

Ecuación hiperbólica de transmisión del calor para el estudio de la ablación corneal

E. J. BERJANO¹, J. A. LÓPEZ MOLINA², M. J. RIVERA²,
M. TRUJILLO²

¹ Dpto. de Ingeniería Electrónica, Centro de Investigación e Innovación en Bioingeniería, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022, Valencia. E-mail: eberjano@eln.upv.es.

² Dpto. Matemática Aplicada, Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022, Valencia. E-mails: mjrivera@mat.upv.es, jalopez@mat.upv.es, matrugui@mat.upv.es .

Palabras clave: ecuación hiperbólica del calor, córnea, ablación

Resumen

En este trabajo presentamos el estudio del problema de transmisión del calor que se produce en el proceso de ablación de la córnea humana por radiofrecuencia, tal es el caso de la queratoplastia conductiva para la corrección de la hipermetropía y/o el astigmatismo mediante el empleo de electrodos intracorneales de muy pequeñas dimensiones. En estos casos, las distancias de interés son lo suficientemente pequeñas y los tiempos de excitación lo suficientemente cortos, como para que el estudio de modelado de la transmisión de calor deba contemplar la ecuación hiperbólica de transmisión del calor en lugar de la parabólica o clásica.

1. Introducción

Es cada vez mayor el número de trabajos en los que para abordar el estudio de un problema de transmisión del calor se utiliza el modelo hiperbólico, en lugar del clásico o parabólico. El modelo clásico de Fourier supone una velocidad infinita de transmisión del calor y la existencia de flujos de valor infinito. Aunque estos inconvenientes físicos no han supuesto una barrera para utilizar el modelo en multitud de aplicaciones ordinarias a la Ingeniería, sí que se encuentran disparidades entre los resultados teóricos obtenidos con el modelo y la experiencia en situaciones físicas en las que se aplican grandes cantidades de calor en pequeños intervalos de tiempo.

Con el creciente desarrollo de nuevas tecnologías es cada vez mayor el número de situaciones físicas de estas características (como por ejemplo el procesado de materiales

mediante pulsos de láser o la irradiación electromagnética de sólidos). En estos casos el empleo del modelo hiperbólico subsana los errores del clásico. El modelo hiperbólico supone una velocidad finita de transmisión del calor y la existencia de flujos de valor finito. La ecuación hiperbólica del calor en el caso de materiales isótropos es (ver [3])

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \alpha \Delta T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho c} \left(Q(\mathbf{x}, t) + \tau \frac{\partial Q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (1)$$

donde T es la temperatura, \mathbf{x} y t las variables espacial y temporal, respectivamente, τ el parámetro de relajación, ρ la densidad, c el calor específico, α la difusividad y Q las fuentes internas de calor.

Estamos interesados en el estudio del problema de transmisión del calor que se produce en el proceso de ablación de la córnea humana mediante radiofrecuencia, tal es el caso de la queratoplastia conductiva para la corrección de la hipermetropía y/o el astigmatismo mediante el empleo de electrodos intracorneales de dimensiones muy pequeñas. En estos casos, las distancias de interés son lo suficientemente pequeñas, y los tiempos de excitación lo suficientemente cortos, como para que el estudio de modelado de la transmisión de calor deba contemplar la ecuación hiperbólica. Así, el **objetivo** de esta comunicación es obtener la solución analítica del problema de ablación en la córnea bajo el punto de vista del modelo hiperbólico y compararla con la obtenida con el modelo parabólico. El **interés** de este trabajo se basa en que los modelos matemáticos propuestos hasta la fecha para la predicción de la temperatura corneal durante el calentamiento con radiofrecuencia no contemplan la transferencia de calor con velocidad finita. El modelo que presentamos permitirá una mejor estimación de la temperatura, y por lo tanto, una mejora en la comprensión de los fenómenos biofísicos implicados en estas terapias.

2. Planteamiento del problema

Con objeto de poder abordar el problema de forma analítica hemos considerado un modelo que supone una simplificación del escenario real. En concreto hemos considerado un electrodo activo esférico de radio 45 micras, incrustado en el tejido corneal que se supone de extensión infinita. En un punto en el infinito se situaría el electrodo dispersivo.

