

## Control óptimo sobre estructuras termoconvectivas

M. C. NAVARRO<sup>1</sup>, H. HERRERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071 Ciudad Real. E-mails:  
mariacruz.navarro@uclm.es, henar.herrero@uclm.es.*

**Palabras clave:** convección térmica, control óptimo, método de Chebyshev colocación

### Resumen

En este trabajo consideramos un problema Rayleigh- Bénard 2D y estudiamos el control óptimo de flujos termoconvectivos inducidos por gradientes de temperatura horizontales. El control se ejerce mediante un flujo de calor en la parte superior de la frontera del dominio. Situamos el problema en un marco teórico en el que se demuestra la existencia de control óptimo y se encuentran las condiciones de optimalidad. Calculamos numéricamente los estados controlados con un método de Chebyshev colocación. El control obtenido elimina las soluciones formadas por uno o varios rollos, es decir, elimina la formación de estructuras no deseables y reduce considerablemente la vorticidad del fluido. Dos rollos, uno sobre otro es el nuevo estado bajo control.

## 1. Formulación del problema

El dominio físico considerado es un rectángulo  $\Omega = (0, \gamma) \times (0, 1)$ . La parte superior del recinto está abierta a la atmósfera donde la temperatura es  $T_0$  y la parte inferior el fluido es calentado imponiendo un decrecimiento lineal desde una temperatura máxima  $T_{\text{máx}}$  en  $x = 0$  hasta una temperatura mínima  $T_{\text{mín}}$  en  $x = \gamma$ . Definimos  $\Delta T = T_{\text{máx}} - T_0$  and  $\Delta T_h = T_{\text{máx}} - T_{\text{mín}}$ . Las ecuaciones de estado que gobiernan el sistema, una vez adimensionalizadas y considerando su versión estacionaria son las ecuaciones de continuidad, calor y Navier-Stokes con aproximación de Boussinesq

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta - \nabla^2 \Theta = 0, \tag{2}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + Pr (\nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} - R\Theta \mathbf{e}_z) = 0, \tag{3}$$

junto con las condiciones de contorno:

$$u_x = u_z = 0, \quad \partial_n \Theta = 0 \quad \text{en } x = \gamma, \quad x = 0, \quad (4)$$

$$u_x = u_z = 0, \quad \Theta - \Theta_1 = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (5)$$

$$u_z = 0, \quad \partial_z u_x = 0, \quad \partial_z \Theta + B\Theta - Bh = 0 \quad \text{en } z = 1, \quad (6)$$

donde  $u_x$  y  $u_z$  son las componentes de la velocidad  $\mathbf{u}$  del fluido,  $\Theta$  la temperatura,  $p$  la presión,  $\mathbf{x} = (x, z)$  son las coordenadas espaciales y  $t$  es el tiempo.  $\Theta^1(x)$  es una función casi lineal tal que,  $\partial_x \Theta^1|_{x=0, \gamma} = 0$ . Introducimos los siguientes parámetros adimensionales:  $Pr$ , número de Prandtl,  $R$ , número de Rayleigh y  $B$ , número de Biot.  $h$  es el flujo de calor que nos va a permitir plantear el control óptimo.

### 1.1. Notación

Definimos los siguientes subconjuntos de la frontera

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : x = 0\} \cup \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : x = \gamma\}, \quad (7)$$

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : z = 1\}, \Gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : z = 0\}, \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \quad (8)$$

Los siguientes espacios

$$\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0, v_z|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$V_2 = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi|_{\Gamma_2} = 0\}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times V_2, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{V} + (\mathbf{0}, \bar{\Theta}).$$

Y las siguientes formas bilineales y trilineales Definimos las siguientes formas bilineales y trilineales:

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} Pr(\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla \mathbf{v}) d\Omega \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$a_1(\Theta, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \Theta \cdot \nabla \psi d\Omega \quad \forall \Theta, \psi \in H^1(\Omega),$$

$$c(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall q \in L^2(\Omega),$$

$$b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$b_1(\mathbf{u}, \Theta, \psi) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta) \psi d\Omega \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall \Theta, \psi \in H^1(\Omega).$$

### 1.2. Lemas

Para situar nuestro problema en las hipótesis de la Ref. [2] es necesario demostrar dos lemas previos.

