XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Un estudio unificado de la convergencia semilocal de métodos tipo Newton de dos puntos en espacios de Banach

M. J. Rubio[1], M. A. Hernández[1]

[1] *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Luis de Ulloa s/n. 26004 Logroño.*
E-mails: `mjesus.rubio@unirioja.es, mahernan@unirioja.es`.

Palabras clave: Métodos tipo Newton, operadores no diferenciables, espacios de Banach

Resumen

En este trabajo consideramos procesos iterativos tipo Newton de dos puntos para aproximar una solución de una ecuación no lineal en espacios de Banach. A partir de una expresión general que caracteriza estos procesos iterativos, obtenemos resultados de convergencia semilocal, estableciendo una teoría unificada para el análisis de este tipo de procesos.

1. Introducción

Uno de los procesos iterativos más utilizados para la aproximación de una solución de la ecuación no lineal

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

es el método de Newton. Si consideramos F un operador no lineal $F : \Omega \subseteq X \to Y$, siendo X e Y dos espacios de Banach y Ω un dominio abierto y convexo, el algoritmo que define el citado método viene dado por

$$x_{n+1} = x_n - \left(F'(x_n)\right)^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 \in \Omega. \tag{2}$$

Pese a ser un proceso iterativo eficiente, tiene el inconveniente de necesitar la evaluación del operador F' en el punto x_n. Un procedimiento para evitar este problema es aproximar este operador por una diferencia dividida. Recordemos que un operador lineal y acotado $[x, y; F] : \Omega \subseteq X \to Y$ se dice una diferencia dividida de primer orden para F en los puntos distintos x e y si cumple

$$[x, y; F]\,(x - y) = F(x) - F(y). \tag{3}$$

Entonces aproximamos $F'(x_n)$ por $[x_{n-1}, x_n; F]$ y así obtenemos el conocido método de la Secante [4]:

$$x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_{-1}, x_0 \in \Omega \ \text{ dados.} \tag{4}$$

Éste es un método de dos puntos, ya que cada paso del algoritmo necesita de dos puntos, y es el más conocido de los tipo Newton. Una generalización de este proceso iterativo la proporciona la familia uniparamétrica de procesos iterativos tipo Secante [2], dada por

$$\begin{cases} x_{-1},\ x_0 \in \Omega \\ y_n = \lambda x_n + (1-\lambda) x_{n-1}, \quad \lambda \in [0,1), \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

que también es un método de dos puntos tipo Newton. Otra situación de este tipo se presenta en el conocido método de Steffensen [3] $(g, F : \Omega \subseteq X \to X)$

$$x_{n+1} = x_n - [x_n, g(x_n); F]^{-1} F(x_n), \quad x_0 \in \Omega, \quad n \geq 0, \tag{6}$$

Todos estos métodos de dos puntos tipo Newton no necesitan evaluar F' pero pierden velocidad de convergencia respecto de la convergencia cuadrática del método de Newton, aunque tienen convergencia superlineal. Al no necesitar de la existencia de F', pueden ser utilizados para aproximar soluciones de operadores no diferenciables.

Se han utilizado otros procesos iterativos de dos pasos tipo Newton, construidos a partir de la descomposición del operador no diferenciable F como

$$F(x) = G(x) + H(x),$$

siendo $G, H : \Omega \subseteq X \to, Y$, donde G es un operador diferenciable y H es continuo pero no diferenciable. Así, por ejemplo E. Catinas [1] propone el siguiente algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \big(G'(x_n) + [x_{n-1}, x_n; H]\big)^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_{-1}, x_0 \in \Omega. \tag{7}$$

Pues bien, en este trabajo tratamos de conseguir una teoría unificada para el estudio de todos estos procesos iterativos considerando el algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - (A(x_{n-1}, x_n))^{-1} F(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_{-1}, x_0 \in \Omega \tag{8}$$

donde $A(x, y)$ es un operador lineal y acotado de $\Omega \subseteq X$ en Y, es decir, $A(x, y) \in \mathcal{L}(X, Y)$ para $x, y \in \Omega$. Es claro que estos procesos iterativos dados en (8) generalizan los algoritmos (2), (4), (5), (6) y (7).

