

## Un problema inverso emergente en el estudio de los movimientos con rotaciones intrínsecas no coaxiales de un disco

G. BARCELÓ<sup>1</sup>, J.I. DÍAZ<sup>2</sup>, A.M. RAMOS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Advanced Dynamics, S.A., C/ Pedro de Valdivia 31, 28006 Madrid. E-mail: gabarce@iies.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de Ciencias 3, 28040 Madrid . E-mails: Ildefonso.Diaz@mat.ucm.es, angel@mat.ucm.es.*

**Palabras clave:** Rotaciones no coaxiales de un disco, problema inverso, sistemas semi-implícitos

### Resumen

Se aborda el problema inverso de hallar el vector velocidad angular  $\hat{\omega}(t)$  caracterizando el movimiento de rotación de un sólido rígido del que se conoce la descripción de las velocidades. Tal cuestión está motivada por el comportamiento observado sobre ciertos prototipos construidos por Advanced Dynamics S.A. Aunque la cuestión planteada puede ser abordada mediante "técnicas de eliminación" para sistemas semi-implícitos asociados a problemas de controlabilidad no lineal, al tomar como control el vector velocidad angular  $\hat{\omega}(t)$  ([2], [3]), aquí seguimos un proceso enteramente original y distinto consistente en la aplicación de un proceso iterativo basado en la inversión de las ecuaciones diferenciales implicadas.

### 1. Descripción del problema a estudiar

El objeto de este trabajo radica en el análisis de los movimientos posibles de un sólido rígido de simetría axial del que se conoce la descripción de la velocidad absoluta de sus puntos. La forma exacta del sólido rígido es irrelevante, por lo que para fijar ideas podemos suponer que se trata de disco homogéneo de radio  $r$ , masa  $m$  y anchura despreciable.

Un caso de especial interés es en el que la velocidad del sólido en un punto arbitrario  $\delta \cos(\mu)\hat{e}_1(t) + \delta \sin(\mu)\hat{e}_2(t)$ , con la notación que daremos más adelante, viene dada por la suma de las siguientes velocidades:

1. Velocidad  $\mathbf{V}_1$  resultante de su rotación intrínseca en torno al eje que pasa por el centro del disco y es perpendicular a él (véase la Figura 1). Suponemos que la

velocidad de giro es  $w$  (constante). Una forma habitual de describir esta velocidad es mediante el vector de velocidad angular que es perpendicular al disco, de módulo  $w$  y tiene el sentido que indica la “regla del sacacorchos”. Es decir, con la notación que se va a introducir a continuación,  $\mathbf{V}_1 = w\delta(-\text{sen}(\mu)\hat{\mathbf{e}}_1(t) + \text{cos}(\mu)\hat{\mathbf{e}}_2(t))$ .

2.  $\mathbf{V}_2 = \Omega\delta \text{cos}(\omega t)$ , donde  $\delta$  es la distancia de un punto al centro del disco. Con la notación que se va a introducir a continuación  $\mathbf{V}_2 = \Omega\delta \text{cos}(wt + \mu)\hat{\mathbf{e}}_3(t)$ .
3. Velocidad  $\mathbf{V}_3$  de traslación del centro del disco. Con la notación que se va a introducir a continuación  $\mathbf{V}_3 = \mathbf{v}_{\hat{O}}(t)$ .

El objetivo de este trabajo es analizar los posibles movimientos del disco compatibles con esa información. Se trata de un problema de tipo inverso dado que no se conocen las fuerzas que originan tal movimiento. También se desconoce si existe alguna ligadura (señalemos que en el denominado “problema del disco de Euler” aparece la ligadura de rodadura -de carácter no holonómico- y que la interacción con el fluido compresible atmosférico juega un papel crucial en el instante de su caída final sobre la superficie). Nuestra tarea es indagar si la descripción de velocidades es compatible con las ecuaciones que rijan el movimiento (y en ese caso caracterizar la posición del sólido en función del tiempo), o si por el contrario se podría pensar en alguna incompatibilidad que obligase a replantear las ecuaciones de la teoría newtoniana.