Es natural en el problema que vamos a estudiar el empleo de coordenadas esféricas en la ecuación (1), siendo todas las variables independientes de los ángulos esféricos. La fuente de calor viene dada por la expresión

$$Q(r, t) = \frac{Pr_0}{4\pi r^4} H(t),$$

donde $H(t)$ es la función de Heaviside, P la energía aplicada y r_0 el radio del electrodo. Así, la ecuación de gobierno del problema es

$$-\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}(r, t) \right) + \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(r, t) = \frac{P \alpha r_0}{4 \pi k r^4} \left(H(t) + \tau \delta(t) \right), \quad (2)$$

siendo k la conductividad térmica ($\alpha = \frac{k}{\rho c}$) y $\delta(t)$ la distribución de Dirac.

Las condiciones de iniciales y de contorno son

$$\begin{aligned} T(r, 0) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(r, 0) = 0 \quad \forall r > r_0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, t) = T_0, \quad \frac{\tau \rho_0 c r_0}{3 k} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t}(r_0, t) + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(r_0, t) \right) = \frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t) \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Para obtener la última condición de (3), junto con la expresión del flujo hiperbólico (ver [3]), se ha hecho una simplificación adicional consistente en suponer que la temperatura del electrodo es constante en todos sus puntos, con lo que el calor que entra en él por unidad de tiempo se puede calcular mediante la fórmula elemental

$$\rho_0 c_0 \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{\partial T}{\partial t}(r_0, t),$$

siendo c_0 y ρ_0 el calor específico y la densidad del electrodo. Adimensionalizamos el problema utilizando las siguientes variables

$$\rho := \frac{r}{r_0}; \quad \xi = \frac{\alpha t}{r_0^2}; \quad \lambda = \frac{\alpha \tau}{r_0^2}; \quad V(\rho, \xi) = \frac{4 \pi k r_0}{P} \left(T \left(r_0 \rho, \frac{r_0^2 \xi}{\alpha} \right) - T_0 \right);$$

donde T_0 es la temperatura ambiente. La formulación del problema adimensional es

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\rho^4} \left(H(\xi) + \lambda \delta(\xi) \right) \quad (4)$$

$$V(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi}(\rho, 0) = 0 \quad \forall \rho > 1 \quad (5)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho, \xi) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \xi) + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(1, \xi) = \frac{3}{m} \frac{\partial V}{\partial \rho}(1, \xi) \quad \forall \xi > 0, \quad (6)$$

siendo $m = \frac{\rho_0 c_0}{\rho c}$. Tomando transformadas de Laplace $\mathfrak{L}(\rho, s) := \mathfrak{L}_\xi[V(\rho, \xi)](\rho, s)$ respecto a ξ obtenemos

$$-\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \rho} \right) + (s + \lambda s^2) \mathfrak{L} = \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \quad (7)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(\rho, s) = 0, \quad (s + \lambda s^2) \mathfrak{L}(1, s) = \frac{3}{m} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \rho}(1, s). \quad (8)$$

Utilizando la nueva función $z(\rho, s) := \rho \mathfrak{L}(\rho, s)$ y el método de variación de las constantes llegamos a la solución general de (7)

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & \left(-\frac{1}{2 \sqrt{A(s)}} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \int_1^\rho \frac{e^{-\sqrt{A(s)} u}}{u^3} du + M_1(s) \right) \frac{e^{\sqrt{A(s)} \rho}}{\rho} \\ & + \left(\frac{1}{2 \sqrt{A(s)}} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \int_1^\rho \frac{e^{\sqrt{A(s)} u}}{u^3} du + M_2(s) \right) \frac{e^{-\sqrt{A(s)} \rho}}{\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $A(s) = s + \lambda s^2$ y $M_1(s)$ y $M_2(s)$ son funciones que verifican las condiciones de contorno (8)

$$M_1(s) = \frac{1}{2\sqrt{A(s)}} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \int_1^\infty \frac{e^{\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du$$

$$M_2(s) = -\frac{e^2\sqrt{A(s)}}{2\sqrt{A(s)}} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \frac{mA(s) - 3\sqrt{A(s)} + 3}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du.$$

