_0]$	$(h_r + h_d[p])$	$(h_r + h_d[p])$

Tabla 1: Coeficientes homogenizados

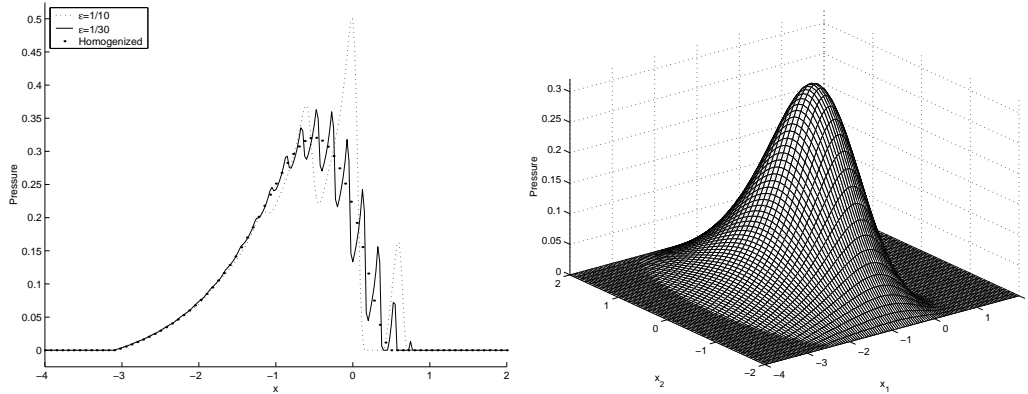


Figura 1: Izda:Comparación de presiones en  $x_2 = 0$ . Dcha:Presión homogeneizada.

iteraciones. A la izquierda en la FIGURA 1, se muestra la convergencia fuerte en presión al problema homogeneizado cuando  $\epsilon$  tiende a 0, representando para  $x_2 = 0$ , la presión para diferentes valores de  $\epsilon$  y la presión del problema homogeneizado. A la derecha, se presenta la presión del homogeneizado en todo el dominio. En la FIGURA 2, se presentan resultados análogos para la deformación. En la FIGURA 3, se muestran los resultados para la saturación, ilustrando su convergencia débil ligada a la presencia de oscilaciones que no se amortiguan con el decrecimiento de  $\epsilon$ , a diferencia de la presión y la deformación.

A continuación, se ilustra la influencia del comportamiento elástico en los efectos debidos a la rugosidad en presencia de rugosidades transversales. Para ello comparamos los resultados de los casos hidrodinámico y elastohidrodinámico. En la FIGURA 4 se muestran la presión y saturación correspondientes a los problemas hidrodinámico sin rugosidad ( $\alpha_1 = \alpha_2 = k = 0$ ), hidrodinámico homogeneizado ( $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = k = 0$ ), elastohidrodinámico sin rugosidad ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, k \neq 0$ ) y elastohidrodinámico homogeneizado ( $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, k \neq 0$ ). Las simulaciones numéricas permiten observar la influencia de la rugosidad sobre la distribución de presiones en régimen hidrodinámico y elastohidrodinámico, así como en la presión máxima. Es claro que la presencia de rugosidad influye más en el caso hidrodinámico. En la FIGURA 5 se observa como la rugosidad conlleva un aumento de las deformaciones.

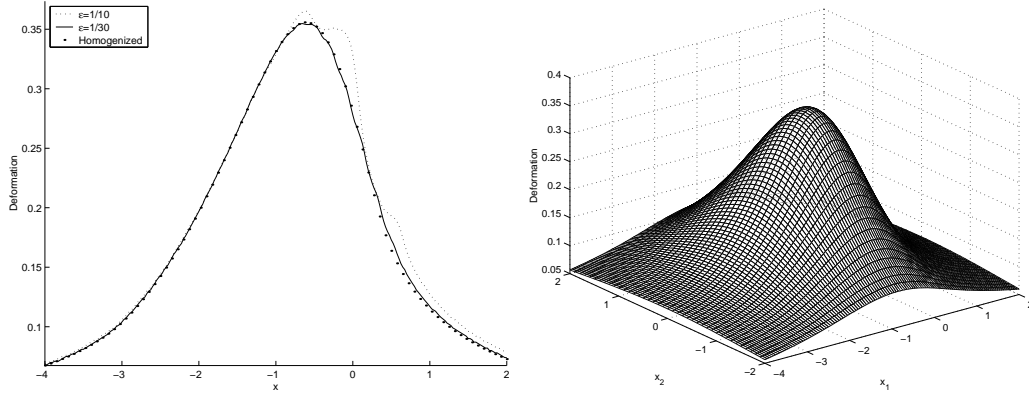


Figura 2: Izda: Comparación de deformaciones en  $x_2 = 0$ . Dcha: Deformación homogeneizada.

