

Métodos numéricos basados en ecuaciones modificadas para ecuaciones de evolución no lineales con soluciones de tipo compactón

FRANCISCO RUS¹, FRANCISCO R. VILLATORO²

¹ Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga, E.T.S.I. Informática, Campus de Teatinos, 29071 Málaga. E-mail: rusman@lcc.uma.es.

² Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga, E.T.S.I. Industriales, Campus de El Ejido, 29013 Málaga. E-mail: villa@lcc.uma.es.

Palabras clave: Compactones, Ecuaciones modificadas, No linealidad, Métodos numéricos

Resumen

Los compactones son ondas solitarias con soporte compacto resultado de un equilibrio entre efectos no lineales y dispersión no lineal, por ejemplo, de la ecuación de Rosenau-Hyman. Se presentan métodos numéricos para esta ecuación basados en ecuaciones modificadas que consiguen disminuir el error en la propagación de un compactón mediante la corrección de los términos de error de truncado del método de diferencias finitas de Ismail-Taha. La calidad de los métodos resultantes se estudia mediante la evaluación del error en los invariantes y la solución respecto a sus valores exactos.

1. Introducción

Los compactones son soluciones de tipo onda solitaria que se caracterizan por tener soporte compacto y que aparecen en ecuaciones de evolución que incluyen dispersión no lineal y otros efectos no lineales. Rosenau y Hyman [6] encontraron estas soluciones en una ecuación Korteweg-de Vries generalizada llamada $K(p, p)$, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^p}{\partial x} + \frac{\partial^3 u^p}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

donde $u(x, t)$ es la amplitud de la onda, x es la coordenada espacial, t es la coordenada temporal, y c_0 es una velocidad constante.

Los compactones son soluciones clásicas de la ecuación $K(p, p)$ para $1 < p \leq 3$, que se pueden escribir como [7]

$$u_c(x, t) = \begin{cases} \alpha^\mu \cos^{2\mu}(\beta \xi(x, t)), & |\xi(x, t)| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2)$$

$$\xi(x, t) = x - x_0 - (c - c_0)t, \quad \alpha = \frac{2cp}{p+1}, \quad \beta = \frac{p-1}{2p}, \quad \mu = \frac{1}{(p-1)},$$

donde c es la velocidad del compactón y x_0 la posición de su máximo en $t = 0$. La ecuación (1) tiene cuatro invariantes $I_i = \int \phi_i(u) dx$, donde $\phi_1 = u$, $\phi_2 = u^{n+1}$, $\phi_3 = u \cos(x)$, y $\phi_4 = u \sin(x)$.

La resolución numérica de la ecuación $K(p, p)$ presenta gran número de dificultades asociadas a que el compactón sólo tiene k derivadas continuas en sus extremos para $p = (2+k)/k$, con lo que los métodos numéricos introducen oscilaciones “ficticias” que conducen a inestabilidades numéricas. Para la solución de la ecuación $K(p, p)$ se han introducido métodos pseudoespectrales que requieren disipación artificial mediante filtrado paso alto que reduce las oscilaciones ficticias [1, 6]. También se han usado métodos de elementos finitos de tipo Petrov-Galerkin [2], métodos de Padé de alto orden [8], y métodos en diferencias finitas [3, 5].

El método de ecuaciones modificadas es una técnica utilizada en física computacional de fluidos para el análisis de la consistencia y estabilidad de métodos numéricos, así como para el desarrollo de métodos de mayor orden mediante la corrección de los términos del error de truncado [4, 9]. La técnica más directa para esto último es la corrección diferida (*deferred*) del error [9]. En este trabajo aplicaremos dicha técnica al método de diferencias finitas de segundo orden de Ismail-Taha [5] para la ecuación $K(p, p)$. La corrección diferida permite obtener métodos de orden arbitrariamente grande, aunque nosotros nos centraremos en métodos de cuarto, sexto y octavo orden de consistencia. Nuestro objetivo es determinar el orden óptimo de la corrección buscando un compromiso entre exactitud y eficiencia computacional.

