

## Aplicaciones de una familia de difusión anisotrópica sobre la evolución de algunos contornos activos

J.SANGUINO<sup>1</sup>, C.PLATERO<sup>2</sup>, P.M.GONZÁLEZ<sup>1</sup>, J.M.PONCELA<sup>1</sup>,  
M.C.TOBAR<sup>1</sup>

*Applied BioEngineering Group (ABE-UPM).*

*E-mail:* <http://www.elai.upm.es/spain/Investiga/Bioingenieria/bioing.htm>.

<sup>1</sup> *Depto. Matemática aplicada E.U.I.T.I.*

<sup>2</sup> *Depto. Electrónica, automática e informática industrial E.U.I.T.I.*

**Palabras clave:** EDP, AN

### Resumen

Se presenta una familia de difusión anisotrópica como técnica de realzado de imágenes [15], con la capacidad de combinar la difusión directa en la curva de nivel con una difusión inversa estabilizada en la componente normal, mejorando los resultados del contorno activo geodésico [5]. Además, permite la introducción de conocimiento a priori, al combinar las técnicas de morfología con el agrupamiento no supervisado de los píxeles, formado super-píxeles que definen fronteras en la evolución del contorno. Para el contorno activo se emplea una nueva técnica tipo *narrow-band*, en un entorno 3x3 alrededor de los puntos de paso por cero [7]. Esta metodología se ha utilizado para el análisis de imágenes biomédicas procedentes de microscopía en campo claro.

## 1. Introducción

Una técnica importante en segmentación de imágenes es el método de los contornos activos. Basado en la evolución de curvas o superficies por flujos geométricos, la solución final del contorno indicará los límites del objeto segmentado. La utilización del Cálculo variacional permite definir un funcional, capaz de fusionar distintos canales de información, presentándose como una herramienta flexible y poderosa en imágenes complejas. Sólo dependerá de características locales, sino también de

En el caso de contornos activos geodésicos (*Geodesic Active Contour, GAC*) [5], se define una métrica que toma en cuenta los aspectos radiométricos de la imagen. Ésta se define como un término dependiente del módulo del gradiente, capaz de atraer el contorno

hacia los bordes del objeto. Sin embargo, la detección de los bordes suele ser defectuosa, produciendo una métrica incapaz de frenar el contorno en las fronteras del objeto a segmentar. Esta situación puede ser evitada con un realce previo de la imagen, aumentando el contraste entre los objetos de la imagen y suavizándolos interiormente. Ante esta situación, Chan y Vese [6] propusieron una evolución del contorno basada en la minimización de las varianzas interiores y exteriores de la luminancia de la imagen. En este caso, el modelo detecta objetos sin necesidad de tener bien definidos los bordes. Este método es un caso particular del problema de partición mínima y puede verse como un caso particular del funcional de Mumford-Shah [11]. El modelo sólo se plantea el problema de segmentación, y no el de la regularización de la imagen. Sin embargo, la hipótesis de simplificación es la homogeneización del nivel de gris dentro y fuera de cada región. Un modo de ajustarse a estas restricciones consiste en realizar un preprocesado TV [16].

La ponencia se organiza presentando en primer lugar la equivalencia genérica entre el filtrado de difusión con el procesado de regularización de la imagen. Ésta se concreta sobre la dinámica de la nueva familia de difusión anisotrópica parametrizada por  $p \in \mathbb{R}^+$ . Para tareas de realce se requiere  $p > 1$ , se observará que el funcional es cóncavo y que la evolución discreta queda estabilizada empleando el método numérico AOS [21]. En el apartado tercero se desarrollará la aplicación de la familia de difusión expuesta a los contornos activos geodésicos y a los contornos de Chan y Vese. Por último, se presentarán algunos resultados experimentales.

