

## Equilibrio de Nash para un problema de control multiobjetivo relacionado con la depuración de aguas residuales

N. GARCÍA-CHAN <sup>1</sup>, R. MUÑOZ-SOLA <sup>1</sup>, M. E.  
VÁZQUEZ-MÉNDEZ, <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela, 15782  
Santiago de Compostela. E-mails: netog\_g@hotmail.com, rafams@usc.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. Matemática Aplicada, E.P.S., Universidad de Santiago de Compostela, 27002 Lugo. E-mail:  
ernesto@usc.es.*

**Palabras clave:** control óptimo, equilibrio de Nash, gestión de aguas residuales

### Resumen

En este trabajo, formulamos, estudiamos y resolvemos numéricamente un problema de control multiobjetivo relacionado con la gestión de la depuración de un sistema de aguas residuales. Planteamos el problema de la gestión óptima como la búsqueda de un equilibrio de Nash. Analizamos este problema, probamos un resultado de existencia de un equilibrio de Nash y establecemos un sistema de optimalidad de primer orden que caracteriza los equilibrios de Nash, para lo cual introducimos el estado adjunto. Finalmente, presentamos los resultados numéricos obtenidos en una situación realista planteada en la ría de Vigo.

## 1. Introducción

El tratamiento, gestión y eliminación de aguas residuales es uno de los problemas medioambientales más importantes. La solución más común es tratar las aguas residuales en plantas de depuración y posteriormente descargarlas en ríos o directamente en el mar. Estos tratamientos pueden ser necesario pero también muy costosos, y su gestión involucra aspectos medioambientales y económicos. El problema de la gestión se complica aún más cuando varias plantas depuradoras vierten en el mismo dominio. En los últimos años, se han usado modelos matemáticos y técnicas de control óptimo para resolver este tipo de problemas (ver, p. e. [2], [9], [11]). En el caso en que todas las plantas depuradoras están gestionadas por un único organismo, el problema de la gestión fue tratado en [9] como un

problema de control óptimo con restricciones puntuales sobre el estado y sobre el control. El objetivo de este trabajo es el diseño de la estrategia adecuada cuando cada planta está gestionada por un organismo diferente. En este caso, el problema ha de ser formulado como un problema de control multiobjetivo.

## 2. Formulación del problema

Consideramos un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ocupado por aguas poco profundas, en el que se vierten, a través de emisarios submarinos (ubicados en los puntos  $P_j \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, N_E$ ), aguas residuales procedentes de un número  $N_E$  de plantas depuradoras. En el dominio  $\Omega$ , existen además unas determinadas zonas sensibles ( $A_l \subset \Omega$ ,  $l = 1, \dots, N_Z$ ), de manera que, para un determinado *indicador*, se busca que la concentración en la  $j$ -ésima zona sea inferior a un valor prefijado  $\sigma_j$ . Para ello, a la  $i$ -ésima planta depuradora se le asignan  $n_i$  zonas (de modo que  $\sum_{i=1}^{N_E} n_i = N_Z$ ) y se le impone una *multa* cada vez que la concentración del indicador en una zona a su cargo supera el valor máximo fijado para esa zona (siendo la cuantía de la *multa* función creciente del *exceso* del indicador en esa zona). Suponemos que cada una de las  $N_E$  plantas está gestionada por un organismo diferente, que buscará la estrategia de depuración que minimice la suma de las multas y del *gasto de depuración* (que está en función de la depuración realizada). Dentro de este problema, claramente no cooperativo, nuestro objetivo será encontrar un equilibrio de Nash que, en cierta medida, suponga una estrategia aceptada por los gestores de todas las plantas. Suponemos que los vertidos realizados son de tipo doméstico y escogemos como indicador de la calidad del agua los *coliformes fecales* (CF), ya que son una de las bacterias con mayor presencia en ese tipo de vertidos. El siguiente modelo proporciona la concentración de CF en un dominio ocupado por aguas poco profundas, en función de los vertidos realizados (ver, p.e. [2])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho - \beta \Delta \rho + \kappa \rho = \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1}^{N_E} m_j(t) \delta(x - P_j) \right] \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \text{en } \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial \Omega \times (0, T) \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la concentración de CF promediada en altura,  $h \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  es la altura del agua, que se supone minorada por una constante estrictamente positiva,  $\vec{u} \in [L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))]^2$  es la velocidad horizontal del agua promediada en altura,  $\beta > 0$  es un coeficiente de viscosidad horizontal, que tiene en cuenta efectos turbulentos y dispersión vertical,  $\kappa \in \mathbb{R}$  es un coeficiente experimental relacionado con la mortalidad de CF,  $m_j \in L^\infty(0, T)$  es el flujo másico de CF vertido en el punto  $P_j$ ,  $\delta(x - P_j)$  representa la *medida de Dirac* en el punto  $P_j$  y  $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$  es la concentración inicial de CF.