En la siguiente sección se desarrollan varios métodos mediante la técnica de ecuaciones modificadas. Los resultados de nuestro estudio se presentan en la sección 3. La última sección presenta las principales conclusiones obtenidas y algunas líneas de trabajo futuro.

2. Métodos Numéricos de Ecuaciones Modificadas

Consideremos el método de diferencias finitas presentado por Ismail y Taha [5] para la resolución numérica de la ecuación $K(p, p)$ que usa la regla del punto medio implícita en tiempo y una aproximación de diferencias finitas centradas de segundo orden en espacio. Generalizaremos dicho método mediante la corrección de los términos del error de truncado de su ecuación modificada obteniendo métodos de mayor orden. En general, los métodos resultantes para la ecuación (1) toman la forma

$$\frac{dU_m}{dt} - c_0 \mathcal{B}_i(\mathbf{E})(U_m) + \mathcal{B}_j(\mathbf{E})(U_m)^p + \mathcal{C}_k(\mathbf{E})(U_m)^p = 0, \quad (3)$$

donde se usa la ecuación (1) con condiciones de contorno periódicas en el intervalo $x \in [0, L]$, una malla de espaciado fijo $\Delta x = L/M$ cuyos nodos son $x_m = m \Delta x$, para $m =$

$0, 1, \dots, M$, $U_m \approx u(x_m)$, E es el operador de desplazamiento ($EU_m = U_{m+1}$), y $\mathcal{B}_i(E)$ y $\mathcal{C}_k(E)$ son operadores en diferencias finitas que aproximan, respectivamente, la primera y la tercera derivadas. El método (3) se denotará (i, j, k) , siendo el método propuesto originalmente por Ismail y Taha [5] el método (2, 2, 2), en el que

$$\mathcal{B}_2(E) = \frac{-E^{-1} + E^1}{2 \Delta x}, \quad \mathcal{C}_2(E) = \frac{-E^{-2} + 2E^{-1} - 2E^1 + E^2}{2 \Delta x^3}, \quad (4)$$

son aproximaciones para la primera y tercera derivadas de segundo orden cuyos términos de error de truncado son

$$\mathcal{B}_2(E) u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O(\Delta x^6), \quad (5)$$

$$\mathcal{C}_2(E) u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \frac{\Delta x^4}{40} \frac{\partial^7 u}{\partial x^7} + O(\Delta x^6), \quad (6)$$

respectivamente.

La ecuación modificada para el método de Ismail-Taha o método (2, 2, 2) se obtiene si se introducen los términos de error de truncado (5) y (6) en la ecuación (3). La corrección diferida de dichos términos permite obtener métodos de mayor orden. Un método de cuarto orden para la primera y tercera derivadas se puede obtener utilizando

$$\mathcal{B}_4(E) = \mathcal{B}_2(E) - \frac{\Delta x^2}{6} \mathcal{D}_2(E) \mathcal{B}_2(E), \quad \mathcal{C}_4(E) = \mathcal{C}_2(E) - \frac{\Delta x^2}{4} \mathcal{D}_2(E) \mathcal{C}_2(E), \quad (7)$$

donde se ha usado una aproximación de segundo orden centrada para la segunda derivada

$$\mathcal{D}_2(E) = \frac{E^{-1} - 2 + E^1}{\Delta x^2}, \quad \mathcal{D}_2(E) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x^4). \quad (8)$$

La misma técnica se puede emplear para derivar métodos de orden arbitrario, corrigiendo términos sucesivos en las ecuaciones (5) y (6). Sin embargo, es importante notar que dichas correcciones adicionales tienen que tener en cuenta los términos de truncado introducidos por la ecuación (8). De esta forma, aproximaciones de sexto orden para la primera y tercera derivadas se escriben como

$$\mathcal{B}_6(E) = \mathcal{B}_4(E) + \frac{\Delta x^4}{30} (\mathcal{D}_2(E))^2 \mathcal{B}_2(E), \quad \mathcal{C}_6(E) = \mathcal{C}_4(E) + \frac{7 \Delta x^4}{120} (\mathcal{D}_2(E))^2 \mathcal{C}_2(E). \quad (9)$$

Este procedimiento puede extenderse fácilmente para obtener $\mathcal{B}_8(E)$ y $\mathcal{C}_8(E)$.

