

Un esquema de alto orden de tipo MUSTA para la resolución numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos.

M.J. CASTRO¹, A. PARDO¹, C. PARÉS¹

¹ *Depto. de Análisis matemático, U. de Málaga. E-mail: pardo@anamat.cie.uma.es*

Palabras clave: Sistemas hiperbólicos no conservativos, bien equilibrado, MUSTA, GFORCE, WENO, shallow-water

Resumen

En este trabajo se presenta la extensión de los esquemas MUSTA (Multi-Stage) de alto orden a problemas no conservativos. En [7] se presentaron los esquema de tipo MUSTA para leyes de conservación, usando como resolvidor de Riemann aproximado tanto en las etapas de predicción como de corrección el esquema GFORCE. Estos esquemas destacan por su simplicidad y su bajo coste computacional.

En este trabajo formulamos el esquema GFORCE en el marco de los esquemas numéricos Ψ -conservativos (“camino-conservativo”) introducidos por Parés en [5]. El esquema MUSTA se reinterpreta como un esquema de reconstrucción de estados, donde el operador de reconstrucción usado está ligado a la resolución de los problemas de Riemann asociados a cada intercelda. Finalmente se propone el uso de un operador de reconstrucción de estados de alto orden, que combinado con la estrategia MUSTA, resulta un esquema de alto orden de tipo MUSTA.

Se presentan además algunos ensayos numéricos para el sistema de ecuaciones de aguas someras.

1. Introducción

Consideremos el sistema hiperbólico no conservativo:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1)$$

donde la incógnita $W(x, t)$ toma valores en un conjunto abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Supondremos que el sistema es estrictamente hiperbólico, esto es, $\forall W \in \Omega$ la matriz $\mathcal{A}(W)$

tiene N autovalores reales distintos

$$\lambda_1(W) < \dots < \lambda_N(W).$$

Nótese que (1) tiene soluciones estacionarias no triviales si posee algún campo linealmente degenerado asociado al autovalor 0.

Los sistemas de leyes de conservación con productos no conservativos y términos fuente

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(w) = -B(w)\frac{\partial w}{\partial x} + S(w)\frac{d\sigma}{dx}, \quad (2)$$

siendo $\sigma(x)$ función conocida, son un caso particular de (1). Efectivamente basta definir

$$\mathcal{A}(W) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J}(w) & -S(w) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (3)$$

donde

$$\mathcal{J}(w) = \frac{\partial F}{\partial w}(w) + B(w), \quad W = \begin{bmatrix} w \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

Supondremos además que $\mathcal{J}(w)$ tiene $N - 1$ autovalores reales y distintos

$$\lambda_1(w) < \dots < \lambda_{N-1}(w), \quad (4)$$

con autovectores asociados $r_j(w)$, $j = 1, \dots, N - 1$. Si ninguno de estos autovalores se anula, (1) es un sistema estrictamente hiperbólico: $\mathcal{A}(W)$ tiene N autovalores reales y distintos

$$\lambda_1(w), \dots, \lambda_{N-1}(w), 0, \quad (5)$$

con autovalores asociados

$$R_1(W), \dots, R_N(W), \quad (6)$$

dados por

$$R_i(W) = \begin{bmatrix} r_i(w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N - 1; \quad R_N(W) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(w)^{-1} \cdot S(w) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Obsérvese que el campo N es linealmente degenerado y está asociado al autovalor 0. Las curvas integrales del mismo vienen dadas por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dW}{ds} = R_N(W). \quad (8)$$

2. Esquemas numéricos Ψ -conservativos

En el contexto de la aproximación numérica para los sistemas hiperbólicos no conservativos (1), Parés introdujo en [5] la siguiente definición:

Definición 1 *Dada una familia de caminos Ψ , un esquema numérico es Ψ -conservativo si puede escribirse de la siguiente manera:*

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-), \quad (9)$$

donde

$$D_{i+1/2}^\pm = D^\pm(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n),$$

siendo D^- y D^+ dos funciones continuas de Ω^{p+q+1} a Ω que cumplen

$$D^\pm(W, \dots, W) = 0, \quad \forall W \in \Omega, \quad (10)$$

y

$$D^-(W_{-q}, \dots, W_p) + D^+(W_{-q}, \dots, W_p) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s; W_0, W_1) ds,$$

para cada $W_i \in \Omega$, $i = -q, \dots, p$.

