

## Puntos de retroceso y soluciones resonantes en ramas no acotadas de soluciones

ROSA PARDO<sup>1</sup>, JOSE ARRIETA<sup>1</sup>, ANIBAL RODRIGUEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. Complutense de Madrid, Madrid 28040, Spain,  
E-mails: rpardo@mat.ucm.es, arrieta@mat.ucm.es, arober@mat.ucm.es.*

**Palabras clave:** Nonlinear boundary conditions bifurcation stability of equilibria monotonicity

### Resumen

Analizamos la existencia de puntos de retroceso y de soluciones resonantes en un problema elíptico con condición de frontera no lineal dependiente de un parámetro del tipo  $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u + g(\lambda, x, u)$  de forma que  $g$  es oscilatoria y  $\frac{g(\lambda, x, u)}{u} \rightarrow 0$  cuando  $|u| \rightarrow \infty$ . Existen ramas no acotadas de soluciones que no son a priori ni subcríticas ni supercríticas, y existen ramas no acotadas de soluciones que no son a priori ni estables ni inestables. En dichas ramas, establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso convergiendo al punto de bifurcación desde infinito y, en consecuencia, para que existan **infinitas soluciones del problema resonante**.

## 1. Introducción

Consideramos el siguiente problema parabólico con condiciones de contorno no lineales dependiendo de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = 0, & \text{en } \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u + g(\lambda, x, u), & \text{sobre } \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  con  $N \geq 2$ , acotado y suficientemente regular. Suponemos que la no-linealidad verifica la siguiente hipótesis

**(H1)**  $g$  es continua en sus tres variables y existen funciones no negativas  $\Lambda(\lambda)$  y  $U(u)$  tales que  $|g(\lambda, x, u)| \leq \Lambda(\lambda)U(u)$  con la propiedad de que  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} U(s)/s = 0$ .

En [4, 2] estudiamos el problema elíptico asociado

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u + g(\lambda, x, u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

y demostramos que este tipo de problemas admite ramas de soluciones  $(\lambda, u_\lambda)$  que no están acotadas cuando  $\lambda$  converge hacia un autovalor de Steklov. Este fenómeno se conoce como bifurcación desde infinito, ver [8]. De ahora en adelante nos centramos en caracterizar la multiplicidad de soluciones en entornos de puntos de bifurcación desde el infinito.

Una solución  $(\lambda^*, u^*)$  en una rama de soluciones es un **punto de retroceso** si en un entorno no hay soluciones para valores del parámetro  $\lambda > \lambda^*$ , (o bien no hay soluciones próximas para  $\lambda < \lambda^*$ ). Estos puntos de retroceso están siempre relacionados con la multiplicidad de soluciones y, eventualmente, con sus cambios de estabilidad.

En ramas que no son a priori ni subcríticas (a la izquierda del autovalor) ni supercríticas (a la derecha), establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso convergiendo al punto de bifurcación desde infinito. Como consecuencia, existen **infinitas soluciones del problema resonante**, aquél en el que el parámetro coincide con el autovalor, ver el Teorema 1. Consideremos análogamente ramas que no son a priori ni estables ni inestables. Establecemos condiciones suficientes para que exista una sucesión de infinitos puntos de retroceso *simples* convergiendo al punto de bifurcación desde infinito y, como consecuencia, para que el problema resonante tenga infinitas soluciones. En dichos puntos de retroceso simples, la estabilidad de las soluciones cambia de ser estables a ser inestables, ver el Teorema 2.

En [4, 2] establecimos condiciones suficientes para que las ramas de soluciones sean subcríticas o supercríticas y estudiamos asimismo el principio del anti-máximo, ver [6], y condiciones del tipo Landesman y Lazer para algunos problemas resonantes, ver [7]. Existen resultados en la literatura para problemas elípticos con la no linealidad actuando en el interior del dominio y con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, ver [1]. En este caso, los autovalores del problema de Dirichlet juegan el papel determinante

En [4, 3] establecimos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de dichas ramas no acotadas de soluciones. Además suponiendo que la no-linealidad es diferenciable con respecto del parámetro, establecimos en [3] condiciones suficientes para garantizar la monotonía con respecto del parámetro. En consecuencia, la solución positiva es única bajo ciertas condiciones, para valores de  $\lambda$  suficientemente próximos al autovalor de Steklov. Nuestra demostración sobre la monotonía es una consecuencia del principio del anti-máximo aplicado sobre la derivada de la solución con respecto del parámetro. Para valores del parámetro a la izquierda de un cierto autovalor, la derivada respecto del parámetro es positiva, en consecuencia la función crece con el parámetro, recíprocamente a la derecha la derivada es negativa y la función decrece con el parámetro.