## 2. Familia de difusión anisotrópica para tareas de realce

La aplicación de un filtro de difusión no lineal sobre el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de la imagen  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  produce otra imagen procesada,  $u(\mathbf{x}, t)$ , a partir de la original, como una solución del proceso de difusión con condiciones de contorno de Neumann e iniciales [13]:

$$\partial_t u = \operatorname{div} (g(\|\nabla u\|) \nabla u) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad t > 0; \quad [u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \text{ C.I.}] \quad [\partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ C.C.}] \quad (1)$$

donde  $g(\|\nabla u\|)$  es la difusividad. Normalmente, ésta es una función no negativa decreciente respecto al módulo del gradiente. La ecuación (1) refleja una ponderación de flujo igualado a la evolución del nivel de gris del píxel. Para el caso  $n = 2$ , una mejor interpretación del efecto de difusión se explica realizando la ponderación del flujo sobre las componentes tangencial  $\xi$  y normal  $\eta$  a la curva de nivel [17]:

$$\partial_t u = \overbrace{g(\|\nabla u\|)}^{g_\xi} u_{\xi\xi} + \overbrace{[g(\|\nabla u\|) + g'(\|\nabla u\|)\|\nabla u\|]}^{g_\eta} u_{\eta\eta}. \quad (2)$$

Este proceso evolutivo también se puede justificar desde la regularización de la imagen. Se trata de minimizar un funcional de energía que mida las variaciones de la imagen:

$$E(u) = \int_{\Omega} \Phi(\|\nabla u\|) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |u_0 - u| dx \quad (3)$$

La primera componente trata de suavizar la imagen, mientras la segunda busca la fidelidad con la imagen original. Este segundo término resulta perjudicial en el proceso de realzado de la imagen, ya que no permite evolucionar hacia un aumento del contraste entre los

objetos de la escena. La condición necesaria de Euler-Lagrange para (2) junto con el método del gradiente descendiente da lugar al marco evolutivo [1]

$$\partial_t u = \operatorname{div} \left( \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) = \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} u_{\xi\xi} + \Phi''(\|\nabla u\|) u_{\eta\eta}. \quad (4)$$

De las ecuaciones (2) y (4) se deduce la conexión entre el filtrado de difusión anisotrópica y el funcional de suavizado de la imagen. De hecho, está probada la equivalencia del procesado de difusión con el de regularización para el caso TV [18].

## 2.1. Descripción de la familia de difusión anisotrópica para tareas de realce

Para las tareas de realce se propone una familia uniparamétrica de difusividades [19] que evitan una sintonización previa de ciertos parámetros de control:

$$g(|u_x|) = \frac{\phi'(|u_x|)}{|u_x|} = \frac{1}{|u_x|^p} \quad \text{con } p \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Para  $p = 1$  se tiene el modelo de *Variación total*.

Nos interesa determinar para qué valores de  $p$  se produce una difusión inversa. Para ello a partir de:

$$\phi'(|u_x|) = |u_x|^{1-p} \quad (6)$$

resulta

$$\phi''(|u_x|) = (1-p)|u_x|^{-p} = (1-p) \frac{1}{|u_x|^p} \quad (7)$$

y así: si  $p < 1$  resulta difusión directa pero si  $p > 1$  resulta difusión inversa.

## 2.2. Discretización de la familia de difusión anisotrópica para tareas de realce

Para la discretización de la ecuación

$$\partial_t u = \partial_x (g(|\partial_x u|) \partial_x u) \quad (8)$$

con  $g$  definida mediante (5) y con las condiciones iniciales y de contorno ya consideradas anteriormente, se aprovecha la naturaleza difusiva de dicha ecuación, para establecer una aproximación espacial de la forma

$$\partial_x (g(|\partial_x u|) \partial_x u) \approx \frac{1}{2} [\delta_x^+ [g(\delta_x^- u) \delta_x^- u] + \delta_x^- [g(\delta_x^+ u) \delta_x^+ u]], \quad (9)$$

siendo  $\delta_x^+$  y  $\delta_x^-$  las aproximaciones progresivas y regresivas de la derivada. Así pues, se obtiene la expresión matricial

