XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Métodos iterativos multi-punto para ecuaciones no lineales

Juan R. Torregrosa [1], A. Cordero [1]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia. E-mails:* `jrtorre@mat.upv.es`, `acordero@mat.upv.es`.

Palabras clave: Ecuación no lineal, método de Newton, método de punto fijo, orden de convergencia

Resumen

En este trabajo presentamos una familia de métodos iterativos multi-punto para resolver ecuaciones no lineales. Hacemos un análisis general del error y obtenemos el orden de convergencia y el índice de eficiencia de algunos elementos de la citada familia. Además, presentamos diferentes tests numéricos que nos permiten comprobar (en algunos casos mejorar) los resultados teóricos y comparar entre sí algunos métodos de esta familia.

1. Introducción

En este trabajo abordamos el problema de encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función real de variable real. Estas raíces pueden ser obtenidas como puntos fijos de una cierta función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mediante el método iterativo de punto fijo

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

donde x_0 es la estimación inicial. El método más conocido de este tipo es el *método de Newton*,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

donde $f'(x_k)$ es la derivada de f evaluada en la k-ésima iteración x_k.

La construcción de métodos numéricos para la aproximación de la solución de una ecuación no lineal es una tarea interesante en análisis numérico y otras ciencias aplicadas. En los últimos años han aparecido numerosos trabajos describiendo métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Entre ellos, cabe destacar los relacionados con los métodos iterativos multi-punto. Por ejemplo, en [2], Frontini y Sormani describen una familia de variantes del método de Newton, obtenida aproximando la integral

$$f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x} f'(t)dt$$

por una fórmula de cuadratura interpolatoria. La fórmula general que resulta es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j f'(\eta_j(x_k))}, \tag{1}$$

con

$$\eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde τ_j son los nodos, en $[0,1]$, y A_j los pesos de la fórmula de interpolación. Es sencillo observar que el método de Newton, el método de Weerakoon y Fernando (ver [5]), el método de Newton-Simpson (ver [1]), etc., pueden obtenerse de la fórmula general (1) eligiendo determinados valores de los parámetros τ_j y A_j.

El método general (1) se obtiene, a partir del método de Newton, reemplazando $f'(x_k)$ por una combinación lineal de valores de $f'(x)$ en diferentes puntos.

En este trabajo analizamos una colección de métodos iterativos multi-punto, obtenidos a partir del método de Newton, reemplazando $f(x_k)$ por una combinación lineal de valores de $f(x)$ en diferentes puntos. Concretamente, el método general es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \sum_{j=1}^{m} A_j f(\eta_j(x_k)), \tag{2}$$

con

$$\eta_j(x_k) = x_k - \tau_j \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde τ_j y A_j son parámetros a elegir en $[0,1]$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Como veremos más adelante, el valor de estos parámetros juega un papel importante en el orden de convergencia del método.

Vamos a recordar los conceptos básicos sobre la convergencia de un método iterativo.

Definición 1.1 *Sea $\{x_k\}_{k\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a α. Entonces, se dice que la convergencia es*

(a) lineal, si existe M, $0 < M < 1$, y k_0 tal que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq M\,|x_k - \alpha|\,, \quad \forall k \geq k_0.$$

(b) de orden p, $p \geq 2$, si existe M, $M > 0$, y k_0 tal que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq M\,|x_k - \alpha|^p\,, \quad \forall k \geq k_0.$$

Definición 1.2 *(ver [5]) Sea α un cero de la función f y supongamos que x_{k-1}, x_k y x_{k+1} son tres iteraciones consecutivas próximas a α. Entonces, el orden computacional de convergencia ρ puede ser aproximado mediante la fórmula*

$$\rho \approx \frac{\ln(|x_{k+1}-\alpha| \,/\, |x_k-\alpha|)}{\ln(|x_k-\alpha| \,/\, |x_{k-1}-\alpha|)}. \tag{3}$$

Por otra parte, para comparar los diferentes métodos, consideramos también el concepto de *índice de eficiencia* (ver [3]) definido como $p^{1/d}$, donde p es el orden de convergencia y d es el número total de nuevas evaluaciones funcionales (por iteración) requeridas por el método.

Teniendo en cuenta que (2) puede ser considerada como una fórmula iterativa de punto fijo, estudiamos la convergencia de los diferentes métodos utilizando el siguiente resultado (ver [4]):

Teorema 1.1 *Sea g una función de punto fijo tal que $g^{(p)}$ es continua en un entorno de α. El método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ es de orden p si y sólo si*

$$g(\alpha) = \alpha; \quad g^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1; \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

En la Sección 2, analizamos la fórmula general (2) para una ecuación no lineal $f(x) = 0$ y estudiamos las condiciones que los parámetros τ_j y A_j deben verificar para obtener un método con un particular orden de convergencia.