**Lema 1.** El problema (1)-(6) tiene la siguiente formulación variacional: encontrar  $(\mathbf{u}, \Theta) \in \mathbf{V} + (\mathbf{0}, \bar{\Theta})$  tal que

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \hat{\alpha}(\Theta \mathbf{e}_z, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \quad (9)$$

$$a_1(\Theta, \psi) + b_1(\mathbf{u}, \Theta, \psi) + B(\Theta - h, \psi)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall \psi \in V_2. \quad (10)$$

**Demostración:** En el problema (1-6), condiciones generales Neumann serían

$$\partial_n \Theta = d \text{ on } \Gamma_0, \partial_n u_x = f \text{ on } \Gamma_1, \quad (11)$$

con  $d \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$  y  $f \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ . La formulación débil de este problema es: Encontrar  $(\mathbf{u}, \Theta) \in \mathbf{Z}$  tales que

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \hat{\alpha}(\Theta \mathbf{e}_z, \mathbf{v}) = \langle f, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} \rangle_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \quad (12)$$

$$a_1(\Theta, \psi) + b_1(\mathbf{u}, \Theta, \psi) + B(\Theta - h, \psi)_{\Gamma_1} = \langle d, \psi|_{\Gamma_0} \rangle_0 \quad \forall \psi \in V_2, \quad (13)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  es el producto dual entre  $H^{-1/2}(\Gamma_1)$  y  $H^{1/2}(\Gamma_1)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  es el producto dual entre  $H^{-1/2}(\Gamma_0)$  y  $H^{1/2}(\Gamma_0)$ . La prueba está basada principalmente en la fórmula de Green. En el caso que nosotros estamos considerando, la formulación variacional se reduce a las ecuaciones (9-10).

Para la forma trilineal  $b_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ , tenemos los siguientes resultados.

**Lema 2.** Para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , la forma trilineal  $b_0(\cdot, \cdot, \cdot)$  satisface

$$|b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad (14)$$

$$\text{y } b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \quad (15)$$

para  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_1$ .

**Demostración:** La primera desigualdad se sigue de la desigualdad de Hölder. Obtenemos

$$|b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\mathbf{w}\|_{L^4} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1.$$

La segunda desigualdad se sigue de la fórmula de Green y de las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}, \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})_{\Gamma} = \\ &= \int_{\Gamma_1} u_z (v_x w_x + v_z w_z) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Del lema 2 se sigue que

$$b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \text{ para } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1. \quad (17)$$

A partir de aquí los principales teoremas pueden probarse siguiendo la referencia [2].

### 1.3. Existencia de soluciones

**Teorema 1 (Ito & Ravindran)**[2]. Dado  $h \in L^2(\Gamma_1)$ , existe una solución débil  $(\mathbf{u}, \Theta) \in \mathbf{Z}$  de (9-10) y

$$\|(\mathbf{u}, \Theta)\|_1 \leq C(\|h\|_{0, \Gamma_1} + \|\bar{\Theta}\|_1)$$

Además, si  $h(x)$  y  $\Theta^1(x)$  están acotadas por debajo por  $\bar{\Theta}_1$  y por arriba por  $\bar{\Theta}_2$  en casi todo punto, entonces  $\bar{\Theta}_1 \leq \Theta(x) \leq \bar{\Theta}_2$  para casi todo punto en  $\Omega$  y cada solución.

**Teorema 2 (Ito & Ravindran)**[2]. Si  $h(x)$  y  $\Theta^1(x)$  están acotadas por debajo por  $\bar{\Theta}_1$  y por arriba por  $\bar{\Theta}_2$  en casi todo punto y si  $|\bar{\Theta}_2 - \bar{\Theta}_1|$  es suficientemente pequeño, entonces (9-10) tiene una única solución en  $\mathbf{Z}$ .

