

Una Bifurcación Global de Órbitas Periódicas en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos

V. CARMONA¹, E. PONCE¹, J. ROS¹

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada II, Univ. de Sevilla. e-mail vcarmona@us.es, eponcem@us.es, javieros@us.es.*

Palabras clave: Sistemas lineales a trozos, órbitas periódicas, bifurcación global

Resumen

Presentamos en esta comunicación, en primer lugar, un mecanismo para explicar la aparición de un ciclo límite bizonal en un circuito en puente de Wien polarizado de forma asimétrica modelado mediante funciones lineales a trozos. Damos expresiones para la amplitud y el periodo de la oscilación bizonal y las comparamos con las obtenidas experimentalmente. Seguidamente, mostramos, modificando el valor de una resistencia en el circuito, la continuación del ciclo límite bizonal cuando ocupa las tres zonas de linealidad. El ciclo límite continúa existiendo hasta un determinado valor de la resistencia. En ese momento, desaparece con amplitud finita y periodo infinito debido a una bifurcación de carácter global que ocurre cuando el único punto de equilibrio está sobre una de las líneas de separación.

1. Introducción

Frente al uso habitual de aproximaciones lineales en el estudio de problemas en ingeniería, es cada vez más patente la necesidad de recurrir a modelos no lineales para dar una explicación rigurosa de la complejidad dinámica que presentan los sistemas físicos en la práctica. En este sentido, el análisis de sistemas no lineales ha recibido un fuerte impulso en los últimos decenios gracias, entre otras disciplinas, a la consolidación de la moderna teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos.

Uno de los osciladores electrónicos más comunes, útil para una gran gama de frecuencias, es el oscilador en puente de Wien. Debe su nombre al físico alemán M. Wien que lo inventó en 1891. Se trata de un sistema que presenta simetría al cambio de signo de sus variables de estado. Aquí estudiaremos una variante sin simetría, tal como se muestra en la Figura 1. Fue implementado con éxito, desde el punto de vista oscilatorio, por Bill Hewlett

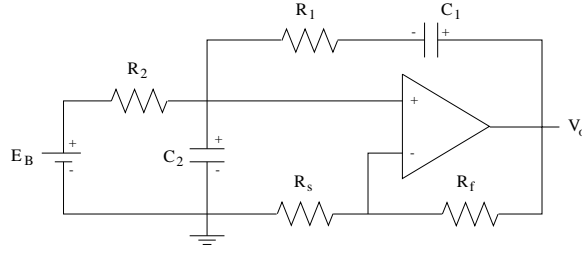


Figura 1: Esquema del circuito electrónico puente de Wien asimétrico.

y Dave Packard (fundadores de HP) en 1939, siendo el primer producto comercializado por la multinacional HP bajo el nombre HP200A.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito de la Figura 1 obtenemos las ecuaciones

$$R_1 C_1 \dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - V_{C_2} + V_0, \quad C_1 \dot{V}_{C_1} - C_2 \dot{V}_{C_2} = \frac{V_{C_2} - E_B}{R_2} \quad (1)$$

donde, las variables de estado V_{C_1} y V_{C_2} son las tensiones en los condensadores C_1 y C_2 , mientras que $V_0 = f(V_{C_2})$ es la tensión de salida del amplificador operacional y \dot{V} denota la derivada con respecto a la variable temporal s .

Se han formulado diversas propuestas para modelar la no linealidad del amplificador operacional. En [11] se considera la función diferenciable

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \frac{2E}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi\alpha}{2E} V_{C_2}\right),$$

donde E es el voltaje de saturación del amplificador operacional y $\alpha = 1 + \frac{R_f}{R_s}$ es la ganancia del circuito equivalente al amplificador operacional. Otro modelo es el lineal a trozos propuesto por Kriegsmann en [9] basado en la formulación

$$V_0 = f(V_{C_2}) = \begin{cases} E \operatorname{sgn}(\alpha V_{C_2} - E), & \text{si } |\alpha V_{C_2}| > E, \\ \alpha V_{C_2}, & \text{si } |\alpha V_{C_2}| \leq E. \end{cases}$$

Esta formulación es la que se considera en este trabajo por ser la que se ajusta más fielmente al comportamiento real del circuito.