### 1.1. Descripción de los grados de libertad del movimiento

Para describir el movimiento del sólido rígido supondremos dado un sistema de referencia inercial  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y elegimos un sistema de referencia (no inercial) solidario al sólido  $\hat{\mathcal{R}}_S(t) = \{\hat{O}(t); \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  donde  $\hat{O}(t)$  describe el movimiento del centro de masa en el instante  $t$ . Como es usual, ambos sistemas de referencia son ortonormales. Obsérvese que el circunflejo superior nos permitirá recordar que estamos tratando con algo ligado al cuerpo (y por tanto respecto de un sistema no inercial).

Es bien conocido (Arnold [1]) que el movimiento del sólido tiene, a lo sumo, seis grados de libertad. Las seis coordenadas escalares que lo determinan pueden ser elegidas de diversas maneras. Por ejemplo, podemos tomar las tres coordenadas de  $\hat{O}(t)$  respecto del sistema de referencia inercial y los tres ángulos de Euler que orientan al sistema  $\hat{\mathcal{R}}_S(t)$  con respecto al sistema  $\mathcal{R}$ . Otras muchas posibilidades son también válidas. Aquí nos ha parecido conveniente acudir a la determinación de los elementos de la base  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$  con el fin de mantener un sistema acoplado de ecuaciones que si bien involucra a más coordenadas escalares tiene la ventaja de ser conceptualmente más robusto con respecto a los datos que suministra la descripción de velocidades. Esos vectores  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$  vienen caracterizados a través del vector velocidad angular  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}(t) = \hat{\omega}_3(t)\hat{\mathbf{e}}_2(t) - \hat{\omega}_2(t)\hat{\mathbf{e}}_3(t) \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt}(t) = -\hat{\omega}_3(t)\hat{\mathbf{e}}_1(t) + \hat{\omega}_1(t)\hat{\mathbf{e}}_3(t) \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt}(t) = \hat{\omega}_2(t)\hat{\mathbf{e}}_1(t) - \hat{\omega}_1(t)\hat{\mathbf{e}}_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Nótese que ahora hemos incrementado el número de incógnitas pues, salvo simplificaciones vía los ángulos de Euler, ahora para describir el movimiento necesitamos las 9

coordenadas escalares (3 por cada vector  $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$ ) y las 3 del vector  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  (todas ellas respecto del sistema inercial de partida  $\mathcal{R} = \{\mathbf{O}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ). Fijado el vector velocidad angular,  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ , el sistema lineal (1) puede reformularse de manera más conceptual en la forma

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t : \hat{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{E}(t), \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{E} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^9$ , con  $T > 0$  arbitrario, dado por  $\mathbf{E}(t) = (\hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t))^T$  y

$$\mathbf{A}(t : \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega}_3(t)I & -\hat{\omega}_2(t)I \\ -\hat{\omega}_3(t)I & 0 & \hat{\omega}_1(t)I \\ \hat{\omega}_2(t)I & -\hat{\omega}_1(t)I & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $I, 0$  son las matrices identidad y nula  $3 \times 3$ , respectivamente. La solución de dicho sistema dependerá (de manera crucial) de la velocidad angular  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ .

## 1.2. Condición de ortonormalidad de $\hat{\mathcal{R}}_S(t)$

**Teorema 1** *Sea  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  una función continua arbitraria y  $\mathbf{E}(0) = (\hat{\mathbf{e}}_1(0), \hat{\mathbf{e}}_2(0), \hat{\mathbf{e}}_3(0))^T$ , con  $\{\hat{\mathbf{e}}_1(0), \hat{\mathbf{e}}_2(0), \hat{\mathbf{e}}_3(0)\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces la solución  $\mathbf{E}(t)$  de (2) verifica que para todo  $t > 0$   $\{\hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\}$  es también una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .*

**Demostración.** Como  $\{\hat{\mathbf{e}}_1(0), \hat{\mathbf{e}}_2(0), \hat{\mathbf{e}}_3(0)\}$  es una base ortonormal, basta probar que  $\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t)) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ . En efecto, si denotamos por  $\mathbf{A}_{rs}(t)$ , con  $r, s \in \{1, \dots, 9\}$ , a los coeficientes de la matriz  $\mathbf{A}_{rs}(t)$ , y utilizamos que es antisimétrica entonces

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t)) = \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{A}_{3(i-1)+1, 3(j-1)+1}(t) + \mathbf{A}_{3(j-1)+1, 3(i-1)+1}(t) \right) \hat{e}_{i1}(t) \hat{e}_{j1}(t) = 0.$$

