

Análisis de un método BEM–FEM para la resolución numérica de un problema de magnetostática en \mathbb{R}^3

P. SALGADO ¹ AND V. SELGAS²

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela. E-mail: mpilar@usc.es.*

² *Dpto. de Matemáticas, Universidad de La Coruña. E-mail: vselgas@udc.es.*

Palabras clave: magnetostática, elementos finitos, elementos de contorno, potencial escalar reducido, potencial total.

Resumen

En este trabajo analizamos una formulación BEM–FEM simétrica para resolver el problema tridimensional de magnetostática utilizando potenciales escalares magnéticos.

1. Introducción

El problema de *magnetostática* consiste en calcular el campo magnético creado por una corriente dada que no depende del tiempo. Concretamente, suponiendo conocida la densidad de corriente \mathbf{J} , el problema consiste en encontrar el campo magnético \mathbf{H} definido en \mathbb{R}^3 y cumpliendo

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

donde μ es la permeabilidad magnética. Para resolver este modelo, en ingeniería eléctrica se utilizan distintos métodos numéricos, cuya diferencia fundamental son las incógnitas principales del problema; véase por ejemplo [5]. Los resultados numéricos de la literatura indican que las formulaciones en términos de potenciales escalares son las más eficientes desde un punto de vista computacional. En particular, la combinación de los denominados *potencial escalar reducido* y *potencial total* parece ser la más eficiente. Esta estrategia, que combina el potencial total en los materiales magnéticos sin corriente y el potencial reducido en el aire y en los materiales no magnéticos que transportan corriente, fue introducida en 1979 por Simkin y Trowbridge [9] para dominios bidimensionales y extendida

posteriormente a dominios tridimensionales. Sin embargo, el análisis matemático de esta formulación y de su resolución numérica con un método de elementos finitos no se ha realizado hasta fechas muy recientes en [2].

Es importante señalar que el análisis desarrollado en [2] es para dominios tridimensionales *acotados* y por tanto requiere añadir al problema (1–2) condiciones de contorno aproximadas, dado que el dominio natural del problema es todo el espacio. Ahora bien, las ecuaciones son homogéneas con coeficientes constantes en el exterior de una región acotada, propiedad que permite combinar un método de elementos finitos (FEM) con un método de elementos de contorno (BEM). Así, en este trabajo analizaremos una formulación en términos de los potenciales total y reducido planteada en \mathbb{R}^3 y propondremos un método BEM–FEM para su resolución numérica. Cabe señalar que estudiaremos el problema considerando un dominio magnético que puede ser *múltiplemente conexo*, lo cual conduce a trabajar con un *potencial total multivaluado*. Seguiremos las ideas de [2] para el tratamiento del potencial multivaluado, evitando de este modo, las costosas aproximaciones numéricas de las funciones de base del espacio de campos armónicos de Neumann, que se construyen por ejemplo en [6] para un problema cuasi–estacionario. Describiremos la discretización del problema y mostraremos la convergencia del método propuesto.

2. El problema en términos de potenciales escalares

Sea Ω la región ocupada por los materiales magnéticos; i.e. $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \mu(\mathbf{x}) \neq \mu_0\}$, donde μ_0 denota la permeabilidad magnética del vacío. El dominio Ω se supone abierto, acotado y conexo, con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ conexa y Lipschitz continua, pero no necesariamente simplemente conexo; véase la Figura 1.

Supongamos que la densidad de corriente $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ cumple $\mathbf{J}|_{\Omega} = \mathbf{0}$ y $\text{div} \mathbf{J} = 0$ en \mathbb{R}^3 . Entonces el campo vectorial \mathbf{T} definido a partir de la Ley de Biot–Savart,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

pertenece al espacio $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ y satisface

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

$$\text{div} \mathbf{T} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

$$\|\mathbf{T}\|_{1,\mathbb{R}^3} \leq C \|\mathbf{J}\|_{0,\mathbb{R}^3}, \tag{6}$$

siendo $C > 0$ una constante independiente de \mathbf{J} ; cf. [7, Lemma 2.2(b)].