Así, en la sección 2 estudiamos resultados de convergencia semilocal para (8) utilizando relaciones de recurrencia. En la sección 3, utilizando la descomposición en partes diferenciable y no diferenciable para el operador F, obtenemos otro resultado de convergencia semilocal, en esta ocasion aplicable al caso en que (1) represente una ecuación no diferenciable.

2. Relaciones de recurrencia. Convergencia semilocal

En esta sección, haremos un estudio de la convergencia semilocal del algoritmo (8) considerando condiciones de tipo Lipschitz para los operadores involucrados. En primer lugar, suponemos que F diferenciable y se verifican las condiciones

$$\begin{gathered}\|F'(x) - F'(y)\| \leq k_1 \|x - y\|, \\ \|F'(x) - A(u,v)\| \leq k_2(\|x-u\| + \|x-v\|); \quad x,y,u,v \in \Omega\end{gathered} \tag{9}$$

y consideramos $k = \max\{k_1, k_2\}$

A continuación, estableceremos un conjunto de relaciones de recurrencia que nos permitirán demostrar dicha convergencia. Sean $x_{-1}, x_0 \in \Omega$ y suponemos que existe el inverso del operador lineal $A_0 = A(x_{-1}, x_0)$ cumpliéndose las condiciones iniciales:

$$(\mathbf{I}) \qquad \|A(x_{-1},x_0)^{-1}\| \leq \beta, \qquad \|x_{-1} - x_0\| = \alpha, \quad \|{A_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta \tag{10}$$

Definimos

$$a_{-1} = \frac{\eta}{\alpha + \eta}, \qquad a_0 = \beta k(\alpha + \eta)$$

y la sucesión real $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = f(a_{n-1})^2 \; a_{n-1} \; a_{n-2}, \quad n \geq 1, \tag{11}$$

donde f es la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

que es creciente y $f(x) > 1$ para $x \in (0,1)$.

Como x_1 está bien definido por existir ${A_0}^{-1}$, se sigue

$$\|x_1 - x_0\| = \|{A_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta \quad \text{y} \quad \|{A_0}^{-1}\| \; k\|x_1 - x_0\| \leq \beta k \eta = a_0 a_{-1}.$$

Probaremos por inducción sobre n las siguientes relaciones para $n \geq 1$:

(i_n) Existe ${A_n}^{-1} = A\left(x_{n-1}, x_n\right)^{-1}$ tal que $\|{A_n}^{-1}\| \leq f(a_{n-1}) \; \|{A_{n-1}}^{-1}\|$,

(ii_n) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq f(a_{n-1}) \; a_{n-1} \; \|x_n - x_{n-1}\|$,

(iii_n) $\|{A_n}^{-1}\| k \; \|x_n - x_{n-1}\| \leq f(a_{n-1}) \; a_{n-1} \; a_{n-2}$,
$\|{A_n}^{-1}\| k \; \|x_{n+1} - x_n\| \leq a_n \; a_{n-1}$.

Suponiendo que $a_0 < 1$, $x_1 \in \Omega$ y (9), tenemos

$$\begin{gathered}\|I - {A_0}^{-1}A_1\| \leq \|{A_0}^{-1}\| \; \|A_0 - A_1\| \\ \leq \|{A_0}^{-1}\| \; \left(\|A\left(x_{-1},x_0\right) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0) - A\left(x_0,x_1\right)\|\right) \\ \leq \beta k(\alpha + \eta) = a_0 < 1,\end{gathered}$$

y por el lema de Banach existe ${A_1}^{-1}$ y

$$\|{A_1}^{-1}\| \leq \frac{\|{A_0}^{-1}\|}{1 - \|{A_0}^{-1}\| k(\|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - x_1\|)} \leq f(a_0)\ \|{A_0}^{-1}\|$$

lo que prueba (i_1).

