XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Operadores de reconstrucción y esquemas de subdivisión asociados.

S. Amat[1], R. Donat[2], J.C. Trillo[1]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena, Campus de Alfonso XIII, Edif. Civil y Naval, 30203 Cartagena. E-mails:* `Sergio.Amat@upct.es`, `jctrillo@upct.es`.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valencia, C/ Dr. Moliner,50, 46100 Burjassot , Valencia. E-mail:* `donat@uv.es` .

Palabras clave: esquemas de subdivisión, reconstrucciones, convexidad, monotonía

Resumen

Los esquemas de subdivisión son unas herramientas muy usadas en el diseño de curvas y superficies, y tienen también relación con otras aplicaciones interesantes en tratamiento digital de imágenes o en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Estos esquemas están basados en un conjunto de reglas, las cúales aplicadas recursivamente permiten un refinamiento sucesivo de un conjunto inicial de puntos llamado puntos de control.

Una propiedad importante a verificar en estos esquemas es la de preservación de la convexidad y de la monotonía.

Una manera de abordar estas cuestiones se basa en la estrecha relación entre esquemas de subdivisión y operadores de reconstrucción. Estos operadores de reconstrucción conectan datos discretos con un cierto espacio funcional, que dependerá de las aplicaciones en concreto. Nuestro objetivo es presentar ciertos operadores de reconstrucción y sus esquemas de subdivisión asociados, verificando si conservan la convexidad y la monotonía.

1. Esquemas de subdivisión

Comenzando con un conjunto discreto de datos, los esquemas de subdivisión generan nuevos datos siguiendo un conjunto de reglas bien establecidas, consiguiendo así un nuevo conjunto de datos más 'denso' que el anterior, el cual será a su vez refinado.

Una manera de obtener esquemas de subdivisión surge de considerar los operadores de discretización $\mathcal{D}_k$, que actuan entre un cierto espacio funcional F y un nivel discreto de resolución V_k (k mayor indica mayor resolución), y los operadores de reconstrucción $\mathcal{R}_k$, los cuales conectan los diferentes niveles discretos de resolución con el espacio funcional. El único requerimiento es que la composición $\mathcal{D}_k\mathcal{R}_k = I_{V_k}$. Un esquema de subdivisión S puede definirse entonces como una aplicación $S : V_k \rightarrow V_{k+1}$ tal que $Sf^k = \mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k f^k$. Al operador $\mathcal{P}_k^{k+1} := \mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k$ se le denota operador predicción y conecta dos escalas sucesivas de resolución.

1.1. Esquemas de subdivisión interpolatorios

Consideremos en $\mathbb{R}$ el conjunto de mallas anidadas:

$$X^k = \{x_j^k\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = 2^{-k}, \tag{1}$$

y el operador de discretización por valores puntuales

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} C_B(\mathbb{R}) & \rightarrow V^k \\ f & \mapsto f^k = (f_j^k)_{j\in\mathbb{Z}} = (f(x_j^k))_{j\in\mathbb{Z}}, \end{cases} \tag{2}$$

donde V^k es el espacio de secuencias reales relacionado con la malla X^k y $C_B(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas y acotadas $\mathbb{R}$. Un operador reconstrucción $\mathcal{R}_k$ asociado a esta discretización es cualquier operador inverso por la derecha de $\mathcal{D}_k$, lo que significa que para todo $f^k \in V^k$, $\mathcal{R}_k f^k \in C_B(\mathbb{R})$ y

$$(\mathcal{R}_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k). \tag{3}$$

El operador predicción, es decir, $\mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k : V^k \rightarrow V^{k+1}$, define un esquema de subdivisión. La relación (3) implica que el esquema de subdivisión es interpolatorio. Si $\mathcal{R}_k$ es un operador no lineal entonces el correspondiente esquema de subdivisión es también no lineal.