Las condiciones de Landesman y Lazer para la existencia de soluciones de equilibrio en los casos resonantes establecen básicamente que, si la bifurcación desde infinito es subcrítica (o supercrítica), entonces el problema resonante tiene solución. Será por tanto interesante centrarse en el estudio de ramas que no son a priori *ni subcríticas ni supercríticas* y analizar su comportamiento en un entorno del punto de bifurcación desde infinito. Las funciones  $g$  oscilatorias son ejemplos arquetipo.

Finalmente terminamos con un ejemplo para el caso uni-dimensional.

## 2. Puntos de retroceso. Multiplicidad de Soluciones. Infinitas soluciones del problema resonante

Esta sección estudia la multiplicidad de soluciones en una rama ni subcrítica ni supercrítica. Definimos para algún  $\alpha < 1$ , las siguientes funciones

$$G(\lambda, x, s) := \frac{sg(\lambda, x, s)}{|s|^{1+\alpha}}, \quad D(\lambda, x, s) := \frac{g_u(\lambda, x, s)}{|s|^{\alpha-1}}, \quad F(\lambda, x, s) := G(\lambda, x, s) - D(\lambda, x, s), \quad (3)$$

donde  $\sigma_1$  es el primer autovalor de Steklov y  $g_u = \frac{\partial g}{\partial u}$  y definimos los siguientes números

$$\underline{\mathbf{G}}_+ := \int_{\partial\Omega} \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, +\infty)} G(\lambda, x, s) \Phi_1^{1+\alpha}, \quad \overline{\mathbf{G}}_+ := \int_{\partial\Omega} \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, +\infty)} G(\lambda, x, s) \Phi_1^{1+\alpha}, \quad (4)$$

y

$$\underline{\mathbf{F}}_+ := \int_{\partial\Omega} \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, +\infty)} F(\lambda, x, s) \Phi_1^{1+\alpha}, \quad \overline{\mathbf{F}}_+ := \int_{\partial\Omega} \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, +\infty)} F(\lambda, x, s) \Phi_1^{1+\alpha}, \quad (5)$$

donde  $\Phi_1$  representa a la primera autofunción positiva con  $\|\Phi_1\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = 1$ .

Dada  $u_n$ , una sucesión de soluciones de (2) para el valor del parámetro  $\lambda_n$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \sigma_1$  y  $\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow \infty$ , el siguiente Lema proporciona cotas inferiores y superiores de la diferencia  $\sigma_1 - \lambda_n$ . se puede consultar en [4, Lema 4.2].

**Lema 1.** *Supongamos que la no-linealidad  $g$  verifica la hipótesis **(H1)**. Supongamos que para algún  $\alpha < 1$  existe una función  $G_1 \in L^1(\partial\Omega)$  tal que*

$$|G(\lambda, x, s)| \leq G_1(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall (\lambda, s) \approx (\sigma_1, +\infty). \quad (6)$$

*Consideremos  $u_n$ , una sucesión de soluciones de (2) para el valor del parámetro  $\lambda_n$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \sigma_1$  y  $\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \rightarrow \infty$ . Entonces, tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\mathbf{G}}_+}{\int_{\partial\Omega} \Phi_1^2} &\leq \frac{1}{\int_{\partial\Omega} \Phi_1^2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} G(\lambda_n, \cdot, u_n) \Phi_1^{1+\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1 - \lambda_n}{\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{\alpha-1}} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1 - \lambda_n}{\|u_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\int_{\partial\Omega} \Phi_1^2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} G(\lambda_n, \cdot, u_n) \Phi_1^{1+\alpha} \leq \frac{\overline{\mathbf{G}}_+}{\int_{\partial\Omega} \Phi_1^2}. \quad \square \end{aligned} \quad (7)$$

Gracias a este Lema podemos afirmar que, para que exista una rama ni subcrítica ni supercrítica necesariamente ha de verificarse que  $\underline{\mathbf{G}}_+ \leq 0 \leq \overline{\mathbf{G}}_+$ , y para saber si una sucesión de soluciones  $\{(\lambda_n, u_n)\}$  es subcrítica, tendríamos que analizar el signo de  $\int_{\partial\Omega} G(\lambda_n, \cdot, u_n) \Phi_1^{1+\alpha}$ , lo cual resulta, en general y a priori, inabordable.