En este modelo (sistema (1)-(3)), a la planta depuradora  $j$ -ésima se le asocia un control: la función  $m_j(t)$  que describe el flujo másico de CF vertido por esa planta. Gestionar la depuración en la planta  $j$ -ésima equivale a determinar la función  $m_j(t)$ .

El funcional que debe minimizar el gestor de la planta  $j$ -ésima es la suma de:

- *el coste propio de la depuración*, que es función del flujo másico de CF que finalmente se vierte. Denotamos por  $\bar{m}_j$  el flujo másico de CF con el que llegan las aguas residuales a la planta  $j$ -ésima. La función  $f_j : ]0, \infty[ \mapsto \mathbb{R}$  que describe el coste de la depuración en la planta  $j$ -ésima tiene estas propiedades:  $f_j$  es estrictamente decreciente y estrictamente convexa en  $]0, \bar{m}_j[$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0^+} f_j(s) = +\infty$ ,  $f_j(s) = f_j(\bar{m}_j)$  para todo  $s \geq \bar{m}_j$ , y  $f'_j(\bar{m}_j) = 0$ . Denotamos por  $\underline{m}_j$  el mínimo flujo másico de CF que se puede verter en el punto  $P_j$  (que se corresponde con la máxima depuración en esa planta). En lo sucesivo suponemos que  $f_j \in C^2[\underline{m}_j, \bar{m}_j]$  y que es estrictamente convexa en ese intervalo.
- *Coste debido a una depuración insuficiente*. Consideramos en cada planta los gastos provocados por las penalizaciones (pago de multas).

Si definimos  $n_0 = 0$  y numeramos las zonas a proteger de manera que, para  $j = 1, 2, \dots, N_E$ , la planta  $j$ -ésima tenga a su cargo  $\cup_{i=n_{(j-1)}+1}^{n_j} A_i$ , la función objetivo a minimizar correspondiente a la planta  $j$ -ésima vendrá dada por

$$J_j(m_1, m_2, \dots, m_{N_E}) = \int_0^T f_j(m_j(t)) dt + \sum_{i=n_{(j-1)}+1}^{n_j} \frac{1}{\epsilon_i} \int_{A_i \times (0, T)} \psi(\rho(x, t) - \sigma_i) dx dt \quad (4)$$

donde  $\epsilon_l > 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, N_Z$ , es un parámetro de penalización y, para  $\delta > 0$  predefinido,  $\psi(y)$  viene dada por

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{y^3}{6\delta} & \text{si } 0 \leq y \leq \delta \\ \frac{1}{2}(y^2 - \delta y + \frac{\delta^2}{3}) & \text{si } \delta \leq y \end{cases} \quad (5)$$

La función  $\psi$  es creciente, convexa y de clase  $C^2(\mathbb{R})$ ; además  $\psi(y) > 0$  si, y solo si  $y > 0$ , es decir, cuando hay un exceso de concentración del indicador.

Si para  $j = 1, 2, \dots, N_E$  denotamos por  $M_j = \{m \in L^\infty(0, T); 0 < \underline{m}_j \leq m(t) \leq \bar{m}_j, \text{ c.p.d. en } (0, T)\}$ , el problema de la gestión óptima del sistema de depuración de aguas residuales se formula como el siguiente problema de control multiobjetivo:

Problema ( $\mathcal{P}$ ): Para  $j = 1, \dots, N_E$ , encontrar la función  $m_j(t) \in M_j$  que minimice el funcional  $J_j(m_1, m_2, \dots, m_{N_E})$  dado por (4), siendo  $\rho(x, t)$  la solución del sistema (1)-(3).