## 2. Problema de control óptimo

Consideramos el siguiente problema de control óptimo:

Minimizar  $J(\mathbf{u}, \Theta, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 d\Omega + \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_1} h^2 d\Gamma$ , sujeto al estado

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta - \nabla^2 \Theta = 0, \quad (19)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + Pr (\nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} - R\Theta \mathbf{e}_z) = 0, \quad (20)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$u_x = u_z = 0, \quad \partial_n \Theta = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \quad (21)$$

$$u_x = u_z = 0, \quad \Theta - \Theta_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (22)$$

$$u_z = 0, \quad \partial_z u_x = 0, \quad \partial_z \Theta + B\Theta - Bh = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (23)$$

donde  $h$  es el flujo control de temperatura. En el funcional coste  $J$ , el término  $\varphi(\mathbf{u}, \Theta) = \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 d\Omega$  se denomina enstrofía y es una medida de la vorticidad  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$  en el flujo, el término  $\int_{\Gamma_1} h^2 d\Gamma$  es la medida de la magnitud del control, y el parámetro de penalización  $\delta$  permite ajustar la magnitud de ambos términos en el funcional coste.

### 2.1. Notación

Denotemos por  $\mathcal{C}$  a cualquier subconjunto cerrado convexo de  $L^2(\Gamma_1)$ . Introducimos el conjunto  $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathcal{C}$  y el espacio de soluciones  $\mathbf{S}(h)$

$$\mathbf{S}(h) = \{(\mathbf{u}, \Theta, h) \in \mathbf{X} : (\mathbf{u}, \Theta) \text{ satisfaciendo (9-10)}\}.$$

Definimos la función  $\mathbf{E} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{V}^*$ , que representa el lado izquierdo de las ecuaciones de estado (18-23) y donde  $V^*$  es el espacio dual de  $V$ . Usando el producto dual en  $V^* \times V$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , definimos la siguiente forma para  $\mathbf{x} = (\mathbf{z}, h) = (\mathbf{u}, \Theta, h) \in \mathbf{X}$  y  $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}$

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}), (\mathbf{v}, \psi) \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} = a(\mathbf{z}, (\mathbf{v}, \psi)) + b(\mathbf{u}, \mathbf{z}, (\mathbf{v}, \psi)) + B(\Theta - h, \psi)_{\Gamma_1} + \hat{\alpha}(\Theta \mathbf{e}_z, \mathbf{v}) \quad (24)$$

donde  $\hat{\alpha} = -PrR$ ,  $a$  es la forma bilineal  $a(\mathbf{z}, (\mathbf{v}, \psi)) = a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\Theta, \psi)$ , y  $b$  la forma trilineal  $b(\mathbf{u}, \mathbf{z}, (\mathbf{v}, \psi)) = b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{u}, \Theta, \psi)$ .

Definimos la función de vorticidad

$$\varphi(\mathbf{z}) : \mathbf{z} = (\mathbf{u}, \Theta) \in \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \varphi(\mathbf{u}, \Theta) = \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 d\Omega$$

por lo que el funcional coste queda

$$J(\mathbf{u}, \Theta, h) = \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{u}, \Theta) + \frac{\delta}{2} \|h\|_{0, \Gamma_1}^2.$$

## 2.2. Existencia y condiciones de optimalidad

Siguiendo la línea de [2] se prueba la existencia de soluciones óptimas para el problema de minimización (18-23) y establecen las condiciones necesarias de optimalidad.

Planteamos el problema de control en el siguiente marco abstracto:

$$\text{Minimizar } J(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ sujeto a } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

**Teorema 3 (Ito & Ravindran)**[2]. Consideramos el problema de minimización

$$\text{Minimizar } J(\mathbf{u}, \Theta, h) = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{u}, \Theta) + \frac{\delta}{2} \|h\|_{0, \Gamma_1}^2, \quad (25)$$

$$\text{para } (\mathbf{u}, \Theta, h) \in \mathbf{S}(h) \times \mathcal{C},$$

donde  $\mathcal{C}$  es un subconjunto cerrado convexo de  $L^2(\Gamma_1)$ . Supongamos que la función  $\varphi$  es convexa, semicontinua inferiormente y satisface  $\varphi(\mathbf{z}) \leq c_1 \|\mathbf{z}\|_1^2 + c_2$  for  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ . Entonces el problema de minimización tiene una solución.

Denotemos por  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{z}^*, h^*) = (\mathbf{u}^*, \Theta^*, h^*)$  un par óptimo de (25). En el siguiente teorema se establecen las condiciones necesarias de optimalidad.