Los esquemas de subdivisión interpolatorios pueden ser descritos de la siguiente forma:

$$Sf^k = \mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k f^k = \begin{cases} f_{2j+1}^{k+1} = (\mathcal{R}_k f^k)(x_{2j+1}^{k+1}), \\ f_{2j}^{k+1} = (\mathcal{R}_k f^k)(x_{2j}^{k+1}) = f_j^k. \end{cases} \tag{4}$$

Debido a la propiedad de interpolación, sólo se necesita calcular las componentes impares de la nueva secuencia. Normalmente los operadores de reconstrucción utilizados son construidos a trozos, es decir, se construyen en cada intervalo $[x_j^k, x_{j+1}^k]$ bajo las restricciones $(\mathcal{R}_k f^k)(x_j^k) = f_j^k$ y $(\mathcal{R}_k f^k)(x_{j+1}^k) = f_{j+1}^k$.

1.2. Esquemas de subdivisión basados en discretización por medias en celda

Este tipo de esquemas de subdivisión vienen generados por una discretización por medias en celda, es decir

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \rightarrow V^k \\ f & \mapsto (\bar{f}_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\frac{1}{h_k}\int_{x_{j-1}^k}^{x_j^k} f(x)dx)_{j\in\mathbb{Z}}, \end{cases} \tag{5}$$

donde $L^1(\mathbb{R})$ representa a las funciones absolutamente integrables y $\{X^k\}$ es la secuencia de mallas anidadas (1).

Un operador de reconstrucción para esta discretización es cualquier operador $\mathcal{R}_k$ que satisfaga

$$\mathcal{R}_k : V^k \longrightarrow L^1(\mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k \bar{f}^k)_j = \frac{1}{h_k}\int_{x_{j-1}^k}^{x_j^k} (\mathcal{R}_k \bar{f}^k)(x)dx = \bar{f}_j^k. \tag{6}$$

Por tanto $\mathcal{R}_k \bar{f}^k(x)$ tiene que ser una función en $L^1(\mathbb{R})$ cuyo valor medio en la celda (j)-ésima coincida con $\bar{f}_j^k$ para todo j.

También en este entorno de medias en celda es habitual construir los operadores de reconstrucción a través de funciones polinómicas a trozos. Para cada intervalo $[x_{j-1}^{k-1}, x_j^{k-1}]$ se construye un trozo polinómico $p_j(x) = p_j(x, \bar{f}^{k-1})$ que satisfaga (6), es decir

$$\frac{1}{h_{k-1}}\int_{x_{j-1}^{k-1}}^{x_j^{k-1}} p_j(x)dx = \bar{f}_j^{k-1}. \tag{7}$$

Una manera de conseguir esto es a partir de la función primitiva $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Se debe observar que el conjunto de datos $\{\bar{f}_l^{k-1}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ se puede relacionar con $F_l^{k-1} := F(x_l^{k-1}),\ l \in \mathbb{Z}$, como sigue:

$$F_l^{k-1} = h_{k-1}\sum_s \bar{f}_s^{k-1}, \tag{8}$$

$$\bar{f}_l^{k-1} = \frac{F_l^{k-1} - F_{l-1}^{k-1}}{h_{k-1}}. \tag{9}$$

El trozo polinómico $p_j(x)$ se construye entonces como

$$p_j(x) = \frac{d}{dx} q_j(x, F^{k-1}), \tag{10}$$

donde $q_j(x, F^{k-1})$ es un polinomio construido a partir de $\{F_l^{k-1}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ con las restricciones $q_j(x_{j-1}^{k-1}, F^{k-1}) = F_{j-1}^{k-1}$ y $q_j(x_j^{k-1}, F^{k-1}) = F_j^{k-1}$.

Es sólo una cuestión de algunas operaciones algebraicas el comprobar que se satisface (7).

