

Conjuntos de explosión de dimensión menor en el semiespacio

MAYTE PÉREZ-LLANOS¹, JULIO D. ROSSI²,

¹ Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, 28911, Leganés, Madrid.

E-mail: mtperez@math.uc3m.es.

² Dpto. de Matematica, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1428 Buenos Aires, Argentina. E-mail: jrossi@dm.uba.ar.

Palabras clave: Blow-up, p -laplaciano, condiciones de contorno no lineales,

Resumen

Nuestro principal objetivo en este trabajo es encontrar algunos ejemplos de soluciones de problemas parabólicos en el semiespacio, $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M = \{x_N > 0\} \times \mathbb{R}^M$ que explotan, cuyos conjuntos de explosión son no triviales y de dimensión estrictamente menor que la dimensión del espacio ambiente. Con este fin probamos la existencia de soluciones no triviales de soporte compacto de $\nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) = \varphi^m$ en el semiespacio \mathbb{R}_+^N con la condición de borde no lineal $-|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}$ sobre $\partial\mathbb{R}_+^N = \{x_N = 0\}$.

1. Introducción

Un aspecto importante del estudio de la explosión en problemas parabólicos es la estructura espacial del conjunto de puntos donde la solución se hace infinita en tiempo T , esto es, el *conjunto de explosión*, definido como

$$B(u) = \{x; \text{ existen } x_n \rightarrow x, t_n \nearrow T, \text{ con } u(x_n, t_n) \rightarrow \infty\}.$$

Un problema que ha sido centro de interés en la literatura es la identificación de los posibles conjuntos de explosión. En ocasiones el conjunto de explosión consta de un único punto o un conjunto discreto de puntos (*explosión puntual*), por ejemplo para $u_t = \Delta u + u^p$ con $p > 1$, [CM]. En otras situaciones éste se trata de un subconjunto propio del dominio espacial de la misma dimensión (*explosión regional*), por ejemplo para $u_t = \Delta u^m + u^m$, con $m > 1$, se sabe que existen soluciones explotando en una bola, [CPE1], o del espacio entero (*explosión global*), como sucede para $u_t = \Delta(u^m) + u^p$ con $(1 < p < m)$, ver [SGKM]. Más aún, si consideramos soluciones radiales a $u_t = \Delta u + u^p$, es fácil construir un ejemplo con

conjunto de explosión que sea una esfera, $B(u) = \{|x| = r\}$. Así pues, hasta el momento tenemos como posibles conjuntos de explosión: puntos aislados, el espacio entero, bolas y esferas.

Como demostraremos existen otros muchos conjuntos de explosión diferentes. Por ejemplo, podemos encontrar soluciones cuyo conjunto de explosión es un segmento, $B(u) = [0, c] \times \{0\}$, en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{x_1 > 0\} \times \mathbb{R}$ (véase Figura 1). En general, dados N y M , dos dimensiones cualesquiera, podemos construir un subconjunto compacto, $K \subset \mathbb{R}_+^N$, de dimensión N y una solución de un problema parabólico en $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ cuyo conjunto de explosión sea $B(u) = K \times \{0\}$, o, de forma más general, $B(u) = K \times \{y_1, \dots, y_k\}$ para cualquier conjunto de puntos dado $\{y_1, \dots, y_k\} \in \mathbb{R}^M$. Para construir dichos ejemplos proponemos estudiar soluciones autosimilares del siguiente problema parabólico, combinando el operador doblemente no lineal en $\mathbb{R}_+^N = \{x_N > 0\}$ (con $p > 2$ y $m > 0$ como parámetros) y el operador p -laplaciano en \mathbb{R}^M , en el espacio producto $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$, con una reacción no lineal en la frontera que produce la explosión, es decir,

$$\begin{cases} (u^m)_t = \nabla_x(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u) + \Delta_y u^m, & \text{en } \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M \times (0, T), \\ -|\nabla_x u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} = u^{p-1}, & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M \times (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^N$, $y \in \mathbb{R}^M$, $\nabla_x(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u)$ denota el operador p -laplaciano en la variable x y $\Delta_y u$ es el laplaciano usual en la variable y .

