XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Dinámica de una ecuación de reacción-difusión con discontinuidades.

José M. Arrieta[1], A. Rodríguez-Bernal[1], J. Valero[2]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, E-29040 Madrid. E-mails:* arrieta@mat.ucm.es, arober@mat.ucm.es.
[2] *Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad s/n, E-03202 Elche (Alicante). E-mail:* jvalero@umh.es.

Palabras clave: ecuaciones de reacción-difusión, sistemas dinámicos multivaluados, atractor global, semicontinuidad superior, estabilidad, conexiones heteroclínicas

Resumen

Estudiamos la dinámica de una ecuación de reacción difusión que presenta una discontinuidad. En primer lugar probamos la semicontinuidad superior del atractor con respecto a aproximaciones suaves del término no lineal. Después damos una descripci'on precisa del conjunto de puntos fijos y su estabilidad. Finalmente, analizamos las posibles conexiones heteroclínicas entre los puntos fijos, obteniendo así información sobre la estructura del atractor.

1. Introducción

En este trabajo consideramos una ecuación de reacción difusión con un término no lineal discontinuo. El método usual de tratar este tipo de ecuaciones consiste en unir los puntos de la discontinuidad con una línea vertical, transformando la ecuación en una inclusión diferencial. En particular, estudiamos la siguiente inclusión differential:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) \in H_0(u) + \omega u, \text{ en } \Omega \times (0,T), \\ u\mid_{\partial\Omega} = 0, \; u(x,0) = u_0(x), \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado con frontera suave, $\omega \geq 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente y

$$H_0(u) = \left\{ \begin{array}{c} -1, \text{ si } u < 0, \\ [-1,1], \text{ si } u = 0, \\ 1, \text{ si } u > 0 \end{array} \right.$$

es la función de Heaviside.

Notemos que en este tipo de ecuaciones no podemos asegurar la unicidad del problema de Cauchy. Sin embargo, usando la teoría de semiflujos multivaluados es posible estudiar el comportamiento asintótico de la soluciones. La existencia del atractor global para la inclusión (1), bajo determinadas condiciones, ha sido probada en [4], [5].

El trabajo se compone de dos partes. Por un lado, si asumimos que $\omega < \lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, podemos aproximar la función H_0 por funciones suaves H_ε y estudiar la convergencia de las soluciones cuando $\varepsilon \to 0$. De esta forma, probamos la semicontinuidad superior de los atractores de la ecuación aproximativa $\mathcal{A}_\varepsilon$ con respecto al atractor de la inclusión inicial $\mathcal{A}_0$.

Por otro lado, en el caso $f = 0$, $\omega = 0$, $n = 1$, estudiamos la estructura del atractor global, obteniendo una respuesta parcial al problema. Probamos en primer lugar que existe una cantidad infinita, pero numerable, de puntos fijos, que se pueden ordenar usando una función de energía apropiada. Después estudiamos su estabilidad, obteniendo que dos de ellos (los de menor energía) son asintóticamente estables, mientras que el resto son inestables.

Finalmente, notemos que la existencia de una función de Lyapunov implica que el atractor global puede ser totalmente caracterizado usando los puntos fijos y las trayectorias heteroclínicas. Por tanto, nos interesa saber qué heteroclínicas existen entre los puntos fijos. Para este problema hemos obtenido una respuesta parcial, quedando sin resolver una parte de las posibles conexiones.

2. Semicontinuidad superior del atractor

Sea $\|\cdot\|$ la norma del espacio $L^2(\Omega)$. Podemos reescribir la inclusión (1) en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \partial\psi^1(u) - \partial\psi^2(u) \ni 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\partial\psi^i$, $i = 1, 2$, son los subdiferenciales de las funciones propias, convexas y semicontinuas inferiormente $\psi^i : L^2(\Omega) \to]-\infty, +\infty]$ (ver [3]):

$$\psi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \int_0^u f(s)\, ds dx, \text{ si } u \in H_0^1(\Omega), \int_0^u f(s)\, ds \in L^1(\Omega), \\ +\infty, \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