La predicción para $\bar{f}_{2j-1}^k$ queda

$$\bar{f}_{2j-1}^k = \frac{1}{h_k}(q_j(x_{2j-1}^k) - q_j(x_{2j-2}^k)) = \frac{1}{h_k}(q_j(x_{2j-1}^k) - F_{j-1}^{k-1}).$$

Y por tanto la predicción para los pares será $\bar{f}_{2j-2}^k = 2\bar{f}_{j-1}^{k-1} - \bar{f}_{2j-1}^k$.

2. Un caso de esquemas de subdivisión no lineales: PPH

En [1],[9] se presenta un nuevo operador de reconstrucción al cual los autores nombran PPH (piecewise polynomial harmonic). Un trozo polinómico de este operador viene dado por $\tilde{q}_j$ definido para cada intervalo $[x_j^k, x_{j+1}^k]$ como el único polinomio de grado 3 que satisface ciertas condiciones. Definamos $Df_i^k = \frac{f_{i-1}^k - 2f_i^k + f_{i+1}^k}{2h_k^2}$. Entonces, para el caso en que $|Df_j^k| \leq |Df_{j+1}^k|$ (este es el caso cuando una discontinuidad se encuentra en $[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k]$) las condiciones son

$$\begin{cases} \tilde{q}_j(x_l^k) & = f_l^k, \quad \text{para } j-1 \leq l \leq j+1, \\ \tilde{q}_j(x_{j+2}^k) & = \tilde{f}_{j+2}^k, \end{cases}$$

con

$$\tilde{f}_{j+2}^k = f_{j+1}^k + f_j^k - f_{j-1}^k + 4\tilde{D}_j^k h_k^2,$$

$$\tilde{D}_j^k = \begin{cases} \frac{2Df_j^k Df_{j+1}^k}{Df_j^k + Df_{j+1}^k} & \text{si } Df_j^k Df_{j+1}^k > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Sino, $\tilde{q}_j$ se determina por las condiciones

$$\begin{cases} \tilde{q}_j(x_{j-1}^k) & = \tilde{f}_{j-1}^k, \\ \tilde{q}_j(x_l^k) & = f_l^k, \quad \text{para } j \leq l \leq j+2 \end{cases}$$

con

$$\tilde{f}_{j-1}^k = f_{j+1}^k + f_j^k - f_{j+2}^k + 4\tilde{D}_j^k h_k^2.$$

A partir de este operador de reconstrucción se construye el esquema de subdivisión interpolatorio dado por

$$(Sf^k)_{2j} = f_j^k,$$

$$(Sf^k)_{2j+1} = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^k + f_j^k}{2} - \frac{1}{4}\frac{D(f)_j^k D(f)_{j+1}^k}{D(f)_j^k + D(f)_{j+1}^k} & if\ D(f)_j^k D(f)_{j+1}^k > 0, \\ \frac{f_{j+1}^k + f_j^k}{2} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con

$$D(f)_i^k = f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k.$$

Utilizando entonces la técnica de la función primitiva se construye el operador de reconstrucción para el caso de discretización por medias en celda, es decir

$$\tilde{p}_j(x) = \frac{d}{dx} q_j(x, F^k),$$

y también su esquema de subdivisión asociado, que resulta ser:

$$(S\bar{f}^k)_{2j+1} = \bar{f}_j^k - \frac{1}{4}\frac{2\delta(\bar{f})_j^k \delta(\bar{f})_{j+1}^k}{\delta(\bar{f})_j^k + \delta(\bar{f})_{j+1}^k},$$

$$(S\bar{f}^k)_{2j+2} = \bar{f}_j^k + \frac{1}{4}\frac{2\delta(\bar{f})_j^k \delta(\bar{f})_{j+1}^k}{\delta(\bar{f})_j^k + \delta(\bar{f})_{j+1}^k},$$

con

$$\delta(\bar{f})_i^k = \bar{f}_i^k - \bar{f}_{i-1}^k.$$

3. Conservación de la monotonía del esquema de subdivisión PPH

En [9] se prueba que tanto el operador de reconstrucción PPH como su esquema de subdivisión tienen propiedades de conservación de la convexidad en el caso interpolatorio. En este trabajo nosotros probamos resultados análogos respecto de la monotonía para la reconstrucción PPH y para su esquema de subdivisión asociado en el entorno de las medias en celda.