Como casos particulares de (1) tenemos que si $m = 1$ la ecuación se transforma en $u_t = \nabla_x(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u) + \Delta_y u$, esto es, una combinación de los operadores p -laplaciano y laplaciano. Si no consideramos la variable y en (1), nos enfrentamos a la descripción del comportamiento asintótico de las soluciones que explotan del problema parabólico

$$\begin{cases} (u^m)_t = \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), & \text{en } \mathbb{R}_+^N \times (0, T), \\ -|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} = u^{p-1}, & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^N \times (0, T). \end{cases} \quad (2)$$

En el análisis de los problemas de explosión los perfiles autosimilares se utilizan para estudiar el comportamiento asintótico de una solución a una ecuación parabólica cerca del tiempo de explosión, ver, por ejemplo [GK1, GK2]. Es frecuente que la forma de la solución en la variable espacial cerca de la explosión se asemeje a un perfil autosimilar, [CPE1, GV2, GK2].

Si consideramos una solución de (2) de la forma $u(x, t) = (T - t)^{-1/(p-2)} v(x, t)$, es de esperar que la solución rescalada $v(x, t)$ converja a medida que $t \nearrow T$ a un perfil estacionario. Para el caso $N = 1$ (esto es, (2) en un intervalo) citamos a [FPL], donde los autores demuestran que el fenómeno de explosión regional aparece debido a la existencia de perfiles autosimilares de soporte compacto. Nótese que el rescale previo preserva la variable espacial original. Este hecho significa que el conjunto de explosión de la solución está directamente relacionado con el soporte del perfil.

Cuando tratamos el problema (1) consideraremos soluciones autosimilares de la forma

$$u(x, y, t) = \varphi(x) \psi(y, t). \quad (3)$$

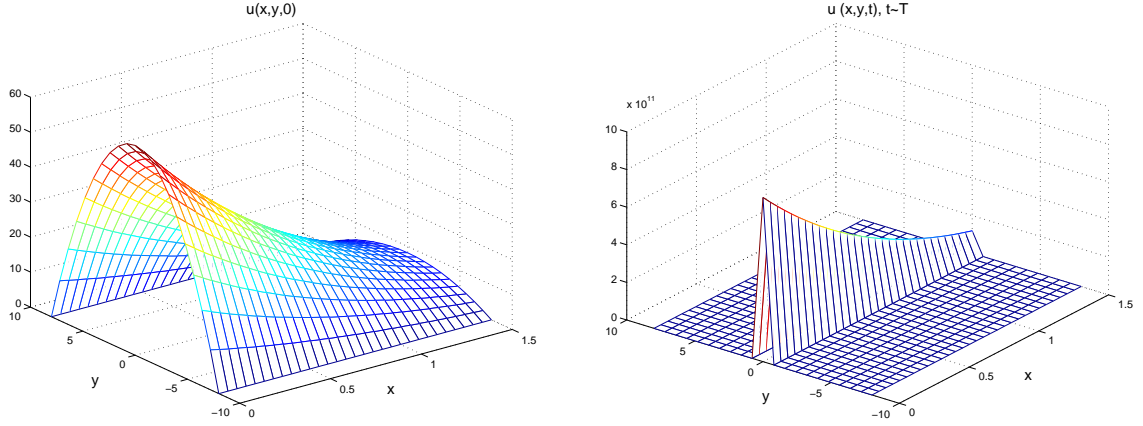


Figura 1: Evolución en el tiempo de una solución del problema (1) en \mathbb{R}_2^+ , de la forma $u(x, y, t) = \varphi(x)\psi(y, t)$.

Si u es una solución de (1) de la forma (3) obtenemos que φ y ψ deben resolver los siguientes problemas elíptico y parabólico, respectivamente,

$$\begin{cases} \varphi^m = \nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi), & \text{en } \mathbb{R}_+^N, \\ -|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}, & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases} \quad (4)$$

y

$$(\psi^m)_t = \Delta\psi^m + \psi^{p-1}, \quad \text{en } \mathbb{R}^M \times (0, T). \quad (5)$$

Obsérvese que la ecuación anterior escrita para $\tilde{\psi} = \psi^m$ no es sino la ecuación del calor con una fuente dada por el término $\tilde{\psi}^{(p-1)/m}$, cuyas soluciones son globales si $p-1 \leq m$. Dado que nuestro interés reside en identificar el conjunto de explosión de u , consideraremos $p-1 > m$ en lo que sigue.

