XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Ciclos límite de campos vectoriales polinomiales utilizando el método de averaging

Belén García[1], Jaume Llibre[2], Jesús S. Pérez del Río[1]

[1] *Dpto. Matemáticas, Universidad de Oviedo, Avenida Calvo Sotelo, s/n, 33007 Oviedo.*
E-mails: `belen.garcia@uniovi.es`, `jspr@uniovi.es`.
[2] *Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, 08193, Bellaterra, Barcelona.*
E-mail: `jllibre@mat.uab.cat`.

Palabras clave: ciclos límite, averaging, perturbación

Resumen

Es bien conocido que el problema 16 de Hilbert plantea la obtención del número máximo de ciclos límite H_n que pueden poseer los sistemas polinomiales de un grado n fijado, problema que está aún abierto incluso para $n = 2$. Una manera clásica de obtención de ciclos límite es la perturbación de un sistema que posee un centro, de modo que los ciclos límite del sistema perturbado aparecen por bifurcación de alguna de las órbitas periódicas del centro del sistema no perturbado. Existen esencialmente cuatro métodos para analizar el número de ciclos límite que se obtiene en esas perturbaciones: integrales de Melnikov, integrales abelianas, inverso de factor integrante y teoría de averaging. Aplicando este último método a la perturbación de un centro lineal modificado con una curva adecuada de puntos críticos hemos obtenido en [6] un número de ciclos límite que, cuando el grado del sistema es impar, supera el mejor número conocido hasta ahora de ciclos límite rodeando un único punto singular.

1. Introducción y resultados obtenidos

Un sistema diferencial polinomial real de grado n es un sistema diferencial de la forma $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$, donde n es el máximo de los grados de los polinomios reales P y Q. Uno de los principales problemas abiertos en la teoría cualitativa de los sistemas diferenciales reales planos es la determinación y distribución de sus ciclos límite. Precisamente el problema 16 de Hilbert plantea determinar el número máximo H_n de ciclos límite que pueden tener los sistemas diferenciales polinomiales reales de un grado fijado n. Éste es aún un problema abierto para todos los valores de $n \geq 2$ y no se conoce siquiera si H_n es un número finito. Los mejores resultados en esa dirección prueban que un sistema polinomial fijado no puede tener un número infinito de ciclos límite (ver [4] y [9]), lo cual no asegura todavía que H_n sea finito.

Un medio clásico para producir ciclos límite es a través de la perturbación de un sistema que tiene un centro de modo que los ciclos límite aparecen en el sistema perturbado bifurcando de alguna de las órbitas periódicas del centro (ver, por ejemplo, el trabajo de Pontrjagin [14]).

Existen esencialmente cuatro métodos para estudiar los ciclos límite que bifurcan de un centro. Los dos primeros están basados en la aplicación de retorno de Poincaré (ver por ejemplo [2]) y son los métodos denominados de las integrales de Poincaré-Pontrjagin-Melnikov y de las integrales abelianas. Ambos métodos son equivalentes en el plano (ver Sección 6 del Capítulo 6 de [5]). El tercer método utiliza el inverso de factor integrante (ver [8]) y finalmente el cuarto método trabaja con la teoría de averaging (ver, por ejemplo, [11]). Este último método en dimensión 2 proporciona la misma información que las integrales abelianas, pero las funciones que se integran para aplicar ambos métodos son, en general, diferentes.

Es bien conocido (ver por ejemplo [7]) que perturbando el centro lineal $x' = -y$, $y' = x$ con polinomios arbitrarios p y q de grado n (es decir $x' = -y + \varepsilon p(x,y)$, $y' = x + \varepsilon q(x,y)$), podemos obtener a primer orden en ε a lo sumo $[(n-1)/2]$ ciclos límite por bifurcación, donde [ ] denota la parte entera. También se sabe (ver [12]) que podemos obtener n ciclos límite por perturbación del centro cuadrático $x' = -y(1+x)$, $y' = x(1+x)$ (observemos que es esencialmente el centro lineal con una recta de puntos singulares) dentro de los sistemas polinomiales de grado n. En [1] se estudia la perturbación del centro cúbico $x' = -y(a+x)(b+y)$, $y' = x(a+x)(b+y)$ dentro de los sistemas diferenciales polinomiales de grado n y se obtienen $3[(n-1)/2]+4$ si $a \neq b$ y $2[(n-1)/2]+2$ si $a = b$.