Buscamos una estrategia de depuración para cada planta tal que ningún gestor pueda variarla unilateralmente sin que ello le implique un mayor gasto. Por tanto, buscamos un equilibrio de Nash del problema ( $\mathcal{P}$ ), esto es, un conjunto de controles  $(m_1^*, \dots, m_{N_E}^*) \in \prod_{j=1}^{N_E} M_j$  tal que, para  $i = 1, 2, \dots, N_E$ ,

$$J_j(m_1^*, \dots, m_{j-1}^*, m_j^*, m_{j+1}^*, \dots, m_{N_E}^*) = \min_{m_j \in M_j} J_j(m_1^*, \dots, m_{j-1}^*, m_j, m_{j+1}^*, \dots, m_{N_E}^*) \quad (6)$$

### 3. Análisis matemático del problema

La solución del sistema (1)-(3) puede definirse mediante técnicas de transposición (ver [4], [7], [9]) en el siguiente sentido:

**Definición 1** Dados  $r, s \in [1, 2)$ ,  $\frac{2}{r} + \frac{2}{s} > 3$  se dice que  $\rho \in L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega))$  es una solución del problema (1)-(3) si para cada  $\Phi \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$  tal que  $\Phi(\cdot, T) = 0$  se verifica:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho + \beta \nabla \Phi \cdot \nabla \rho + \Phi \vec{u} \cdot \nabla \rho + \kappa \Phi \rho \right) dx dt = \sum_{j=1}^{N_E} \int_0^T \frac{1}{h(P_j, t)} \Phi(P_j, t) m_j(t) dt + \int_{\Omega} \Phi(x, 0) \rho_0(x) dx \quad (7)$$

Denotamos por  $\mathcal{A}^*$  el operador diferencial definido por

$$\mathcal{A}^* \Phi = -\beta \Delta \Phi - \operatorname{div}(\Phi \vec{u}) + \kappa \Phi, \quad (8)$$

y por  $\frac{\partial \Phi}{\partial n_{\mathcal{A}^*}}$  el operador derivada conormal asociado a  $\mathcal{A}^*$ .

Suponemos en lo sucesivo que el dominio acotado  $\Omega$  tiene frontera suficientemente regular y que existen constantes  $\alpha^* \in (0, 1)$  y  $r_0 > 0$  tales que para todo  $x_0 \in \partial\Omega$  y para todo  $r \in (0, r_0]$  se cumple que  $\operatorname{med}(B(x_0, r) \cap \Omega) \leq (1 - \alpha^*) \pi r^2$ . Se tiene entonces el siguiente resultado (ver [9]) :

**Teorema 1** Existe un único  $\rho \in L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))$  con  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^r(0, T; (W^{1,s'}(\Omega))')$  que es solución de (1)-(3) y satisface

$$\int_0^T \left\langle -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{A}^* \Phi, \rho \right\rangle dt = \sum_{j=1}^{N_E} \int_0^T \frac{1}{h(P_j, t)} \Phi(P_j, t) m_j(t) dt + \int_{\Omega} \Phi(x, 0) \rho_0(x) dx \quad \forall \Phi \in \mathcal{B},$$

con  $\mathcal{B} = \{ \Phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)); \frac{\partial \Phi}{\partial n_{\mathcal{A}^*}} = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, T), \Phi(\cdot, T) = 0 \}$ .

Definimos el operador lineal  $\mathcal{K} : [L^\infty(0, T)]^{N_E} \times C(\bar{\Omega}) \mapsto L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))$  mediante  $\mathcal{K}(m, \rho_0) = \rho$ , donde  $m = (m_1, \dots, m_{N_E})$  y  $\rho$  es la solución del problema (1)-(3).

**Teorema 2** Para cualesquiera  $r, s \in [1, 2)$  con  $\frac{2}{r} + \frac{2}{s} > 3$ , el operador

$\mathcal{K} \in \mathcal{L}([L^\infty(0, T)]^{N_E} \times C(\bar{\Omega}), L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega)))$ . Además, fijado cualquier  $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ , el operador  $\mathcal{K}(\cdot, \rho_0)$  es continuo de  $[L^\infty(0, T)]^{N_E}$  débil-\* en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  débil y en  $L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega))$  débil.