$$\partial\psi^1(u) = -\Delta u + f(u),$$

$$\psi^2(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left(\omega \frac{u^2}{2} + \int_0^u H_0(s)\, ds\right) dx, \text{ si } \int_0^u H_0(s)\, ds \in L^1(\Omega), \\ +\infty, \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\partial\psi^2(u) = \left\{ y \in L^2(\Omega) : \ y(x) \in H_0(u(x)) + \omega u(x), \text{ en c.t.p. } x \in \Omega \right\},$$

donde $D\left(\partial\psi^1\right) = \{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \ f(u) \in L^2(\Omega)\}$, $D\left(\partial\psi^2\right) = L^2(\Omega)$. Podemos ver fácilmente que $\int_0^u H_0(s)\, ds = |u|$.

Definición 1 *La función $u(\cdot) \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ es una solución fuerte de (2) si:*

1. $u(0) = u_0$;

2. $u(\cdot)$ *es absolutamente continua en compactos de* $(0,T)$;

3. *Existe una función* $g(t) \in \partial\psi^2(u(t))$*, en c.t.p.* $t \in (0,T)$*, tal que*

$$\frac{du(t)}{dt} - \Delta u + f(u) - g(t) = 0, \text{ en c.t.p. } t \in (0,T). \tag{3}$$

Para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, $T > 0$, existe al menos una solución fuerte $u(\cdot)$ de (1) tal que $g(\cdot) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Toda solución puede ser extendida a todo el semieje $t \geq 0$, es decir, a una solución global. Sin embargo, la solución correspondiente a una condición inicial puede no ser única.

A partir de las soluciones vamos a definir un semiflujo multivaluado. Sea $\mathcal{D}(u_0)$ el conjunto de todas las soluciones fuertes definidas en $[0,+\infty)$ (con condición inicial u_0) y tales que $g(\cdot) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ para todo $T > 0$. Entonces el operador multivaluado $G_0 : \mathbb{R}_+ \times L^2(\Omega) \to P(L^2(\Omega))$, dado por

$$G_0(t,u_0) = \underset{u\in\mathcal{D}(u_0)}{\cup} u(t),$$

es un semiflujo multivaluado estricto, es decir, para todo $t_i \geq 0$, $i = 1,2$, $G_0(t_1+t_2,u_0) = G_0(t_2,G_0(t_1,u_0))$ y $G_0(0,\cdot) = Id$. Además, el conjunto $G_0(t,u_0)$ es compacto para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, $t \geq 0$. La demostración de estos resultados se puede consultar en [4, Teorema 4, Lemas 1, 2 y 6].

Recordemos ahora el concepto de atractor global. El conjunto $\mathcal{A}$ es una atractor global para el semiflujo multivaluado G_0 si atrae cada acotado B de $L^2(\Omega)$, i.e.

$$dist(G_0(t,B),\mathcal{A}) \to 0, \text{ cuando } t \to +\infty,$$

donde $dist(C,A) = \sup_{c\in C} \inf_{a\in A} \|c-a\|$ es la semi-distancia de Hausdorff, y además es negativamente semi-invariante, i.e.

$$\mathcal{A} \subset G_0(t,\mathcal{A}), \forall t \geq 0.$$

Observemos que por la monotonía de f tenemos que $(f(s)-f(0))s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Por tanto, para todo $y_2 \in H_0(s)$, $s \in \mathbb{R}$,

$$-f(s)s + y_2 s + \omega s^2 \leq \omega s^2 + D|s|, \tag{4}$$

donde $D = |f(0)| + 1$. Si asumimos además que

$$\omega < \lambda_1, \tag{5}$$

donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces deducimos del Teorema 4 en [4] que G_0 posee un atractor global compacto, que es es estrictamente invariante (i.e. $\mathcal{A} = G_0(t,\mathcal{A})$, $\forall t \geq 0$). Además, $\mathcal{A}$ es un conjunto conexo [5]. El caso de ecuaciones univaluadas ha sido estudiado, por ejemplo, en [1].

Vamos a estudiar a continuación aproximaciones suaves de la inclusión (1). Sea $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, una familia de funciones no decreciente tal que

$$|H_\varepsilon(s) - H_0(s)| < \varepsilon, \text{ si } |s| > \varepsilon,$$

$$-1 < H_\varepsilon(s) < 1, \text{ para todo } s.$$

Además, H'_ε es no creciente para $u \geq 0$, y no decreciente para $u \leq 0$.