Todos los números de ciclos límite rodeando un único punto singular referidos anteriormente son funciones lineales del grado n del sistema perturbado. Existen resultados mejores que proporcionan un número de ciclos límite que es cuadrático en términos del grado n. Así, en [10], los autores, a través de una perturbación del centro Hamiltoniano dado por $H = y^2/2 + x^{n+1}$ efectuada dentro de los sistemas diferenciales polinomiales de grado n impar, obtuvieron $\dfrac{(n+1)(n+3)}{8} - 1$ ciclos límite en el sistema perturbado. Este número de ciclos límite fue de nuevo obtenido a través de la perturbación de otros centros, cómo se puede ver en [3] y [13]. También en [13] los autores perturban un adecuado centro Hamiltoniano dentro de los sistemas polinomiales diferenciales de grado n par, obteniendo $n(n+2)/8 - 1$ ciclos límite para el sistema perturbado. Posteriormente este número correspondiente a n par fue mejorado en [3], donde se obtienen $n(n+6)/8$ ciclos límite. Existen muchos otros resultados que determinan cotas superiores sobre el número de ciclos límite rodeando un único punto singular, pero nos hemos referido aquí a resultados que proporcionan cotas inferiores sobre el número maximal de esos ciclos límite.

En nuestro reciente trabajo [6] hemos estudiado la perturbación del campo vectorial $x' = -yR(x,y)$, $y' = xR(x,y)$ donde R es un polinomio de grado 2 que puede ser escrito en coordenadas polares como

$$R(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r^2[\cos^2\theta + \lambda(r)], \tag{1}$$

con $\lambda(r) = a + \frac{b}{r^2}$, siendo a y b reales y de modo que $ab \neq 0$. En estas condiciones hemos obtenido el resultado sobre el número de ciclos límite del sistema perturbado que se refleja en el siguiente teorema.

Teorema A. *Si consideramos el sistema*

$$x' = -yR(x,y) + \varepsilon P(x,y), y' = xR(x,y) + \varepsilon Q(x,y), \tag{2}$$

con R y λ dados en (1) y donde *P y Q son polinomios de grado $n \geq 1$, entonces podemos elegir P y Q tales que el sistema perturbado tiene*

$$N(n) = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+4\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)-1.$$

ciclos límite.

Observemos que, cuando n es impar, la cota inferior sobre el número maximal de ciclos límite rodeando un único punto singular ($\dfrac{(n+1)(n+7)}{8} - 1$) obtenida en el Teorema anterior es la mejor conocida hasta ahora. La cota inferior en el caso par es $\dfrac{n(n+6)}{8} - 1$, así que la mejor en este caso sigue siendo la de [3]. Por consiguiente del Teorema A y de los resultados de [3] se deduce el siguiente corolario.

Corolario 1 *Existen sistemas diferenciales polinomiales de grado n que poseen $\Phi(n)$ ciclos límite rodeando un único punto singular, donde*

$$\Phi(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(n+1)(n+7) - 1 & \textit{si } n \textit{ es impar,} \\ \\ \dfrac{1}{8}n(n+6) & \textit{si } n \textit{ es par.} \end{cases}$$

Mas aún $\Phi(n)$ verifica:

(a) $\Phi(1) = 1$ *y* $\Phi(2j+1) = \Phi(2j-1) + j + 2$,

(b) $\Phi(2) = 2$ *y* $\Phi(2j+2) = \Phi(2j) + j + 2$,

(c) $\Phi(2j+1) = \Phi(2j) + j + 1$,

para $j = 1, 2, \ldots$

2. Utilización del método de averaging

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales en el plano definido por (2), donde $p(x,y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x,y)$, y $q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} q_k(x,y)$, siendo p_k y q_k polinomios homogéneos de grado k, es decir,

$$p_k(x,y) = \sum_{i+j=k} p_{ij}x^i y^j,$$
$$q_k(x,y) = \sum_{i+j=k} q_{ij}x^i y^j.$$

Si efectuamos en el sistema (2) el cambio a las coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ se obtiene el sistema definido por:

$$\begin{aligned} r' &= \varepsilon(f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n), \\ \theta' &= R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \varepsilon(g_1(\theta) + g_2(\theta)r + \dots + g_n(\theta)r^{n-1}), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &= \cos\theta p_i(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) + \mathrm{sen}\,\theta q_i(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta), \\ g_i(\theta) &= \cos\theta q_i(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) - \mathrm{sen}\,\theta p_i(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta). \end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon(f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n)}{R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \varepsilon(g_1(\theta) + g_2(\theta)r + \dots + g_n(\theta)r^{n-1})}$$

que, se puede escribir, efectuando un desarrollo en potencias de ε en la forma:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon(f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n)}{R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} + \varepsilon^2 T(r,\theta,\varepsilon) \tag{3}$$

y esta ecuación diferencial se encuentra en las hipótesis del Teorema B (ver Apéndice) por lo que el estudio de los ciclos límite de (3) y, por tanto, de (2) se puede simplificar utilizando la ecuación diferencial promediada definida por

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r),$$

con

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\theta)r + f_2(\theta)r^2 + \dots + f_n(\theta)r^n}{R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} d\theta, \tag{4}$$

cuyos puntos singulares (es decir, los ceros de F) se corresponden con ciclos límite del sistema no perturbado. Observemos que, de acuerdo con (3), se tiene que $F(r) = rG(r)$, donde

$$G(r) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{[n/2]} A_j r^{2j-1} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} B_j r^{2j}\right\},$$

con

$$A_j(r) = \int_0^{2\pi} \frac{f_{2j}(\theta)}{R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} d\theta,\ B_j(r) = \int_0^{2\pi} \frac{f_{2j+1}(\theta)}{R(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} d\theta,$$

que son funciones analíticas para r suficientemente pequeño.

El cálculo del número máximo posible de ceros de $G(r)$ en el intervalo $(0, s)$ donde la función es analítica constituye el núcleo del trabajo [6], donde se pueden encontrar las pruebas detalladas de las proposiciones cuyos enunciados reproducimos a continuación.

Proposición 2 *Se tiene que* $A_j(r) = 0$ *y*

$$B_j(r) = \frac{2\pi}{r^2}\sum_{k=0}^{j+1} b_k^{(j+1)} S_k(r),$$

con

$$S_k(r) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-\lambda(r))^{k-1-l}}{2^{2l}} \binom{2l}{l} + \frac{(-\lambda(r))^k}{\sqrt{\lambda(r)(\lambda(r)+1)}}, \quad \textit{para todo } k \geq 0, \tag{5}$$

donde la suma en (5) *es* 0 *cuando* $k = 0$ *y los elementos* $b_k^{(j+1)}$ *pueden ser elegidos de manera arbitraria en función de los coeficientes de* P *y* Q. *Más aún,*

$$G(r) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{k=0}^{j+1} b_k^{(j+1)} S_k(r) r^{2j-2}.$$

Así pues, la función G es una combinación lineal de funciones del tipo $S_k(r)r^{2j-2}$ y un análisis detallado de las propiedades de las mismas nos permitió obtener la siguiente proposición.

Proposición 3 *En el sistema diferencial* (2) *es posible elegir los polinomios* P *y* Q *de modo que la función* $F(r)$ *definida en* (4) *tiene* $N(n)$ *ceros en un intervalo* $(0, s)$.