Utilizando la formula de Taylor, tenemos

$$F(x_1) = (F'(x_0) - A_0)(x_1 - x_0) + \int_0^1 \big(F'\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) - F'(x_0)\big)\ (x_1 - x_0)\, dt.$$

Por (9) se sigue

$$\|F(x_1)\| \leq k\ \|x_0 - x_{-1}\|\ \|x_1 - x_0\| + k\|x_1 - x_0\|^2 \leq k(\alpha + \eta)\ \|x_1 - x_0\|.$$

Como x_2 está bien definido por estarlo ${A_1}^{-1}$, se obtiene

$$\|x_2 - x_1\| \leq f(a_0)\|{A_0}^{-1}\|\ \|F(x_1)\| \leq f(a_0)a_0\|x_1 - x_0\|,$$

y se cumple (ii_1).

Notar que, por (i_1) y (ii_1), se sigue

$$\|{A_1}^{-1}\| k\|x_1 - x_0\| \leq f(a_0)\beta k\eta = f(a_0)a_0 a_{-1}.$$

Por otro lado,

$$\|{A_1}^{-1}\|\ k\ \|x_2 - x_1\| \leq f(a_0)\beta k f(a_0)a_0\|x_1 - x_0\| \leq a_1 a_0.$$

Suponiendo $a_n < 1$ y $x_n \in \Omega$, para $n \geq 1$, se prueban de forma análoga (i_{n+1})-(iii_{n+1}).

Para establecer la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, será suficiente probar que $\{a_n\}$ es decreciente.

Lema 2.1 *Si $(\beta k\eta)^{1/2} < \eta/(\alpha + \eta) < (3 - \sqrt{5})/2$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ dada por (11) es decreciente.*

Teorema 2.1 *Supongamos que se satisfacen las condiciones (9), (10) y las hipótesis del Lema 2.1. Si $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$, donde $r_0 = \frac{\eta}{1-\Delta}$ y $\Delta = \frac{a_0}{1-a_0} < 1$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ dada por (8) está bien definida y converge a x^* solución de (1). Además la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0, r_0)}$.*

Ahora nos planteamos generalizar al caso cuando el operador F no sea diferenciable. Para ello hemos de sustituir las condiciones (9) dadas sobre F'. Esta generalización la llevamos a cabo considerando que para cada par de puntos distintos $x, y \in \Omega$, existe la diferencia dividida de primer orden en ellos $[x, y; F] \in \mathcal{L}(X, Y)$ y que se verifica:

$$\|[x, y; F] - A(u, v)\| \leq k(\|x - u\| + \|x - v\|); \quad x, y, u, v \in \Omega, \tag{12}$$

Con esta nueva condición siguen cumpliéndose las relaciones de recurrencia planteadas al inicio de esta sección, obteniéndose la misma sucesión $\{a_n\}$. En efecto, lo comprobamos para el primer paso, ya que el proceso inductivo no ofrece dificultad.

Para la existencia del inverso ${A_1}^{-1}$, procedemos como sigue:

$$\|I - {A_0}^{-1}A_1\| \leq \|{A_0}^{-1}\| \; \|A_0 - A_1\|$$

$$\leq \|{A_0}^{-1}\| \; \left(\|A\left(x_{-1}, x_0\right) - [x_{-1}, x_0; F]\| + \|[x_{-1}, x_0; F] - A\left(x_0, x_1\right)\|\right)$$

$$\leq \beta k(\alpha + \eta) = a_0 < 1,$$

lo que demuestra (i_1).

Para comprobar (ii_1), en lugar de utilizar la formula de Taylor, aplicamos (3) y (8) para expresar $F(x_1)$ de la siguiente forma:

$$F(x_1) = F(x_0) - [x_0, x_1; F](x_0 - x_1) = \left(A_0 - [x_0, x_1; F]\right)(x_0 - x_1).$$

Entonces, por (12), se obtiene

$$\|F(x_1)\| \leq \|[x_0, x_1; F] - A_0\| \; \|x_1 - x_0\| \leq k\left(\|x_0 - x_{-1}\| + \|x_1 - x_0\|\right)\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq k\left(\alpha + \eta\right)\|x_1 - x_0\|$$

y trivialmente se cumple (iii_1).