Recordamos que existe una componente no acotada de soluciones  $\mathcal{D}^+ \subset \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ , i.e. un conjunto conexo y maximal que contiene  $(\sigma_1, \infty)$  y que verifican, en un entorno de  $(\sigma_1, \infty)$ , que las soluciones se pueden escribir  $u = s\Phi + w$ , donde  $w = o(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , cf. [4, Teorema 3.4]

En el siguiente Teorema establecemos condiciones explicitas sobre  $g$  para que (2) tenga soluciones subcríticas y supercríticas en una misma rama. Lo hacemos en términos de la oscilación del signo de  $\int_{\partial\Omega} G(\sigma_1, \cdot, s\Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha}$  y seleccionando sucesiones sobre las que el signo se mantiene positivo (o bien negativo). Como conclusión, en un entorno del punto de bifurcación desde el infinito, existen infinitos puntos de retroceso e infinitas soluciones resonantes. Además, existen soluciones para cualesquiera valores del parámetro en un intervalo cerrado conteniendo en su interior el primer autovalor.

**Teorema 1:** *Supongamos que la no-linealidad  $g$  verifica la hipótesis (H1) y que su derivada parcial  $g_u(\lambda, \cdot, \cdot) \in C(\partial\Omega \times [M, \infty))$ ,  $M \gg 1$ , para cualquier  $\lambda \approx \sigma_1$ . Supongamos que existe algún  $\alpha < 1$  tal que se verifican las cotas uniformes (10) y*

$$(H2) \quad \|g_u(\lambda, \cdot, s)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C|s|^{\alpha-1}, \quad \forall (\lambda, s) \approx (\sigma_1, \infty).$$

Si existen dos sucesiones  $\{s_n\}, \{s'_n\}$  ambas convergentes a  $+\infty$ , tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} G(\sigma_1, \cdot, s_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} G(\sigma_1, \cdot, s'_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha} < 0 \quad (8)$$

Entonces, en la componente  $\mathcal{D}^+$ , se verifican las siguiente afirmaciones

- i) Hay dos sucesiones de soluciones  $\{(\lambda_n, u_n)\}, \{(\lambda'_n, u'_n)\}$  que convergen a  $(\sigma_1, \infty)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , una de ellas subcrítica  $\lambda_n < \sigma_1$  y la otra supercrítica  $\lambda'_n > \sigma_1$ .
- ii) Hay una sucesión infinita de puntos de retroceso  $\{(\lambda_n^*, u_n^*)\}$  tal que  $(\lambda_n^*, \|u_n^*\|_\infty) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- iii) Hay una sucesión infinita de soluciones resonantes, i.e. con  $\lambda_n = \sigma_1$ .

**Demostración:** En la componente  $\mathcal{D}^+$ , elegiremos una sucesión  $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$ , tal que  $\int_{\partial\Omega} u_n \Phi_1 = s_n \int_{\partial\Omega} \Phi_1^2$  con  $s_n$  como en (8). Definiremos  $w_n = u_n - s_n \Phi_1$ ,  $w_n = o(s_n)$  (cf. Teorema 3.4 en [4]).