Los compactones de la ecuación $K(p, p)$ son originados por un equilibrio entre los términos no lineales de la ecuación (1) por lo que hemos desarrollado una nueva técnica de corrección que permite compensar simultáneamente los términos de error de truncado introducidos por los operadores $\mathcal{B}_j(E)$ y $\mathcal{C}_k(E)$. Para obtener un método de cuarto orden con esta técnica usaremos un operador $\mathcal{B}_{[4]}(E)$ cuyo error de truncado sea

$$\mathcal{B}_{[4]}(E) u = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O(\Delta x^4), \quad (10)$$

que compensará a la ecuación (6). El resultado es

$$\mathcal{B}_{[4]}(\mathbf{E}) = \frac{(15 - 2 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-3} + (-60 + 18 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-2} + (75 - 90 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-1}}{120 \Delta x^3} - \frac{(75 - 90 \Delta x^2)\mathbf{E}^1 + (-60 + 18 \Delta x^2)\mathbf{E}^2 + (15 - 2 \Delta x^2)\mathbf{E}^3}{120 \Delta x^3}.$$

La nueva técnica de corrección también permite introducir un nuevo operador $\mathcal{B}_{[6]}(\mathbf{E})$ que compensa simultáneamente los términos de segundo y cuarto orden en Δx en la ecuación (6), aproximando la primera derivada con sexto orden. En concreto, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{[6]}(\mathbf{E}) &= \frac{(-49 + 6 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-4} + (294 - 64 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-3} + (-686 + 336 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-2}}{1680 \Delta x^3} \\ &+ \frac{(686 - 1344 \Delta x^2)\mathbf{E}^{-1} - (686 - 1344 \Delta x^2)\mathbf{E}^1}{1680 \Delta x^3} \\ &- \frac{(-686 + 336 \Delta x^2)\mathbf{E}^2 + (294 - 64 \Delta x^2)\mathbf{E}^3 + (-49 + 6 \Delta x^2)\mathbf{E}^4}{1680 \Delta x^3}. \end{aligned}$$

Para la integración en tiempo de la ecuación (3) en el intervalo $t \in [0, T]$, aproximada en espacio utilizando los métodos (i, j, k) e $(i, [j], k)$, se ha utilizado la regla del punto medio implícita

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} - c_0 \mathcal{B}_i(\mathbf{E}) \frac{U_m^{n+1} + U_m^n}{2} + (\mathcal{B}_j(\mathbf{E}) + \mathcal{C}_k(\mathbf{E})) \left(\frac{U_m^{n+1} + U_m^n}{2} \right)^p = 0, \quad (11)$$

donde $t^n = n \Delta t$ y $U_m^n \approx u(x_m, t^n)$. Este método representa una aproximación de segundo orden en tiempo y produce una ecuación implícita que resolvemos numéricamente mediante el método de Newton.