El conjunto de explosión de una solución $u(x, y, t)$ de la forma (3) está dado por

$$B(u) = \text{supp}(\varphi) \times B(\psi),$$

donde $B(\psi)$ es el conjunto de explosión de ψ . Se sabe que $B(\psi)$ se trata de un conjunto finito de puntos, genéricamente un único punto.

Así pues, para encontrar el conjunto de explosión que queremos, $B(u)$, tenemos que determinar el soporte de φ . En una dimensión espacial éste es explícito, ya que (1) se reduce a un problema de E.D.O., véase [FPL].

Para extender el resultado de existencia de un perfil de soporte compacto φ , a varias dimensiones espaciales, surgen nuevas dificultades. Si $N \geq 2$ la condición de borde impide elegir φ como una función radial, no siendo posible reducir (4) a una E.D.O.

No obstante, podemos buscar soluciones que sean radiales en las variables tangenciales, esto es, denotando $x \in \mathbb{R}_+^N$ por $x = (x', x_N)$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, entonces φ verifica

$$\varphi(x', x_N) = \varphi(|x'|, x_N). \quad (6)$$

Llegados a este punto, recordemos que por resultados bien conocidos, la existencia de tales soluciones de soporte compacto de $\nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) = \varphi^\alpha$ en todo \mathbb{R}^N , es posible si y solamente si $\alpha + 1 < p$, veáse [PS]. Lo que indica que nuestra hipótesis $m + 1 < p$ también resulta natural en este sentido.

Resultados principales. Establezcamos a continuación el principal resultado de este trabajo.

Teorema 1 *Existe una solución de (4) no negativa y no trivial de soporte compacto, cumpliendo (6). Más aún, toda solución $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ de (4) no negativa y no trivial, es de soporte compacto y radial en las variables tangenciales en el sentido (6).*

Observamos que el problema de unicidad excepto traslaciones en las variables tangenciales (x_1, \dots, x_{N-1}) de soluciones de soporte compacto de (4) continua abierto.

Una vez realizado este análisis, se deducen de forma sencilla algunos corolarios concernientes al problema (1).

Corolario 1.1 *Toda solución de (1) no negativa y no trivial, explota en tiempo finito si $1 < (p - 1)/m < 1 + 2/M$.*

Asúmase que v es una solución global no negativa. Como v es una solución a (1) su soporte en x se expande (siendo la totalidad del espacio en y) y finalmente cubre el soporte de cualquier solución autosimilar $u(x, y, t) = \varphi(x)\psi(y, t)$. La prueba concluye utilizando argumentos de comparación, usando que toda solución explota si $1 < (p - 1)/m < p_s$, siendo $p_s = 1 + 2/M$ el exponente de Fujita.

Corolario 1.2 *Existe una solución de (1) cuyo conjunto de explosión está compuesto por una cantidad arbitraria de componentes conexas de dimensión N .*

De hecho, consideraremos una solución de la forma (3) con un perfil cuyo conjunto de explosión $B(\psi)$ esté compuesto por k puntos, $\{y_1, \dots, y_k\}$. El conjunto de explosión de u , consistirá en k copias disjuntas del soporte de φ , esto es, $B(u) = \cup_{i=1}^k K \times \{y_i\}$. Más aún, conjeturamos que tales soluciones autosimilares introducidas anteriormente, muestran el comportamiento asintótico de cualquier solución de (1) cerca de su tiempo de explosión.

Subrayemos que nuestro estudio puede ser asimismo aplicado a situaciones más generales, tales como, imponer condiciones de borde también en la variable y o tratar ecuaciones de tipo medio poroso.