Además, si existe  $E \subset \Omega$  conjunto cerrado tal que  $\Omega \setminus E$  es un dominio suficientemente regular,  $\{P_1, P_2, \dots, P_{N_E}\} \subset E$  y  $\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \subset (\Omega \setminus E)$ , entonces:

1. fijado cualquier  $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ , la aplicación

$$F : m \in [L^\infty(0, T)]^{N_E} \longrightarrow F(m) = \rho_{|\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \times [0, T]} \in C(\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \times [0, T]),$$

está bien definida y es afín, continua y Gateaux diferenciable.

2. si la condición inicial  $\rho_0 = 0$  entonces  $\rho \in C^\alpha(\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \times [0, T])$  para un exponente  $\alpha \in (0, 1)$ , y  $F \in \mathcal{L}([L^\infty(0, T)]^{N_E}, C^\alpha(\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \times [0, T]))$ .
3. fijado cualquier  $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ , la aplicación  $F$  es continua de  $[L^\infty(0, T)]^{N_E}$  débil-\* en  $C(\cup_{i=1}^{N_Z} \bar{A}_i \times [0, T])$  fuerte.

La demostración de que  $\mathcal{K} \in \mathcal{L}([L^\infty(0, T)]^{N_E} \times C(\bar{\Omega}), L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega)))$  y del apartado 1 puede verse en [9]. El apartado 2 resulta de aplicar el teorema 10.1 del capítulo III de [8]. El resto del enunciado se demuestra fácilmente.

**Teorema 3** *El problema ( $\mathcal{P}$ ) tiene un equilibrio de Nash.*

Demostración: gracias a los teoremas 1 y 2, el funcional de coste introducido *formalmente* en (4) está bien definido sobre  $\prod_{j=1}^{N_E} M_j$ . Se demuestra fácilmente que el funcional

$$m_j \in M_j \longrightarrow J_j(m_1, \dots, m_{j-1}, m_j, m_{j+1}, \dots, m_{N_E}) \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

es continuo, Gateaux diferenciable y estrictamente convexo. Como  $M_j$  es convexo, cerrado en  $L^2(0, T)$  y no vacío, fijado cualquier  $(m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_{N_E}) \in \prod_{i=1, i \neq j}^{N_E} M_i$  existe un único  $m_j^* \in M_j$  que minimiza el funcional (9) en  $M_j$ . Sea  $S_j$  la aplicación de  $\prod_{i=1, i \neq j}^{N_E} M_i$  en  $M_j$  definida por  $S_j(m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_{N_E}) = m_j^*$  y sea  $S : \prod_{j=1}^{N_E} M_j \longrightarrow \prod_{j=1}^{N_E} M_j$  dada por  $S(m_1, m_2, \dots, m_{N_E}) = (S_1(m_2, m_3, \dots, m_{N_E}), \dots, S_{N_E}(m_1, m_2, \dots, m_{N_E-1}))$ . Gracias al teorema 2, la aplicación  $S_j$  ( y por tanto  $S$ ) es continua para la topología débil-\*. Como además el conjunto  $\prod_{j=1}^{N_E} M_j$  es convexo y es compacto para esta topología, el teorema del punto fijo de Kakutani ([1]) garantiza la existencia de un punto fijo de  $S$ , que es un equilibrio de Nash.

## 4. Condiciones de optimalidad

Condición necesaria y suficiente para que se satisfaga (6) es que

$$\frac{\partial J_i}{\partial m_i}(m_1^*, \dots, m_{i-1}^*, m_i^*, m_{i+1}^*, \dots, m_{N_E}^*)(m_i - m_i^*) \geq 0, \quad \forall m_i \in M_i. \quad (10)$$