**Corolario 2** *La matriz  $\mathbf{P}(t) = (\hat{e}_{ij}(t))_{i,j=1,2,3}$  es la matriz de cambio de base entre los sistemas ortonormales  $\hat{\mathcal{R}}_S(0)$  y  $\hat{\mathcal{R}}_S(t)$ . Por tanto,  $\mathbf{P}(t)$  es una matriz ortonormal. Es decir, es no singular y  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ .*

## 1.3. Descripción de velocidades

Por los resultados de Coriolis y Poisson, el vector velocidad  $\mathbf{v}_P(t)$  de un punto arbitrario  $P$  del sólido rígido viene dado por  $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \hat{\mathbf{r}}_P(t) = \mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t) + \sum_{i=1}^3 x_i^P \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \hat{\mathbf{e}}_i(t)$ , siendo  $\mathbf{v}_{\hat{\mathcal{O}}}(t)$  el vector velocidad de uno de sus puntos (en nuestro caso el centro de masa) y  $\hat{\mathbf{r}}_P(t)$  el vector de posición relativa de  $P$  en el instante  $t$  respecto de  $\hat{\mathcal{R}}_S(t)$  (que a su vez se puede escribir en términos de las coordenadas  $x_i^P$  de  $P(0)$  respecto de  $\hat{\mathcal{R}}_S(0)$ ).

Para obtener una descripción espacial de las velocidades parametrizamos un punto arbitrario  $P$  del sólido rígido (un disco sin espesor) en términos de dos parámetros de manera que su vector de posición relativa viene dado por

$$\hat{\mathbf{r}}_P(t) = \sum_{i=1}^2 x_i^P \hat{\mathbf{e}}_i(t) = \delta \cos(\mu) \hat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta \sin(\mu) \hat{\mathbf{e}}_2(t), \quad \text{con } \delta \in [0, r] \text{ y } \mu \in [0, 2\pi).$$

La descripción de velocidades puede ser reformulada en los siguientes términos:

$$\begin{cases} \Omega\delta \cos(\omega t + \mu)\widehat{\mathbf{e}}_3(t) - \delta w \operatorname{sen}(\mu)\widehat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta w \cos(\mu)\widehat{\mathbf{e}}_2(t) = \\ -\delta \operatorname{sen}(\mu)\widehat{\omega}_3(t)\widehat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta \cos(\mu)\widehat{\omega}_3(t)\widehat{\mathbf{e}}_2(t) + (\delta \operatorname{sen}(\mu)\widehat{\omega}_1(t) - \delta \cos(\mu)\widehat{\omega}_2(t))\widehat{\mathbf{e}}_3(t). \end{cases}$$

A la hora de describir el movimiento, podemos interpretar la anterior identidad como una familia de “ligaduras” vectoriales [y dependientes de los parámetros  $\delta \in [0, r]$  y  $\mu \in [0, 2\pi]$ ] que han de verificar las soluciones del sistema (2). Los términos  $-\delta w \operatorname{sen}(\mu)\widehat{\mathbf{e}}_1(t) + \delta w \cos(\mu)\widehat{\mathbf{e}}_2(t)$  expresan la velocidad resultante de su rotación intrínseca ( $\mathbf{V}_1$ ). El término  $\Omega\delta \cos(\omega t + \mu)\widehat{\mathbf{e}}_3(t)$  expresa la velocidad  $\mathbf{V}_2$  mencionada anteriormente.

Nótese que el término  $\mathbf{v}_{\widehat{O}}(t)$  es igual a  $\mathbf{V}_3(t)$  y desaparece de las ecuaciones, por lo que da igual cuál sea su valor. Por simplicidad supondremos,  $\mathbf{v}_{\widehat{O}}(t) \equiv 0$ .

Se trata pues de una identidad en  $\mathbb{R}^3$  que podemos reformular conceptualmente como

$$\mathbf{F}(\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t), \mathbf{E}(t) : \delta, \mu) = \mathbf{0}, \text{ para todo } t \in [0, T], \quad (3)$$

donde la función  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times [0, r] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es no lineal, aunque es lineal en  $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  (respectivamente en  $\mathbf{E}$ ) si se fijan  $\delta$ ,  $\mu$  y  $\mathbf{E}$  (respectivamente  $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ ).