Esta definición generaliza a la de esquema numérico conservativo para sistemas de leyes de conservación, de hecho se demuestra que si (1) es un sistema de leyes de conservación (esto es, si en (1) \mathcal{A} es la matriz jacobiana de una función flujo F), entonces todo esquema Ψ -conservativo para alguna familia de caminos Ψ es consistente y conservativo en el sentido habitual. Recíprocamente, un esquema conservativo en el sentido usual es Ψ -conservativo para cualquier familia de caminos Ψ .

2.1. Esquemas numéricos bien equilibrados

La aproximación numérica del equilibrio, esto es de las soluciones estacionarias, está íntimamente ligada a la propiedad de bien equilibrado.

Definimos el conjunto Γ de todas las curvas integrales γ de un campo linealmente degenerado de $\mathcal{A}(W)$ tal que el autovalor correspondiente es nulo en Γ . En [5] se demostró que para obtener un esquema numérico Ψ -conservativo bien equilibrado para una curva $\gamma \in \Gamma$, debe ocurrir:

$$\int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_0, W_1)) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = 0 \quad \forall W_0, W_1 \in \gamma. \quad (11)$$

3. Esquema GFORCE para sistemas hiperbólicos no conservativos

Presentamos en esta sección la formulación de un esquema de tipo GFORCE para sistemas hiperbólicos no conservativos. La deducción del mismo se detalla en [3]. En primer lugar, es necesario introducir el concepto de linealización de Roe propuesta por Tóumi en el marco de sistemas hiperbólicos no conservativos:

Definición 2 *Dada una familia de caminos Ψ , una función $\mathcal{A}_\Psi: \Omega \times \Omega \mapsto \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ es una linealización de Roe si cumple las siguientes propiedades:*

- Para cada W_L, W_R , $\mathcal{A}_\Psi(W_L, W_R)$ tiene N autovalores reales y distintos.
- $\forall W$, $\mathcal{A}_\Psi(W, W) = \mathcal{A}(W)$.
- $\forall W_L, W_R$, $\mathcal{A}_\Psi(W_L, W_R)(W_L - W_R) = \int_0^1 \mathcal{A}[\Psi(s; W_L, W_R)] \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds$.

En [3] se propone la siguiente generalización del esquema GFORCE para sistemas hiperbólicos no conservativos:

$$\begin{aligned}
W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-), \\
D_{i+1/2}^+ &= \frac{1-\omega}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \widehat{I}_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i) + \frac{\omega}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{A}_{i+1/2}^2 (W_{i+1} - W_i) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i), \quad (12) \\
D_{i+1/2}^- &= -\frac{1-\omega}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \widehat{I}_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i) - \frac{\omega}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{A}_{i+1/2}^2 (W_{i+1} - W_i) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{A}_{i+1/2} (W_{i+1} - W_i),
\end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{1}{1 + CFL}$ es un peso que garantiza propiedades de monotonía del esquema numérico. $\widehat{I}_{i+1/2}$ es una matriz, que se construye para garantizar el carácter bien equilibrado del mismo. En [3] se muestra que si la matriz de Roe en el sentido de Tóumi para Ψ es tal que el campo N es linealmente degenerado y está asociado al autovalor 0, una elección posible es:

$$\widehat{I}_{i+1/2} = K_{i+1/2} \left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] K_{i+1/2}^{-1} \quad (13)$$

donde $K_{i+1/2}$ tiene por columnas los autovectores de la matriz de Roe $\mathcal{A}_{i+1/2} = \mathcal{A}_\Psi(W_i, W_{i+1})$. Obsérvese que en este caso 0 es autovector de $\widehat{I}_{i+1/2}$ y el autovector coincide con el de la matriz de Roe $\mathcal{A}_{i+1/2}$. De esta forma es posible probar que el esquema GFORCE resultante es bien equilibrado.