Realizando en (1) el reescalado $x_1 = V_{C_2}/E$, $x_2 = V_{C_1}/E$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{E} f\left(\frac{E}{\alpha} x_1\right) = \operatorname{sat}(x_1) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } |x| > 1, \\ x & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

llegamos al sistema no simétrico lineal a trozos con tres zonas

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) & -\frac{1}{R_1 C_2} \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ \frac{\alpha}{R_1 C_1} \end{pmatrix} \operatorname{sat}(x_1) + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_2 C_2} \frac{E_B}{E} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

En lo que sigue pretendemos analizar la existencia de ciclos límite en el sistema (2). En primer lugar, nos centraremos en las oscilaciones bizonales, dando expresiones para la amplitud y periodo del ciclo límite resultante. Para ello, la segunda sección de este

trabajo está dedicada al estudio de los sistemas lineales a trozos con dos zonas y al análisis de la bifurcación foco-centro-ciclo límite. Utilizando la teoría desarrollada en la segunda sección justificaremos, en la tercera, el nacimiento de la oscilación bizonal en el circuito, dando expresiones para la amplitud y el periodo de esta oscilación. En la última sección, mostramos, modificando el valor de una resistencia en el circuito, la continuación del ciclo límite bizonal cuando ocupa las tres zonas de linealidad. Entonces, las expresiones de amplitud y periodo obtenidas dejan de tener validez, aunque el ciclo límite continúa existiendo hasta un determinado valor de la resistencia. En ese momento, el ciclo límite desaparece, debido a una bifurcación de carácter global que ocurre cuando el único punto de equilibrio del sistema está sobre una de las líneas de separación entre las diferentes regiones lineales. Para este valor de la resistencia, el punto de equilibrio es globalmente atractivo, no estable, y el sistema posee un continuo de homoclinas, lo que explica la desaparición del ciclo límite con amplitud finita y periodo infinito.

2. Sistemas lineales a trozos con dos zonas de linealidad

Realizaremos en esta sección un breve repaso sobre las formas más simple de escribir (formas canónicas) las ecuaciones de los sistemas continuos lineales bizonales. También daremos a conocer aquellos resultados que predicen la existencia de un único ciclo límite asintóticamente estable, proporcionando expresiones analíticas para la amplitud y el periodo del ciclo límite.

Comenzamos recordando que, sin pérdida de generalidad, cualquier sistema dinámico continuo lineal a trozos plano con dos zonas puede escribirse en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} B_1 \mathbf{x} + \mathbf{c} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ B_2 \mathbf{x} + \mathbf{c} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad (3)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ y las matrices B_1, B_2 comparten sus dos últimos columnas.

Ahora presentamos una de las formas canónicas más comunes para los sistemas bizonales. La prueba del siguiente resultado puede verse, por ejemplo, en [3].

Teorema 1 *Si las primeras componentes de las segundas columnas de las matrices B_1 y B_2 son no nulas, entonces existe un cambio lineal de variables que transforma el sistema (3) en la forma canónica de Liénard*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad a \in \{-1, 0, 1\}. \quad (4)$$

La hipótesis requerida en el Teorema 1 garantiza, desde el punto de vista de la teoría de control (ver [1] y [2]), la observabilidad del sistema (3).

Observemos que, fijado el signo de a en la forma canónica (4), el sistema lineal a trozos con dos zonas queda definido a partir de los cuatro parámetros T, D, t y d (trazas y determinantes de las matrices que definen al sistema). No obstante, si el signo de alguno de éstos está determinado, aún podemos reducir el número de parámetros. En el siguiente

resultado suponemos que el signo de D es conocido y con ayuda de un reescalado en el tiempo, y un cambio lineal de variable conseguimos eliminar dicho parámetro. Además, es directo ver que el sistema (4) posee un único punto de equilibrio si y sólo si $D \cdot d > 0$.