En particular, $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{T}$ en \mathbb{R}^3 , luego existe un único potencial $\varphi^R \in W^1(\mathbb{R}^3) := \{\psi \text{ distribución en } \mathbb{R}^3; \frac{\psi}{\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3), \nabla \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)\}$, tal que

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \varphi^R \quad \text{en } \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

El escalar φ^R se conoce como *potencial reducido* y permite representar \mathbf{H} según (7) en todo el espacio \mathbb{R}^3 . Sin embargo, para evitar errores de aproximación en los materiales magnéticos (consecuencia de que \mathbf{T} y $\nabla \varphi^R$ son grandes y de magnitud similar en ellos) introduciremos otro potencial escalar definido en Ω .

En general, Ω no es simplemente conexo, pero suponemos que existe un número finito de superficies Σ_j ($j = 1, \dots, J$) tales que $\Sigma_j \subset \Omega$, $\partial\Sigma_j \subset \partial\Omega$, $\bar{\Sigma}_j \cap \bar{\Sigma}_k = \emptyset$ (para $j \neq k$) y de modo que el conjunto $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus (\cup_{j=1}^J \Sigma_j)$ es simplemente conexo y pseudo-Lipschitz. También suponemos que para cada $j = 1, \dots, J$ existe una curva $\gamma_j \subset \Gamma$ que corta a $\bar{\Sigma}_j$ una única vez y que es la frontera de una superficie abierta $S_j \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$; cf. [1] y véase la Figura 1.

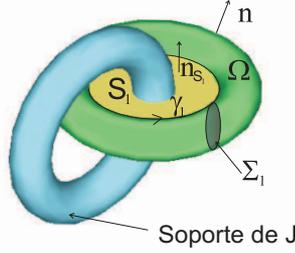


Figura 1: Esquema del dominio.

Para cada $j = 1, \dots, J$, fijamos un vector \mathbf{n}_j unitario normal a Σ_j . Denotamos las dos caras de Σ_j por Σ_j^+ y Σ_j^- , de modo que \mathbf{n}_j tenga la orientación normal exterior a $\tilde{\Omega}$ sobre Σ_j^+ . Dada una función $\tilde{\psi} \in H^1(\tilde{\Omega})$, sea $\tilde{\nabla}\tilde{\psi} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ la extensión de $\nabla\tilde{\psi} \in \mathbf{L}^2(\tilde{\Omega})$ a todo Ω , y $[\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} := \tilde{\psi}|_{\Sigma_j^-} - \tilde{\psi}|_{\Sigma_j^+}$ el salto de $\tilde{\psi}$ a través de Σ_j a lo largo de la dirección de \mathbf{n}_j . Introducimos el espacio

$$V := \{\tilde{\psi} \in H^1(\tilde{\Omega}); [\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} \in \mathbb{R} \forall j = 1, \dots, J\},$$

que permite caracterizar las funciones con rotacional nulo; concretamente, si $\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ con $\mathbf{rot}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ en Ω , entonces existe $\tilde{\psi} \in V$ tal que $\mathbf{q} = \tilde{\nabla}\tilde{\psi}$; véase por ejemplo [1]. En particular, dado que $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$ en Ω , existe un único $\tilde{\varphi} \in V/\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{H} = -\tilde{\nabla}\tilde{\varphi} \quad \text{en } \Omega, \quad (8)$$

y $\tilde{\varphi}$ se conoce como *potencial total*.

Nótese que, aplicando el Teorema de Stokes se deduce que $[\tilde{\varphi}]_{\Sigma_j} = \int_{S_j} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{S_j} dS =: I_j$ ($j = 1, \dots, J$), que son datos del problema. En consecuencia, podemos reescribir $\tilde{\varphi}$ como

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \sum_{j=1}^J I_j \tilde{\phi}_j, \quad (9)$$

donde $\tilde{\phi}_j$ es el único elemento de $H^1(\Omega \setminus \Sigma_j)$ que cumple

$$[\tilde{\phi}_j]_{\Sigma_j} = 1; \quad \int_{\Omega \setminus \Sigma_j} \mu \tilde{\nabla}\tilde{\phi}_j \cdot \nabla\psi = 0 \quad \forall \psi \in H^1(\Omega),$$

y $\varphi := \mathcal{P}\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$, con $\mathcal{P} : V \rightarrow H^1(\Omega)$ el operador de proyección asociado a la suma directa $V = H^1(\Omega) \oplus \langle \{\tilde{\phi}_j\}_{j=1}^J \rangle$.