$$\frac{d[\mathbf{u}]}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) [\mathbf{u}] \quad (10)$$

donde

$$a_{ij}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{g_{ij}}{h^2} & j \in N(i) \\ -\sum_{k \in N(i)} \frac{g_{ik}}{h^2} & j = i \\ 0 & j \notin N(i) \end{cases}$$

siendo  $N(i)$  el conjunto de los dos píxeles vecinos de  $i$  (en el caso de píxeles del contorno sólo habría un único vecino) y  $h = \Delta x$ . Resulta que este proceso de filtrado da lugar a una matriz  $\mathbf{A}$  que satisface las condiciones para evolucionar dentro de un marco escala-espacio (*scale-space*) [20, 21].

Para finalizar con un esquema numérico completo del problema (8), se aborda la discretización temporal desde un punto de vista semi-implícito, debido a su comportamiento estable y que evite restricciones sobre el paso del tiempo  $\Delta t \equiv k$  propios de esquemas explícitos [21]. Para ello se considera un paso de tiempo  $k > 0$  y se representa por  $u_i^n$  una aproximación de  $u(x_i, nk)$ , dando lugar al esquema matricial

$$[\mathbf{I} - k\mathbf{A}(\mathbf{u}^n)] [\mathbf{u}^{n+1}] = [\mathbf{u}^n] \quad (11)$$

que sigue verificando las condiciones discretas que establecen su evolución en un marco escala-espacio (*scale-space*) [20, 21].

### 3. Aplicaciones de la familia de difusión anisotrópica en algunos contornos activos

Este apartado trata de analizar la aplicación de la difusión anisotrópica propuesta para los contornos activos geodésicos y los contornos de minimización de la varianza de la luminancia.

#### 3.1. Procesado para los contornos activos geodésicos

El método del contorno activo geodésico (GAC) resulta una alternativa geométrica al método de los *snakes* [10]. El objetivo del método del contorno activo geodésico es encontrar la curva  $C(s)$  que minimiza el siguiente funcional [5]:

$$E^{GAC}(C(s)) = \int_0^1 g(\|\nabla u(C(s))\|) C'(s) ds \quad (12)$$

En esta ecuación  $C'(s)$  es la derivada de la curva respecto a su parámetro  $s$  y  $g$  es una función monótonamente decreciente, tal que  $g(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  y  $g(0) = 1$ . El funcional (12) puede entenderse como la longitud de la curva  $C(s)$  para una determinada métrica de Riemann, así que minimizarlo consiste en encontrar la curva geodésica correspondiente. El objetivo es por tanto, definir una métrica adecuada que lleve al contorno activo a las fronteras de los objetos.

La definición de esta métrica adecuada, consiste en aumentar el contraste entre objetos de la imagen. Se ha detectado experimentalmente que un compromiso entre la homogeneización de las regiones con un realce de los bordes se produce para la difusividad propuesta con  $p = 2$ . Conclusión que coincide con la propuesta de Keeling y Stollberger [8]. Adicionalmente, la métrica puede ser mejorada con la introducción de conocimiento *a priori*. La posibilidad de incluir tamaño y forma *a priori*, a través del procesamiento morfológico, facilitará el éxito del GAC.

### 3.2. Procesado para los contornos de minimización de la varianza de luminancia

Partiendo del funcional de Mumford-Shah [11], se define una hipersuperficie  $C \subset \mathbb{R}^{n-1}$  que particiona el dominio de la imagen, representando  $C$  la frontera del subconjunto abierto  $\omega \subset \Omega$ . La minimización energética pretende la regularización de la imagen y su segmentación:

$$E^{MS}(u, C) = \alpha \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \beta \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u|^2 dx + \mu H^{n-1}(C) \quad (13)$$

donde  $H^{n-1}(C)$  denota la distancia de Hausdorff de dimensión  $(n - 1)$ , y  $\alpha > 0, \beta > 0$  y  $\mu > 0$  son parámetros de control. Para  $n = 2$ ,  $H^{n-1}(C)$  da la longitud del contorno y para  $n = 3$  el área de la superficie del contorno. La dinámica impuesta trata de regularizar la imagen en su apariencia y en cuanto a la partición trata de minimizar la varianza de la luminancia fuera y dentro del contorno. Para simplificar el problema, Chan y Vese proponen sólo particionar el dominio, sin regularizar la imagen [6]. Por tanto, una mejora consistiría en aproximarse al funcional de Mumford-Shah en dos pasos:

1. Regularización TV de la imagen [16]:

$$E^{TV}(u) = \alpha \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (14)$$

$u$  tiende a homogeneizarse dentro y fuera de la región [18]. Esta etapa se implementaría con la familia de difusividad propuesta con  $p = 1$ .

2. Minimización de las varianzas de los grupos para la partición del dominio

$$E^{CV}(c_1, c_2, C) = \lambda_1 \int_{\omega} (u - c_1)^2 dx + \lambda_2 \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (u - c_2)^2 dx + \mu H^{n-1}(C) \quad (15)$$

siendo  $c_1$  y  $c_2$  los valores medios de intensidad dentro y fuera del contorno:

$$c_1 = \frac{\int_{\omega} u dx}{\int_{\omega} dx}, \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} u dx}{\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} dx}. \quad (16)$$

## 4. Métodos numéricos

Se presenta un esquema numérico tipo *level-set* para la implementación de los contornos activos junto con resultados experimentales.

### 4.1. Resultado numérico de los contornos activos

Se ha vuelto muy popular el uso de técnicas de *level set* para la implementación de los contornos activos, por su manejo de los puntos que presentan discontinuidades y su facilidad de cambio topológico. La representación del contorno se hace de manera implícita, mediante una función de Lipschitz  $\phi$ , tal que:

$$C = \partial\omega = \{x \in \Omega/\phi(x) = 0\}, \quad \omega = \{x \in \Omega/\phi(x) < 0\}, \quad \Omega \setminus \bar{\omega} = \{x \in \Omega/\phi(x) > 0\} \quad (17)$$

La evolución del contorno es calculada siguiendo el nivel cero o interfase del *level set*,  $\phi(x, t)$ . Se suele emplear la función escalón  $H(\phi(x))$  para la partición de la imagen, de manera que dentro del contorno es unitaria y fuera es nula. También es habitual emplear la derivada del escalón, el pulso de Dirac  $\delta(\phi(x))$ , para definir el contorno, dando paso a las técnicas *narrow band*. Tanto el contorno geodésico activo como el modelo de minimización de la varianzas son formulables en términos de *level set*. Sin embargo, los problemas de estabilidad numérica de la dinámica de  $\phi(x, t)$  y su alto coste computacional se han presentado como una limitación importante en su puesta en práctica [12]. Recientemente, un nuevo método, encuadrado dentro de las técnicas *narrow band*, permite eliminar las etapas de reinicialización, reduce el ancho de la banda a un entorno de 3x3 y emplea un escenario simple de diferencias finitas [7]. Se fundamenta en añadir un término de preservación de la función distancia en el *level set*. Además, la inicialización del contorno puede partir de una imagen binaria, permitiendo integrar las técnicas clásicas de procesado y segmentación como elemento de partida inicial. Los tiempos de computación se reducen hasta en tres niveles de magnitud.

Seguendo a Li et al [7], la formulación energética del contorno debe añadir un funcional de preservación de la función distancia al modelo propuesto:

$$E(\phi) = E_{ext}(\phi) + \eta P(\phi) \quad (18)$$

Donde  $P$  es la energía interna de  $\phi$  que caracteriza la desviación del *level set* sobre la función distancia y  $\eta > 0$  es un parámetro de ponderación sobre el nivel energético global del contorno. El término de energía interna se define:

$$P(\phi) = \int_{\Omega} (\|\nabla\phi\| - 1)^2 dx \quad (19)$$

Al combinar este término con la energía del GAC, la evolución del *level set* queda:

$$\partial_t\phi = \lambda\delta(\phi) \left[ g(\|\nabla u\|) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) \|\nabla\phi\| + \nabla g(\|\nabla u\|) \nabla\phi \right] + \eta \left[ \Delta\phi - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) \right] \quad (20)$$