Proposición 2 *Supongamos que $D > 0$. Entonces, realizando un adecuado reescalado en el tiempo y un cambio lineal de variables, el sistema (4) puede reescribirse en la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad a \in \{-1, 0, 1\}. \quad (5)$$

El sistema (5) siempre tiene un punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, T)$. Tendrá un segundo punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\frac{1}{d}, \frac{t}{d})$ si $d < 0$.

A continuación, presentamos un resultado que caracteriza la existencia de ciclos límite en el sistema (5). Nos remitimos a los trabajos [2], [6] o [12] para lectura de su demostración. Sólo presentamos el caso $a < 0$, pero obviamente un cambio natural permitiría dar el resultado para $a > 0$. Nótese que si $a = 0$, entonces (5) no posee ciclos límite.

Teorema 3 *Si $d > 0$, $a = -1$, $t < 0$, $T > 0$, entonces (5) posee ciclos límite si y sólo si $t^2/d > T$ y $T < 2$. Además, el ciclo límite es único y asintóticamente estable.*

El Teorema 3 proporciona las condiciones para la existencia de una oscilación estable, pero no contempla la explicación del por qué de la aparición del ciclo límite estable (es decir, de la oscilación). Nosotros intentaremos explicar en las siguientes páginas uno de los mecanismos que justifican la aparición del ciclo límite estable.

Puesto que los resultados que a continuación se irán enunciado tendrán su aplicación directa sobre las ecuaciones que modelan nuestro circuito en puente de Wien, realizaremos algunos cambios adecuados en el sistema (5) para que la aplicación de los resultados al circuito se realice de la forma más directa posible. Realizaremos el conveniente cambio de variables para trasladar la recta de separación $x_1 = 0$ a la de ecuación $x_1 = -1$ y el punto de equilibrio del sistema al origen.

Proposición 4 *Supongamos que $a = -1$ para el sistema (5). Entonces, existe un cambio de variables que transforma al sistema (5) en la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - T \\ d - 1 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq -1 \\ \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > -1 \end{cases} \quad (6)$$

Así, es directo observar que el punto de equilibrio es estable si $T \leq 0$ (asintóticamente estable si $T < 0$) e inestable si $T > 0$. Además, el punto de equilibrio es un foco si y sólo si $T^2 - 4 < 0$ y $T \neq 0$; y es un centro cuando $T = 0$.

Si ahora suponemos que $|T| < 2$, entonces $T^2 - 4 < 0$ y el origen es un foco o un centro. Si además $T < 0$, entonces nos encontramos con un foco asintóticamente estable.

Cuando $T = 0$, el foco se convierte en un centro (*estable, pero no asintóticamente estable*) y al pasar a $T > 0$ el origen es un foco inestable (el punto de equilibrio ha perdido la estabilidad).

Así, nos encontramos con una bifurcación en $T = 0$ y por tanto, con un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. Si suponemos que $|T|$ es suficientemente pequeño, entonces, cuando $T > 0$, el Teorema 3 garantiza la existencia de una órbita periódica aislada asintóticamente estable, pues $T^2 - 4 < 0$ y $t/d > T^2$. Este ciclo límite nace de la última órbita periódica de centro lineal que es tangente a la recta de separación $x_1 = -1$. Se conoce, por tanto, esta bifurcación con el nombre de *foco-centro-ciclo límite* y ha sido explotada con éxito en sistema planos trizonales con simetría [7], tridimensionales trizonales con simetría (ver [8]) y en sistemas tridimensionales con dos zonas (ver [4]).