Análogamente, como el campo $\mathbf{T} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ también tiene rotacional nulo en Ω , existe un único potencial $\tilde{\varphi}^T \in V/\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{T} = -\tilde{\nabla}\tilde{\varphi}^T \quad \text{en } \Omega. \quad (10)$$

En virtud de (7), (8) y (10), sabemos que $-\nabla\varphi^R|_\Omega = \mathbf{H}|_\Omega - \mathbf{T}|_\Omega = -\tilde{\nabla}(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^T)$, luego los potenciales $\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^T$ y $\varphi^R|_\Omega$ coinciden salvo constante aditiva. En particular, $\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^T \in H^1(\Omega)$ y, aplicando la representación (9), deducimos

$$\tilde{\varphi} - \mathcal{P}\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^T - \mathcal{P}\tilde{\varphi}^T = \sum_{j=1}^J I_j \tilde{\phi}_j \quad \text{en } \Omega. \quad (11)$$

A continuación, reescribimos las ecuaciones (1-2) como un problema de transmisión usando la siguiente representación del campo magnético:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\tilde{\nabla}\tilde{\varphi} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{T} - \nabla\varphi^R & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (12)$$

Para esta representación, la continuidad de las trazas tangencial y normal de \mathbf{H} y $\mu\mathbf{H}$ a través de Γ se traduce en las siguientes *condiciones de transmisión*:

$$-\tilde{\nabla}\tilde{\varphi} \times \mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{n} - \nabla\varphi^R \times \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (13)$$

$$-\mu\tilde{\nabla}\tilde{\varphi} \cdot \mathbf{n} = \mu_0\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \mu_0\nabla\varphi^R \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (14)$$

Con el fin de estudiar la condición (13), para cada potencial regular $\psi \in H^1(\Omega)$ introducimos $\mathbf{rot}_\Gamma\psi := \nabla\psi \times \mathbf{n}$, que se denomina *rotacional vectorial* de ψ sobre la superficie Γ . El siguiente resultado puede consultarse en [3, Corollary 3.7].

Lema 2.1 *El operador diferencial*

$$\mathbf{rot}_\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma),$$

está bien definido y es lineal continuo. Además, su núcleo es el conjunto de las funciones de $H^1(\Omega)$ con traza constante sobre Γ .

En virtud de (11) y del Lema 2.1, la condición de transmisión (13) es equivalente a

$$\mathcal{P}(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^T) - \varphi^R \in \mathbb{R} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, proponemos la siguiente formulación del problema de magnetostática.

Problema 2.2 *Hallar los potenciales $\tilde{\varphi} \in V/\mathbb{R}$ y $\varphi^R \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, con $[\tilde{\varphi}]_{\Sigma_j} = I_j$ ($j = 1, \dots, J$), que cumplan las siguientes ecuaciones en sentido débil:*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mu\tilde{\nabla}\tilde{\varphi}) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\Delta\varphi^R &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \mathcal{P}\tilde{\varphi} + \mathbb{R} &= \mathcal{P}\tilde{\varphi}^T + \varphi^R + \mathbb{R} && \text{sobre } \Gamma, \\ -\mu \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\mathbf{n}} &= \mu_0 \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \mu_0 \frac{\partial\varphi^R}{\partial\mathbf{n}} && \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

3. Una formulación variacional BEM–FEM simétrica

En primer lugar, estudiamos el Problema 2.2 en la *región no acotada* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. En esta región, el potencial φ^R es armónico y, por tanto, admite la representación integral

$$\varphi^R(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \varphi^R(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^R(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (16)$$

donde $\Phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$) denota la solución fundamental del operador laplaciano en \mathbb{R}^3 . A partir de la representación (16) y de las relaciones de salto de los operadores de simple y doble capa, se deducen las ecuaciones integrales (cf. [4], [8, Theorem 3.1.2])