En particular, para leyes de equilibrio con productos no conservativos podemos usar la siguiente reformulación:

$$\begin{aligned}
 w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^- \right\}; \\
 D_{i+1/2}^- &= \frac{1}{2} \left[F^{GF} (w_i^n, w_{i+1}^n) + B_{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2} (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n) \right] + \\
 &\quad - \left(\frac{\omega \Delta t}{2 \Delta x} \mathcal{J}_{i+1/2} + \frac{1-\omega \Delta x}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} \right) S_{i+1/2} (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n); \\
 D_{i+1/2}^+ &= \frac{1}{2} \left[-F^{GF} (w_i^n, w_{i+1}^n) + B_{i+1/2} (w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2} (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n) \right] + \\
 &\quad + \left(\frac{\omega \Delta t}{2 \Delta x} \mathcal{J}_{i+1/2} + \frac{1-\omega \Delta x}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} \right) S_{i+1/2} (\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n).
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F^{GF} &= \omega F^{LW} + (1-\omega) F^{LF}, \\
 F^{LW} (w_i^n, w_{i+1}^n) &= \frac{1}{2} (F(w_i^n) + F(w_{i+1}^n)) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{J}_{i+1/2}^2 (w_{i+1}^n - w_i^n), \\
 F^{LF} (w_i^n, w_{i+1}^n) &= \frac{1}{2} (F(w_i^n) + F(w_{i+1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (w_{i+1}^n - w_i^n),
 \end{aligned} \tag{15}$$

siendo $\mathcal{J}_{i+1/2}$, $B_{i+1/2}$ y $S_{i+1/2}$ los bloques correspondientes de la matriz de Roe $A_{i+1/2}$ dada en (3).

Aunque formalmente necesitamos la inversa de la matriz $\mathcal{J}_{i+1/2}$, en la práctica lo único que usamos es el producto $\mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$. Cuando un autovalor de $\mathcal{J}_{i+1/2}$ se anula (problemas resonantes), se usará una aproximación del producto $\mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$.

4. Esquemas MUSTA

En [7] se describen los esquemas de tipo MUSTA (MUlti STAge). Se trata de un esquema de tipo predictor-corrector para aproximar la solución del problema de Riemann en cada intercelda y definir así el flujo numérico en cada intercelda. Para que el esquema resultante sea eficiente desde el punto de vista computacional, en cada etapa del algoritmo se suele usar resolvidores de Riemann aproximados de bajo coste computacional como es el caso del esquema de tipo GFORCE.

A fin de poder extender los esquemas MUSTA a problemas no conservativos, en [3] se interpretan como operadores de reconstrucción, esto es, cada etapa del algoritmo MUSTA se interpreta como una “reconstrucción” de la solución a ambos lados de la intercelda.

Finalmente, para obtener un esquema de alto orden podemos combinar la estrategia MUSTA con un operador de reconstrucción de alto orden, resultando un esquema MUSTA de alto orden. En este trabajo hemos usado el operador de reconstrucción PHM (piecewise hyperbolic method) (ver [4]), combinado con un esquema MUSTA de dos etapas, una de predicción y otra de corrección.

5. Ensayos numéricos

Consideramos en esta sección el sistema de ecuaciones de aguas someras unidimensional que modelan la evolución de fluido homogéneo no viscoso en un canal recto poco profundo

de sección rectangular constante:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right] = gh \frac{dH}{dx}. \end{cases} \quad (16)$$

La variable x hace referencia al eje del canal, t al tiempo, $q(x, t)$ y $h(x, t)$ representan al flujo másico y la altura de la columna de agua, $H(x)$ la profundidad medida desde un nivel de referencia y g es la gravedad.

Para aproximar numéricamente las soluciones del problema anterior hemos usado un esquema MUSTA de dos etapas usando en cada etapa el esquema GFORCE dado en (14), donde

$$\mathcal{J}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh_{i+1/2} - u_{i+1/2}^2 & 2u_{i+1/2} \end{pmatrix}, \quad B_{i+1/2} = 0, \quad S_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_{i+1/2} \end{pmatrix},$$

siendo

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \quad \text{y} \quad u_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}}.$$

Estos estados intermedios corresponden a una linealización de Roe asociada a una familia de segmentos.