La existencia del ciclo límite está garantizada por el Teorema 3, pero su nacimiento desde la órbita periódica tangente a la recta $x_1 = -1$ cuando $T = 0$ requiere el uso y análisis de las denominadas ecuaciones de cierre. Supongamos que el ciclo límite existente interseca a la recta de separación en los puntos $(-1, y_0)$ y $(-1, y_1)$ con $y_1 > y_0$. Entonces, la solución del sistema lineal homogéneo de la zona derecha con condición inicial $(-1, y_0)^T$ alcanzará en un tiempo s_1 el punto $(-1, y_1)$. Es decir,

$$\exp \left[\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s_1 \right] \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

De forma análoga, la solución del sistema lineal en la zona derecha con condición inicial $(-1, y_1)^T$ deberá alcanzar el punto $(-1, y_0)$ en un tiempo s_2 . Así,

$$\exp \left[\begin{pmatrix} t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} s_2 \right] \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_1 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} \\ y_0 - \frac{t}{d} + T \end{pmatrix} \quad (8)$$

Las ecuaciones (7)-(8) conforman las denominadas ecuaciones de cierre. Sus soluciones, cuando se imponen algunas condiciones naturales nos proporcionan las orbitas periodicas bizonales del sistema (6).

Para la resolución de las ecuaciones de cierre (7)-(8) se aplica, después de una adecuada simplificación, el Teorema de la Función Implícita. Para ello, se toman como incógnitas las variables (T, s_1, y_0, s_0, y_1) y se comprueba trivialmente que $(0, 2\pi, 0, 0, 0)$ es una solución de las ecuaciones de cierre, que corresponde a la órbita periódica más externa del centro lineal tangente a la recta de separación $x_1 = -1$. Se puede probar que al mover T hacia valores $T > 0$ aparece una rama de soluciones de las ecuaciones de cierre que parten del punto $(0, 2\pi, 0, 0, 0)$ y que se corresponden con ciclos límites del sistema (6). Por este motivo, se dice que el ciclo límite nace de la órbita periódica más externa del centro lineal. Enunciamos estas consecuencias en el siguiente resultado que resume algunas ya dadas.

Teorema 5 *Asumamos que $t < 0$, $d > 0$, $|T| < 2$. Entonces:*

- (a) *El origen es el único punto de equilibrio del sistema (6).*
- (b) *Si $T < 0$, el origen es un equilibrio globalmente asintóticamente estable de (6).*
- (c) *Si $T = 0$, el sistema (6) posee una configuración de centro lineal restringido a la zona $x_1 \geq -1$. De la órbita periódica más externa de este centro surge un ciclo límite para*

$T > 0$ suficientemente pequeño que continua existiendo si $0 < T < \min \left\{ 2, \frac{-t}{\sqrt{d}} \right\}$. La amplitud A (medida como el máximo de x_1) y el periodo P tienen los siguientes desarrollos en serie de potencias de $T^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{8t^{\frac{2}{3}}} T^{2/3} + \frac{(12\pi^4)^{\frac{1}{3}}(75+24d+28t^2)}{480t^{\frac{4}{3}}} T^{4/3} + \frac{(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{12t^{\frac{5}{3}}} T^{5/3} + \dots \\ P &= 2\pi + \frac{\pi(d-1)}{t} T - \frac{(12^2\pi^5)^{\frac{1}{3}}[(d-1)^2+t^2]}{10t^{\frac{5}{3}}} T^{5/3} + \dots \end{aligned}$$

3. Oscilación bizonal para el circuito: expresiones de la amplitud y el periodo.

En esta sección analizaremos la oscilación bizonal en el circuito de la Figura 1. Para ello, necesitamos realizar unos adecuados cambios de variables en el sistema de ecuaciones (2). La idea es considerar que el circuito es bizonal y escribirlo en la forma (6) para aplicar el Teorema 5.

El cambio de variables $u_1 = x_1$, $u_2 = \frac{x_2}{R_1 C_2} - \frac{x_1}{R_1 C_1} - \frac{\alpha E_B}{R_2 C_2 E}$ transforma (2) en

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_1 C_2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{sat}(u_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{E_B}{E} \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde $t = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}$ y $d = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$.

Para asegurar que el punto de equilibrio del sistema (9) se encuentra en la zona central y más cerca de la frontera izquierda debemos imponer $-1 < \alpha E_B/E < 0$.