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\varphi^R + \mathcal{V}\frac{\partial \varphi^R}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}^*\right)\frac{\partial \varphi^R}{\partial \mathbf{n}} + \mathcal{N}\varphi^R = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (17)$$

donde \mathcal{V} y \mathcal{K} denotan los operadores de simple y doble capa:

$$\mathcal{V}\eta(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad \text{y} \quad \mathcal{K}\eta(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \eta(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Además, en (17), \mathcal{K}^* e \mathcal{I} representan el operador adjunto de \mathcal{K} y la identidad, respectivamente, y \mathcal{N} es el operador *hipersingular*:

$$\mathcal{N}\eta(\mathbf{x}) := -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \eta(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right).$$

A continuación señalamos las propiedades fundamentales de \mathcal{V} y \mathcal{K} ; cf. [6, Lemmas 3.3–3.4].

Lema 3.1 *Dado $s \in [-1/2, 1/2]$, los operadores integrales*

$$\mathcal{V} : H^{s-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{s+1/2}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \mathcal{K} : H^{s+1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{s+1/2}(\Gamma),$$

son lineales y continuos. Además, el operador \mathcal{V} es $H^{-1/2}(\Gamma)$ -elíptico.

Con el fin de estudiar las propiedades del operador \mathcal{N} , introducimos el espacio $\mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma) := \{\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\Gamma); \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$, y la *traza tangencial* $\pi_{\tau} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$ dada por

$$\pi_{\tau}\mathbf{q} := \mathbf{n} \times (\mathbf{q}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)^3.$$

Denotamos su imagen por $\mathbf{V}_{\pi} := \pi_{\tau}(\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma))$, que es densa en $\mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$ y en consecuencia podemos definir \mathbf{V}'_{π} el espacio dual de \mathbf{V}_{π} con espacio pivote $\mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$. Consideramos $\pi_{\tau}^* : \mathbf{V}'_{\pi} \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ el operador adjunto de π_{τ} , y sea $\mathbf{rot}_{\Gamma} : V \rightarrow \mathbf{V}'_{\pi}$ el operador diferencial

$$\widetilde{\mathbf{rot}}_{\Gamma}\tilde{\psi} := \widetilde{\nabla}\tilde{\psi} \times \mathbf{n} \quad \forall \tilde{\psi} \in V.$$

Puede comprobarse que la imagen de una función $\psi \in H^1(\Omega)$ a través del operador $\widetilde{\mathbf{rot}}_{\Gamma}$ depende únicamente de la traza $\psi|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Por lo tanto, podemos introducir el operador diferencial de superficie $\mathbf{rot}_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}'_{\pi}$ de modo que

$$\mathbf{rot}_{\Gamma}(\psi|_{\Gamma}) = \widetilde{\mathbf{rot}}_{\Gamma}\psi := \nabla\psi \times \mathbf{n} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Representamos por $\mathcal{V} : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ el operador de simple capa \mathcal{V} actuando por componentes y definimos $\widehat{\mathcal{V}} := \mathcal{V} \circ \pi_{\tau}^* : \mathbf{V}'_{\pi} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. El siguiente resultado queda probado en [6, Lemma 3.3].

Lema 3.2 *El operador $\mathcal{N} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma)$ es lineal y continuo. Además, para cualesquiera $\psi_1, \psi_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$, se cumple la identidad*

$$\langle \mathcal{N}\psi_1, \psi_2 \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \psi_2, \boldsymbol{\pi}_\tau \widehat{\mathbf{V}} \mathbf{rot}_\Gamma \psi_1 \rangle_{\mathbf{v}_\pi \times \mathbf{v}_\pi}.$$

En particular, el operador \mathcal{N} cancela las constantes y es $H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}$ -elíptico.