Consideramos la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) - H_\varepsilon(u_\varepsilon) = \omega u_\varepsilon, \\ u_\varepsilon \mid_{\partial\Omega} = 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0. \end{cases} \tag{6}$$

Es fácil ver que $f(u) - H_\varepsilon(u) = f_\varepsilon(u) - \omega_\varepsilon u$, para cierto $\omega_\varepsilon \geq 0$, siendo f_ε una función no decreciente. Entonces (6) posee una única solución fuerte $u_\varepsilon(\cdot)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ (ver [3, p.189]). Por tanto, podemos definir un semigrupo $G_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

Veamos que los atractores de esta ecuación convergen al atractor de (1) en la semi-distancia de Hausdorff.

Teorema 2 *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\delta > 0$. Suponemos que (5) se cumple. Entonces:*

1. *(6) posee un atractor global compacto e invariante $\mathcal{A}_\varepsilon$ en $L^2(\Omega)$.*

2. *Los atractores $\mathcal{A}_\varepsilon$ de (6) y $\mathcal{A}_0$ de (1) atraen los acotados de $L^2(\Omega)$ en la norma del espacio $W^{2-\delta,p}(\Omega)$.*

3. *La unión $\bigcup_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0} \mathcal{A}_\varepsilon \subset W^{2-\delta,p}(\Omega)$ es precompacta en $W^{2-\delta,p}(\Omega)$.*

4. *$dist(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \to 0$, si $\varepsilon \to 0$, donde la semi-distancia se toma con respecto a la norma del espacio $W^{2-\delta,p}(\Omega)$.*

3. Puntos fijos y su estabilidad

Consideremos a partir de ahora la ecuación (1) con $n = 1$, $\Omega = (0,1)$ y $f \equiv 0$, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - H_0(u) \ni \omega u, \text{ en } (0,1) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{7}$$

Asumiremos a partir de este momento que $0 \leq \omega < \pi^2$. Observamos que esta condición implica que el atractor global existe, como se ha visto en la Sección 2.

Vamos a obtener una descripción completa de los puntos fijos de esta ecuación en particular. En este caso, hemos demostrado que existe una cantidad infinita pero numerable de puntos de equilibrio, que además se pueden calcular explícitamente. Éstos vienen dados por:

$$
\begin{aligned}
& v_0 \equiv 0, \qquad (8)\\
& v_1^+(x) = \frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}x\right) + \frac{1-\cos\left(\sqrt{\omega}\right)}{\omega sen\left(\sqrt{\omega}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}x\right) - \frac{1}{\omega},\\
& v_1^-(x) = -v_1^+(x),\\
& v_2^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}x\right) + \frac{1-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)}{\omega sen\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}x\right) - \frac{1}{\omega} & \text{, si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\\ -\frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)}{\omega sen\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{\omega}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}\\
& v_2^-(x) = -v_2^+(x),\\
& \qquad \vdots\\
& v_n^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}x\right) + \frac{1-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)}{\omega \sin\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}x\right) - \frac{1}{\omega} \quad \text{, si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n},\\ \vdots \\ \frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{1-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)}{\omega sen\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{\omega},\\ \text{si } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, k \text{ es par}\\ -\frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1-\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)}{\omega sen\left(\frac{\sqrt{\omega}}{n}\right)} sen\left(\sqrt{\omega}\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{1}{\omega},\\ \text{si } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, k \text{ es impar,}\\ k = 0, ..., n-1, \end{cases}\\
& v_n^-(x) = -v_n^+(x),
\end{aligned}
$$

donde $n = 0, 1, 2, ...$

Los puntos fijos tienen las siguientes interesantes propiedades:

1. Para todo $n \geq 1$ los puntos v_n^+, v_n^- poseen exactamente $n-1$ ceros en el intervalo $(0,1)$.
2. Si $\omega = 0$ para todo $v_k^\pm$, $k \geq 1$, y cualquier $n \geq 2$, se cumple la siguiente propiedad de auto-similaridad:

$$
v_{nk}^\pm(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} v_k^\pm(nx), & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -\frac{1}{n^2} v_k^\pm\left(n\left(x-\frac{1}{n}\right)\right), & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ \vdots \end{cases}
$$

A continuación definiremos la función $E : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$
E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \int_0^1 \left(|u| + \frac{\omega}{2}u^2\right) dx = \psi^1(u) - \psi^2(u). \qquad (9)
$$

Para una solución arbitraria $u(t)$ de la inclusión (6) se verifican las siguientes propiedades:

1. $E(u(t))$ es continua en $(0,+\infty)$;
2. $E(u(t)) \leq E(u(s))$, si $t \geq s > 0$;
3. Si $E(u(t)) = E(u(0))$, para cierto $t > 0$, entonces $u(\tau) = u(0)$ para todo $\tau \in [0,t]$, i.e. $u(0) = v$ es un punto fijo.

Llamaremos a E función de Lyapunov o también función de energía. Los puntos fijos vienen ordenados según la función de energía, ya que

$$E\left(v_1^+\right) = E\left(v_1^-\right) < E\left(v_2^+\right) = E\left(v_2^-\right) < ... < E\left(v_n^+\right) = E\left(v_n^-\right) < ... < E(0) = 0. \quad (10)$$

Además,

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(v_n^+\right) = 0.$$

La existencia de la función de Lyapunov E implica que el conjunto omega-límite de cualquier solución $u(t)$, definido por

$$\omega(\{u(t)\}) = \left\{y : u(t_k) \to y \text{ in } L^2(0,1), \text{ where } t_k \to +\infty\right\},$$

se compone de un único punto fijo.

Lema 3 *Para una solución arbitraria $u(t)$ de la inclusión (7) $\omega(\{u(t)\}) = z \in Z$, donde Z es el conjunto de puntos fijos. Además, $u(t) \to z$, si $t \to +\infty$, en $H_0^1(0,1)$.*

Por tanto, cualquier solución de nuestra ecuación converge a un punto fijo en la norma de $H_0^1(0,1)$.

Otra cuestión relevante es el estudio de las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio en el espacio de fases $L^2(0,1)$. Resumimos en varios teoremas los resultados obtenidos.

Teorema 4 *Si $\omega = 0$ los puntos fijos v_1^+, v_1^- son estables. Además:*
i) La solución $u(t) = v_1^+$ (respectivamente v_1^-) correspondiente a $u_0 = v_1^+$ (respectivamente v_1^-) es única.
ii) Los puntos $v_1^\pm$ son asintóticamente estables.

Teorema 5 *Si $\omega = 0$ para todo $n \geq 2$ los puntos fijos v_n^+, v_n^- son inestables.*

El punto $v_0 = 0$ también es inestable, pero en este caso tenemos un resultado más fuerte:

Teorema 6 *Si $\omega = 0$ para todo v_k^+ (respectivamente v_k^-) existe una solución u_k^+ (respectivamente u_k^-) con $u_k^+(0) = v_0 = 0$ tal que $u_k^+(t) \to v_k^+$ en $L^2(0,1)$ (respectivamente $u_k^-(t) \to v_k^-$), cuando $t \to +\infty$.*

Por tanto, hemos obtenido que $v_1^\pm$ son los únicos puntos de equilibrio estables. Se deduce del último teorema que existen infinitas soluciones correspondientes a la condición inicial $v_0 = 0$. Además, entre $v_0 = 0$ y cualquier v_k^+, v_k^- existe una conexión heteroclínica.

4. Conexiones heteroclínicas

Consideremos ahora la siguiente cuestión: ¿qué trayectorias heteroclínicas existen entre los puntos fijos de la inclusión (7)? Vamos a estudiar este problema en el caso particular en el cual $\omega = 0$. El conocimiento de estas conexiones nos proporciona una importante información sobre la estructura del atractor.

Recordemos que una trayectoria completa es una función $u(t)$ definida en $(-\infty, \infty)$ tal que $u(\cdot)$ es una solución fuerte de (7) en cualquier intervalo $(-T, T)$. Usando la invarianza estricta del atractor no es difícil ver que éste se compone de la unión de todas las trayectorias completas acotadas de la inclusión.