2. Un problema auxiliar.

Comenzamos nuestro análisis planteando para $R > 0$ suficientemente grande el siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla u_R|^{p-2}\nabla u_R) = (u_R)^m, & \text{en } B_R^+, \\ -|\nabla u_R|^{p-2}\frac{\partial u_R}{\partial x_N} = (u_R)^{p-1}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u_R = 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (7)$$

donde B_R^+ denota $B(0, R)_+ = \{x, \|x\| < R, x_N > 0\}$ y Γ_i , $i = 1, 2$ las fronteras $\partial B_R^+ \cup \{x_N = 0\}$ y $\partial B_R^+ \cup \{x_N > 0\}$ respectivamente.

Trataremos de encontrar soluciones no triviales de (7) en un marco variacional natural. Consideremos el espacio $W = \{u \in W^{1,p}(B_R^+) \text{ verificando } u|_{\Gamma_2} = 0\}$ con la norma

$$\|u\|_W = \int_{B_R^+} |\nabla u|^p.$$

Obsérvese que la desigualdad de Poincaré's se aplica también a funciones que se anulan en una parte no trivial de la frontera del dominio. Entonces, $\|\cdot\|_W$ es equivalente a la norma usual de $W^{1,p}$ en W . Minimizando el funcional

$$J_R(u) = \frac{\frac{m+1}{p} \left(\int_{B_R^+} |\nabla u|^p - \int_{\Gamma_1} u^p \right)}{\left(\int_{B_R^+} u^{m+1} \right)^{p/(m+1)}}$$

sobre W , probamos el siguiente resultado. Veáanse en [FBR] argumentos similares.

Proposición 1 *Para todo R suficientemente grande J_R alcanza un mínimo en W . Más aún, existe un minimizante no trivial que es solución débil de (7).*

Comenzamos demostrando que, para R grande, existe una constante $K(R)$ tal que

$$\inf_{u \in W, u \neq 0} J_R(u) \geq -K > -\infty,$$

con lo que dicho mínimo existe. Además, aplicando J_R a $\theta_{1,R}$, la autofunción asociada al primer autovalor $\lambda_1(R)$ (con R suficientemente grande, tal que $\lambda_1(R) < 1$) del siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta) = 0, & \text{en } B_R^+, \\ -|\nabla\theta|^{p-2}\frac{\partial\theta}{\partial x_N} = \lambda\theta^{p-1}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \theta = 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases}$$

vemos que

$$\inf_{u \in W, u \neq 0} J_R(u) \leq J_R(\theta_{1,R}) < 0, \tag{8}$$

lo cual descarta que el minimizante sea trivial. Finalmente, por homogeneidad, multiplicando el minimizante por una constante adecuada, obtenemos una solución no trivial de (7).

Las siguientes estimaciones nos serán de gran utilidad a lo largo de todo el trabajo. Como veremos más tarde, serán asimismo aplicables a las soluciones del problema (1).

Lema 1 *Sea R suficientemente grande. Entonces, si u_R es un minimizante no negativo de J_R , existe una constante C independiente de R tal que*

$$\|u_R\|_{L^{m+1}(B_R^+)} \leq C, \quad \|u_R\|_{L^\infty(B_R^+)} \leq C \quad \text{y} \quad \|\nabla u_R\|_{L^\infty(B_{R/2}^+)} \leq C.$$

La primera estimación es consecuencia de (8) y de la ecuación (7)₁, mientras que las restantes estimaciones se infieren de la teoría general de regularidad, véase [T].

Demostramos que es posible comparar dos soluciones de (7) a pesar de la condición de contorno tipo Neumann, siempre que la medida de la region de dicho borde sea suficientemente pequeña. Es decir, establecemos un principio de comparación para el problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega) - \omega^m = 0, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}_+^N, \\ \omega = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N > 0\}, \\ -|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_N} = \omega^{p-1}, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \quad (9)$$

que constituye una pieza clave en varias partes del presente estudio.