Hemos dedicado la última sección a los resultados numéricos obtenidos al aplicar algunos métodos incluidos en (2) a diferentes ecuaciones no lineales. Estos resultados nos permiten comparar los diferentes métodos, confirmar los resultados teóricos y extraer conclusiones.

2. Descripción y convergencia de los métodos

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función suficientemente diferenciable y $\alpha \in I$ una raíz simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Sea g la función de punto fijo que nos permite describir (2)

$$g(x) = x - \frac{1}{f'(x)} \sum_{j=1}^{m} A_j f(\eta_j(x)), \quad \text{con} \quad \eta_j(x) = x - \tau_j \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si calculamos la primera derivada de g, obtenemos

$$g'(\alpha) = 1 - \sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j),$$

y entonces podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *Si los parámetros A_j y τ_j satisfacen $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j) = 1$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden 2.*

Si tomamos A_1 y τ_1 tal que $A_1(1-\tau_1)=1$ obtenemos métodos cuyo orden de convergencia es, al menos, 2. Por ejemplo, utilizando $A_1=1$ y $\tau_1=0$ obtenemos el método de Newton, y con $A_1=2$ y $\tau_1=1/2$ tenemos el método iterativo

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(\eta_1(x_k))}{f'(x_k)}, \quad \text{donde} \quad \eta_1(x_k)=x_k-\frac{1}{2}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

En este caso, no es interesante tomar $m>1$, puesto que obtenemos métodos iterativos con orden de convergencia 2 pero un índice de eficiencia inferior al del método de Newton.

Ahora, para la segunda derivada de g, tenemos

$$g''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1-\sum_{j=1}^{m}A_j\tau_j^2).$$

Por tanto, podemos afirmar:

Proposición 2.2 *Si los parámetros A_j y τ_j satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{m}A_j(1-\tau_j)=1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m}A_j\tau_j^2=1, \tag{4}$$

entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden 3.

En este caso, para $m=1$, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1(1-\tau_1)=1 \\ A_1\tau_1^2=1 \end{array}\right\}$$

Este sistema sólo tiene la solución real $A_1=(3+\sqrt{5})/2$ y $\tau_1=(\sqrt{5}-1)/2$. Con estos valores obtenemos el método iterativo

$$x_{k+1}=x_k-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{f(\eta_1(x_k))}{f'(x_k)}, \quad \text{donde} \quad \eta_1(x_k)=x_k-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{5}$$

de orden 3 e índice de eficiencia $3^{1/3}$. Notemos que este índice es más grande que el del método de Newton, cuyo valor es $2^{1/2}$.

Para $m=2$, los parámetros A_j y τ_j deben verificar el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1(1-\tau_1)+A_2(1-\tau_2)=1 \\ A_1\tau_1^2+A_2\tau_2^2=1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Una de ellas, $A_1=A_2=1$, $\tau_1=0$ y $\tau_2=1$ nos da el método:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)+f(\eta_2(x_k))}{f'(x_k)}, \quad \text{donde} \quad \eta_2(x_k)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{6}$$

Aplicando las condiciones (4), la expresión de la tercera derivada de g en α es

$$g'''(\alpha)=\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}(-1+\sum_{j=1}^{m}A_j\tau_j^3)+3\frac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}.$$

Para garantizar $g'''(\alpha) = 0$ necesitamos $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^3 = 1$ y $f''(\alpha) = 0$. Por tanto, podemos establecer el siguiente resultado:

Proposición 2.3 *Si los parámetros A_j y τ_j satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j) = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^2 = 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^3 = 1, \tag{7}$$

y $f''(\alpha) = 0$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden 4.

En este caso, para $m = 1$, las ecuaciones (7) no tienen solución. Para $m = 2$ el sistema que deben verificar los parámetros es:

$$\left.\begin{array}{r} A_1(1-\tau_1) + A_2(1-\tau_2) = 1 \\ A_1\tau_1^2 + A_2\tau_2^2 = 1 \\ A_1\tau_1^3 + A_2\tau_2^3 = 1 \end{array}\right\}$$

Por ejemplo, los valores $A_1 = A_2 = 1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$ o bien $A_1 = \dfrac{10}{13}$ $A_2 = \dfrac{22}{13}$, $\tau_1 = 1/4$, $\tau_2 = 3/4$ son dos soluciones del sistema anterior que nos proporcionan sendos métodos iterativos.