Introducimos la incógnita auxiliar

$$\lambda := \frac{\partial \varphi^R}{\partial \mathbf{n}} \in H_0^{-1/2}(\Gamma).$$

Entonces, teniendo en cuenta la condición de transmisión (15) junto con la propiedad $\mathcal{K}1 = 1/2$ y el Lema 3.2, reescribimos las ecuaciones integrales (17) como

$$\langle \eta, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\mathcal{P}\tilde{\varphi} \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \eta, \mathcal{V}\lambda \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \eta, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\mathcal{P}\tilde{\varphi}^T \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall \eta \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (18)$$

$$\langle \lambda, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \lambda, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\psi \rangle_{1/2, \Gamma} - \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\varphi}, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\varphi}^T, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (19)$$

En segundo lugar, hacemos una formulación variacional estándar del Problema 2.2 en el dominio acotado Ω , aplicando las propiedades (14) y (19):

$$\begin{aligned} (\mu \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}, \nabla \psi)_{0, \Omega} - \mu_0 \langle \lambda, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\psi \rangle_{1/2, \Gamma} + \mu_0 \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\varphi}, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} = \\ = \mu_0 \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\varphi}^T, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} - \mu_0 \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (20)$$

Consideramos las formas bilineales $a_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $a_2 : H_0^{-1/2}(\Gamma) \times H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H_0^{-1/2}(\Gamma) \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) &:= (\mu \tilde{\nabla} \tilde{\psi}_1, \tilde{\nabla} \tilde{\psi}_2)_{0, \Omega} + \mu_0 \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\psi}_1, \mathcal{P}\tilde{\psi}_2 \rangle_{1/2, \Gamma}, \\ a_2(\eta_1, \eta_2) &:= \mu_0 \langle \eta_2, \mathcal{V}\eta_1 \rangle_{1/2, \Gamma}; \quad b(\eta, \tilde{\psi}) := \mu_0 \langle \eta, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\mathcal{P}\tilde{\psi} \rangle_{1/2, \Gamma}. \end{aligned}$$

Introducimos además las aplicaciones lineales $l_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $l_2 : H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$l_1(\tilde{\psi}) := \mu_0 \langle \mathcal{N}\mathcal{P}\tilde{\varphi}^T, \mathcal{P}\tilde{\psi} \rangle_{1/2, \Gamma} - \mu_0 \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \mathcal{P}\tilde{\psi} \rangle_{1/2, \Gamma}; \quad l_2(\eta) := b(\eta, \tilde{\varphi}^T).$$

Con esta notación y teniendo en cuenta las ecuaciones (11), (18) y (20), proponemos la siguiente formulación variacional BEM–FEM simétrica del Problema 2.2.

Problema 3.3 *Hallar $\tilde{\varphi} \in V/\mathbb{R}$ y $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$, con $[\tilde{\varphi}]_{\Sigma_j} = I_j$ ($j = 1, \dots, J$), tales que*

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - b(\lambda, \tilde{\psi}) &= l_1(\tilde{\psi}), \\ a_2(\lambda, \eta) + b(\eta, \tilde{\varphi}) &= l_2(\eta), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\tilde{\psi} \in V/\mathbb{R}$ y $\eta \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$, con $[\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} = 0$ ($j = 1, \dots, J$).

Lema 3.4 *El Problema 3.3 tiene una única solución. Además, si $\tilde{\varphi} \in V/\mathbb{R}$, $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ es la solución del Problema 3.3 y definimos el potencial*

$$\varphi_*^R(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} (\mathcal{P}\tilde{\varphi}(\mathbf{y}) - \mathcal{P}\tilde{\varphi}^T(\mathbf{y})) - \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) \right) dS(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega},$$

entonces el siguiente campo satisface las ecuaciones (1-2):

$$\mathbf{H} := \begin{cases} -\tilde{\nabla}\tilde{\varphi} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{T} - \nabla\varphi_*^R & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (21)$$

Nótese que a partir del campo \mathbf{H} se obtiene la inducción magnética $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ en \mathbb{R}^3 .

4. Resolución numérica mediante un método BEM–FEM

En todo lo que sigue supondremos que Ω es un poliedro de Lipschitz. Consideramos una familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de mallas tetraédricas del dominio Ω ; asumimos también que cada superficie de corte Σ_j es poliédrica y formada por la unión de caras de tetraedros, por lo que \mathcal{T}_h es también una malla de $\bar{\Omega}$. Además, para cada $h > 0$ denotamos por \mathcal{T}_h^Γ la malla triangular inducida por \mathcal{T}_h sobre la superficie Γ . Entonces aproximamos las funciones de los espacios V y $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ utilizando los subespacios de dimensión finita

$$\begin{aligned} V_h &:= \{ \tilde{\psi} \in C^0(\bar{\Omega}); \tilde{\psi}|_K \in \mathbb{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, [\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} \in \mathbb{R} \forall j = 1, \dots, J \}, \\ \Lambda_h &:= \{ \eta \in L^2(\Gamma); \eta|_T \in \mathbb{R} \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \int_{\Gamma} \eta dS = 0 \}. \end{aligned}$$

Proponemos así la siguiente versión discreta del Problema 3.3.