Para el estudio de la estabilidad en colisiones entre compactones de los métodos presentados es necesario añadirle al lado izquierdo de la ecuación (1) un término lineal de viscosidad artificial [5] de tipo $-\epsilon \partial^4 u / \partial x^4$. Este término ha sido numéricamente aproximado por el operador de segundo orden $\mathcal{D}(\mathbf{E})$ dado por

$$\mathcal{D}(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{E}^{-2} - 4\mathbf{E}^{-1} + 6 - 4\mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^2}{\Delta x^4}, \quad \mathcal{D}(\mathbf{E}) u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^4). \quad (12)$$

3. Presentación de Resultados

Se han comparado los métodos (i, j, k) desarrollados en la sección anterior usando correcciones diferidas con $i, j \in \{2, 4, 6, 8\}$ y $k \in \{2, 4, 6\}$, y la nueva técnica de corrección simultánea con $i \in \{2, 4, 6\}$, $j \in \{[4], [6]\}$, y $k \in \{2, 4\}$, lo que totaliza 60 métodos diferentes, incluido entre ellos el método de Ismail-Taha.

En la tabla 2 se presentan el error en la solución y en los dos primeros invariantes, comparados con los valores exactos, para la propagación de un compactón para los 34 métodos (i, j, k) en los que se ha obtenido una solución estable, para el resto no se ha podido terminar la simulación en el intervalo $t \in [0, 200]$. Como se observa en la tabla 2, los métodos $(i, 2, 2)$, con $i \in \{2, 4, 6, 8\}$, entre los que se encuentra el método Ismail-Taha, son estables. Los métodos (i, j, k) con $j \geq 4$ y $k \geq 4$ también son estables para $i \in \{2, 4, 6, 8\}$.

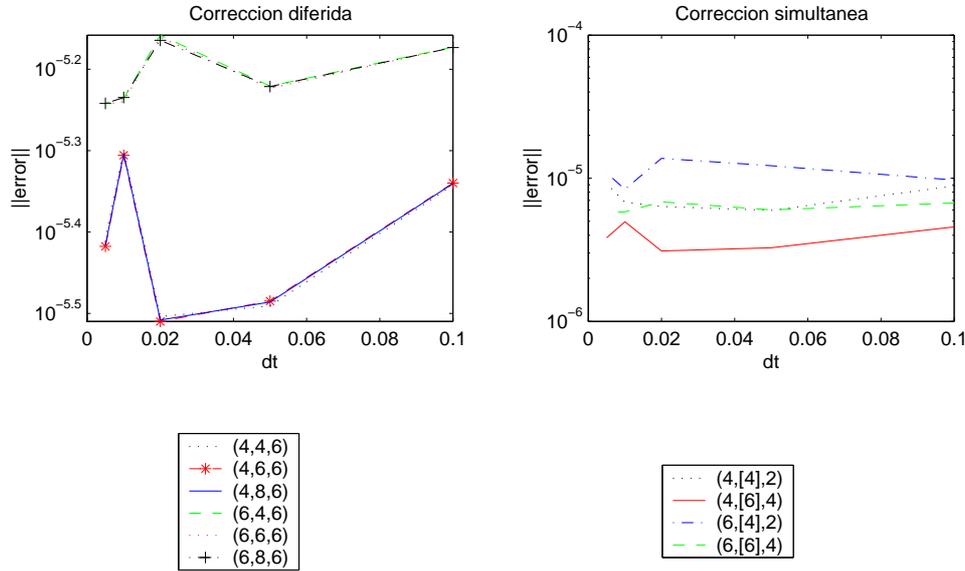


Figura 1: Error en la solución, en función de Δt , con $\Delta x = 0,05$, $c_0 = c = 1$, $\epsilon = 0$, $L = 80$ y $T = 200$ para un compactón de la ecuación $K(2,2)$.

En el caso de los métodos obtenidos con la técnica de corrección simultánea, sólo son estables los métodos $(i, [4], 2)$ e $(i, [6], 4)$, con $i \in \{2, 4, 6\}$.