Estamos ya en condiciones de poder dar un nuevo teorema de convergencia semilocal, válido ahora para operadores no diferenciables

Teorema 2.2 *Supongamos que se satisfacen las condiciones (10), (12) y las hipótesis del Lema 2.1. Si* $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq \Omega$*, donde* $r_0 = \frac{\eta}{1-\Delta}$ *y* $\Delta = \frac{\beta k(\alpha+\eta)}{1-\beta k(\alpha+\eta)}$*, entonces la sucesión* $\{x_n\}$ *dada por (8) está bien definida y converge a* x^* *solución de (1). Además la solución* x^* *y las iteraciones* x_n *pertenecen a* $\overline{B(x_0, r_0)}$*.*

3. Operadores no diferenciables

De nuevo, en esta sección, analizaremos la convergencia semilocal de (8) en las condiciones iniciales consideradas en (10), dados $x_{-1}, x_0 \in \Omega$:

$$\textbf{(I)} \qquad \|A(x_{-1}, x_0)^{-1}\| \leq \beta, \qquad \|x_{-1} - x_0\| = \alpha, \qquad \|{A_0}^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$$

y supondremos además

(II) $\|G'(x) - G'(y)\| \leq \omega_1(\|x - y\|);\quad x, y \in \Omega$, siendo $\omega_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continua y no decreciente,

(III) Existe una función continua y no decreciente $h : [0,1] \to \mathbf{R}_+$, tal que $\omega_1(tz) \leq h(t)\omega_1(z)$, con $t \in [0,1]$ y $z \in [0, \infty)$. Escribimos $T = \displaystyle\int_0^1 h(t)\, dt$.

(IV) $\|H(x) - H(y)\| \leq c\|x - y\|;\quad x, y \in \Omega$,

(V) $\|G'(x) - A(y,z)\| \leq \omega_2(\|x - y\|, \|x - z\|);\quad x, y, z \in \Omega$, siendo $\omega_2 : R_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continua y no decreciente en ambas componentes

Notar que la condición **(III)** no supone ninguna restricción porque siempre existe h tal que $h(t)=1$, como consecuencia de ser ω_1 no decreciente.

Teorema 3 *En las condiciones* **(I)-(V)**, *denotamos por* $m=\max\{\beta\left(\omega_2(\alpha,0)+T\omega_1\left(\eta\right)+c\right),\beta\left(\omega_2(\eta,0)+T\omega_1\left(\eta\right)+c\right)\}$ *y suponemos que la ecuación*

$$r\left(1-\frac{m}{1-\beta\left(\omega_2(\alpha,0)+\omega_2(r,r)\right)}\right)-\eta=0, \tag{13}$$

tiene al menos una solución positiva. Sea R la solución positiva más pequeña. Denotando por $d=\beta\left(\omega_2(\alpha,0)+\omega_2(R,R)\right)$, si $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$ y $m+d<1$, entonces, la sucesión $\{x_n\}$ dada por (8) está bien definida, pertenece a $\overline{B(x_0,R)}$ y converge a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$ en $\overline{B(x_0,R)}$.

Demostración. Para simplificar la notación, como hemos hecho antes, denotaremos $A(x_{n-1},x_n)=A_n$. En primer lugar probaremos, por inducción, que la sucesión generada por (8) está bien definida, es decir, que en cada paso el operador A_n posee inverso y el punto obtenido x_{n+1} está en Ω.

De las hipótesis iniciales se sigue que x_1 está bien definido y $\|x_1-x_0\|\le\eta<R$. Por tanto, $x_1\in B(x_0,R)\subseteq\Omega$.