Para $m = 3$ debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1(1-\tau_1) + A_2(1-\tau_2) + A_3(1-\tau_3) = 1 \\ A_1\tau_1^2 + A_2\tau_2^2 + A_3\tau_3^2 = 1 \\ A_1\tau_1^3 + A_2\tau_2^3 + A_3\tau_3^3 = 1 \end{array}\right\}$$

que tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, $A_1 = A_3 = 4$, $A_2 = -6$, $\tau_1 = 1/4$, $\tau_2 = 1/2$ and $\tau_3 = 3/4$ es una de ellas, que nos proporciona el método iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)}\left[4f(\eta_1(x_k)) - 6f(\eta_2(x_k)) + 4f(\eta_3(x_k))\right], \tag{8}$$

donde $\eta_i(x_k) = x_k - \tau_i \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\quad i = 1, 2, 3$. Este método tiene orden 4 e índice de eficiencia $4^{1/5}$.

Ahora, utilizando las condiciones (7), la derivada cuarta de g en α resulta

$$g^{(iv)}(\alpha) = \frac{f^{(iv)}(\alpha)}{f'(\alpha)}(1 - \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^4).$$

Por tanto, podemos establecer un resultado análogo al anterior.

Proposición 2.4 *Si los parámetros A_j y τ_j verifican*

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j) = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^3 = 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} A_j \tau_j^4 = 1 \tag{9}$$

y $f''(\alpha) = 0$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden 5.

En este caso, por ejemplo para $m = 4$, los parámetros deben verificar

$$\left.\begin{array}{r} A_1(1-\tau_1)+A_2(1-\tau_2)+A_3(1-\tau_3)+A_4(1-\tau_4)=1 \\ A_1\tau_1^2+A_2\tau_2^2+A_3\tau_3^2+A_4\tau_4^2=1 \\ A_1\tau_1^3+A_2\tau_2^3+A_3\tau_3^3+A_4\tau_4^3=1 \\ A_1\tau_1^4+A_2\tau_2^4+A_3\tau_3^4+A_4\tau_4^4=1 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, la solución $A_1 = 24/11$, $A_2 = -18/11$, $A_3 = 8/11$, $A_4 = 19/22$, $\tau_1 = 1/4$, $\tau_2 = 1/2$, $\tau_3 = 3/4$ y $\tau_4 = 1$, nos permite describir el siguiente método iterativo de orden 5 (cuando $f''(\alpha) = 0$) e índice de eficiencia $5^{1/6}$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)}\left[A_1 f(\eta_1(x_k)) + A_2 f(\eta_2(x_k)) + A_3 f(\eta_3(x_k)) + A_4 f(\eta_4(x_k))\right], \qquad (10)$$

donde $\eta_i(x_k) = x_k - \tau_i \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\quad i = 1, 2, 3, 4$.

De forma análoga, utilizando (9), la expresión de la quinta derivada de g en α es

$$g^{(v)}(\alpha) = \frac{f^{(v)}(\alpha)}{f'(\alpha)}(-1 + \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^5) + 20\frac{f'''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}.$$

Por tanto, podemos asegurar:

Proposición 2.5 *Si los parámetros A_j y τ_j verifican*

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j) = 1, \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^p = 1, \quad p = 2, 3, 4, 5, \qquad (11)$$

y $f''(\alpha) = f'''(\alpha) = 0$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden 6.

En general, aplicando las condiciones

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j) = 1 \ \text{ y } \ \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^p = 1, \quad p = 2, 3, \ldots, 2d-1,$$

tenemos

$$g^{(2d)}(\alpha) = \frac{f^{(2d)}(\alpha)}{f'(\alpha)}(-1 + \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^{2d}).$$

Además, si exigimos $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^{2d} = 1$, obtenemos

$$g^{(2d+1)}(\alpha) = \frac{f^{(2d+1)}(\alpha)}{f'(\alpha)}(-1 + \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^{2d+1}) + M\frac{(f^{(d+1)})^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)},$$

donde M es un número real.

Por tanto, podemos enunciar el siguiente resultado general:

Teorema 2.1 *a) Si los parámetros A_j y τ_j verifican*

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j)=1,\quad \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^p=1,\quad p=2,3,\ldots,2d-1,$$

y $f''(\alpha)=f'''(\alpha)=\cdots=f^{(d)}(\alpha)=0$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden $2d$.

b) Si los parámetros A_j y τ_j verifican

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(1-\tau_j)=1,\quad \sum_{j=1}^{m} A_j\tau_j^p=1,\quad p=2,3,\ldots,2d,$$

y $f''(\alpha)=f'''(\alpha)=\cdots=f^{(d)}(\alpha)=0$, entonces el método iterativo (2) tiene, al menos, orden $2d+1$.