Lema 2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$ un dominio abierto y acotado, con frontera Lipschitz. Supongamos que $\omega_i \in W^{1,p}(\Omega)$, $i = 1, 2$ son sub y super soluciones acotadas del problema (9), respectivamente. Si la medida $N - 1$ dimensional del conjunto $\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}$ verifica $\mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}) < \delta$ para $\delta_0 > \delta > 0$ pequeño, entonces $(\omega_2 - \omega_1) \geq 0$ en Ω .*

Multiplicamos las desigualdades que cumplen ω_i , $i = 1, 2$ por $h(\omega_2 - \omega_1)$, siendo $h(x) = -\min\{0, x\}$. Tras integrar por partes utilizando la condición de borde y las desigualdades del Lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} C_1(p) \int_{\Omega} |\nabla h(\omega_2 - \omega_1)|^p - \int_{\Omega} (\omega_2^m - \omega_1^m) h(\omega_2 - \omega_1) \\ \leq C_2 \left(\int_{\partial\Omega \cap \{x_N=0\}} h(\omega_2 - \omega_1)^{p^*} \right)^{2/p^*} \left(\mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}) \right)^{1-2/p^*}, \end{aligned}$$

donde $p^* \equiv \frac{p(N-1)}{N-p}$ denota el exponente crítico para la inmersión de la traza de Sobolev. Es fácil ver que, si $\mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\})$ es suficientemente pequeño, la última integral puede absorberse en la primera. Este hecho implica que $h(\omega_2 - \omega_1) \equiv 0$ en Ω y el principio de comparación queda probado.

Es en esta prueba donde interviene el hecho de que el exponente p sea mayor que 2.

Aplicando el método de los planos móviles, (véase [GNN]) demostramos:

Teorema 2 *Sea u_R una solución de (4). Entonces u_R satisface (6). Es más, $u_R(|x'|, x_N)$ es decreciente en $|x'|$ y x_N .*

Este resultado lo probamos aplicando repetidamente el principio de comparación del Lema 2 a u_R y $u_R^\lambda(x) = u_R(x^\lambda)$, donde por x^λ denotamos la reflexión del punto x con respecto a cierto plano apropiado.

3. Existencia de una solución de soporte compacto

Las propiedades de simetría y crecimiento junto con el principio de comparación probados en la sección anterior, nos permitirán probar la primera afirmación del Teorema 1.

Proposición 2 *Sea u_R una solución de (7) cumpliendo (6). Para R suficientemente grande*

$$\max_{x \in \text{supp}(u_R)} |x| < R.$$

Comenzamos probando que u_R está compactamente soportada en la variable x_N . Utilizando las estimaciones del Lema 1 deducimos que, para cierto $R_1 \leq R$,

$$u_R(x', R_1) \leq 1, \quad \forall x'. \quad (10)$$

Podemos pues comparar con

$$\omega = \beta \left((R_2 - x_N)^+ \right)^{\frac{p}{p-(m+1)}}, \quad (11)$$

una supersolución de soporte compacto en x_N del problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega) = \omega^m, & \text{en } \{x_N > R_1\} \cap B_R^+, \\ \omega(R_1) = 1, & \text{en } \{x_N = R_1\} \cap B_R^+, \\ \omega = 0, & \text{en } \{x_N \geq R_2\} \cap B_R^+, \end{cases}$$

para cierto $R_2 < R$.

A continuación vemos que el soporte de u_R está acotado en la dirección de x' . Proce- diendo como en (10) se sigue que

$$u_R(x', x_N) \leq \varepsilon, \quad \forall x' \text{ tal que } |x'| = R_3, \quad \forall x_N > 0.$$

Tomemos $x_0 \in \{x_N = 0\}$. Probamos que para $|x_0|$ y R suficientemente grande, $u_R \leq \phi$, siendo ϕ una función que se anula en un pequeño entorno de x_0 , verificando además lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) &\leq \phi^m, & \text{en } \Omega \cap \{x_N > 0\}, \\ -|\nabla\phi|^{p-2} \frac{\partial\phi}{\partial x_N} &\geq \phi^{p-1}, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \\ \varepsilon := \inf_{\partial\Omega \cap \{x_N > 0\}} \phi &> 0, \end{aligned}$$

donde $\Omega = B(x_0, r_0)$, con $0 < r_0 \ll 1$. Nótese que x_0 puede ser cualquiera de los puntos en $\partial B_{R_3+r_0} \cap \{x_N = 0\}$, y en consecuencia u_R se anula en un entorno de este conjunto. La monotonía de u_R en $|x'|$ y en x_N finaliza la demostración.