Por tanto, un punto  $m^* = (m_1^*, \dots, m_{N_E}^*) \in \prod_{j=1}^{N_E} M_j$  es un equilibrio de Nash del problema ( $\mathcal{P}$ ) si, y solo si,  $m^*$  cumple (10) para todo  $i = 1, \dots, N_E$ . Efectuando unos cálculos similares a los realizados en [12], obtenemos que

$$\frac{\partial J_j}{\partial m_j}(m) = f_j'(m_j) + \frac{1}{h(P_j, t)} p_j(P_j, t) \quad (11)$$

donde, para  $j = 1, 2$ ,  $p_j$  es la solución débil del *problema adjunto*

$$-\frac{\partial p_j}{\partial t} - \beta \Delta p_j - \operatorname{div}(p_j \vec{u}) + \kappa p_j = \sum_{i=n_{(j-1)+1}}^{n_j} \frac{1}{\epsilon_i} \chi_{\bar{A}_i} \psi'(\rho - \sigma_i) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (12)$$

$$\beta \frac{\partial p_j}{\partial n} + p_j(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0 \quad \text{en } \partial \Omega \times (0, T) \quad (13)$$

$$p_j(x, T) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (14)$$

donde  $\chi_{\bar{A}_i}$  denota la función característica del conjunto  $\bar{A}_i$ . El problema (12)-(14) tiene una única solución débil  $p_j$ . Además  $p_j \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)))$  (ver, p.e. [5] para la existencia y unicidad, y el teorema 9.1 del capítulo IV de [8] para la regularidad.)

**Teorema 4 (Condiciones de optimalidad)**  $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_{N_E}^*) \in \prod_{j=1}^{N_E} M_j$  es un equilibrio de Nash para el problema (P) si, y solo si, existe una función  $\rho \in L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))$  para todo  $r, s \in [1, 2)$  con  $\frac{2}{r} + \frac{2}{s} > 3$  y  $N_E$  funciones  $p_1, p_2, \dots, p_{N_E} \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H^1(\Omega))$ , tales que:  $\rho$  es la solución del sistema de estado (1)-(3) con  $m_j = m_j^*$  para todo  $j = 1, \dots, N_E$ ,  $p_j$  es la solución débil del problema adjunto (12)-(14) para todo  $j = 1, \dots, N_E$ , y

$$\int_0^T [f'_j(m_j^*) + \frac{1}{h(P_j, t)} p_j(P_j, t)] (m_j - m_j^*) dt \geq 0 \quad \forall m_j \in M_j \quad j = 1, 2, \dots, N_E \quad (15)$$

## 5. Discretización del problema.

En lo sucesivo suponemos  $N_E = 2$ ,  $N_Z = 2$ ,  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 2$ . Suponemos además que el mínimo en (6) se alcanza en el interior de  $M_i$  para  $i = 1, 2$ , con lo que la condición de optimalidad (15) se convierte en

$$f'_j(m_j^*) + \frac{1}{h(P_j, t)} p_j(P_j, t) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Para discretizar el sistema de estado (1)-(3) y el problema adjunto (12)-(14) combinamos una discretización en tiempo mediante características con una discretización en espacio mediante elementos finitos de Lagrange  $P_1$ . Este método es convergente para el sistema adjunto (véase [10]) y también para el sistema de estado (véase [2]).

Sea  $\tau \rightarrow X(x, t; \tau)$  la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dX}{dt} = \bar{u}(X(x, t; \tau), \tau) \quad (17)$$

$$X(x, t; t) = x \quad (18)$$

Tomamos  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$  y definimos  $t_n = n\Delta t$ . Denotamos  $X^n(x) = X(x, t^{n+1}; t^n)$  e  $Y^{n+1}(x) = X(x, t^n; t^{n+1})$ . Efectuamos las aproximaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \rho \simeq \frac{\rho^{n+1}(x) - \rho^n(X^n(x))}{\Delta t}, \quad (19)$$

$$-\frac{\partial p_k}{\partial t} - \bar{u} \cdot \nabla p_k \simeq \frac{p_k^n(x) - p_k^{n+1}(Y^{n+1}(x))}{\Delta t}, \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

Consideramos una aproximación poligonal  $\Omega_h$  de  $\Omega$  y elegimos una triangulación admisible  $\tau_h$  de  $\Omega_h$ , con triángulos de diámetro menor o igual que  $h$  y vértices  $\{x_j, j = 1, \dots, N_v\}$  de modo que los vértices de la frontera de  $\Omega_h$  pertenezcan también a la frontera de  $\Omega$ . Sea  $V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h), v_h|_T \in P_1, T \in \tau_h\}$  y sea  $\rho_h^0 \in V_h$  una aproximación de  $\rho_0$ . La discretización completa del sistema de estado (1)-(3) y el problema adjunto (12)-(14) son estándar. Denotamos por  $\rho_h^{n+1} \in V_h$  y  $p_{kh}^n \in V_h$  las aproximaciones respectivas de