Anteriormente hemos definido el conjunto ω-límite. Para una trayectoria completa definiremos también el conjunto α-límite:

$$\alpha(\{u(t)\}) = \left\{y : u(t_k) \to y \text{ en } L^2(0,1), \text{ donde } t_k \to -\infty\right\},$$

que es no vacío.

Lema 7 *Sea $u(t)$ una trayectoria completa acotada de (7). Entonces $\alpha(\{u(t)\}) = z \in Z$, y $u(t) \to z$, si $t \to -\infty$, en $H_0^1(0,1)$.*

Hemos obtenido en los Lemas 3 y 7 que cualquier trayectoria completa acotada satisface

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{\to} z_2 \in Z, \; u(t) \underset{t\to-\infty}{\to} z_1 \in Z.$$

En este caso decimos que existe una conexión heteroclínica desde z_1 hasta z_2. Denotaremos esta propiedad por $z_1 \rightsquigarrow z_2$. Notemos que, aunque la convergencia se entiende en el sentido del espacio $L^2(0,1)$, tenemos convergencia en normas más fuertes (como por ejemplo $H_0^1(0,1)$).

De todos estos resultados deducimos que el atractor global se compone de los puntos fijos y las trayectorias heteroclínicas entre ellos. Así, conocer las posibles trayectorias heteroclínicas implica tener una descripción completa de la estructura del atractor.

Ya hemos visto en el Teorema 6 que

$$v_0 \rightsquigarrow v_k^{\pm}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Tenemos el siguiente resultado parcial:

Teorema 8 *Sea $\omega = 0$. Entonces:*

1. *Para todo $n \geq 2$ tenemos que*

$$\begin{aligned} v_n^+ &\rightsquigarrow v_{n-1}^+, \quad v_n^+ \rightsquigarrow v_{n-1}^-, \\ v_n^- &\rightsquigarrow v_{n-1}^+, \quad v_n^- \rightsquigarrow v_{n-1}^-, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_n^+ &\rightsquigarrow v_1^+, \; v_n^+ \rightsquigarrow v_1^-, \\ v_n^- &\rightsquigarrow v_1^+, \; v_n^- \rightsquigarrow v_1^-. \end{aligned}$$

2. Si $v_k \rightsquigarrow v_i$, $k > i \geq 1$, entonces $v_{nk} \rightsquigarrow v_{ni}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que el último resultado permite obtener nuevas conexiones a partir de las anteriores. Por ejemplo, de $v_2 \rightsquigarrow v_1$ obtenemos $v_4 \rightsquigarrow v_2$, $v_6 \rightsquigarrow v_3$, etc.

Finalmente, como la función de energía E es decreciente en todas las soluciones que no son puntos fijos, las conexiones heteroclínicas de un punto v a otro v^* no se puede producir si $E(v) \leq E(v^*)$. Es decir, sólo puede existir una trayectoria heteroclínica de un punto de mayor energía a otro de energía menor. Nuestra conjetura es que siempre que $E(v) > E(v^*)$ debe existir alguna conexión heteroclínica desde v hasta v^*. Sin embargo, por el momento, sólo hemos podido demostrar la parte de estas conexiones que hemos visto.

Las demostraciones de los resultados enunciados en este artículo se pueden consultar en [2].

Referencias

[1] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, A. Rodriguez-Bernal, Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions: uniform bounds, *Comm. Partial Diff. Equations,* **25** (2000), 1-37.

[2] J.M. Arrieta, A. Rodríguez-Bernal, J. Valero, Dynamics of a reaction-diffusion equation with a discontinuous nonlinearity, *Internat. J. Bifur. Chaos,* **16** (2006), 2695-2984.

[3] Barbu V. "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces", Editura Academiei, Bucuresti, 1976.

[4] J. Valero, Attractors of parabolic equations without uniqueness, *J. Dynamics Differential Equations*, **13** (2001), 712-744.

[5] J. Valero, On the Kneser property for some parabolic problems, *Topology Appl.*, **153** (2005), 975-989.