Por la hipótesis (H2) deducimos que para todo  $(\lambda, s) \approx (\sigma_1, +\infty)$  y para cualquier  $w \in L^\infty(\partial\Omega)$  tal que  $\frac{1}{2}\Phi_1 > \frac{|w|}{s}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |g(\lambda, \cdot, s\Phi_1 + w) - g(\lambda, \cdot, s\Phi_1)| \Phi_1 &\leq C|\partial\Omega| \|w\|_\infty \sup_{\tau \in [0,1]} \|g_u(\lambda, \cdot, s\Phi_1 + \tau w)\|_\infty \\ &\leq C|\partial\Omega| \|w\|_\infty |s|^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, hemos tenido en cuenta que  $0 < C \leq \frac{1}{2}\Phi_1 \leq \left| \Phi_1 + \frac{\tau w}{|s|} \right|$  para alguna constante  $C$ . De este modo, para cualquier  $\|w_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = o(s_n)$  podemos escribir

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{g(\lambda, \cdot, s_n \Phi_1 + w_n) - g(\lambda, \cdot, s_n \Phi_1)}{|s_n|^\alpha} \right| \Phi_1 \leq C|\partial\Omega| \frac{\|w_n\|_\infty}{|s_n|} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Además, aplicando primero la definición de  $G$ , (3), y el hecho de que para cualquier  $\|w_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = o(s_n)$  se tiene que  $\Phi_1 + w_n/s_n \rightarrow \Phi_1$  en  $L^\infty(\partial\Omega)$ , segundo la anterior desigualdad, tercero de nuevo la definición de  $G$  y por último la hipótesis (8) resulta

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} G(\lambda_n, \cdot, s_n \Phi_1 + w_n) \Phi_1^{1+\alpha} &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} \frac{s_n g(\lambda_n, \cdot, s_n \Phi_1 + w_n)}{|s_n|^{1+\alpha}} \Phi_1 \quad (10) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} \frac{s_n g(\lambda_n, \cdot, s_n \Phi_1)}{|s_n|^{1+\alpha}} \Phi_1 \\ &\geq \liminf_{(\lambda, n) \rightarrow (\sigma_1, +\infty)} \int_{\partial\Omega} G(\sigma_1, \cdot, s_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha} > 0, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta ahora la desigualdad (7) del Lema 1 se deduce que  $\lambda_n < \sigma_1$ . Recíprocamente, eligiendo una sucesión  $(\lambda'_n, u'_n) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$ , tal que  $\int_{\partial\Omega} u'_n \Phi_1 = s'_n \int_{\partial\Omega} \Phi_1^2$  con  $s'_n$  como en (8), se demuestra que dichas soluciones son supercríticas y que  $\lambda'_n > \sigma_1$ . La afirmación *i*) está demostrada. El hecho de que  $\mathcal{D}$  sea conexo, y que (10) se verifica para toda  $\|w_n\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = o(s_n)$ , implica que en  $\mathcal{D}$  existe una sucesión  $\{(\tilde{\lambda}_n, \tilde{s}_n)\}$  que converge a  $(\sigma_1, \infty)$ , tal que  $\tilde{u}_n = \tilde{s}_n \Phi_1 + \tilde{w}_n$ , y  $\tilde{\lambda}_n = \sigma_1$ , lo que demuestra las afirmaciones *ii*) y *iii*).  $\square$

### 3. Puntos de retroceso simples. Multiplicidad de Soluciones. Infinitos cambios en la estabilidad de las soluciones del problema resonante

Esta sección estudia la multiplicidad de soluciones en una rama ni estable ni inestable. Se puede demostrar que para que exista una rama ni estable ni inestable, necesariamente ha de verificarse que  $\underline{\mathbf{F}}_+ \leq 0 \leq \overline{\mathbf{F}}_+$ , ver [4], la demostración presenta grandes similitudes con el caso de ramas ni subcríticas ni supercríticas, i.e. cuando se verifica  $\underline{\mathbf{G}}_+ \leq 0 \leq \overline{\mathbf{G}}_+$ .