Siendo  $\lambda > 0$  un valor constante de ponderación de la energía externa sobre la total. Para el caso de minimización de las varianzas:

$$\partial_t\phi = \delta(\phi) \left[ \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) + \lambda_1(u - c_1)^2 - \lambda_2(u - c_2)^2 \right] + \eta \left[ \Delta\phi - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) \right] \quad (21)$$

Para la puesta en práctica se ha utilizado una versión suavizada del pulso de Dirac [6]:

$$\delta_{\varrho}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \varrho \\ \frac{1}{2\varrho} [1 + \cos(\frac{\pi x}{\varrho})] & |x| \leq \varrho \end{cases} \quad (22)$$

En los experimentos se empleó  $\varrho = 1,5$  para la regularización del pulso de Dirac. Todas las derivadas espaciales han sido aproximadas por diferencias centradas y las derivadas temporales por diferencias progresivas.

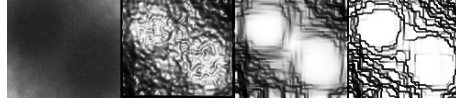


Figura 1:  $g(|\nabla u|)$  a) ROI, b)  $\sigma = 15$ , c)  $p = 1, \Delta t = 0,05$  d)  $p = 2, \Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$

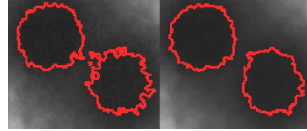


Figura 2: Parámetros del contorno:  $\mu = 5, \lambda_1 = \lambda_2 = 1,5, \eta = 0,04, \Delta t = 5$  a) Sin procesado, b)  $p = 1$

El trabajo experimental se ha centrado en la segmentación de imágenes de espermatozoides humanos [14].

Centrados sobre la región de interés, ROI, de los núcleos a segmentar, se procede aplicar GAC. Tradicionalmente se ha definido la métrica empleado  $g(|\nabla u|) = \frac{1}{1+|\nabla(G_\sigma * u)|^2}$ , siendo  $G_\sigma$  un filtro gaussiano de varianza  $\sigma^2$  [5]. Se propone sustituir el filtrado gaussiano, equivalente a una difusión lineal isotrópica, por otros de la familia expuesta. En la figura 1 se muestra una comparativa de  $g(|\nabla u|)$ , en el rango  $[0, 1]$ , con difusión lineal y no lineal. La imagen ROI carece de bordes nítidos y con presencia abundante de ruido. Se observa que la métrica tradicional, con difusión lineal, no produce una atracción del contorno hacia los bordes de los dos núcleos y mucho menos a su separación. En cambio, para la difusión no lineal propuesta se mejoran los resultados. Con  $p = 1$ , hay eliminación del ruido, pero los bordes no están realzados. Para  $p = 2$  aparece claro los bordes y la posibilidad de cambio topológico del contorno activo, pudiéndose dividirse en dos. No obstante, los resultados no son satisfactorios y requieren añadir más conocimiento a priori a través del procesamiento morfológico.

La solución resulta óptima empleando un contorno activo de minimización de las varianzas interiores y exteriores. La figura 2 muestra la evolución final y estable del contorno. Sin la aplicación del procesado, las fronteras de los nucleos están contaminadas por el ruido y aparecen pequeños grupos. Con la regularización TV previa, el contorno muestra una solución suave de los bordes y no contiene grupos espúreos. El coste computacional para la imagen ROI de 108x124 fue de 31 ms.