Ahora bien, puesto que el fenómeno que queremos analizar inicialmente sólo involucra a las zonas central e izquierda, podemos suponer que el comportamiento del circuito es bizonal y la frontera de linealidad es la recta $u_1 = -1$. El siguiente cambio de variables

$$\tau = \sqrt{d}s, \quad x_1 = \frac{Eu_1 - \alpha E_B}{E + \alpha E_B}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{u_2 - t + \frac{\alpha}{R_1 C_1} - \frac{\alpha E_B}{R_2 C_2 E}}{1 + \frac{\alpha E_B}{E}} - \frac{t + \frac{\alpha}{R_1 C_2}}{\sqrt{d}}$$

transforma el sistema (9), restringido a las zonas izquierda y central, en el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{-t}{\sqrt{d}} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\sqrt{d}R_1 C_2} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \leq -1 \\ \begin{pmatrix} \frac{-t + \frac{\alpha}{R_1 C_2}}{\sqrt{d}} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 > -1 \end{cases} \quad (10)$$

La condición de bifurcación para el sistema (10) es $R_f = R_s \left(\frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2} \right)$.

Si ahora elegimos el amplificador operacional LF412CN con una alimentación de 9 voltios, de manera que el voltaje de saturación es $E = 8,2$ voltios, y $E_B = -1\text{V}$, $R_1 = R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 320 \text{ kpF}$, $R_s = 9,78 \text{ k}\Omega$, entonces el valor crítico de bifurcación es $R_f =$

19560 Ω . Por tanto, la aplicación del Teorema 5 nos asegura la aparición en el circuito de una oscilación periódica bizonal automantenida para valores de la resistencia R_f superiores al valor crítico y suficientemente cercanos a él. Además, teniendo en cuenta los cambios anteriores es posible dar expresiones para la amplitud y periodo de esta oscilación. En la Figura 2 se muestra la amplitud y el periodo de la oscilación con dos y tres términos no nulos de las series y su comparación con los datos experimentales medidos en el laboratorio. De las dos gráficas expuestas queda patente la bondad del modelo lineal a trozos elegido y la aproximación de las series obtenidas. Evidentemente, nuestros cálculos y conclusiones son válidas porque la oscilación no invade la tercera zona de linealidad.

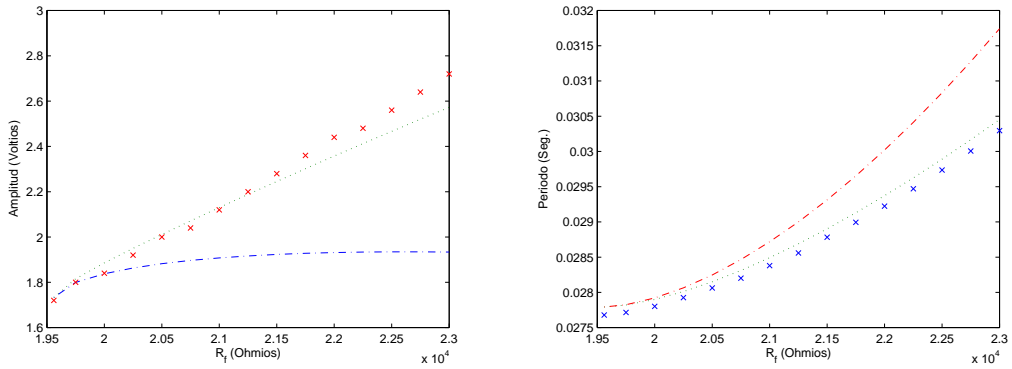


Figura 2: Amplitud y periodo de la oscilación periódica al variar R_f . Se muestra la comparación entre los resultados experimentales medidos en el laboratorio (x x x), y los resultados cuando se toman sólo dos (- -) o tres ($\cdot \cdot \cdot$) términos no nulos de las series obtenidas.

