XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Perturbación y decaimiento en ecuaciones parabólicas no autónomas

A.Rodríguez–Bernal

Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid E-mail aorber@mat.ucm.es

Palabras clave: Estabilidad asintótica, perturbación, comportamiento asintótico, ecuaciones no lineales

Resumen

Damos condiciones finas sobre el tamaño y la forma de una perturbación que consigue que un problema lineal no autónomo pase de ser neutralmente estable a exponencialmente estable. Estos resultados se aplican al estudio del comportamiento asintótico de ecuaciones logísticas no autónomas.

1. El problema y resultados preliminares

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera regular $\partial\Omega$. Consideremos la ecuación lineal no autónoma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - \Delta u &=& C(t,x)u & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ \mathcal{B}u &=& 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) &=& u_0 & \end{array} \right. \tag{1}$$

con condiciones de contorno $\mathcal{B}u = u$, caso Dirichlet, o $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, caso Neumann, o $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + b(x)u$ caso Robin, donde $\vec{n}$ es la normal exterior a $\partial\Omega$ y $b(x)$ es una función C^1.

Si $C \in C^\theta(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$, con $0 < \theta \leq 1$ y $p > N/2$, entonces (1) define un operador de evolución que conserva el orden en $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, $U_C(t,s)$, de manera que $u(t,s;u_0) = U_C(t,s)u_0$. Además la solución se regulariza de manera que para cada $u_0 \in L^q(\Omega)$ y $t > s$ se tiene que

$$(s,\infty) \ni t \longmapsto u(t,s;u_0) := U_C(t,s)u_0 \in \begin{cases} C^\nu_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) & \text{si } p > N/2 \\ C^{1,\nu}_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) & \text{si } p > N \end{cases}$$

es continuo para cierto $\nu > 0$, donde $C^{j,\nu}_{\mathcal{B}}(\overline{\Omega}) = \begin{cases} C^{j,\nu}_0(\overline{\Omega}) & \text{caso Dirichlet} \\ C^{j,\nu}(\overline{\Omega}) & \text{caso Neumann o Robin} \end{cases}$, [4].

Motivado por las aplicaciones a ecuaciones no lineales y por simplicidad, supondremos que $U_C(t,s)$ está en el **límite de estabilidad (o es neutralmente estable)** en el sentido de que existen $M_0, M_1 > 0$ tales que

$$0 < M_0 \leq \|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M_1 \quad \text{para todos} \quad t > s \tag{2}$$

(una condición que es independiente de la elección de q, [3, 5]).

Queremos entonces analizar la cuestión del mínimo tamaño necesario en una perturbación (y su forma) $P(t,x)$ de manera que añadida a $C(t,x)$ haga a $U_{C+P}(t,s)$ **exponencialmente estable** es decir

$$\|U_{C+P}(t,s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \leq M\mathrm{e}^{-\beta(t-s)} \quad \text{para todos} \quad t > s$$

con $\beta > 0$. En algunos casos buscaremos esta propiedad para s grande y positivo o para t muy negativo. Estas situaciones se denotan por "exponencialmente estable en $\pm\infty$" respectivamente.

Observemos que en el caso autónomo, $C = C(x)$, con $C \in L^p(\Omega)$, y $p > N/2$, entonces (2) es equivalente a que el primer autovalor del operador $-\Delta + C(x)I$ con condiciones de contorno $\mathcal{B}u = 0$, sea nulo. En ese caso, usando los cocientes de Rayleigh, es fácil ver que cualquier perturbación no trivial no negativa $P(x)$ convierte el problema en asintóticamente estable.

Como veremos, para ecuaciones no autónomas, nuestros resultados dicen que para conseguir la estabilidad exponencial necesitamos que la parte favorable de la perturbación sea positiva y "sostenida" en infinito, y la parte desfavorable no sea demasiado grande. Estos resultados serán utilizados también para ecuaciones no lineales.

En lo que sigue haremos uso del siguiente lema, [3, 5].