Finalmente, en estas condiciones, la demostración del Teorema A es consecuencia de la Proposición 3 y del Teorema B del Apéndice.

APÉNDICE

Teorema B (Averaging) *Consideremos el problema de valor inicial*

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x},t) + \varepsilon^2 \mathbf{g}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{6}$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ *es* T*−periódica en* $t \geq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D \subset R^n$ *y* T *es una constante que es independiente de* ε. *Introducimos el promedio*

$$\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y},t)dt,$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$ *se considera constante en la integración. Consideremos ahora el problema de valor inicial para la ecuación promedio*

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{7}$$

Supongamos además que:

a) las funciones $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *y* $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ *están definidas y son continuas y acotadas por una constante* M *(independiente de* ε*) en* $D \times [0, +\infty)$

b) $\mathbf{g}$ *es Lipschitz-continua en* $\mathbf{x} \in D$.

Entonces se tiene:

i) $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = O(\varepsilon)$ *sobre la escala de tiempo* $\dfrac{1}{\varepsilon}$ *e* $\mathbf{y}(t)$ *es una aproximación de* $\mathbf{x}(t)$,

ii) si $\mathbf{p}_0$ *es un punto fijo no degenerado de (7), entonces el sistema (6) posee una órbita periódica aislada* $\gamma_\varepsilon(t) = \mathbf{p}_0 + O(\varepsilon)$. *Más aún, si* $\mathbf{p}_0$ *es hiperbólico, entonces* γ_ε *es también hiperbólica con el mismo tipo de estabilidad que* $\mathbf{p}_0$.

La demostración de este teorema puede verse en [15].

Agradecimientos

La primera y el tercero de los autores del trabajo están parcialmente financiados por el proyecto MEC/FEDER MTM2005-02094 y el segundo por el proyecto MEC/FEDER MTM2005-06098-C02-01 y por el proyecto CICYT 2005SGR 00550. El tercer autor quiere agradecer también al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo su financiación para la presentación de esta comunicación.

Referencias

[1] A. Buica, J. Llibre, *Limit cycles of a perturbated cubic polynomial differential center*, Chaos, Solitons and Fractals **32** (2007), 1059–1069.

[2] T.R. Blows, L.M. Perko, *Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytical systems*, SIAM Rev. **36** (1994), 341–376.

[3] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, *Bifurcation of limit cycles from two families of centers*, Dynamics Continuous Discrete Impulsive Systems **12** (2005), 275–288.

[4] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, 1992.

[5] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Science, Vol. **42**, 2nd Printing, Springer, New York, 1986.

[6] B. García, J. Llibre, J. S. Pérez del Río, *On the number of limit cycles surrounding a unique singular point for polynomial differential systems of arbitrary degree*, preprint.

[7] H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.

[8] H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano, *On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers*, Nonlinear Analysis **41** (2000), 523–537.

[9] Yu. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Math. Monographs **94**, Amer. Math. Soc., 1991.

[10] C.Li, W. Li, J. Llibre, Z. Zhang, *Polynomial systems: a lower bound for the weakened 16th Hilbert problem*, Extracta Mathematicae **16** (2001), 441–447.

[11] J. Llibre, *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*, Radovi Matematicki **11** (2002), 215–228.

[12] J. Llibre, J.S. Pérez del Río, J.A. Rodríguez, *Averaging analysis of a perturbated quadratic center*, Nonlinear Analysis **46** (2001), 45–51.

[13] J. Llibre, X. Zhang, *On the number of limit cycles for some perturbed Hamiltonian polynomial systems*, Dynamics of Continuous Discrrete and Impulsive Systems, Series A **8** (2001), 161–182.

[14] L.S. Pontrjagin, *Über Autoschwingungsssystem, die den hamiltonschen nahe liegen*, Physicalische Zeitschrift der Sowjetunion **6** (1-2) (1934), 25–28.

[15] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1996. t, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1996.