**Teorema 4 (Ito & Ravindran)**[2]. Supongamos que  $\mathbf{x}^*$  es un punto regular en el sentido de que

$$0 \in \text{int} \left\{ \mathbf{E}'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{v}, \psi, \eta - h^*) : (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V} \text{ y } \eta \in \mathcal{C} \right\}, \quad (26)$$

donde  $\text{int}$  denota el interior del conjunto y  $\mathbf{E}'$  es la derivada de Fréchet de  $\mathbf{E}$ . Entonces existen multiplicadores de Lagrange  $(\mathbf{w}, \lambda) \in \mathbf{V}$  tales que

$$\begin{aligned} a((\mathbf{w}, \lambda), (\mathbf{v}, \psi)) + b(\mathbf{v}, \mathbf{z}^*, (\mathbf{w}, \lambda)) + b(\mathbf{u}^*, (\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{w}, \lambda)) \\ + \langle \varphi'(\mathbf{z}^*), (\mathbf{v}, \psi) \rangle + B(\psi, \lambda)_{\Gamma_1} + \widehat{\alpha}(\mathbf{w}, \psi \mathbf{e}_z) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

para  $(\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}$  y  $(\delta h^* - B\lambda, \eta - h^*)_{\Gamma_1} = 0 \forall \eta \in \mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C} = L^2(\Gamma_1)$ , introduciendo la presión  $p$  y la presión adjunta  $\pi$ , las condiciones necesarias de optimalidad son

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{v}, p) + \widehat{\alpha}(\Theta \mathbf{e}_z, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1,$$

$$c(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

$$a_1(\Theta, \psi) + b_1(\mathbf{u}, \Theta, \psi) + B(\Theta - h, \psi)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall \psi \in V_2,$$

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b_0(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + b_1(\mathbf{v}, \Theta, \lambda) + \text{Pr}c(\mathbf{v}, \pi) + \\ (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_1, \end{aligned}$$

$$c(\mathbf{w}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

$$a_1(\lambda, \psi) + b_1(\mathbf{u}, \psi, \lambda) + \widehat{\alpha}(\mathbf{w}, \psi \mathbf{e}_z) + B(\lambda, \psi)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall \psi \in V_2,$$

$$(\delta h - B\lambda, \eta)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}.$$

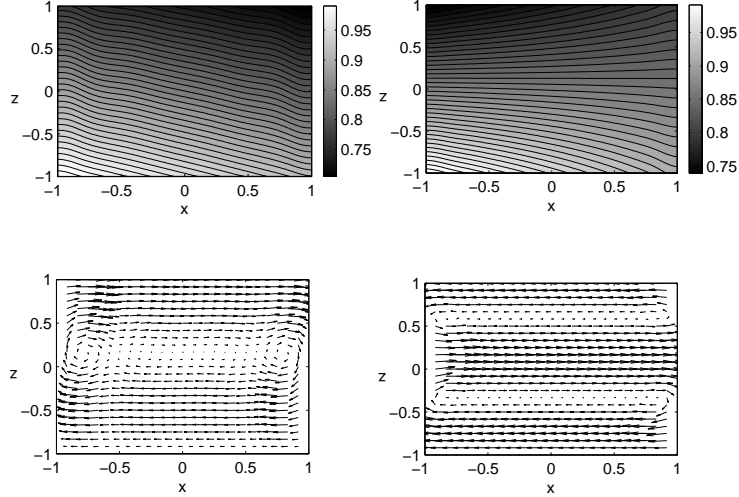


Figura 1: a) Isotermas para un flujo lineal no controlado; b) campo de velocidades correspondiente; c) isothermas para un flujo lineal controlado para  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ ; d) campo de velocidades correspondiente. Los parámetros son  $B = 0,3$ ,  $\gamma = 11,76$ ,  $R = 2800$  y  $\Delta T_h/\Delta T = 0,08$ .

### 3. Resultados numéricos

Hemos resuelto numéricamente Eqs. (1-3) junto con las condiciones de contorno (4-6) por un método de Chebyshev colocación. La no-linealidad ha sido tratada con un método iterativo tipo Newton. Detalles del método numérico pueden encontrarse en [1, 3, 4].