Este resultado nos provee de una solución de soporte compacto de (4). Es más, de hecho, toda solución $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ no negativa y no trivial de (4), es de soporte compacto y radial en las variables tangenciales.

Utilizando que $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ y la continuidad Hölder del gradiente de φ , véase [T], demostramos

Lema 3 *Si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ satisface (4) entonces*

$$\|\varphi\|_{L^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C, \quad \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \quad \text{y} \quad \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \leq C.$$

Las estimaciones anteriores nos permiten deducir que $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{R}_+^N \setminus B_R^+} \varphi = 0$. De este hecho se sigue que $\varphi \leq \omega$ en $\{x_N > R_1\}$, con ω de la forma (11). Con técnicas similares a las ya descritas vemos que φ está acotada en x' .

Una vez probada la compacidad del soporte de φ , argumentando como en el Lema 2 se obtiene fácilmente la propiedad de simetría (6).

Agradecimientos

Financiado por MTM2005-08760-C02-02 (España), ANPCyT PICT 5009, UBA X066 and CONICET (Argentina).

Referencias

- [BB] C. Bandle and H. Brunner. *Blow-up in diffusion equations: a survey*. J. Comp. Appl. Math. Vol. 97, (1998), 3-22.
- [CM] X. Y. Chen and H. Matano. *Convergence, asymptotic periodicity and finite point blow up in one-dimensional semilinear heat equations*. J. Differential Equations, Vol. 78, (1989), 160-190.
- [CCFS] M. Chipot, M. Chlebík, M. Fila and I. Shafrir. *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in \mathbf{R}_+^n with a nonlinear boundary condition*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 223(2), (1998), 429–471.
- [CPE1] C. Cortázar, M. Del Pino and M. Elgueta. *On the blow-up set for $u_t = \Delta u^m + u^m$, $m > 1$* . Indiana Univ. Math. J. Vol. 47(2), (1998), 541-561.
- [CEF] C. Cortázar, M. Elgueta and P. Felmer. *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*. Comm. Partial Diff. Eq. Vol. 21(3&4), (1996), 507- 520.
- [DR] J. Dávila and J. D. Rossi. *Self-similar solutions of the porous medium equation in a half-space with a nonlinear boundary condition. Existence and symmetry*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 296, (2004), 634-649.
- [FBR] J. Fernández Bonder and J. D. Rossi. *Existence results for the p -Laplacian with nonlinear boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 263(1), (2001) 195-223.
- [FPL] J. Filo and M. Pérez-Llanos. *Regional blow-up for a doubly nonlinear equation with nonlinear boundary condition*. To appear in J. Dynam. Differential Equations.
- [GV1] V. Galaktionov and J. L. Vázquez. *Continuation of blow-up solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions*. Commun. Pure Appl. Math. Vol. 50, (1997), 1–67.
- [GV2] V. Galaktionov and J. L. Vázquez. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems A **8** (2002), 399–433.
- [GNN] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. Vol. 68, (1979), 209-243.
- [GK1] Y. Giga and R. V. Kohn. *Nondegeneracy of blow up for semilinear heat equations*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 42, (1989), 845-884.
- [GK2] Y. Giga and R. V. Kohn. *Characterizing blow-up using similarity variables*. Indiana Univ. Math. J. Vol. 42, (1987), 1-40.
- [PS] P. Pucci and J. Serrin. *The strong maximum principle revisited*. J. Differential Equations. Vol. 196(1), (2004), 1–66.
- [SGKM] A. Samarski, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyunov and A. P. Mikailov. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Walter de Gruyter, Berlin, (1995).
- [T] P. Tolksdorf. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*. J. Differential Equations. Vol. 51 no. 1, (1984), 126–150.