En este caso particular, el producto

$$\mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-F_{i+1/2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $F_{i+1/2} = \frac{u_{i+1/2}^2}{gh_{i+1/2}}$. Cuando alguno de los autovalores de $\mathcal{J}_{i+1/2}$ se anula $F_{i+1/2} = 1$, con lo cual el producto $\mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$ no está definido. Para evitar estos problemas, proponemos sustituir el vector $\mathcal{J}_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}$ por

$$\begin{pmatrix} \text{signo}(1 - F_{i+1/2}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El esquema GFORCE así construido verifica que es exactamente bien equilibrado para el agua en reposo, aproximando el resto de soluciones estacionarias con orden 1. Otra posibilidad sería usar una técnica de reconstrucción hidrostática generalizada (ver [2], [3]).

5.1. Test numéricos

Test 1: El objetivo de este test es comprobar el orden de los esquemas ROE (véase [6]), GFORCE, MUSTA y PHM-MUSTA. Para ello consideramos un canal de 10 m de largo y una topografía dada por $H(x) = 1 - 0,5e^{-3(x-5)^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Como datos iniciales imponemos $q = 0$ y $h(x) = H(x) + 2 - 0,3(1 - e^{-0,5(x-5)^2})$ y dejamos evolucionar la solución hasta $t = 0,03$. Se ha tomado $\text{CFL} = 0,7$. Hemos tomado como solución de referencia una

Celdas	ROE				GFORCE			
	error h	orden h	error q	order q	error h	orden h	error q	order q
320	$1,16E^{-2}$	-	$4,24E^{-2}$	-	$1,49E^{-2}$	-	$5,31E^{-2}$	-
640	$5,84E^{-3}$	0,997	$2,16E^{-2}$	0,973	$6,84E^{-3}$	1,129	$2,46E^{-2}$	1,109
1280	$2,92E^{-3}$	1,000	$1,09E^{-2}$	0,989	$3,26E^{-3}$	1,070	$1,18E^{-2}$	1,060
Celdas	MUSTA				PHM-MUSTA			
	error h	orden h	error q	order q	error h	orden h	error q	order q
320	$1,28E^{-2}$	-	$4,69E^{-2}$	-	$7,59E^{-4}$	-	$4,39E^{-3}$	-
640	$6,04E^{-3}$	1,085	$2,24E^{-2}$	1,065	$1,21E^{-4}$	2,651	$7,37E^{-4}$	2,575
1280	$2,93E^{-3}$	1,045	$1,09E^{-2}$	1,036	$1,82E^{-5}$	2,732	$1,11E^{-4}$	2,737

Tabla 1: Test 1, error y orden en $t=0.03$

solución calculada con un mallado de 20480 puntos. Los errores en norma L^1 y el orden se muestran en la tabla 1.

Test 2: En este test se comprueba como se comportan los esquemas ROE, GFORCE, MUSTA y PHM-MUSTA para tiempos grandes y la convergencia hacia una solución estacionaria que posea una transición y un choque. Se toma en el intervalo $[0, 25]$ la función de fondo

$$H(x) = \begin{cases} 0,05(x - 10)^2, & \text{if } 8 < x < 12; \\ 0,2, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Y los datos iniciales $h = 0,33$, $q = 0,18$, con condiciones de frontera $q(0, t) = 0,18$, $h(25, t) = 0,33$. Se ha tomado CFL= 0,9. Y el tiempo final es $t = 200$. Se ha calculado la solución exacta con un mallado de 3200 puntos. La tabla 2 muestra el error en norma L^1 .