A continuación caracterizamos la existencia de puntos de retroceso simples en una componente no acotada  $\mathcal{D}$  de soluciones. Para desarrollar esta teoría, necesitaremos más regularidad sobre la no linealidad que la supuesta hasta ahora, supondremos grosso modo  $g \in C^2$ . Para simplificar las hipótesis supondremos de ahora en adelante que  $g(\lambda, x, s) = g(s)$  aunque todos los resultados pueden enunciarse para ese tipo más general de no linealidad, cf. [5]

Denotemos por  $u_\lambda > 0$  una solución de (2) bifurcada desde infinito. El problema de autovalores de Steklov de la linealización en torno a  $u_\lambda$  viene dado por

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 + \varphi_1 = 0, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \mu_1 \varphi_1 + g_u(u_\lambda) \varphi_1, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\mu_1 = \mu_1(-g'(u_\lambda))$  y  $\varphi_1 = \varphi_1(\lambda, u_\lambda) > 0$  está normalizado en la norma de  $L^\infty(\partial\Omega)$ . De acuerdo con esta notación, denotaremos por  $\mu_1[-g'(u^*)]$  al primer autovalor de Steklov correspondiente a la linealización (11) para  $(\lambda, u_\lambda) = (\lambda^*, u^*)$  y por  $\varphi_1^*$  la correspondiente autofunción.

El siguiente Lema caracteriza la existencia de un punto de retroceso simple y la estabilidad de las soluciones parametrizadas en un entorno del punto de retroceso. Omitimos su demostración, que está basada en la alternativa de Fredholm y en estimar los signos de los autovalores.

**Lema 2:** *Supongamos que  $g \in C^2([M, \infty))$  con  $M \gg 1$  y que se verifica la hipótesis (H1). Con las notaciones anteriores, sea  $(\lambda^*, u^*)$  la solución en una rama de soluciones positivas. Supongamos que  $\lambda^*$  es el primer autovalor de Steklov de la linealización*

$$\lambda^* = \mu_1[-g'(u^*)]. \quad (12)$$

*Entonces  $(\lambda^*, u^*)$  es un punto de retroceso simple, y localmente la curva de soluciones  $(\lambda, u_\lambda) \approx (\lambda^*, u^*)$  se puede parametrizar*

$$\lambda(\tau) = \lambda^* + \tau^2 \lambda_2 + o(\tau^2), \quad \text{cuando } \tau \rightarrow 0 \quad (13)$$

$$u(\tau) = u^* + \tau \varphi_1^* + \tau^2 v_2 + o(\tau^2), \quad \text{cuando } \tau \rightarrow 0. \quad (14)$$

*donde  $v_2 \in (\text{span}[\varphi_1^*])^\perp$ . Además, si  $\int_{\partial\Omega} g''(u^*)[\varphi_1^*]^3 > 0$ , (resp.  $< 0$ ), entonces localmente para  $\tau \approx 0$ ,  $u(\tau)$  es inestable para  $\tau > 0$  (resp.  $< 0$ ) y estable para  $\tau < 0$  (resp.  $> 0$ .)*

En el siguiente Teorema damos condiciones para la existencia de una sucesión de puntos de retroceso simples  $\{(\lambda_n^*, u_n^*)\}$  tal que  $(\lambda_n^*, \|u_n^*\|_\infty) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En un punto de retroceso simple, cambia la estabilidad de las soluciones. En el siguiente Teorema también caracterizamos la estabilidad de sucesiones de soluciones en términos del signo de  $\int_{\partial\Omega} F(\sigma_1, \cdot, s_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha}$  sobre subsucesiones.

**Teorema 2. (Puntos de retroceso simples en la rama de soluciones positivas que bifurca desde el infinito).**

*Supongamos que la no-linealidad  $g \in C^2([M, \infty))$ ,  $M \gg 1$  y verifica la hipótesis (H1). Supongamos que para algún  $\alpha < 1$ , existe una constante  $C$  tal que*

$$|D(s)| \leq C, \quad |F(s)| \leq C, \quad |g''(s)| \leq C|s|^{\alpha-2} \quad \forall s \approx +\infty. \quad (15)$$

*Si existen dos sucesiones  $\{s_n\}$ ,  $\{s'_n\}$  ambas convergentes hacia  $\infty$ , tales que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} F(\sigma_1, \cdot, s_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} F(\sigma_1, \cdot, s'_n \Phi_1) \Phi_1^{1+\alpha} < 0. \quad (16)$$

*Entonces se verifican las siguientes afirmaciones*

- i) Hay una rama no acotada que contiene una sucesión de soluciones estables y otra sucesión de soluciones inestables.*
- ii) Hay una rama no acotada que contiene una sucesión de puntos de retroceso simples  $\{(\lambda_n^*, u_n^*)\}$  tales que  $(\lambda_n^*, \|u_n^*\|_\infty) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