Problema 4.1 *Hallar $\tilde{\varphi}_h \in V_h/\mathbb{R}$ y $\lambda_h \in \Lambda_h$, con $[\tilde{\varphi}_h]_{\Sigma_j} = I_j$ ($j = 1, \dots, J$), tales que*

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{\varphi}_h, \tilde{\psi}) - b(\lambda_h, \tilde{\psi}) &= l_1(\tilde{\psi}), \\ a_2(\lambda_h, \eta) + b(\eta, \tilde{\varphi}_h) &= l_2(\eta), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\tilde{\psi} \in V_h/\mathbb{R}$ y $\eta \in \Lambda_h$, con $[\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} = 0$ ($j = 1, \dots, J$).

Nótese que la definición de b involucra el cálculo explícito de los potenciales $\tilde{\phi}_j$. Para evitar esta complicación práctica, aprovecharemos que las funciones test presentan la regularidad adicional $\Lambda_h \subset L_0^2(\Gamma) \subset H_0^{-1/2}(\Gamma)$. Concretamente, esta regularidad da sentido al producto $(\eta, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\tilde{\psi})_{0,\Gamma}$ para cualesquiera $\eta \in \Lambda_h$ y $\tilde{\psi} \in V$; véase el Lema 3.1. En consecuencia, podemos introducir la forma bilineal $\hat{b}: L_0^2(\Gamma) \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y el operador $\hat{l}_2: L_0^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ como las siguientes versiones de b y l_2 que no involucran la proyección \mathcal{P} :

$$\hat{b}(\eta, \tilde{\psi}) := \mu_0 (\eta, (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K})\tilde{\psi})_{0,\Gamma}; \quad \hat{l}_2(\eta) := \hat{b}(\eta, \tilde{\varphi}^T).$$

Asímismo, definimos la forma bilineal $\hat{a}_1: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y el operador $\hat{l}_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) &:= (\mu\tilde{\nabla}\tilde{\psi}_1, \tilde{\nabla}\tilde{\psi}_2)_{0,\Omega} + \mu_0 \langle \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_2, \boldsymbol{\pi}_\tau \widehat{\mathbf{V}} \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_1 \rangle_{\mathbf{V}'_\pi \times \mathbf{V}_\pi}, \\ \hat{l}_1(\tilde{\psi}) &:= \mu_0 \langle \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}, \boldsymbol{\pi}_\tau \widehat{\mathbf{V}} \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\varphi}^T \rangle_{\mathbf{V}'_\pi \times \mathbf{V}_\pi} - \mu_0 \langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \tilde{\psi} \rangle_{0,\Gamma}. \end{aligned}$$

Finalmente, seguimos la estrategia propuesta en [2] para aproximar las trazas tangencial y normal del campo \mathbf{T} . De este modo, consideramos \mathbf{T}_h^{ND} y \mathbf{T}_h^{RT} , las interpoladas de \mathbf{T} en los espacios de elementos finitos de Nédelec y de Raviart–Thomas de primer orden, respectivamente; entonces tenemos las aproximaciones $\mathbf{T} \times \mathbf{n} \cong \mathbf{T}_h^{ND} \times \mathbf{n}$ y $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \cong \mathbf{T}_h^{RT} \cdot \mathbf{n}$. Además, si $\tilde{\varphi}_h^T$ denota la interpolada de $\tilde{\varphi}^T$ en V_h , entonces $\mathbf{T}_h^{ND} = -\tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_h^T$ y, en particular,

$$\mathbf{T}_h^{ND} \times \mathbf{n} = -\widetilde{\mathbf{rot}}_{\Gamma} \tilde{\varphi}_h^T \quad \text{sobre } \Gamma,$$