Como se puede apreciar en la tabla 2, el orden de la aproximación a la derivada primera del término lineal no afecta a la estabilidad del método en la evolución de un compactón, pero sí afecta al error de la solución. De hecho, los métodos que aproximan al menos una derivada con orden dos presentan errores del orden de 10^{-3} , mientras que para el resto son de orden de 10^{-6} . Nótese que el método $(4, [4], 2)$ muestra un error en la solución de $8,83 \times 10^{-6}$, ya que es un método de cuarto orden gracias al uso de la corrección simultánea. Entre los métodos con error del orden de 10^{-6} , los que tienen $k = 6$ (o $k = 4$ si es un método de corrección simultánea) reducen aproximadamente a la mitad el error en comparación con los que utilizan $k = 4$ orden (o $k = 2$ si es un método de corrección simultánea).

El error en el primer invariante es similar para todos los métodos estables debido a que dicho invariante es conservado cuando se usa aritmética exacta (con lo que los errores observados son debidos al método de Newton). Los métodos (i, j, k) con $i = 2$ son los que presentan el mayor error en el segundo invariante, del orden de 10^{-7} . El resto de los métodos, con $i > 2$, presentan un error en el segundo invariante del orden de 10^{-10} , en el límite de tolerancia utilizado para el método de Newton.

Los métodos de correcciones diferidas que mejor resultado han dado son los métodos $(4, 4, 6)$, $(4, 6, 6)$ y $(4, 8, 6)$, con un error de $4,5 \times 10^{-6}$. Entre los métodos de corrección simultánea el mejor es, con el error similar a los anteriores, el método $(4, [6], 4)$. Todos estos métodos tienen en común una aproximación del orden más alto a la tercera derivada, no importando el orden de la primera derivada para el término no lineal. Como resumen de nuestro análisis de la simulación de la propagación de un solo compactón, el método

más eficiente, que presenta mejor equilibrio entre error y coste de ejecución, es el método (4, 4, 6).

La figura 1 muestra efecto de reducir el paso de tiempo, variando el parámetro Δt , en el error de la solución para los 10 mejores métodos estudiados. La figura 1 muestra la norma del error en función de Δt para los métodos de correcciones diferidas (izquierda) y los métodos de corrección simultánea (derecha). En esta figura se hace visible que una disminución importante de Δt no mejora apreciablemente el error, hecho que coincide con los resultados obtenidos con otros métodos desarrollados por los autores [8].

Una solución mucho más difícil de resolver numéricamente es la interacción entre varios compactones. La tabla 1 muestra los resultados de un estudio de la estabilidad de los métodos desarrollados en colisiones entre compactones en función del término de viscosidad artificial (12). En la tabla 1 se han marcado con una x los métodos que son estables para el correspondiente valor de ϵ . Como se puede apreciar, los métodos que presentan un menor error no son los que permiten menor viscosidad artificial ante una colisión entre dos compactones. Los mejores métodos, en el sentido de necesitar menor aporte de viscosidad artificial para ser estables en la colisión de dos compactones, son los que usan una aproximación de segundo orden a las derivadas primera y tercera de los términos no lineales.

ϵ	10^{-2}	5×10^{-3}	10^{-3}	5×10^{-4}	10^{-4}	5×10^{-5}	10^{-5}
(2, 2, 2)	x	x	x	x	x	x	-
(2, 4, 4)	x	x	x	x	x	-	-
(2, 6, 6)	x	x	x	x	-	-	-
(2, 8, 8)	x	x	x	x	-	-	-
(4, 2, 2)	x	x	x	x	x	x	-
(4, 4, 4)	x	x	x	x	x	-	-
(4, 4, 6)	x	x	x	x	-	-	-
(4, 6, 6)	x	x	x	x	-	-	-
(6, 2, 2)	x	x	x	x	x	x	-
(6, 4, 4)	x	x	x	x	x	-	-
(8, 4, 4)	x	x	x	x	x	-	-
(8, 8, 6)	x	x	x	x	-	-	-
(2, [4], 2)	x	x	x	x	x	-	-
(2, [6], 4)	x	x	x	x	-	-	-
(6, [4], 2)	x	x	x	x	x	-	-
(6, [6], 4)	x	x	x	x	-	-	-

Tabla 1: Estabilidad de los métodos desarrollados en función del valor de ϵ para la colisión de dos compactones con $c_1 = 1,25$ y $c_2 = 1$ respectivamente, para $\Delta x = 0,05$, $\Delta t = 0,1$, $L = 100$, $c_0 = 1$ y $T = 120$ (tiempo suficiente para que se finalice una colisión completa).