Introduciendo el valor de estas funciones en (9), la temperatura adimensional será la transformada inversa de Laplace

$$V(\rho, \xi) := \mathfrak{L}_s^{-1} \left[\frac{1}{2\rho} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \left[\frac{e^{\sqrt{A(s)}\rho}}{\sqrt{A(s)}} \int_\rho^\infty \frac{e^{-\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du + \frac{e^{-\sqrt{A(s)}\rho}}{\sqrt{A(s)}} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\int_1^\rho \frac{e^{\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du - e^2\sqrt{A(s)} \frac{mA(s) - 3\sqrt{A(s)} + 3}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du \right) \right] \right] \\ = \mathfrak{L}^{-1}[F_1] + \mathfrak{L}^{-1}[F_2] - \mathfrak{L}^{-1}[F_3]. \quad (10)$$

Así, tenemos que calcular la transformada inversa de F_1 , F_2 y F_3 . En primer lugar

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_1] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{\sqrt{A(s)}\rho}}{2\rho\sqrt{A(s)}} \left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \int_\rho^\infty \frac{e^{-\sqrt{A(s)}u}}{u^3} du \right] \\ = \int_\rho^\infty \left(\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{e^{\sqrt{A(s)}(\rho-u)}}{\sqrt{A(s)}} \right] + \lambda \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{\sqrt{A(s)}(\rho-u)}}{\sqrt{A(s)}} \right] \right) \frac{du}{2\rho u^3} =$$

y por el teorema de traslación de las transformadas de Laplace y la fórmula (36) de la sección 5.6 del capítulo 5 de [2]

$$= \int_\rho^\infty H(\xi - \sqrt{\lambda}(u - \rho)) \left(\lambda e^{-\frac{\xi}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(u - \rho)^2} \right) \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{\lambda}(u-\rho)}^\xi e^{-\frac{v}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{v^2 - \lambda(u - \rho)^2} dv \right) \right) \frac{du}{2\sqrt{\lambda}\rho u^3} = \\ = \int_\rho^{\rho + \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}} \left(\lambda e^{-\frac{\xi}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(u - \rho)^2} \right) \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{\lambda}(u-\rho)}^\xi e^{-\frac{v}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{v^2 - \lambda(u - \rho)^2} dv \right) \right) \frac{du}{2\sqrt{\lambda}\rho u^3}. \quad (11)$$

Procediendo de forma análoga al cálculo de la inversa de F_1 obtenemos

$$\mathfrak{L}^{-1}[F_2] = \int_1^\rho H(\xi - \sqrt{\lambda}(\rho - u)) \left(\lambda e^{-\frac{\xi}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(\rho - u)^2} \right) \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{\lambda}(\rho-u)}^\xi e^{-\frac{v}{2\lambda}} I_0 \left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{v^2 - \lambda(\rho - u)^2} dv \right) \right) \frac{du}{2\sqrt{\lambda}\rho u^3} =$$

$$\begin{aligned}
&= H\left(\rho - \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} - 1\right) \int_{\rho - \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}}^{\rho} \left(\lambda e^{-\frac{\xi}{2\lambda}} I_0\left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(\rho - u)^2}\right) \right. \\
&+ \left. \int_{\sqrt{\lambda}(\rho - u)}^{\xi} e^{-\frac{v}{2\lambda}} I_0\left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{v^2 - \lambda(\rho - u)^2}\right) dv \right) \frac{du}{2\sqrt{\lambda} \rho u^3} \\
&+ H\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} - \rho + 1\right) \int_1^{\rho} \left(\lambda e^{-\frac{\xi}{2\lambda}} I_0\left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(\rho - u)^2}\right) \right. \\
&+ \left. \int_{\sqrt{\lambda}(\rho - u)}^{\xi} e^{-\frac{v}{2\lambda}} I_0\left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{v^2 - \lambda(\rho - u)^2}\right) dv \right) \frac{du}{2\sqrt{\lambda} \rho u^3} \tag{12}
\end{aligned}$$

donde $I_0(z)$ denota la función modificada de Bessel de orden 0.