propiedad que nos permite determinar $\tilde{\varphi}_h^T$ reescribiendo el campo \mathbf{T}_h^{ND} en términos de la base dada en [6, Proposition 4.2]. Por lo tanto, aproximamos $\hat{l}_1(\psi)$ y $\hat{l}_2(\eta)$ por

$$\hat{l}_1^{(h)}(\psi) := -\mu_0 \langle \mathbf{T}_h^{RT} \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{1/2, \Gamma} + \mu_0 \langle \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi, \boldsymbol{\pi}_{\tau} \hat{\nu}(\mathbf{T}_h^{ND} \times \mathbf{n}) \rangle_{\mathbf{V}'_{\pi} \times \mathbf{V}_{\pi}}; \quad \hat{l}_2^{(h)}(\eta) := \hat{b}(\eta, \tilde{\varphi}_h^T).$$

Proponemos el siguiente esquema para resolver numéricamente el Problema 3.3.

Problema 4.2 *Hallar $\tilde{\varphi}_h \in V_h/\mathbb{R}$ y $\lambda_h \in \Lambda_h$, con $[\tilde{\varphi}_h]_{\Sigma_j} = I_j$ ($j = 1, \dots, J$), tales que*

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(\tilde{\varphi}_h, \tilde{\psi}) - \hat{b}(\lambda_h, \tilde{\psi}) &= \hat{l}_1^{(h)}(\tilde{\psi}), \\ a_2(\lambda_h, \eta) + \hat{b}(\eta, \tilde{\varphi}_h) &= \hat{l}_2^{(h)}(\eta), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\tilde{\psi} \in V_h/\mathbb{R}$ y $\eta \in \Lambda_h$, con $[\tilde{\psi}]_{\Sigma_j} = 0$ ($j = 1, \dots, J$).

Proposición 4.3 *El Problema 4.2 tiene una única solución. Además, si la solución $(\tilde{\varphi}, \lambda)$ del Problema 3.3 es tal que el campo \mathbf{H} definido en (21) presenta la regularidad $\mathbf{H}|_{\Omega} \in \mathbf{H}^r(\Omega)$ y $\mathbf{H}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \in W^r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3$, con $r \in (0, 1]$, entonces*

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_h\|_{1, \Omega} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2, \Gamma} \leq C h^r \left(\|\mathbf{H}\|_{r, \Omega} + \|\mathbf{H}\|_{W^r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3} + \|\mathbf{J}\|_{0, \mathbb{R}^3} \right).$$

Agradecimientos

Los autores agradecen las valiosas sugerencias de los profesores A. Bermúdez, S. Meddahi y R. Rodríguez.

Referencias

- [1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Meth. Appl. Sci., 21 (1998), pp. 823–864.
- [2] A. Bermúdez, R. Rodríguez, P. Salgado, *A finite element method for the magnetostatic problem in terms of scalar potentials*, Preprint DIM 2006-28, Universidad de Concepción, Concepción, 2006.
- [3] A. Buffa, M. Costabel, D. Sheen, *On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl., 276 (2002), pp. 845–867.
- [4] M. Costabel, *Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements*, The Mathematics of Finite Elements and Applications IV, Academic Press, London 1988.
- [5] Ch. Magele, H. Stögner K. Preis, *Comparison of different finite element formulations for 3D magnetostatic problems*, IEEE Transaction on Magnetics, 24 (1) (1988), pp. 31–34.
- [6] S. Meddahi, V. Selgas, *A Mixed-FEM and BEM coupling for a three-dimensional eddy current problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 37 (2) (2003), pp. 291–318.
- [7] A. J. Meir, P. G. Schmidt, *Variational Methods for stationary MHD flow under natural interface conditions*, Nonlinear Anal., 26 (1996), pp. 659–689.
- [8] J.-C. Nédelec, *Acoustic and electromagnetic equations: Integral representations for harmonic problems*, Springer–Verlag, New York, 2001.
- [9] J. Simkin, C.W. Trowbridge, *On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics*, Int. J. Meth. Eng., 14 (1979), pp. 423–440.