Recordamos que, *a priori*, no conocemos el valor de  $\widehat{\omega}_1(t)$ ,  $\widehat{\omega}_2(t)$ ,  $\widehat{\omega}_3(t)$ . Descomponiendo en coordenadas respecto de la base inercial, identificando coeficientes y utilizando que las funciones  $\operatorname{sen}(\mu)$  y  $\cos(\mu)$  son linealmente independientes como funciones de  $\mu$ , obtenemos

$$\begin{cases} -\widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{11}(t) + \widehat{\omega}_1(t)\widehat{e}_{31}(t) = -w\widehat{e}_{11}(t) - \Omega \operatorname{sen}(\omega t)\widehat{e}_{31}(t) \\ -\widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{12}(t) + \widehat{\omega}_1(t)\widehat{e}_{32}(t) = -w\widehat{e}_{12}(t) - \Omega \operatorname{sen}(\omega t)\widehat{e}_{32}(t) \\ -\widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{13}(t) + \widehat{\omega}_1(t)\widehat{e}_{33}(t) = -w\widehat{e}_{13}(t) - \Omega \operatorname{sen}(\omega t)\widehat{e}_{33}(t) \\ \widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{21}(t) - \widehat{\omega}_2(t)\widehat{e}_{31}(t) = w\widehat{e}_{21}(t) + \Omega \cos(\omega t)\widehat{e}_{31}(t) \\ \widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{22}(t) - \widehat{\omega}_2(t)\widehat{e}_{32}(t) = w\widehat{e}_{22}(t) + \Omega \cos(\omega t)\widehat{e}_{32}(t) \\ \widehat{\omega}_3(t)\widehat{e}_{23}(t) - \widehat{\omega}_2(t)\widehat{e}_{33}(t) = w\widehat{e}_{23}(t) + \Omega \cos(\omega t)\widehat{e}_{33}(t). \end{cases} \quad (4)$$

La compatibilidad que estamos buscando se reduce a mostrar la existencia de las funciones vectoriales (un total de 12 funciones escalares)  $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t)$  y  $\mathbf{E}(t)$  solución de las 15 ecuaciones dadas por (2) y (4). Nótese que aunque parece que las ligaduras (4) originan 6 ecuaciones distintas, en realidad, los datos de nuestro problema permiten reducirlas a tan sólo a 3 (véase la demostración del Teorema 3). Curiosamente, estas tres ecuaciones que se necesitan pueden ir variando con el tiempo, por lo que no podemos escoger, *a priori*, 3 únicas ecuaciones que sean equivalentes al sistema (4) para todo  $t \geq 0$ .

Toda posible demostración de la no existencia de solución podría conducir a una incompatibilidad entre la descripción dada y las leyes newtonianas del movimiento.

**Teorema 3** *Supongamos que  $\widehat{e}_{ij}(t)$  son funciones continuas para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Entonces, existe unas únicas funciones  $\widehat{\omega}_1(t)$ ,  $\widehat{\omega}_2(t)$  y  $\widehat{\omega}_3(t)$ , que son solución de (4).*

**Demostración.** Para cada  $t \geq 0$ , (4) es un sistema algebraico de ecuaciones para  $\widehat{\omega}_1(t)$ ,  $\widehat{\omega}_2(t)$  y  $\widehat{\omega}_3(t)$ , que se puede escribir como  $\mathbf{A}(t)\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{b}(t)$ , donde  $\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t) =$