## 5. Conclusiones

Se ha presentado una familia de difusividades proveniente de un funcional cuya naturaleza convexa/cóncava depende de un parámetro  $p \in \mathbb{R}^+$ . Dentro de la familia, para valores de  $p$  entre 1 y 2, muestra un buen compromiso entre el realce, eliminación del ruido, efecto escalera y agrupamiento no supervisado de los píxeles. Esta técnica de procesado tiene gran utilidad para mejorar la dinámica de los contornos activos. En el caso de contornos activos geodésicos, con  $p = 2$  se produce un realce de los bordes que mejora la métrica y la atracción de la curva a la frontera de los objetos. Si el contorno utiliza el

criterio de minimización de la varianza interior y exterior de la luminancia, con  $p = 1$  se elimina los efectos espurios y tiende a minimizar el funcional de Mumford-Shah en dos pasos.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Comunidad Autónoma de Madrid a través de las Ayudas Puente UPM a sus grupos de investigación reconocidos.

## Referencias

- [1] L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, and J.-M. Morel, *Axioms and Fundamental Equations in Image Processing*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 123, (1993) 199 - 257.
- [2] G. Aubert, P.Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, Springer (2002)
- [3] M. Breuß, T. Brox, A. Bürgel, T. Sonar, J. Weickert, *Numerical aspect of TV Flow*, Numerical Algorithms, Vol. 41, No. 1, (2006) 79-101.
- [4] M. Breuß, M. Welk, *Staircasing in semidiscrete stabilised inverse diffusion algorithms*, Journal of Computational and Applied Mathematics, accepted.
- [5] Caselles, V., Kimmel, R., and Sapiro, G., *Geodesic active contours*, International Journal of Computer Vision, (1997) 22(1):61-79.
- [6] Chan, T. and Vese, L. *Active contours without edges*. *IEEE Transactions on Image Processing*, (2001) 10(2):266-277.
- [7] Chunming Li, Chenyang Xu, Changfeng Gui, Martin D. Fox, *Level Set Evolution without Re-Initialization: A New Variational Formulation*, CVPR (1) 2005: 430-436.
- [8] S. L. Keeling and R. Stollberger. *Nonlinear anisotropic diffusion filters for wide range edge sharpening*. Inverse Problems, (2002) 18:175-190.
- [9] S. Kichenassamy. *The Perona-Malik paradox*. SIAM Journal on Applied Mathematics, (1997) 57:1343-1372.12.
- [10] M.Kass, A.Witkin, D.Terzopoulos. *Snakes: Active Contour Models*. International Journal of Computer Vision. 1:321-331 (1988)
- [11] D. Mumford and J. Shah, *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Commun. Pure Appl.Math, vol. 42, pp. 577-685, 1989.
- [12] S. Osher, R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 153, Springer (2003).
- [13] P. Perona and J. Malik. *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, (1990) 12:629-639.
- [14] C. Platero, *Segmentación automática de imágenes de espermatozoides humanos mediante técnicas SDC*, XXIV Jornadas de Automática, Ciudad Real, 8-10 septiembre, 2004.
- [15] C. Platero, J. Sanguino, M. C. Tobar, P. González, G. Asensio, J. M. Poncela, *Agrupación natural de los píxeles*, XXVI Jornadas de Automática, Almería, 6-8 septiembre, 2006.
- [16] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physical D, (1992) 60:259-268.
- [17] J. Sanguino, *Relaciones de las curvas de nivel con la ecuación del calor*, Trabajo interno del Grupo de Bioingeniería Aplicada (UMP), (<http://www.elai.upm.es>), 2005.
- [18] G. Steidl, J. Weickert, T. Brox, P. Mrázek, and M. Welk. *On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDEs*. SIAM Journal
- [19] V. I. Tsurkov. An analytical model of edge protection under noise suppression by anisotropic diffusion. Journal of Computer and Systems Sciences International, (2000) 39(3):437-440
- [20] J.Weickert, Anisotropic diffusion in image processing, Ph.D. thesis, Dept. of Mathematics, University of Kaiserslautern, Germany, 1996
- [21] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, and M. A. Viergever. *Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering*. IEEE Transactions on Image Processing, (1998) 7(3):398-410.