#### 3.1. Soluciones sin control

Una de las soluciones encontradas se muestra en las figuras 1a (isothermas) y 1b (campo de velocidades) y aparece para valores grandes de  $\gamma$  ( $\gamma > 9$ ). El campo de velocidades está formado por varios rollos corrotativos. Este tipo de estado se denomina *flujo lineal*-tal y como se describe en la referencia Ref. [5] - porque los gradientes de temperatura vertical tienen el mismo signo a lo largo del eje  $x$ . La enstrofia para este estado es 4,44. Este estado es calculado usando  $h = 0$ , así de aquí en adelante nos referiremos a el como estado no controlado.

#### 3.2. Soluciones con control

Como en el caso anterior, las condiciones de optimalidad han sido resueltas numéricamente por un método de Chebyshev colocación.

Calculamos numéricamente las soluciones controladas del estado expuesto en la sección anterior. El estado controlado para  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$  se muestra en la figura 1c (isothermas) y 1d (campo de velocidades). Los rollos corrotativos han desaparecido y la enstrofia toma

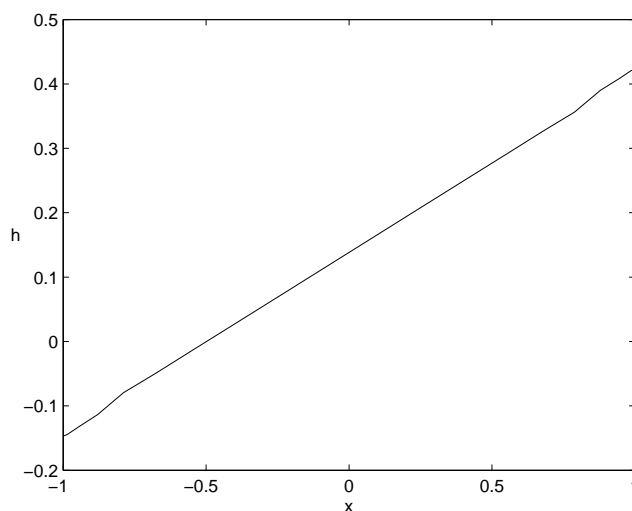


Figura 2: Función control  $h$  para  $B = 0,3$ ,  $\gamma = 11,76$ ,  $R = 2800$ ,  $\Delta T_h/\Delta T = 0,08$  y  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ .

ahora el valor 0,04. Dos rollos, uno sobre otro, con una velocidad pequeña ( $O(10^{-2})$ ), es el nuevo estado bajo control (ver figura 1d).

En la figura 2 se representa la función de control  $h$  para un flujo lineal y  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ .

## 4. Conclusiones

Hemos tratado un problema de control óptimo en un problema de Rayleigh- Bénard 2D con gradiente de temperatura horizontal. El mecanismo de control considerado es un flujo de calor a través de una parte de la frontera. Por una parte hemos desarrollado un estudio teórico de la existencia de control óptimo y encontrado las condiciones necesarias de optimalidad en el caso de condiciones de contorno Neumann para la temperatura. Por otra, hemos resuelto numéricamente dichas condiciones de optimalidad y obtenido estados controlados que minimizan la vorticidad del fluido eliminando estructuras no deseadas (como los rollos corrotativos) que se obtenían para los estados sin controlar.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos MTM2006-14843-C02-01 (MCYT) y PAC-05-005-01 (JCCM), que incluyen fondos FEDER.

## Referencias

- [1] H. Herrero & A.M. Mancho. *Numerical modeling in Chebyshev collocation methods applied to stability analysis of convection problems*. Applied Numerical Mathematics (2000) 33, 161-166.
- [2] K. Ito & S.S. Ravindran. *Optimal Control of thermally convected fluid flows*. SIAM J. Sci. Comput. (1998) 19, 1847-1869.

- [3] A.M. Mancho & H. Herrero. *Instabilities in a laterally heated liquid layer*. Phys. Fluids (2000) 12, 1044-1051.
- [4] M. C. Navarro, A.M. Mancho & H. Herrero. *Instabilities in buoyant flows under localized heating*. Chaos (2007) 17, 023105 1-10.
- [5] M.K. Smith & S.H. Davis. *Instabilities of dynamics thermocapillary liquid layers. 1. Convective instabilities*. J. Fluid Mech. (1983) 132, 119-144.