Utilizando **(V)** y que ω_2 es no decrecientes, resulta

$$\|I-{A_0}^{-1}A_1\|\le\|{A_0}^{-1}\|\;\|A_0-A_1\|$$

$$\le\|{A_0}^{-1}\|(\|A(x_{-1},x_0)-F'(x_0)\|+\|F'(x_0)-A(x_0,x_1)\|$$

$$\le\beta\left(\omega_2(\alpha,0)+\omega_2(R,R)\right)<1,$$

por el lema de Banach existe ${A_1}^{-1}$y además

$$\|{A_1}^{-1}\|\le\frac{\beta}{1-\beta\left(\omega_2(\alpha,0)+\omega_2(R,R)\right)}=\frac{\beta}{1-d}.$$

Como G es diferenciable, por la formula de Taylor, se tiene

$$G(x_1)=G(x_0)+G'(x_0)(x_1-x_0)+\int_0^1\big(G'(x_0+t(x_1-x_0))-G'(x_0)\big)\,(x_1-x_0)\,dt.$$

Por otro lado, utilizando $H(x_1)=H(x_0)+H(x_1)-H(x_0)$, podemos escribir

$$F(x_1)=G(x_1)+H(x_1)=F(x_0)+G'(x_0)(x_1-x_0)+H(x_1)-H(x_0)$$

$$+\int_0^1\big(G'(x_0+t(x_1-x_0))-G'(x_0)\big)\,(x_1-x_0)\,dt.$$

Entonces, por (8)

$$F(x_1)=\big(G'(x_0)-A(x_{-1},x_0)\big)\,(x_1-x_0)+\int_0^1\big(G'(x_0+t(x_1-x_0))-G'(x_0)\big)\,(x_1-x_0)\,dt+H(x_1)-H(x_0).$$

Tomando normas y aplicando **(II)-(V)**, se sigue que

$$\|F(x_1)\|\le\left(\omega_2\left(\alpha,0\right)+T\omega_1\left(\eta\right)+c\right)\;\|x_1-x_0\|,$$

entonces se obtiene que $x_2 \in \Omega$ considerando:

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|{A_1}^{-1}\| \; \|F(x_1)\| \leq \frac{m}{1-d}\|x_1 - x_0\| = M\|x_1 - x_0\| < \eta,$$

donde $M = \dfrac{m}{1-d}$. Por otro lado, teniendo en cuenta que R satisface (13), entonces

$$\|x_2 - x_0\| \leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (M+1)\|x_1 - x_0\| \leq (M+1)\eta < R.$$

Es fácil probar por inducción sobre n las siguientes relaciones para $n \geq 2$:

(i_n) $\exists\, {A_n}^{-1} = A(x_{n-1}, x_n)^{-1}$ tal que $\|{A_n}^{-1}\| \leq \dfrac{\beta}{1-d}$,

(ii_n) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq M\|x_n - x_{n-1}\| \leq M^n\|x_1 - x_0\| \leq \eta$ y $x_{n+1} \in B(x_0, R) \subseteq \Omega$.

En segundo lugar, probaremos que $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy. Para $k \geq 1$ se tiene

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq \Big[M^{k-1} + M^{k-2} + \cdots + 1\Big] \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1-M^k}{1-M}\|x_{n+1} - x_n\| < \frac{1}{1-M}M^n\|x_1 - x_0\|.$$

en consecuencia, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y converge a $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$.

Por último, veamos que x^* es una raíz de F. Como

$$\|F(x_n)\| \leq (\omega_2(\eta, 0) + T\omega_1(\eta) + c) \;\; \|x_n - x_{n-1}\|$$

y $\|x_n - x_{n-1}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene $F(x^*) = 0$.