Cells	ROE				GFORCE			
	error h	orden h	error q	order q	error h	orden h	error q	order q
200	$4,94E^{-3}$	-	$5,09E^{-3}$	-	$8,19E^{-2}$	-	$3,41E^{-2}$	-
400	$1,55E^{-3}$	1,669	$2,87E^{-3}$	0,825	$4,64E^{-2}$	0,818	$1,75E^{-2}$	0,964
800	$6,98E^{-4}$	1,156	$1,39E^{-3}$	1,049	$2,77E^{-2}$	0,743	$9,33E^{-3}$	0,905
Cells	MUSTA				PHM-MUSTA			
	error h	orden h	error q	order q	error h	orden h	error q	order q
200	$4,75E^{-2}$	-	$1,93E^{-2}$	-	$5,64E^{-3}$	-	$6,41E^{-3}$	-
400	$2,75E^{-2}$	0,790	$1,09E^{-2}$	0,821	$2,05E^{-3}$	1,458	$4,03E^{-3}$	0,669
800	$1,46E^{-2}$	0,914	$5,39E^{-3}$	1,020	$7,36E^{-4}$	1,479	$1,86E^{-3}$	1,113

Tabla 2: Test 2, error en $t=200$.

Test 3: El siguiente test muestra el comportamiento de los esquemas ROE, GFORCE, MUSTA y PHM-MUSTA en presencia de frentes seco/mojado, usando para ello la técnica

descrita en [1]. Para ello usamos un test propuesto por Gallouët en que aparece una zona seca sobre un fondo escalonado. En el intervalo $[0, 25]$ definimos el fondo y los datos iniciales

$$H(x) = \begin{cases} 13, & \text{si } 25/3 < x < 25/2; \\ 14, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} -300, & \text{si } \frac{50}{3} \leq x; \\ 300, & \text{si } \frac{50}{3} > x. \end{cases} \quad \text{y } h(x) = H(x) - 4.$$

Se ha tomado $CFL = 0,9$ y $\Delta x = 0,125$. La figura 1 muestran los resultados de los diferentes esquemas ante una solución de referencia calculada sobre una mallado fino compuesto por 5000 volúmenes en $t = 0,25$.

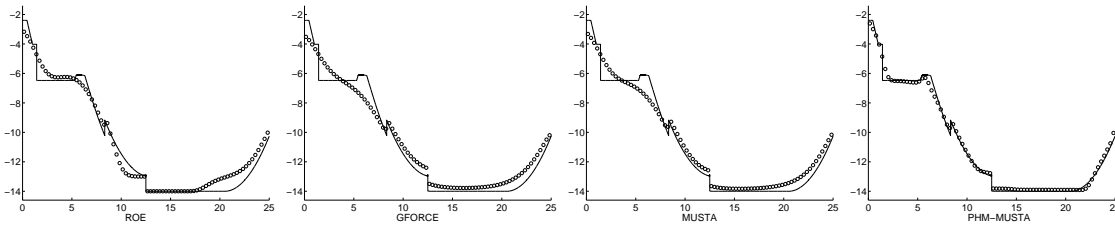


Figura 1: Test 3, altura, comparación con una solución de referencia en $t=0.25$

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente mediante el proyecto de investigación MTM2006-08075.

Referencias

- [1] M. Castro, A. Ferreiro, J.A. García-Rodríguez, J. M. González, J. Macías, C. Parés y M.E. Vázquez-Cendon. *On the numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: application to one-layer and two-layer 1-D shallow water system*. Math. Comp. Model. 42 (3-4): 419-439, 2005.
- [2] M.J. Castro, A. Pardo, C. Parés, *Well-Balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Aceptado en M3AS, 2007.
- [3] M.J. Castro, A. Pardo, C. Parés, E.F. Toro, *Non conservative well-balanced MUSTA schemes and high order extension*. Submitted.
- [4] A. Marquina. *Local piecewise hyperbolic reconstructions for nonlinear scalar conservation laws*. SIAM J. Sci. Comp 15:892-915, 1994.
- [5] C. Parés. *Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework*. SIAM J. Num. Anal. 44(1): 300-321, 2006.
- [6] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to Shallow-Water Systems*. M2AN, Vol. 38, N°5, pp. 821-852, 2004.
- [7] E.F. Toro, V.A. Titarev, *MUSTA Schemes for Systems of Conservation Laws*. J. Comput. Phys., 216(2): 403 - 429, 2006.