$\rho$  y  $p_k$  en el instante  $t_n$ . Introduciendo la base nodal de  $V_h$ , la discretización completa del problema constituido por el sistema de estado, el problema adjunto y la condición de optimalidad se escribe en la forma siguiente: dados  $\hat{\rho}_h^0 = (\rho_{h0}(x_1), \rho_{h0}(x_2), \dots, \rho_{h0}(x_{N_v}))^t$  y  $\hat{p}_{1h}^N = \hat{p}_{2h}^N = (0, 0, \dots, 0)^t$ , para  $k = 1, 2$  y  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , encontrar  $m_k^{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{\rho}_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{N_v}$ ,  $\hat{p}_{kh}^n \in \mathbb{R}^{N_v}$  que satisfagan:

$$A_{1h}\hat{\rho}_h^{n+1} - B_{1h}^n\hat{\rho}_h^n = \frac{m_1^{n+1}}{h^{n+1}(P_1)}b_{1h} + \frac{m_2^{n+1}}{h^{n+1}(P_2)}b_{2h}, \quad (21)$$

$$A_{2h}^n\hat{p}_{kh}^n - B_{2h}^{n+1}\hat{p}_{kh}^{n+1} = \beta_{kh}^n, \quad (22)$$

$$f'_k(m_k^{n+1}) = -\frac{1}{h^{n+1}(P_k)}C_{kh}\hat{p}_{kh}^{n+1}, \quad (23)$$

donde  $\hat{\rho}_h^{n+1} = (\rho_h^{n+1}(x_1), \dots, \rho_h^{n+1}(x_{N_v}))^t$ ,  $\hat{p}_{kh}^{n+1} = (p_{kh}^{n+1}(x_1), \dots, p_{kh}^{n+1}(x_{N_v}))^t$ ,  $A_{1h}$ ,  $B_{1h}^n$  y  $A_{2h}^n$ ,  $B_{2h}^{n+1}$  son las matrices propias de la discretización de elementos finitos,  $(b_{kh})_i = \tilde{v}_i(P_k)$ , siendo  $\tilde{v}_i$  la función de base asociada al vértice  $x_i$ ,

$$(\beta_{kh}^n)_i = \frac{1}{\epsilon_k} \int_{\Omega} \chi_{\bar{A}_k} \psi' \left( \sum_{l=1}^{N_v} (\hat{\rho}_h^n)_l \tilde{v}_l - \sigma_k \right) \tilde{v}_i dx,$$

y  $C_{kh}$  es la matriz de orden  $1 \times N_v$  que cumple  $p_{kh}^{n+1}(P_k) = C_{kh}\hat{p}_{kh}^{n+1}$ .

El sistema discreto (21)-(23) es no lineal y, a primera vista, su dimensión es  $3NN_v + 2N$ . Para resolverlo, lo hemos reescrito en la forma  $F(\tilde{m}) = 0$ , donde  $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)^t \in \mathbb{R}^{2N}$ , siendo  $\tilde{m}_k = (m_k^1, \dots, m_k^N)^t$ ,  $k = 1, 2$  los valores de los controles en los puntos de la malla temporal, y hemos aplicado un método de tipo Newton. Una descripción detallada puede verse en [6].

## 6. Resultados numéricos

A continuación presentamos algunos resultados obtenidos al resolver el problema anterior en una situación realista planteada en la ría de Vigo. La malla usada consta de 1241 triángulos y 738 vértices. Tomamos como intervalo de simulación un ciclo completo de marea que, en esta latitud, equivale a elegir  $T = 12,4$  horas. La altura de agua y el campo de velocidades han sido obtenidos resolviendo las ecuaciones de las aguas someras sobre la malla elegida (ver [3] para una descripción detallada de esas ecuaciones y del método numérico empleado para resolverlas). Suponemos que inicialmente no hay CF en ningún punto de la ría ( $\rho_0 = 0$ ) y consideramos diferentes cotas para los CF en cada una de las zonas,  $\sigma_1 = 0,0003484$ ,  $\sigma_2 = 0,0005$ . Tomamos el mismo coste de depuración para las dos plantas:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \frac{100(150)^3}{x^3 - 3(150)x^2 + 3(150)^2x}, & x \leq 150 \\ 100, & x > 150 \end{cases}$$