Definamos primero que se entiende por preservación de la convexidad y de la monotonía.

Definición 1 *El conjunto de datos* $\{f_j\}$*, asociado a un mallado uniforme, se dice estrictamente convexo si y sólo si* $D(f)_j > 0\ \forall j$*, donde* $D(f)_j = f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}$.

Definición 2 *Un esquema de subdivisión sobre un mallado uniforme se dice que conserva la convexidad si y sólo si el conjunto de datos* $\{f_j^k\}$ *es estrictamente convexo para todos los niveles* k *de subdivisión.*

Definición 3 *El conjunto de datos* $\{\bar{f}_j\}$*, asociado a un mallado uniforme, se dice estrictamente monótono si y sólo si* $\delta(\bar{f})_j > 0\ \forall j$*, donde* $\delta(\bar{f})_j = \delta(\bar{f}_j) - \delta(\bar{f}_{j-1})$.

Definición 4 *Un esquema de subdivisión sobre un mallado uniforme se dice que conserva la monotonía si y sólo si el conjunto de datos* $\{\bar{f}_j^k\}$ *es estrictamente monótono para todos los niveles* k *de subdivisión.*

Los dos principales resultados son los siguientes:

Teorema 1 *Sea* $\tilde{p}_j(x)$ *el polinomio correspondiente a la reconstrucción PPH en el intervalo* $[x_j, x_{j+1}]$ *dentro del entorno de medias en celda. Este polinomio* $\tilde{p}_j(x)$ *satisface lo siguiente: si* $\delta(\bar{f})_j > 0$ *y* $\delta(\bar{f})_{j+1} > 0$*, entonces* $\tilde{p}_j'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{3}{2}})$*, es decir, es monótono en ese intervalo.*

Teorema 2 *El esquema de subdivisión PPH para medias en celda conserva la monotonía.*

También como en el caso de la convexidad para valores puntuales es posible probar el Teorema 2 mediante una conexión entre las propiedades del operador de reconstrucción y las del esquema de subdivisión asociado.

Referencias

[1] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, and J.C. Trillo.*Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing.* Foundations of Computational Mathematics, (2006), 6(2), 193-226.

[2] F.Aràndiga and R.Donat. *Nonlinear Multi-scale Decompositions: The Approach of A.Harten*, Numerical Algorithms (2000), 23, 175-216.

[3] A. Cohen, N. Dyn and B. Matei. *Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation.* Appl. Comp. Harm. Anal., (2003), 15, 89-116.

[4] G. Delauries, and S. Dubuc. *Symmetric Iterative Interpolation Processes.* Constr. Approx, (1989), 5, 49-68.

[5] N. Dyn, A. Gregori, and D. Levin. *A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design.* Comput. Aided. Geom. Design., (1987), 4, 257-268.

[6] N. Dyn, F. Kuijt, D. Levin, and R. van Damme. *Convexity preservation of the four-point interpolatory subdivision scheme.* Computer Aided Geometric Design, (1999), 16(8), 789-792.

[7] M.S. Floater and C.A. Micchelli. *Nonlinear stationary subdivision.* Approximation theory: in memory of A.K. Varna, edt: Govil N.K, Mohapatra N., Nashed Z., Sharma A., Szabados J., (1998), 209-224.

[8] F. Kuijt and R. van Damme. *Convexity preserving interpolatory subdivision schemes.* Const. Approx., (1998), 14, 609-630.

[9] J.C. Trillo, *PHD thesis: Nonlinear multiresolution and its applications in image processing*, Univ. de Valencia, (2006).