4. Oscilación en las tres zonas y bifurcación global

La bifurcación foco-centro-ciclo límite presentada en el Teorema 5 justifica el nacimiento de la oscilación periódica en el circuito viviendo en las zonas izquierda y central. Hemos observado que al aumentar el parámetro de bifurcación R_f el ciclo límite aumenta de tamaño, llegando a invadir la zona derecha de linealidad. Esto sucede para $R_f \simeq 24,8$ k Ω , por lo que a partir de este valor las expresiones de amplitud y periodo obtenidas dejan de tener validez. Si seguimos aumentando el parámetro de bifurcación, la oscilación continua ocupando las tres zonas de linealidad y el punto de equilibrio del sistema pasa de foco a nodo para $R_f = 39,12$ k Ω , siguiendo en la zona central y moviéndose hacia la frontera izquierda. En la simulación realizada se observa la desaparición de la oscilación para $R_f \simeq 69,7$ k Ω con amplitud finita y periodo infinito. Este comportamiento puede asociarse al cambio de estabilidad del equilibrio y, en este caso, dicho cambio sucede cuando el punto de equilibrio toca la frontera izquierda. En el modelo matemático este fenómeno se produce cuando se satisface la condición $E + \alpha E_B = 0$, lo que nos lleva a predecir el valor $R_f = 70,416$ k Ω y esto confirma la precisión del modelo lineal a trozos adoptado.

La desaparición de la órbita periódica está relacionada con una bifurcación de carácter global asociada a una de las denominadas *boundary equilibrium bifurcations* (ver [5]). En este caso particular, el punto de equilibrio es globalmente atractivo, no estable, y el sistema posee un continuo de homoclinas asociadas al punto de equilibrio. Naturalmente,

esto explica la desaparición del ciclo límite con amplitud finita y periodo infinito. En la Figura 3 hemos representado algunas de las órbitas del sistema adimensional cuando el punto de equilibrio se encuentra en la frontera.

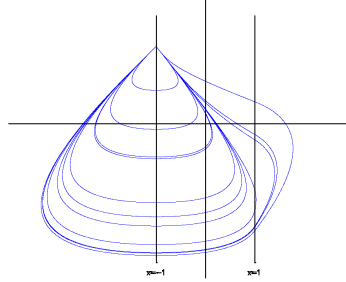


Figura 3: Retrato de fases del sistema cuando el equilibrio está en una frontera.

Agradecimientos

Los autores están parcialmente financiados por el proyecto MTM2006-00847 del Ministerio de Educación y Ciencia y por el proyecto EXC/2005/FQM-872 de la Junta de Andalucía.

Referencias

- [1] S. Barnett y R.G. Cameron, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Oxford University Press, New York, 1985.
- [2] Carmona, V. [2002] *Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos Lineales a Trozos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla
- [3] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. & Torres, F. (2002) *On Simplifying and Classifying Piecewise Linear Systems*. IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., 49, 609–620.
- [4] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros, J. and F. Torres, *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones: application to Chua's circuit*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **15**, (2005), 3153–3164.
- [5] di Bernardo, M. Pagano, D.J. and Ponce, E. *Non-hyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov systems: a case study approach*, aparecerá en International Journal of Bifurcation and Chaos.
- [6] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo y F. Torres, *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11 (1998), pp. 2073–2097.
- [7] Freire, E., Ponce E. and Ros, J. *Limit cycle bifurcation from a center in symmetric piecewise linear systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **9**, (1999), 895–907.
- [8] Freire, E., Ponce E. & Ros, J. *The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Symmetric 3D Piecewise Linear Systems*, Siam Journal of Applied Mathematics **65**. (2005), 1933–1951.
- [9] Kriegsmann, G.A. [1987] *The rapid bifurcation of the Wien bridge oscillator*, IEEE Trans. Circuits Syst. **34**, 1093–1096.
- [10] R. Lum and L.O. Chua, *Generic properties of continuous piecewise-linear vector fields in \mathbf{R}^2* , IEEE Trans. Circuits Syst. **38**, 1043–1066.
- [11] Mees, A.I. & Chua, L.O. [1979] *The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems*, IEEE Trans. Circuits Syst. **26**, 235–254.
- [12] F. Rodrigo, *Comportamiento Dinámico de Osciladores Electrónicos del Tipo Van der Pol–Duffing*, Tesis Doctoral, 1997, Universidad de Sevilla.