4. Aplicación

Sea el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x^{3/2} - y - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{9}|x-1| = 0, \\ y^{3/2} + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{9}|y| = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Por tanto, tenemos el operador $F : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ con $F = (F_1, F_2)$. Para $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R^2}$ tomamos $F_1(x_1, x_2) = {x_1}^{3/2} - x_2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{9}|x_1 - 1|$, $F_2(x_1, x_2) = {x_2}^{3/2} + \frac{2}{9}x_1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{9}|x_2|$

Aplicaremos el método de la Secante para aproximar $F(x) = 0$. Dados $u, v \in \mathbf{R^2}$, tomamos $[u, v; F] \in \mathcal{L}(\mathbf{R^2}, \mathbf{R^2})$ como

$$[u, v; F]_{i1} = \frac{F_i(u_1, v_2) - F_i(v_1, v_2)}{u_1 - v_1} \;,\; [u, v; F]_{i2} = \frac{F_i(u_1, u_2) - F_i(u_1, v_2)}{u_2 - v_2} \;,\; i = 1, 2.$$

Luego

$$[u, v; F] = \begin{pmatrix} \frac{u_1^{3/2} - v_1^{3/2}}{u_1 - v_1} & -1 \\ \frac{2}{9} & \frac{u_2^{3/2} - v_2^{3/2}}{u_2 - v_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \frac{|u_1 - 1| - |v_1 - 1|}{u_1 - v_1} & 0 \\ 0 & \frac{|u_2| - |v_2|}{u_2 - v_2} \end{pmatrix}$$

Entonces, con la norma del máximo, se sigue

$$\|[x,y;F]-[u,v;F]\| \leq \|x-u\|^{1/2}+\|y-v\|^{1/2}+\frac{2}{9}.$$

Por tanto no se verifica la condición Lipschitz (12) y estamos en la situación descrita en la sección 2. Establecemos la descomposición de F en su parte diferenciable $G=(G_1,G_2)$ y no diferenciable $H=(H_1,H_2)$. Para $x=(x_1,x_2)\in \mathbf{R^2}$ tenemos $G_1(x_1,x_2)={x_1}^{3/2}-x_2-\frac{3}{4}$, $G_2(x_1,x_2)={x_2}^{3/2}+\frac{2}{9}x_1-\frac{3}{8}$, $H_1(x_1,x_2)=\frac{1}{9}|x_1-1|$, $H_2(x_1,x_2)=\frac{1}{9}|x_2|$.

Por tanto, se tiene

$$G'(x)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1^{1/2} & -1\\ \frac{2}{9} & \frac{3}{2}x_2^{1/2}\end{pmatrix}, \quad \|G'(x)-G'(y)\|\leq \frac{3}{2}\|x-y\|^{1/2}$$

Así como

$$H(x)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} |x_1-1| & 0\\ 0 & |x_2|\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \|H(x)-H(y)\|\leq \frac{1}{9}\|x-y\|$$

Ahora aplicamos el método de la Secante para aproximar la solución de (14). Elegimos $z_{-1}=(5,5)$ y $z_0=(1,0)$. Después de tres iteraciones conseguimos

$$z_2=(1{,}06157, 0{,}329438) \quad \text{y} \quad z_3=(1{,}00309, 0{,}253723)\,.$$

Entonces, tomamos $x_{-1}=z_2$ y $x_0=z_3$. y resulta

$$\alpha=0{,}0757149, \quad \beta=1{,}15189, \quad \eta=0{,}00371354, \quad T=\frac{2}{3}$$

Por tanto, la sucesión generada por el método dicho converge a una solución x^* de la ecuación $F(x)=0$ en $\overline{B(x_0,R)}$. Obtenemos el vector $x^*=(1,0{,}25)$ como solución del sistema (14).

Agradecimientos

Ayuda a la Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia. Ref. MTM 2005-03091

Referencias

[1] E. Catinas. *On some iterative methods for solving nonlinear equations.* Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 23 (1994), 47–53.

[2] M.A. Hernández, M.J. Rubio y J.A. Hezquerro. *Solving a special case of conservative problems by secant-like methods.* Appl. Math. Comput., 169, no. 2 (2005), 926–942.

[3] L.W. Johnson y D.R. Scholz. *On Steffensen's Method.* SIAM J. Numer. Anal., 5, no. 2 (1968), 296–302.

[4] J.W. Schmidt. *Untere Fehlerschranken fur Regula-Falsi Verhafren.* Period. Math. Hungar., 9 (1978), 241–247.