Lema 1.1 *Si (2) se verifica, entonces dados $1 \leq q \leq r \leq \infty$, para cada $\varepsilon > 0$*

$$\|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega),L^r(\Omega))} \leq M(\varepsilon)\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon(t-s)}}{(t-s)^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}}, \quad t > s \tag{3}$$

con $M(\varepsilon) = K\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha}\varepsilon^{-\alpha} & si\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{\alpha}{\mathrm{e}} \\ 1 & si\ \varepsilon \geq \varepsilon_0 = \frac{\alpha}{\mathrm{e}} \end{cases}$ para cierta constante K y $\alpha = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)$.

2. Soluciones positivas no degeneradas

Observemos que una solución completa de (1) (y después para (9)) es una solución u, definida para todo $t \in I\!R$ en el sentido de que para cada $s \in I\!R$ la solución de (1) con dato inicial $u_0 = u(s,\cdot)$ es $u(t,x)$ para cada $t > s$.

Como veremos aquí la propiedad (2) viene garantizada por la existencia de ciertas soluciones positivas especiales de (1). Para ello recordamos la siguiente definición de [6].

Definición 2.1 *Una función positiva con valores en $X = C(\overline{\Omega})$ (que se anula en $\partial\Omega$ en el caso Dirichlet), es "no degenerada" (ND) en ∞ (respectivamente en $-\infty$) si existe $t_0 \in I\!R$*

tal que u está definida en $[t_0, \infty)$ *(respectivamente en* $(-\infty, t_0]$*) y existe una función* $C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi_0(x) > 0$ *en* Ω, *(que se anula en* $\partial\Omega$ *en el caso Dirichlet), tal que*

$$u(t,x) \geq \varphi_0(x) \qquad \textit{para todo} \quad t \geq t_0 \tag{4}$$

(respectivamente, para todo $t \leq t_0$*).*

Observemos que en el caso Neumann o Robin, φ_0 se puede tomar constante en Ω. Así, tenemos

Proposición 2.2 *Sea* $U_C(t,s)$ *el operador de evolución asociado a (1).*
i) Supongamos que para cierto $t_0 \in I\!R$, $z(t,x)$ *es una solución positiva acotada y no degenerada (PAND) en* ∞, *de (1), para* $t > t_0$. *Entonces para todo* $t \geq s \geq t_0$ *tenemos*

$$0 < M_0 \leq \|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq M_1 \tag{5}$$

con $Y = L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \infty$ *o* $Y = C(\overline{\Omega})$.
ii) Si $z(t,x)$ *es una solución completa de (1) positiva acotada y no degenerada (CPAND) en* $-\infty$ *para* $t \leq t_0$, *entonces para* $s \leq t \leq t_0$ *tenemos (5).*

Demostración Supongamos que $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ (que se anula en la frontera en el caso Dirichlet). Entonces, existe $\lambda = \lambda(u_0)$ tal que $|u_0(x)| \leq \lambda\varphi_0(x)$ en Ω, donde φ_0 es como en la Definición 2.1. Entonces, por comparación, para cada $s \leq t$

$$|U_C(t,s)u_0(x)| \leq \lambda U_C(t,s)\varphi_0(x) \leq \lambda U_C(t,s)z(s)(x) = \lambda z(t,x)$$

y entonces $\|U_C(t,s)u_0\|_Y \leq \lambda \sup_t \|z(t)\|_Y$. Así, $U_C(t,s)$ está puntualmente acotado sobre un conjunto denso de Y y por el Principio de Acotación Uniforme obtenemos la cota superior de $\|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y)}$.

por otro lado, para $s \leq t$, tenemos $0 < \varphi_0(x) \leq z(t,x) = U_C(t,s)z(s)(x)$ y entonces

$$\|\varphi_0\|_Y \leq \|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y)}\|z(s)\|_Y$$

y obtenemos la cota inferior para $\|U_C(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y)}$. □