$$(\widehat{\omega}_1(t), \widehat{\omega}_2(t), \widehat{\omega}_3(t))^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \widehat{e}_{31}(t) & 0 & -\widehat{e}_{11}(t) \\ \widehat{e}_{32}(t) & 0 & -\widehat{e}_{12}(t) \\ \widehat{e}_{33}(t) & 0 & -\widehat{e}_{13}(t) \\ 0 & -\widehat{e}_{31}(t) & \widehat{e}_{21}(t) \\ 0 & -\widehat{e}_{32}(t) & \widehat{e}_{22}(t) \\ 0 & -\widehat{e}_{33}(t) & \widehat{e}_{23}(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} -w\widehat{e}_{11}(t) - \Omega \text{sen}(wt)\widehat{e}_{31}(t) \\ -w\widehat{e}_{12}(t) - \Omega \text{sen}(wt)\widehat{e}_{32}(t) \\ -w\widehat{e}_{13}(t) - \Omega \text{sen}(wt)\widehat{e}_{33}(t) \\ w\widehat{e}_{21}(t) + \Omega \cos(wt)\widehat{e}_{31}(t) \\ w\widehat{e}_{22}(t) + \Omega \cos(wt)\widehat{e}_{32}(t) \\ w\widehat{e}_{23}(t) + \Omega \cos(wt)\widehat{e}_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Para probar el teorema necesitamos ver que estos sistemas algebraicos son compatibles y determinados. La matriz  $\mathbf{A}(t)$  tiene rango 3, pues, por ejemplo, la submatriz 3x2 de su parte inferior derecha tiene rango dos, por ser dos columnas linealmente independientes. Por tanto, para cada  $t \geq 0$  fijos, dos de las tres últimas filas son linealmente independientes. Como alguno de los elementos  $\widehat{e}_{3i}(t)$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) de la primera columna debe ser no nulo, su correspondiente fila más las dos anteriores deben ser linealmente independientes, lo que nos asegura que el rango de  $\mathbf{A}(t)$  es 3. Por otro lado la matriz ampliada  $\mathbf{A}(t)|\mathbf{b}(t)$  (de tamaño 3x4) cuyas 3 primeras columnas son la matriz  $\mathbf{A}(t)$  y la cuarta columna es  $\mathbf{b}(t)$  verifica que (columna 4) =  $-\Omega \text{sen}(wt)$ (columna 1)  $-\Omega \cos(wt)$ (columna 2)  $+\omega$ (columna 3). Por tanto, por el Teorema de Rouché–Fröbenius, para cada  $t \geq 0$  existe una única solución  $\widehat{\omega}_1(t)$ ,  $\widehat{\omega}_2(t)$  y  $\widehat{\omega}_3(t)$  del sistema (4). Además, como las componentes de la matriz  $\mathbf{A}(t)$  y del vector  $\mathbf{b}(t)$  son continuas, las correspondientes soluciones son también continuas.

#### 1.4. Condiciones iniciales

Suponemos dado un vector de  $\mathbb{R}^9$  tal que  $\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0$  y que  $\widehat{\mathcal{R}}_S(0) = \mathcal{R}$ . De este modo

$$\widehat{e}_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (= 1 \text{ si } i = j \text{ y } 0 \text{ en otro caso}). \quad (5)$$

En contraste al caso del sistema diferencial, las ligaduras vectoriales (4) contienen toda la información requerida para todo  $t \in [0, T]$ . Así en  $t = 0$ , del sistema de ligaduras (4) y de las condiciones iniciales (5) se obtiene que  $\widehat{\omega}(0) = (0, -\Omega, w)^T$ .

## 2. Existencia de solución via un algoritmo iterativo

Nuestro propósito es mostrar la existencia de soluciones como si tratase de un "problema de punto fijo" para lo cual vamos a proponer un argumento iterativo que nos será útil para la aproximación numérica del problema. Vamos a construir una sucesión de funciones  $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\mathbf{E}^n \in \mathcal{C}([0, T] : \mathbb{R}^9)$  y otra sucesión  $\{\widehat{\omega}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\widehat{\omega}^n \in \mathcal{C}([0, T] : \mathbb{R}^3)$  de manera que converjan (en un sentido a precisar), cuando  $n \rightarrow \infty$ , a unas funciones  $\mathbf{E} \in \mathcal{C}([0, T] : \mathbb{R}^9)$  y  $\widehat{\omega} \in ([0, T] : \mathbb{R}^3)$  que serán solución del problema (2) y (3).

### 2.1. Cálculo de $\mathbf{E}^1$ y $\widehat{\omega}^1$

Resolveremos el sistema (2) con los datos iniciales  $\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0$  (por ejemplo los dados por (5)) y para una matriz de coeficientes  $\mathbf{A}(t; \widehat{\omega}^0)$  que resulta de tomar como primera aproximación del vector velocidad angular el vector constante en  $t$  que se obtiene a través de las ligaduras (3) (por ejemplo, en el caso de la condición inicial (5) tomaremos  $\widehat{\omega}^0(t) \equiv$

$(0, -\Omega, w)^T$ ). En ese caso sabemos que habrá una única solución del sistema (2) que denotamos por  $\mathbf{E}^1(t) = e^{A(\widehat{\omega}^0)t}\mathbf{E}_0$ , toda vez que, por ser un sistema lineal de coeficientes constantes, la solución viene dada por la exponencial de la matriz.