Hemos realizado distintos experimentos para diferentes valores de  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , tanto con  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  (penalizaciones iguales) como con  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  (penalización más fuerte en la planta 2). Los resultados obtenidos para los vertidos óptimos y el cumplimiento de las restricciones impuestas son acordes con los esperados. Para  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ , la estrategia de vertidos obtenida y las concentraciones de CF en el último instante de tiempo en la vecindad de las zonas a proteger se muestran en la figura 1.

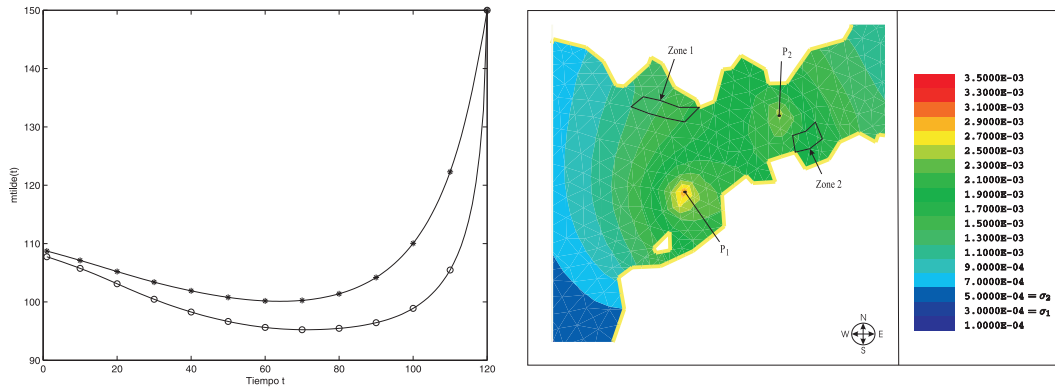


Figura 1: Izquierda: vertidos óptimos  $m_1^*(t)$  (\*\*) y  $m_2^*(t)$  (oo) (ordenadas) frente al tiempo (abscisas); derecha: concentraciones de CF en el último instante de la simulación para  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$

## Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Proyecto MTM2006-01177 del Ministerio de Educación y Ciencia. N. García Chan ha sido financiado por el Programa Alban (código E04D045803MX) y CONACyT de Méjico (código 165721)

## Referencias

- [1] J. P. Aubin, *Mathematical methods of game and economic theory*, North-Holland. 1979.
- [2] L.J. Álvarez-Vázquez, A. Martínez, C. Rodríguez, M.E. Vázquez-Méndez. *Numerical convergence for a sewage disposal problem*. Applied Mathematical Modelling, 25 (2001), 1015-1024.
- [3] A. Bermúdez, C. Rodríguez, M.A. Vilar. *Solving shallow water equations by a mixed implicit finite element method*. IMA J. Num. Anal., 11 (1991), 79-97.
- [4] E. Casas. *Pontryagin's principle for state constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations*. SIAM J. Control Optim., 35 (1997), 1297-1327.
- [5] R. Dautray, J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1985.
- [6] N. García-Chan, R. Muñoz-Sola, M. E. Vázquez-Méndez. Nash equilibrium for a multiobjective control problem related to wastewater management, (por aparecer).
- [7] J.L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [8] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
- [9] A. Martínez, C. Rodríguez, M. E. Vázquez-Méndez. *Theoretical and numerical analysis of an control problem related to wastewater treatment*. SIAM J. Control Optim, Vol. 38, No. 5 (2000), 1534-1553.
- [10] O. Pironneau. *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*. Numer. Math. , Vol. 38 (1982) 309-332.
- [11] Parra-Guevara D, Skiba YN. *Elements of the mathematical modeling in the control of pollutants emissions*. Ecological Modelling, 167, No. 3 (2003) 263-275.
- [12] A. M. Ramos, R. Glowinski y J. Periaux. *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations*. Journal of optimization theory and applications, Vol. 112, No. 3 (2002), 457-498.