3. El resultado de perturbación

Teorema 3.1 *Supongamos que* $U = U_C$ *es el operador de evolución asociado a (1) y que verifica (5). Supongamos que* $P \in C^\theta(I\!R, L^p(\Omega))$ *con* $0 < \theta \leq 1$ *y* $p > N/2$, *es una perturbación de* C. *Supongamos que existe una descomposición*

$$P(t,x) = P^1(t,x) - P^2(t,x), \quad P^i \in C^\theta(I\!R, L^p(\Omega)), \quad i = 1,2$$

tal que para todo $x \in \Omega$ *y* $|t|$ *grande,*

$$P^2(t,x) \geq a(t) > 0 \quad \textit{con} \quad \liminf_{|t|\to\infty} a(t) > a_0 > 0.$$

También supongamos que $P^1 \in L^\sigma(I\!R, L^p(\Omega))$ *para* σ, p, *tales que o bien* $\sigma = 1$ *y* $p = \infty$, *o* $1 < \sigma < \infty$ *y* $p > \frac{N\sigma'}{2}$, *o* $\sigma = \infty$ *y* $p > N/2$.

Entonces $U_{C+P}(t,s)$ *es exponencialmente estable siempre que*
i) $a_0 > 0$ *si* $\sigma = 1$ *y* $p = \infty$ *o* $1 < \sigma < \infty$ *y* $p > \frac{N\sigma'}{2}$.
ii) $a_0 > a_0^c(P^1) > 0$ *si* $\sigma = \infty$ *y* $p > \frac{N}{2}$, *donde la función continua* $a_0^c(P^1)$ *viene dada por*

$$a_0^c(P^1) = \begin{cases} c_0 \limsup_{|t|\to\infty} \|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)}, & \text{si } 0 \le \limsup_{|t|\to\infty} \|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)} \le s^* \\ c_1 + c_2 \limsup_{|t|\to\infty} \|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{si } \limsup_{|t|\to\infty} \|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)} \ge s^* \end{cases} \tag{6}$$

donde $\alpha = \frac{N}{2p} < 1$ *y las constantes* c_0, c_1, c_2, s^* *dependen de* N, p.

Demostración. Observemos primero que podemos trabajar con $t > s$ con t muy negativo o s muy grande. Consideramos soluciones de (1) en $L^q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ a elegir.

En primer lugar, para cada $u_0 \in L^q(\Omega)$ la solución $u(t,s,u_0) = U_{C+P^1}(t,s)u_0$ verifica, para $t \ge s$,

$$u(t,s;u_0) = U_C(t,s)u_0 + \int_s^t U_C(t,\tau)P^1(\tau)u(\tau,s;u_0)\,d\tau.$$

Usando esto, elegimos q tal que $p \ge q'$ y entonces el término $P^1(\tau)u(\tau,s;u_0)$ se puede estimar, usando la desigualdad de Hölder, en $L^r(\Omega)$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Así, denotando $z(t) = \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-s)}\|u(t,s,u_0)\|_{L^q(\Omega)}$, y $a(\tau) = M(\varepsilon)\|P^1(\tau)\|_{L^p(\Omega)}$, con $M(\varepsilon)$ como en (3) (o $M(0) = M_1$ si $\varepsilon = 0$), obtenemos para $t \ge s$,

$$z(t) \le M_1\|u_0\|_{L^q(\Omega)} + \int_s^t \frac{a(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{N}{2p}}} z(\tau)\,d\tau.$$

Usando el lema de Gronwall singular, [1, 3, 5], obtenemos

$$\|u(t,s,u_0)\|_{L^q(\Omega)} \le M_2 \mathrm{e}^{\mu(\varepsilon)(t-s)}\|u_0\|_{L^q(\Omega)}, \quad t \ge s \tag{7}$$

donde $\mu(\varepsilon) = 0$ si $\sigma = 1$ y $p = \infty$, o $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$, si $1 < \sigma < \infty$ y $p > \frac{N\sigma'}{2}$, o $\mu(\varepsilon) = \varepsilon + \big(M(\varepsilon)\Gamma(1-\alpha)LS(P^1)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, si $\sigma = \infty$ y $p > \frac{N}{2}$, con $\alpha = \frac{N}{2p} < 1$, donde $LS(P^1) = \limsup_{|t|\to\infty} \|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)}$.