El cálculo de $\mathfrak{L}^{-1}[F_3]$ resulta ser el más complicado y sutil del artículo. Para ello se utiliza el teorema de convolución en la forma

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[F_3] &= \int_1^{\infty} \mathfrak{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \frac{e^{-\sqrt{A(s)}(u+\rho-2)}}{\sqrt{A(s)}} \frac{mA(s) - 3\sqrt{A(s)} + 3}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \right] \frac{du}{2\rho u^3} \\
&= \int_1^{\infty} \left(\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{A(s)}(u+\rho-2)}}{\sqrt{A(s)}} \right] * \mathfrak{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \left(1 - \frac{6\sqrt{A(s)}}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \right) \right] \right) \frac{du}{2\rho u^3}.
\end{aligned}$$

La primera inversa que aparece en la expresión anterior es

$$\begin{aligned}
G(\rho, \xi, u) &:= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{A(s)}(u+\rho-2)}}{\sqrt{A(s)}} \right] \\
&= H\left(\xi - \sqrt{\lambda}(u + \rho - 2)\right) \frac{e^{-\frac{\xi}{2\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} I_0\left(\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\xi^2 - \lambda(u + \rho - 2)^2}\right) \\
&= H\left(\xi - \sqrt{\lambda}(u + \rho - 2)\right) G_1(\rho, \xi, u). \tag{13}
\end{aligned}$$

Para calcular la segunda inversa

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \left(1 - \frac{6\sqrt{A(s)}}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \right) \right] \\
&= (1 + \lambda\delta(\xi)) - \mathfrak{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \frac{6\sqrt{A(s)}}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \right]
\end{aligned}$$

utilizamos la fórmula de Bromwich, mediante el circuito habitual en el caso de tener puntos de ramificación. En nuestro caso tales puntos son $s = 0$ y $s = -1/\lambda$ y además existen dos polos simples

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2\lambda m} \left(-m - \sqrt{m^2 + 2\lambda(9 - 6m + \sqrt{81 - 108m})} \right) \\
s_2 &= \frac{1}{2\lambda m} \left(-m - \sqrt{m^2 + 2\lambda(9 - 6m - \sqrt{81 - 108m})} \right).
\end{aligned}$$

interiores al contorno de Bromwich. Obsérvese que s_1 y s_2 son números reales si $0 \leq m < \frac{3}{4}$. Como las situaciones prácticas más frecuentes están cubiertas con este caso, a partir de ahora supondremos que el valor de m está en este intervalo. Llamando

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \sqrt{9 - 6m + \sqrt{81 - 108m}}; \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \sqrt{9 - 6m - \sqrt{81 - 108m}}$$

y utilizando el teorema de los residuos se obtiene

$$\begin{aligned} R(\xi) := \mathfrak{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} + \lambda \right) \frac{6\sqrt{A(s)}}{mA(s) + 3\sqrt{A(s)} + 3} \right] &= -12 \sum_{k=1}^2 e^{s_k \xi} \frac{(1 + \lambda s_k) r_k^2}{s_k(1 + 2\lambda s_k)(2r_k m - 3)} \\ &- \frac{6}{\pi} \int_{-\frac{1}{\lambda}}^0 e^{s \xi} \frac{1 + \lambda s}{s} \frac{(m(s + \lambda s^2) + 3)\sqrt{-s - \lambda s^2}}{(m(s + \lambda s^2) + 3)^2 - (s + \lambda s^2)} ds. \end{aligned}$$

De (13) se tiene que

$$\begin{aligned} G(\rho, \xi, u) * (1 + \lambda \delta(\xi) - R(\xi)) &= \int_0^\xi G(\rho, \xi - v, u)(1 + \lambda \delta(v) - R(v)) dv \\ &= \lambda G(\rho, \xi, u) + \int_0^\xi G(\rho, \xi - v, u)(1 - R(v)) dv \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}[F_3] &= \int_1^\infty \left(\lambda G(\rho, \xi, u) + \int_0^\xi G(\rho, \xi - v, u)(1 - R(v)) dv \right) \frac{du}{2\rho u^3} \\ &= H \left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} - \rho + 1 \right) \int_1^{\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} - \rho + 2} (\lambda G_1(\rho, \xi, u) \\ &+ \int_0^{\xi - \sqrt{\lambda}(u + \rho - 2)} G_1(\rho, \xi, u)(1 - R(v)) dv) \frac{du}{2\rho u^3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Concluyendo, la temperatura adimensional que queríamos calcular $V(\rho, \xi, \lambda, m)$ se obtiene a partir de (10), (11), (12) y (14).