Dado que pretendemos hacer, paralelamente, una simulación numérica del proceso en el intervalo temporal  $[0, T]$ , para un  $N$  suficientemente grande, vamos a introducir una discretización de ese intervalo tomando como paso de discretización  $h = \frac{T}{N}$ . Obtenemos así una discretización de dicho intervalo mediante los tiempos  $\{t_i\}_{i=0}^N$ , con  $t_i = ih$  y podremos calcular explícitamente  $\mathbf{E}^1(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Utilizando ahora  $\mathbf{E}^1(t)$  y las ligaduras (4) obtenemos los correspondientes valores  $\widehat{\omega}^1(t_i)$ . Para simplificar los cálculos definimos la función lineal a trozos que utilizaremos en el paso siguiente del proceso.

$$\widehat{\omega}^1(t) = \widehat{\omega}^1(t_{i-1}) + \frac{\widehat{\omega}^1(t_i) - \widehat{\omega}^1(t_{i-1})}{h}(t - t_{i-1}), \quad \text{para todo } t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, N.$$

## 2.2. Cálculo de $\mathbf{E}^2$ y $\widehat{\omega}^2$

Volvemos a resolver el sistema (2) con los mismos datos iniciales  $\mathbf{E}_0$  pero con la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}(t : \widehat{\omega}^1)$ . Como el sistema es lineal (aunque ahora con coeficientes dependientes de  $t$ ) obtenemos una única solución que denotamos por  $\mathbf{E}^2(t)$ , es decir,  $\mathbf{E}^2(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(s; \widehat{\omega}^1) ds} \mathbf{E}_0$ , con lo que calculamos  $\mathbf{E}^2(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Utilizando (4) obtenemos  $\widehat{\omega}^2(t_i)$ .

## 2.3. Convergencia del algoritmo

El proceso iterativo se repite, calculando  $\mathbf{E}^n$  y  $\widehat{\omega}^n$ , hasta que se estime oportuno desde el punto de vista de la convergencia numérica. Es posible mostrar que el anterior proceso converge. Esto es fruto de los siguientes lemas técnicos:

**Lema 4** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , fijada  $\widehat{\omega}^{n-1} \in C([0, T] : \mathbb{R}^3)$ , sea  $\mathbf{E}^n \in C([0, T] : \mathbb{R}^9)$  la solución de (2) y (5). Entonces la norma de  $\mathbf{E}^n$  en el espacio  $C([0, T] : \mathbb{R}^9)$  está uniformemente acotada (es decir, independientemente de  $\widehat{\omega}^{n-1}$ ). En particular, existe  $\mathbf{E} \in L^\infty(0, T : \mathbb{R}^9)$ , con  $\mathbf{E}(t) = (\widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t), \widehat{\mathbf{e}}_3(t))^T$  base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  y existe una subsucesión de  $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (que denotamos de la misma manera) tal que  $\mathbf{E}^n \rightharpoonup \mathbf{E}$  en  $L^\infty(0, T : \mathbb{R}^9)$  con la topología débil\*.*

**Demostración.** Como todas las normas de  $\mathbb{R}^9$  son equivalentes podemos tomar la norma  $\|\mathbf{E}\| = \max_{t \in [0, T]} (\|\widehat{\mathbf{e}}_1(t)\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\widehat{\mathbf{e}}_2(t)\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\widehat{\mathbf{e}}_3(t)\|_{\mathbb{R}^3}^2)^{1/2}$  y así, por el Teorema 1, se tiene que  $\|\mathbf{E}^n\| = \sqrt{3}$  independientemente de  $\widehat{\omega}^{n-1}$ . La demostración termina utilizando que el espacio de Banach  $L^\infty(0, T : \mathbb{R}^9)$  es el espacio dual de  $L^1(0, T : \mathbb{R}^9)$ .