4. Conclusiones y trabajo futuro

Se han presentado y analizado 59 nuevos métodos numéricos para la ecuación de Rosenau-Hyman basados en ecuaciones modificadas, de los cuales 48 hacen correcciones de términos de error de truncado para cada derivada de forma independiente (corrección diferida) y los 11 restantes hacen correcciones simultáneas de términos de error de truncado de la primera y tercera derivadas.

Se han estudiado la estabilidad y los errores de la solución y de los dos primeros invariantes en la propagación de un solo compactón de la ecuación $K(2,2)$ utilizando todos los métodos numéricos. El análisis empírico de la estabilidad de estos métodos ha mostrado que solo 33 son estables. La comparación del error entre la solución numérica y la exacta ha mostrado que algunos de los nuevos métodos obtenidos por corrección de la ecuación modificada del método de diferencias finitas original de Ismail-Taha son mucho más exactos que éste, siendo el método más eficiente, que presenta mejor equilibrio entre error y coste de ejecución, el método $(4,4,6)$.

Se ha analizado la estabilidad de todos los métodos numéricos para colisiones entre dos compactones, lo que requiere la adición de un término de viscosidad artificial. Cuando el coeficiente de este término es suficientemente grande, todos los métodos son estables. Para valores más pequeños del coeficiente son más estables los métodos con un orden inferior en la aproximación a las derivadas de los términos no lineales.

En la actualidad se están diseñando otros métodos basados también en la técnica de ecuaciones modificadas que corrigen errores de truncado no sólo para la parte espacial, también para la temporal.

Agradecimientos

El trabajo aquí presentado está financiado de forma parcial por los proyectos FIS2005-03191 y TIN2005-09405-C02-01 del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

Referencias

- [1] A. Chertock and D. Levy, *Particle methods for dispersive equations*. J. Comput. Phys., 171, 2, 2001, 708–730.
- [2] J. de Frutos, M. A. López-Marcos, and J. M. Sanz-Serna, *A finite difference scheme for the $K(2,2)$ compacton equation*. J. Comput. Phys., 120, 2, 1995, 248–252.
- [3] H. Han and Z. Xu, *Numerical solitons of generalized Korteweg-de Vries equations*. Appl. Math. Comput., 186, 1, 2007, 483–489.
- [4] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. (John Wiley & Sons, Chichester), 1988.
- [5] M. S. Ismail and T. R. Taha, *A numerical study of compactons*. Math. Comput. Simul., 47, 6, 1998, 519–530.
- [6] P. Rosenau and J. M. Hyman *Compactons: Solitons with finite wavelength*. Phys. Rev. Lett., 70, 5, 1993, 564–567.
- [7] P. Rosenau, *On a class of nonlinear dispersive-dissipative interactions*. Physica D, 123, 1–4, 1998, 525–546.
- [8] F. Rus and F. R. Villatoro, *Padé Numerical method for the Rosenau-Hyman compacton equation*. Math. Comput. Simul., 2007, doi:10.1016/j.matcom.2007.01.016.
- [9] F. R. Villatoro and J. I. Ramos *On the method of modified equations. I: Asymptotic analysis of the Euler forward difference method*. Appl. Math. Comput., 103, 2-3, 1999, 111–139.