3. Comparación con el modelo parabólico

Para comparar los resultados anteriores con los obtenidos con el modelo clásico de Fourier calculamos la temperatura parabólica $T_F(r, t, m)$ para el mismo problema. Utilizando las mismas variables adimensionales ρ y ξ , la temperatura adimensional de Fourier $V_F(\rho, \xi, m)$ es la solución del problema

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho^4}$$

$$V(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi}(\rho, 0) = 0 \quad \forall \rho > 1$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho, \xi) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \xi) = \frac{3}{m} \frac{\partial V}{\partial \rho}(1, \xi) \quad \forall t > 0.$$

Utilizando los mismos métodos que en el caso hiperbólico obtenemos (si $0 \leq m < \frac{3}{4}$)

$$V_F(\rho, t, m) = \int_1^\infty \frac{1}{2\rho u^3} \left(\int_0^\xi \frac{e^{-\frac{(u-\rho)^2}{4v}}}{\sqrt{\pi v}} dv \right) du \\ - \int_1^\infty \frac{1}{2\rho u^3} \left(\int_0^\xi \left(1 - \frac{6}{\pi} \int_0^\infty \frac{(3-my) e^{-y(\xi-v)}}{\sqrt{y}(m^2y^2 + (9-6m)y + 9)} dy \right) \frac{e^{-\frac{(u+\rho-2)^2}{4v}}}{\sqrt{\pi v}} dv \right) du .$$

4. Resultados y conclusiones

En las simulaciones empleamos la características eléctricas y técnicas de la córnea de un trabajo previo [1] y el tiempo de relajación térmica de 0,1 s. Suponemos un electrodo de platino [4]. La potencia aplicada fue de 30 mW durante 600 ms y la temperatura inicial 35°C.

La figura 1 muestra que al comienzo del calentamiento con la ecuación parabólica se obtienen valores más bajos de temperatura que con la hiperbólica, lo cual es altamente relevante en las aplicaciones quirúrgicas. Desde el punto de vista matemático, es significativa la presencia de singularidades de la solución localizadas a lo largo de la recta (en variables adimensionales) $\xi = \sqrt{\lambda}(\rho - 1)$, que refleja la naturaleza hiperbólica de la ecuación de gobierno (2).

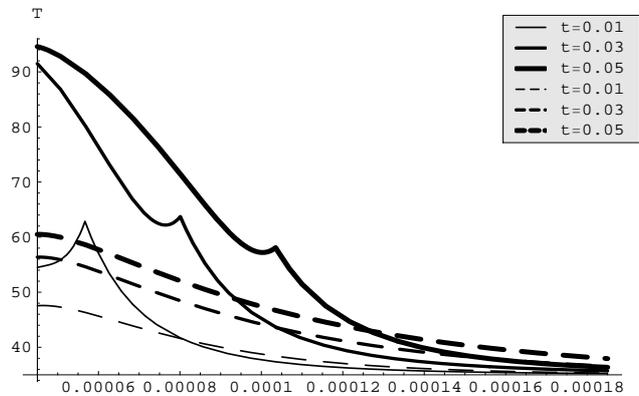


Figura 1: Temperaturas de la córnea (hiperbólica trazo continuo, Fourier discontinuo) desde $r = 45 \cdot 10^{-6} m$ hasta $r = 185 \cdot 10^{-6} m$ en diferentes tiempos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el MEC y la FEDER, Proyecto MTM2004-02262 y la red de investigación MTM2006-26627-E, el "Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica del Ministerio de Educación y Ciencia" de España (TEC 2005-04199/TCM) y el Programa de Apoyo a la Investigación y Desarrollo (PAID-04-07) de la UPV.

Referencias

- [1] E. J. Berjano, J. L. Alio & J. Saiz, *Modeling for radio-frequency conductive keratoplasty: implications for the maximum temperature reached in the cornea*, *Physiol. Meas.* 26, (2005), 157-172.
- [2] A. Erdélyi, M. F. Oberhettinger & F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms. Vol. I and II*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [3] M. N. Özışik & D. T. Tzou, *On the wave theory in heat conduction*, *ASME Journal of Heat Transfer*, 116, (1994) 526-535.
- [4] D. Panescu, J. G. Whayne, S. D. Fleishman, M. S. Mirotznik, D. K. Swanson & J. G. Webster *Three-dimensional finite analysis of current density and temperature distributions during radio-frequency ablation*, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 42, (1995), 879-890.