Ahora, probamos que para $t \ge s$, se tiene

$$\|U_{C+P}(t,s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \le \mathrm{e}^{-a_0(t-s)}\|U_{C+P^1}(t,s)\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \tag{8}$$

y de aquí se sigue el resultado. Para esto observemos que si $u_0 \ge 0$ entonces $U_{C+P}(t,s)u_0 \ge 0$ lo cual implica que $|U_{C+P}(t,s)u_0| \le U_{C+P}(t,s)|u_0|$. Por tanto basta probar la afirmación para datos no negativos. En tal caso, sea $u(t,s;u_0) = U_{C+P}(t,s)u_0 \ge 0$ y entonces como $P^2(t,x) \ge a_0$, para $|t|$ grande, tenemos

$$u_t - \Delta u = C(t,x)u + P^1(t,x)u - P^2(t,x)u \le C(t,x)u + P^1(t,x)u - a_0 u$$

Sea ahora $0 \le v(t,x) = u(t,s;u_0)\mathrm{e}^{a_0(t-s)}$, que verifica

$$v_t - \Delta v \le C(t,x)v + P^1(t,x)v.$$

Entonces, [4], $0 \le v(t,x) \le U_{C+P^1}(t,s)u_0$ y así se tiene (8).

Con (7) y (8) el caso i) es claro. Para el caso ii), observemos que de las expresiones de $\mu(\varepsilon)$ y $M(\varepsilon)$ como en (3), tenemos que $\mu(0) = \mu(\infty) = \infty$ y para ciertas constantes A_0, A_1 que dependen de N, p,

$$\mu(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon + A_0 LS(P^1)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varepsilon^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} & \text{si } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \\ \varepsilon + A_1 LS(P^1)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0. \end{cases}$$

Como la función $h(\varepsilon) = \varepsilon + A_0 LS(P^1)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varepsilon^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$ tiene un único mínimo en $\varepsilon_1 = B_0 LS(P^1)$, y $h(\varepsilon_1) = B_1 LS(P^1)$ (donde B_0, B_1 dependen de N, p), entonces comparando ε_0 y ε_1, minimizando $\mu(\varepsilon)$ e imponiendo $a_0 > \inf_{\{\varepsilon>0\}} \mu(\varepsilon)$ llegamos a (6). ■

A continuación ilustramos el alcance de los resultados con los siguientes dos ejemplos.

Proposición 3.2 *Con las notaciones e hipótesis del Teorema 3.1, supongamos que para $|t|$ grande*

$$P(t,x) \leq -\varphi(x), \quad 0 \leq \varphi \in L^p(\Omega),\ p > N/2$$

y supongamos que para $0 < a$ suficientemente pequeño

$$\mu(\{x \in \Omega,\ 0 \leq \varphi(x) \leq a\}) \leq K a^\nu$$

con $\nu > 0$ y $K > 0$. Entonces $U_{C+P}(t,s)$ es exponencialmente estable.

Demostración. Observemos primero que tenemos, [4],

$$|U_{C+P}(t,s)u_0| \leq U_{C+P}(t,s)|u_0| \leq U_{C-\varphi}(t,s)|u_0|.$$

Así basta probar que $U_{C-\varphi}(t,s)$ es exponencialmente estable.

Ahora tomamos $\varphi(x) = \varphi_2^a(x) - \varphi_1^a(x)$ con $\varphi_2^a(x) = \max\{\varphi(x), a\} \geq a$ y entonces $0 \leq \varphi_1^a(x) \leq a$ con

$$\|\varphi_1^a\|_{L^p(\Omega)} \leq K a^{(1+\frac{\nu}{p})}.$$

El resultado se sigue tomando $P^1(t,x) = \varphi_1^a(x)$ y $P^2(t,x) = \varphi_2^a(x)$ y $a_0 = a > 0$ pequeño, ya que $(1 + \frac{\nu}{p}) > 1$. ■

Por ejemplo, si $0 \leq \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ y su gradiente es no nulo donde se anula φ, lo anterior se verifica con $\nu = 1$. Más en general, si $0 \leq \varphi \in C^\theta(\overline{\Omega})$, "sin partes planas" donde se anula, entonces típicamente $\nu = \frac{1}{\theta}$. En cualquier caso se necesita $\varphi(x) > 0$ a.e. en Ω.