\mathcal{B}_i	\mathcal{B}_j	\mathcal{C}_k	$Err(I_1)$	$Err(I_2)$	$Err(U)$
2	2	2	2.1923×10^{-7}	1.2735×10^{-7}	1.2325×10^{-3}
2	4	4	5.6571×10^{-7}	1.0963×10^{-7}	3.2130×10^{-3}
2	4	6	5.9996×10^{-7}	1.0957×10^{-7}	3.2116×10^{-3}
2	6	4	5.6559×10^{-7}	1.0972×10^{-7}	3.2143×10^{-3}
2	6	6	5.9971×10^{-7}	1.0963×10^{-7}	3.2128×10^{-3}
2	8	4	5.6547×10^{-7}	1.0994×10^{-7}	3.2143×10^{-3}
2	8	6	5.9955×10^{-7}	1.0966×10^{-7}	3.2128×10^{-3}
4	2	2	7.8041×10^{-7}	1.0814×10^{-10}	2.0276×10^{-3}
4	4	4	2.6060×10^{-7}	2.6749×10^{-10}	8.8388×10^{-6}
4	4	6	2.4740×10^{-7}	6.2457×10^{-11}	4.5458×10^{-6}
4	6	4	2.6075×10^{-7}	2.7073×10^{-10}	8.8286×10^{-6}
4	6	6	2.4762×10^{-7}	1.3046×10^{-10}	4.5738×10^{-6}
4	8	4	2.6055×10^{-7}	1.2517×10^{-9}	8.8157×10^{-6}
4	8	6	2.4755×10^{-7}	2.4259×10^{-10}	4.5670×10^{-6}
6	2	2	3.9432×10^{-7}	1.3967×10^{-10}	2.0280×10^{-3}
6	4	4	2.4444×10^{-7}	2.5471×10^{-10}	9.6407×10^{-6}
6	4	6	2.5432×10^{-7}	1.2252×10^{-10}	6.7187×10^{-6}
6	6	4	2.4432×10^{-7}	2.7314×10^{-10}	9.7179×10^{-6}
6	6	6	2.5423×10^{-7}	3.3751×10^{-11}	6.7112×10^{-6}
6	8	4	2.4429×10^{-7}	5.1220×10^{-10}	9.6938×10^{-6}
6	8	6	2.5413×10^{-7}	5.1700×10^{-10}	6.7106×10^{-6}
8	2	2	2.3745×10^{-7}	6.6950×10^{-10}	2.0280×10^{-3}
8	4	4	2.7065×10^{-7}	4.9262×10^{-11}	1.4925×10^{-5}
8	4	6	2.6626×10^{-7}	2.5862×10^{-10}	7.8041×10^{-6}
8	6	4	2.7085×10^{-7}	7.9027×10^{-10}	1.4901×10^{-5}
8	6	6	2.6629×10^{-7}	2.1639×10^{-10}	7.7851×10^{-6}
8	8	4	2.7053×10^{-7}	6.3399×10^{-10}	1.4876×10^{-5}
8	8	6	2.6629×10^{-7}	2.1258×10^{-10}	7.8002×10^{-6}
2	[4]	2	5.6556×10^{-7}	1.0984×10^{-7}	3.2143×10^{-3}
2	[6]	4	5.9955×10^{-7}	1.0964×10^{-7}	3.2128×10^{-3}
4	[4]	2	2.6074×10^{-7}	3.2341×10^{-10}	8.8285×10^{-6}
4	[6]	4	2.4754×10^{-7}	2.9964×10^{-10}	4.5670×10^{-6}
6	[4]	2	2.4431×10^{-7}	3.0352×10^{-10}	9.7178×10^{-6}
6	[6]	4	2.5416×10^{-7}	3.9959×10^{-10}	6.7104×10^{-6}

Tabla 2: Errores en la solución y los dos primeros invariantes para los 34 métodos (i, j, k) estables utilizando $\Delta x = 0,05$, $\Delta t = 0,1$, $\epsilon = 0$, $L = 80$ y $T = 200$ para un compactón de la ecuación $K(2, 2)$ con $c_0 = c = 1$.