## 4. Un ejemplo para el caso $N = 1$

El siguiente ejemplo ilustra todas las conclusiones anteriores. Vamos a hacer explícitas algunas ideas en el caso uni-dimensional. Sabemos que el problema de bifurcación es

un problema no lineal con dos parámetros que se puede tratar usando técnicas finito-dimensionales, cf. sección 8 en [4]. Podemos reescribir la ecuación (2) en  $(0, 1)$  como

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = 0, & \text{en } (0, 1) \\ -u_x(0) = \lambda u + g(\lambda, 0, u(0)), \\ u_x(1) = \lambda u + g(\lambda, 1, u(1)). \end{cases} \quad (17)$$

La solución general de la ecuación diferencial es  $u(x) = ae^x + be^{-x}$  y por tanto las condiciones de contorno no lineales proporcionan dos ecuaciones no lineales en términos de dos constantes  $a$  y  $b$ . La función  $u = ae^x + be^{-x}$  es una solución si  $(\lambda, a, b)$  verifica

$$\begin{pmatrix} -(1+\lambda) & (1-\lambda) \\ (1-\lambda)e & -(1+\lambda)e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\lambda, 0, a+b) \\ g(\lambda, 1, ae + be^{-1}) \end{pmatrix}$$

En este caso sólo tenemos dos autovalores de Steklov,  $\sigma_1 = \frac{e-1}{e+1} < \sigma_2 = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{e+1}{e-1}$ . Elegimos  $g(\lambda, x, s) = g(s)$  y nos restringimos a buscar soluciones simétricas  $u_s(x) = s(e^x + e^{1-x})$ . Es fácil demostrar que  $u_s$  es una solución si  $\lambda$  verifica

$$\lambda(s) = \frac{e-1}{e+1} - \frac{g(s(e+1))}{s(e+1)}, \quad a > 0. \quad (18)$$

y por tanto, siempre que  $g(s) = o(s)$  en el infinito, existe una rama no acotada de soluciones  $(\lambda(s), u_s) \rightarrow (\sigma_1, \infty)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Fijo ahora  $g(s) = s^\alpha \sin(s^\beta)$  para cualquier  $\alpha < 1, \beta > 0$ . Por las definiciones (3) y (4)

$$\underline{\mathbf{G}}_+ = \int_{\partial\Omega} \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{sg(s)}{|s|^{1+\alpha}} \Phi^{1+\alpha} = \int_{\partial\Omega} \liminf_{s \rightarrow +\infty} \sin(s^\beta) \Phi^{1+\alpha} = - \int_{\partial\Omega} \Phi^{1+\alpha} < 0, \quad (19)$$

análogamente se calcula  $\overline{\mathbf{G}}_+$  y se obtiene que  $\underline{\mathbf{G}}_+ < 0 < \overline{\mathbf{G}}_+$ , y la rama bifurcada desde el infinito no es ni subcrítica ni supercrítica. Además,  $(\sigma_1, u_k)$  es una solución para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ , donde  $u_k(x) := \frac{(k\pi)^{1/\beta}}{e+1} (e^x + e^{1-x})$ , i.e. hay infinitas soluciones del problema resonante cuando  $\lambda = \sigma_1$  y en consecuencia hay infinitos puntos de retroceso en esta rama no acotada, cf. la siguiente figura.

Observamos que con respecto a la linealización, las cosas son diferentes dependiendo de  $\alpha + \beta$ . El autovalor de la ecuación linealizada es

$$\mu_1(-g'(u_s)) := \frac{e-1}{e+1} - \alpha \frac{\sin[(s(e+1))^\beta]}{[s(e+1)]^{1-\alpha}} - [s(e+1)]^{\alpha+\beta-1} \cos[(s(e+1))^\beta], \quad (20)$$

y  $\mu_1(-g'(u_s)) \rightarrow \sigma_1$  cuando  $u_s \rightarrow \infty$ , para  $\alpha + \beta \geq 1$ . Por otra parte, el autovalor de la ecuación linealizada verifica  $\mu_1(-g'(u_s)) \rightarrow \sigma_1$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , siempre que  $\alpha + \beta < 1$ .