**Lema 5** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , fijada una función vectorial  $\mathbf{E}^n \in C([0, T] : \mathbb{R}^9)$ , la función  $\widehat{\omega}^n \in C([0, T] : \mathbb{R}^3)$  verificando (3) está acotada uniformemente respecto de  $n$ . En particular, en las condiciones del Lema 4, existe una subsucesión de  $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (que denotamos de la misma manera) tal que  $\mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}$  uniformemente en  $C([0, T] : \mathbb{R}^9)$  y en consecuencia, existe  $\widehat{\omega} \in C([0, T] : \mathbb{R}^3)$  y existe una subsucesión de  $\{\widehat{\omega}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (que denotamos de la misma manera) tal que  $\widehat{\omega}^n \rightarrow \widehat{\omega}$  uniformemente en  $C([0, T] : \mathbb{R}^3)$ . Además, el par de funciones límite  $\mathbf{E}, \widehat{\omega}$  verifican el sistema acoplado dado por (2) y (3).*

**Demostración.** Comencemos comprobando que se tiene una cota uniforme  $|\widehat{\omega}^n(t)| \leq M$ , para todo  $t \in [0, T]$ , para cierto  $M > 0$  independiente de  $n$ . Esto es fruto de la demostración del Teorema 2 que reduce el cálculo de  $\widehat{\omega}^n(t)$  a la solución de un sistema algebraico lineal de ecuaciones dadas en función de  $\mathbf{E}^n$  y con una matriz de coeficientes no singular. El Lema 4 asegura que los términos independientes del sistema están uniformemente acotados (en  $n$ ), lo que conduce fácilmente a la cota buscada. Además

$$\left| \frac{d\mathbf{E}^n}{dt}(t) \right| \leq M^*, \text{ para todo } t \in [0, T], \quad (6)$$

para un cierto  $M^* > 0$  independiente de  $n$  (obtenido a partir de  $M$ ) y así la sucesión  $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es equicontinua en  $C([0, T] : \mathbb{R}^9)$  por lo que utilizando el teorema de compacidad de Ascoli-Arzelá podemos asegurar que existe una subsucesión que converge uniformemente en  $C([0, T] : \mathbb{R}^3)$  (obviamente al mismo límite dado en el Lema 4). Para concluir la convergencia uniforme (de una subsucesión) de  $\{\widehat{\omega}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $C([0, T] : \mathbb{R}^3)$  aplicaremos de nuevo el teorema de compacidad de Ascoli-Arzelá para lo cual sólo nos falta mostrar la equicontinuidad de la sucesión  $\{\widehat{\omega}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $C([0, T] : \mathbb{R}^3)$ . Esto es fruto de utilizar la equicontinuidad de  $\{\mathbf{E}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $C([0, T] : \mathbb{R}^9)$  y el hecho de que la obtención de  $\widehat{\omega}^n(t)$  como solución de un sistema algebraico lineal de ecuaciones dadas en función de  $\mathbf{E}^n$  no introduce ninguna nueva dependencia de la continuidad en  $t$  que dependa de  $n$ . Otro camino, quizás más técnico, consiste en obtener una estimación a priori (uniforme en  $n$ ) del tipo  $\left| \frac{d\widehat{\omega}^n}{dt}(t) \right| \leq M^\#$ , para todo  $t \in [0, T]$ , para un cierto  $M^\# > 0$  independiente de  $n$ . Esto se puede lograr a través de la regla de la cadena y de la estimación (6). El paso al límite en ambas ecuaciones es ahora trivial (nótese, que la estimación (6) permite asegurar, como en el Lema 4, que la subsucesión de  $\{\frac{d\mathbf{E}^n}{dt}(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que  $\frac{d\mathbf{E}^n}{dt}(t) \rightharpoonup \frac{d\mathbf{E}}{dt}(t)$  en  $L^\infty(0, T : \mathbb{R}^9)$  con la topología debil\*).