3. Resultados numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos y comparamos la eficiencia de diferentes métodos iterativos, obtenidos de (2) para valores particulares de los parámetros A_j y τ_j. Concretamente, comparamos el método de Newton (CN), y los métodos descritos por (5), (6), (8) and (10) a los que denotamos en la Tabla 1 por $M2$, $M3$, $M4$ y $M5$, respectivamente.

Utilizamos las siguientes funciones, algunas de las cuales aparecen en [5].

(a) $f(x)=x^3-9x^2+28x-30$, $\alpha=3$.

(b) $f(x)=\cos(x)-x$, $\alpha=0{,}739085133214758$.

(c) $f(x)=(x-1)^6-1$, cuyas raíces reales son $\alpha_1=0$ y $\alpha_2=2$.

(d) $f(x)=xe^{x^2}-\sin^2(x)+3\cos(x)+5$, $\alpha=-1{,}20764782713013$.

(e) $f(x)=\arctan(x)$, $\alpha=0$.

(f) $f(x)=\sin(x)+x\cos(x)$, $\alpha=0$.

Los resultados numéricos han sido obtenidos con MATLAB (MATrix LABoratory), trabajando con 16 dígitos decimales. El criterio de parada utilizado es $|x_{k+1}-x_k|+|f(x_k)|<tol$, donde $tol=10^{-12}$, con lo que nos aseguramos, por un lado la convergencia de los iterados a un cierto valor y, por otro, que ese valor es solución de la ecuación no lineal. Para cada método, estudiamos el número de iteraciones y el orden computacional de convergencia ρ, aproximado por (3). El valor de ρ que aparece en la Tabla 1 es la menor coordenada del vector ρ cuando la variación entre sus coordenadas es pequeña.

En la Tabla 1 podemos observar los resultados numéricos obtenidos al utilizar el método de Newton y los métodos $M2$, $M3$, $M4$ y $M5$, para estimar los zeros de las funciones de (a) a (f). Para cada función indicamos la estimación inicial x_0, la solución y, para cada método, el número de iteraciones y el orden computacional de convergencia. En algunos casos este orden no es estable y lo consideramos no concluyente.

Cuando $f''(\alpha) = 0$, como ocurre en las funciones (a), (e) y (f), observamos que la convergencia del método de Newton tiene orden 3, mientras que los métodos $M4$ y $M5$ tienen orden computacional de convergencia próximo a 5. Además, cuando $f''(\alpha) \neq 0$, los métodos $M2$, $M4$ y $M5$ tienen orden 3, mientras que el orden de convergencia del método de Newton es 2.

$f(x)$	x_0	**Solución**	**Iteraciones**					ρ				
			CN	**M2**	**M3**	**M4**	**M5**	**CN**	**M2**	**M3**	**M4**	**M5**
(a)	2	α	6	5	5	5	5	3.0	2.8	4.8	4.8	4.8
	0	α	8	7	6	6	6	3.0	2.9	5.0	4.6	4.7
(b)	0	α	6	5	5	5	5	2.0	3.1	3.1	3.1	3.1
	1	α	5	4	4	4	4	2.0	2.9	2.9	2.9	2.9
(c)	-0.9	α_1	9	7	7	7	7	1.9	3.0	3.0	3.0	3.0
	3	α_2	9	7	7	7	7	2.0	2.9	2.9	2.9	2.9
(d)	-0.5	α	10	32	-	-	-	2.0	-	-	-	-
	1	α	8	13	7	6	7	2.0	-	3.0	2.8	2.9
(e)	-1	α	6	6	5	5	5	3.0	3.0	5.0	5.0	5.0
	0.7	α	5	5	4	4	4	3.0	-	4.9	4.0	3.8
	2	α	-	10	-	10	4	-	2.0	-	2.0	5.0
(f)	0.5	α	5	4	4	4	4	3.0	3.0	5.2	-	-
	-0.7	α	5	6	4	4	4	3.0	-	5.0	5.0	5.0

Tabla 1: Resultados numéricos para distintos métodos iterativos.

Terminamos el trabajo indicando que la fórmula iterativa (2) y los resultados descritos en la Sección 2, se pueden extender a funciones de varias variables, con lo que obtendríamos métodos iterativos de resolución de sistemas no lineales.

Referencias

[1] A. Cordero, J.R. Torregrosa, *Variants of Newton's Method using* 5^{th} *order quadrature formulas.* Applied Mathematics and Computation. DOI: 10.1016/j.amc.2007.01.062

[2] M. Frontini, E. Sormani, *Some variant of Newton's method with third-order convergence.* Applied Mathematics and Computation, 140 (2003) 419–426.

[3] A.M. Ostrowski, *Solutions of equations and systems of equations*, Academic Press, New York-London, 1966.

[4] J.F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.

[5] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, *A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence.* Applied Mathematics Letters, 13 (8) (2000) 87–93.