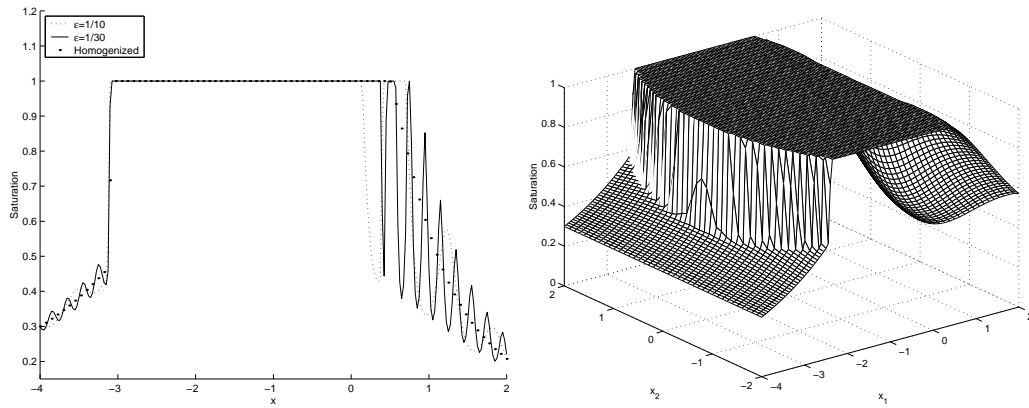


Figura 3: Izda: Comparación de saturaciones en  $x_2 = 0$ . Dcha: Saturación homogeneizada.

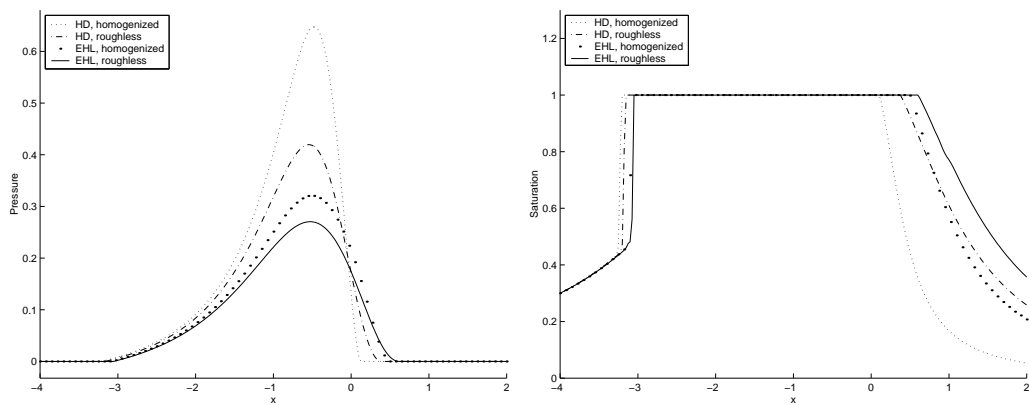


Figura 4: Influencia de la contribución elástica sobre la rugosidad en presión (izda) y saturación (dcha).

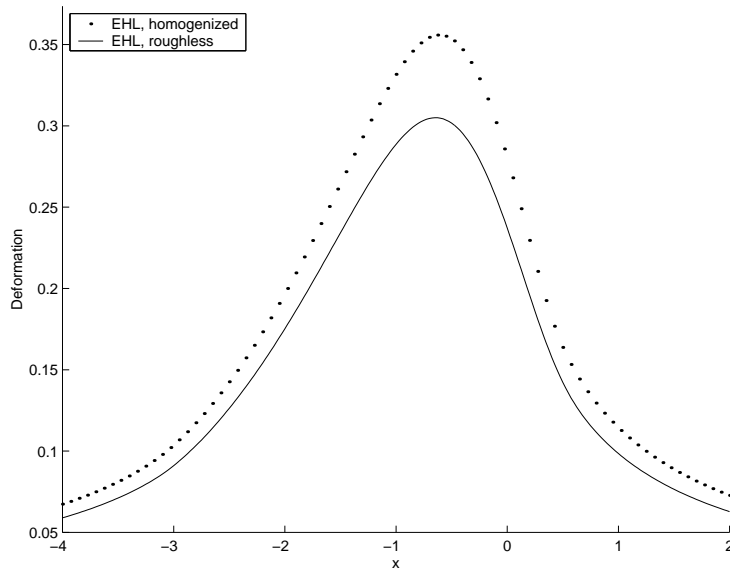


Figura 5: Deformación del caso sin rugosidad y del homogeneizado.

Las demostraciones de los resultados teóricos se pueden encontrar en [3]. Las técnicas de doble escala de [1] se han utilizado previamente en problemas hidrodinámicos [2] y las técnicas de homogeneización y métodos numéricos permiten abordar otros dispositivos como el eje-cojinete o patrones de rugosidad más generales [4].

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el MEC mediante el proyecto de investigación MTM 2004-05796-C02-01.

### Referencias

- [1] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*. SIAM J. Math. Anal., 23, (1992), 1482–1518.
- [2] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, *Two-scale homogenization of Elrod-Adams model*. Asymp. Anal., 44, (2005), 75–110.
- [3] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, *Homogenization of a nonlocal elastohydrodynamic lubrication problem: a new free boundary model*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 15, (2005), 1923–1956.
- [4] G. Bayada, S. Martin, C. Vázquez, *Micro-roughness effects in elasto(hydrodynamic) lubrication including a mass-flow preserving cavitation model*. Tribology International, 39, (2006), 1707–1718.
- [5] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, *Periodic unfolding and homogenization*. C.R.A.S. Paris, 335, (2002), 99–104.
- [6] D. Dowson, J. R. Higgison, *Elastohydrodynamic lubrication*, Pergamon Press, Oxford, 1977.
- [7] J. Durany, G. García, C. Vázquez, *Numerical simulation of a lubricated Hertzian contact problem under imposed load*. Finite Elem. Anal. Des., 38, (2002), 645–658.