## 2.4. Test numérico

Hemos realizado un test numérico para el caso en el que  $\Omega = 1$ ,  $w = 1$ ,  $T = 10$  y  $h = 0,1$ . En este caso se observa la rápida convergencia del algoritmo, pues se obtiene:  $\|\widehat{\omega}^1 - \widehat{\omega}^0\|_\infty = 106,3552$ ,  $\|\widehat{\omega}^2 - \widehat{\omega}^1\|_\infty = 2,0203 \times 10^{-14}$ ,  $\|\widehat{\omega}^3 - \widehat{\omega}^2\|_\infty = 1,877 \times 10^{-14}$ ,  $\|\widehat{\omega}^4 - \widehat{\omega}^3\|_\infty = 1,7788 \times 10^{-14}$ ,  $\|\widehat{\omega}^5 - \widehat{\omega}\|_\infty = 1,4887 \times 10^{-14} \dots$  Aquí hemos utilizado la notación genérica  $\|\widehat{\omega}\|_\infty := \|\widehat{\omega}\|_{C([0, T] : \mathbb{R}^3)} = \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{\omega}(t)|$ . En la Figura 1, se muestran varios instantes de la simulación numérica:

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por Advanced Dynamics, S.A. y por la Dirección General de Universidades e Investigación de la Conserjería de Educación de la Comunidad de Madrid y la Universidad Complutense de Madrid (proyecto CCG06-UCM/ESP-1110).

## Referencias

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] F. Bonnans and P. Rouchon, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*, Editions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- [3] H.J. Khalil, *Nonlinear Systems*, Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

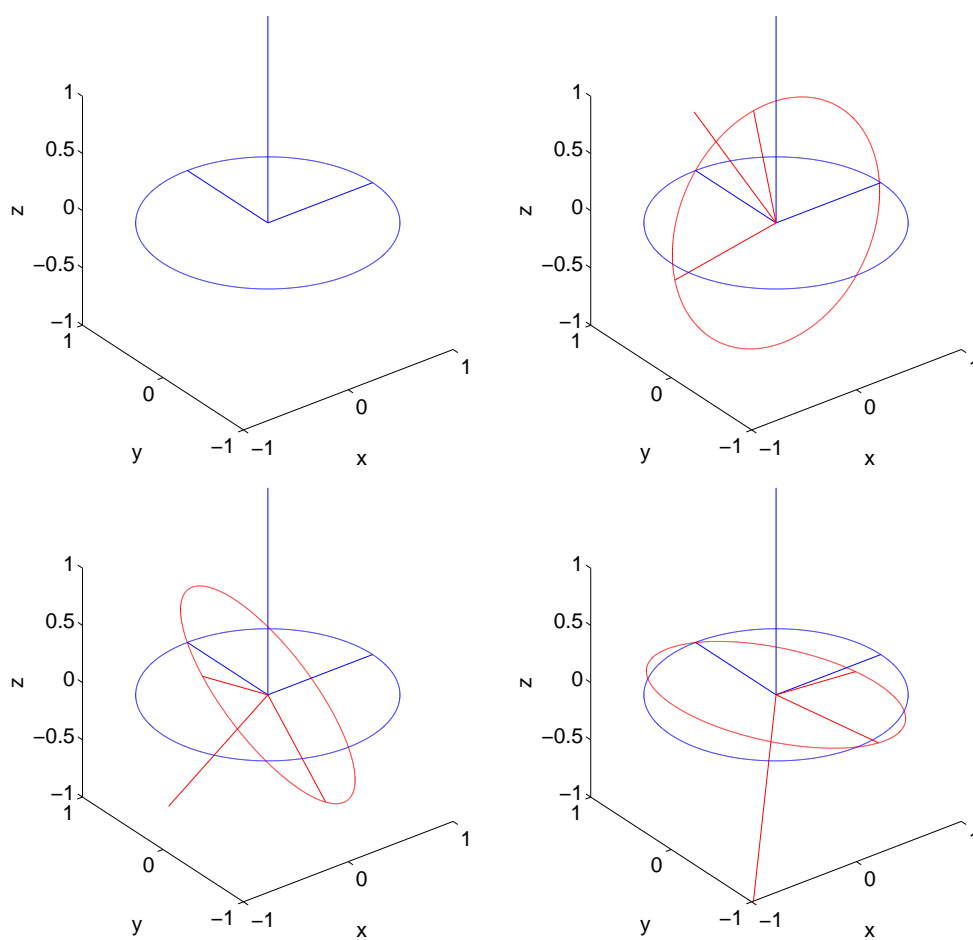


Figura 1: Disco en instantes  $t = 0, 1, 2$  y  $3$  (de arriba a abajo y de izquierda a derecha).