El siguiente ejemplo es una variante dependiente del tiempo del anterior en el que eliminamos la condición de signo en la perturbación y permitimos perturbaciones muy grandes en regiones pequeñas que se mueven por Ω.

Proposición 3.3 *Supongamos que para $|t|$ grande tenemos*

$$\mu(\{x \in \Omega,\ P(t,x) \geq -a(t)\}) \leq K_0 a(t)^{\nu_0}$$

con $\nu_0 > 0$, $K_0 > 0$ y

$$\sup_\Omega P(t,x) \leq K_1 a(t)^{-\nu_1}$$

con $\nu_1 \geq 0$. *Más aún, supongamos que si* $K_1 = 0$ *entonces* $\nu_0 > 0$, *mientras que si* $K_1 > 0$ *entonces*

$$\frac{\nu_0}{p} > 1 + \nu_1.$$

Entonces $U_{C+P}(t,s)$ *es exponencialmente estable si* $\lim_{|t|\to\infty} a(t) = a_0 > 0$ *es suficientemente pequeño.*

Demostración. Descomponemos $P = P^1 - P^2$, con $-P^2(t,x) = \min\{P(t,x), -a(t)\}$. Entonces $P^2(t,x) \geq a(t)$ y

$$\|P^1(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \big(K_1 a(t)^{-\nu_1} + a(t)\big)\big(K_0 a(t)^{\nu_0}\big)^{\frac{1}{p}}$$

con $C_1 \geq 0$. De aquí se sigue el resultado ya que en cualquier caso para K_1 el término principal en la estimación anterior tiene exponente mayor que 1 y $a(t)$ es pequeño. ■

4. El problema no lineal: ecuación logística

Consideramos ahora la ecuación logística

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u &=& f(t,x,u) = m(t,x)u - n(t,x)u^\rho & \text{en } \Omega, \quad t > s \\ \mathcal{B}u &=& 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(s) &=& u_0 \geq 0 & \end{array}\right. \tag{9}$$

con $\rho \geq 2$ y $m \in C^\theta(I\!R, L^p(\Omega))$ para $p > N/2$ y $0 < \theta \leq 1$ y $n(t,x) \geq 0$ es continua y localmente Hölder en t, no idénticamente nula y

$$\liminf_{t\to\infty} n(t,x) > 0 \quad \text{a.e en} \quad \Omega.$$

Bajo ciertas condiciones sobre $m(t,x)$ y $n(t,x)$, se ha probado en [6] que existe una única solución de (9) completa positiva acotada y no degenerada (CPAND), $\varphi(t,x)$, que describe el comportamiento asintótico de las soluciones de (9) en sentido "pullback" y que también verifica que para cualquier otra solución de (9) PAND en ∞ se tiene, con $t \to \infty$,

$$u(t,x) - \varphi(t,x) \to 0 \quad \text{en} \quad X = C(\overline{\Omega}). \tag{10}$$

A continuación damos condiciones que prueban que la convergencia anterior es de hecho exponencial. De hecho, primero probamos

Proposición 4.1
i) Sea $u(t,x)$, *para* $t > s$, *una solución de (9) PAND en* ∞. *Supongamos que*

$$P(t,x) = (1-\rho)n(t,x)u^{\rho-1}(t,x) \leq (1-\rho)n(t,x)\varphi_0^{\rho-1}(x) \leq 0$$

verifica las condiciones de las Proposiciones 3.2 o 3.3, con $t \to \infty$.

Entonces la ecuación linealizada entorno a $u(t,x)$, *es decir, (1), con*

$$C(t,x) = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,u(t,x)),$$

es exponencialmente estable en $+\infty$.
ii) Sea $u(t,x)$ *una solución de (9) CPAND en* $-\infty$. *Supongamos que para* $t << -1$, $P(t,x)$ *como en i) verifica las condiciones de las Proposiciones 3.2 o 3.3.*

Entonces la ecuación linealizada entorno a $u(t,x)$, *es exponencialmente estable en* $-\infty$.