Además, si  $\alpha + \beta < 1$ , reemplazando  $\alpha$  por  $\alpha + \beta$  en las definiciones (3) y (4)

$$\underline{\mathbf{F}}_+ = \int_{\partial\Omega} \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{sg - s^2 g'}{|s|^{1+\alpha+\beta}} \Phi^{1+\alpha+\beta} = \int_{\partial\Omega} \liminf_{s \rightarrow +\infty} -\beta \cos(s^\beta) \Phi^{1+\alpha+\beta} = -\beta \int_{\partial\Omega} \Phi^{1+\alpha+\beta}, \quad (21)$$

análogamente se calcula  $\overline{\mathbf{F}}_+$  y se obtiene que  $\underline{\mathbf{F}}_+ < 0 < \overline{\mathbf{F}}_+$ . La rama que bifurca desde el infinito contiene tanto soluciones estables como soluciones inestables, y hay una sucesión infinita de puntos de retroceso simples .

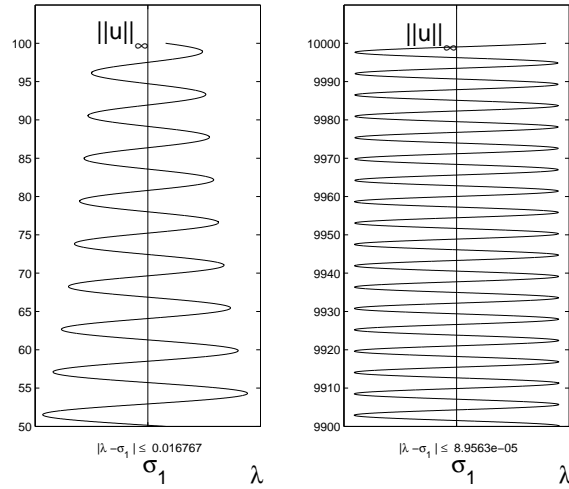


Figura 1: Diagrama de bifurcación de soluciones positivas  $(\lambda, u_\lambda) \approx (\sigma_1, \infty)$  con  $\Omega = (0, 1)$  y  $g(\lambda, x, u) := \sin(u)$

## Agradecimientos

Financiados parcialmente por el Proyecto MTM2006–08262, MEC, por el Programa de Financiación de Grupos de Investigación UCM-Comunidad de Madrid GR69/06, Grupo 920894 y el segundo y el tercer autor, por el Proyecto Hispano Brasileiro PHB2006-003-PC, MEC.

## Referencias

- [1] D. Arcoya & J.L. Gámez, *Bifurcation Teoría y Related Problems: Anti-Maximum Principle and Resonance*, Comm. P.D.E., Vol. **5**, N. 4, 557-569, (2001).
- [2] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Problemas elípticos con condiciones de contorno asintóticamente lineales en infinito*. Proceedings del XVIII Congreso on Differential Equaciones y Aplicaciones/VIII Congreso on Applied Mathematics (Spanish) (Tarragona, 2003).
- [3] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Sobre la estabilidad y la monotonía de ramas de soluciones no acotadas de problemas elípticos con condiciones de frontera asintóticamente lineales*. Proceedings del XIX CEDYA, IX Congreso de Matemática Aplicada (Spanish), ISBN: 84-689-7726-8, (Madrid, 2005)
- [4] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *Bifurcation and stability of equilibria with asymptotically linear boundary conditions at infinity*. Proc. Roy. Soc. Edinburg, Vol.137 A, 1-28, (2007).
- [5] J. M. Arrieta, R. Pardo y A. Rodríguez-Bernal, *On the stability, uniqueness or multiplicity of Bifurcating equilibria with asymptotically linear boundary conditions*. Preprint.
- [6] P. Clement y L.A. Peletier, *An anti-maximum principle for second order elliptic operators*, J. Diff. Eq., Vol. **34**, 218-229, (1979).
- [7] E.M. Landesman y A.C. Lazer, *Nonlinear Perturbations of linear elliptic problems at resonance*, J. Math. Mech., Vol. **19**, 609-623, (1970).
- [8] P. H. Rabinowitz, “On Bifurcation From Infinity”, *J. Differential Equations*, Vol. **14**, 462-475, (1973).