Demostración. De hecho la ecuación linealizada se puede escribir como

$$\eta_t - \Delta\eta = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,u(t,x))\eta = \Big(P(t,x) + C_0(t,x)\Big)\eta$$

con condiciones de contorno $\mathcal{B}\eta = 0$, $P(t,x)$ como en el enunciado y $C_0(t,x) = \frac{f(t,x,u(t,x))}{u(t,x)}$. Pero como $u(t,x)$ es solución de (9) PAND en $+\infty$, por la Proposición 2.2 tenemos que $U_{C_0}(t,s)$ verifica (5).

Por las hipótesis sobre $P(t,x)$ y el Teorema 3.1 tenemos que $U_{C_0+P}(t,s)$ es exponencialmente estable.

El caso ii) se sigue de manera similar. ■

Ahora podemos trasladar este comportamiento a la ecuación no lineal. En particular mejoramos (10).

Proposición 4.2 *Supongamos que* $0 \leq u(t,x)$ *es una solución de (9) PAND en* ∞ *y se verifican las condiciones de la Proposición 4.1 i).*

Entonces toda otra solución, $v(t,x)$*, de (9) no trivial y no negativa es PAND en* ∞ *y con* $t \to \infty$*,*

$$u(t,x) - v(t,x) \to 0, \quad \textit{exponencialmente en} \quad C(\overline{\Omega}).$$

Demostración. En [6] se probó que cualquier otra solución no trivial no negativa de (9) es PAND en ∞. Sea $v(t,x)$ tal solución y observemos que basta probar el resultado en los casos $v(t,x) \leq u(t,x)$ o $u(t,x) \leq v(t,x)$.

Supongamos primero que $v(t,x) \leq u(t,x)$ y sea $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x) \geq 0$, que verifica

$$w_t - \Delta w = f(t,x,u(t,x)) - f(t,x,v(t,x)) = C(t,x)w$$

con $C(t,x) = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,\xi(t,x))$, y $v(t,x) \leq \xi(t,x) \leq u(t,x)$. Entonces

$$C(t,x) = C_0(t,x) + P(t,x), \quad C_0(t,x) = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,u(t,x))$$

y por [6], ver (10), tenemos

$$P(t,x) \to 0 \quad \text{en} \quad L^\infty(\Omega)$$

con $t \to \infty$.

Por la Proposición 4.1, $U_{C_0}(t,s)$ es exponencialmente estable, y por la hipótesis sobre $P(t,x)$ y el Teorema 3.1 obtenemos que $U_{C_0+P}(t,s)$ también lo es. Por tanto $w(t,x)$ converge a cero exponencialmente.

Por otro lado, si $u(t,x) \leq v(t,x)$ entonces

$$C_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,v(t,x)) \leq C_0(t,x) = \frac{\partial}{\partial u} f(t,x,u(t,x))$$

lo cual implica que $U_{C_1}(t,s)$ también es exponencialmente estable. Repitiendo el argumento anterior, intercambiando los papeles de u y v, concluimos. ■

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto MTM 2006–08262, DGES y el Programa de Financiación de Grupos de Investigación UCM-Comunidad de Madrid GR69/06. Grupo 920894 CADEDIF.

Referencias

[1] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, volumen 840 en *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[2] J. A. Langa, J. C. Robinson, y A. Suárez. *Bifurcation from zero of a complete trajectory for nonautonomous logistic PDEs.* Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15(8):2663–2669, (2005).

[3] J.C. Robinson, A. Rodríguez-Bernal, and A. Vidal-López. *Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems.* Serie de Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada, UCM, MA-UCM-2005-23. Aparecerá en J. Differential Equations.

[4] A. Rodríguez-Bernal. *On linear and nonlinear non–autonomous parabolic equations.* Serie de Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada, UCM, MA-UCM-2006-15.

[5] A. Rodríguez-Bernal *Pertubation of the exponential type of parabolic nonautonomous equations and applications to nonlinear equations.* En preparación 2007.

[6] A. Rodríguez-Bernal y A. Vidal-López. *Existence, uniqueness and attractivity properties of positive complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, Serie A, vol. 18, 537–567 (2007).