XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Sobre el método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos

M.L. Muñoz Ruiz[1], C. Parés Madroñal[2]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos s/n, 29071 Málaga. E-mail:* `munoz@anamat.cie.uma.es`.
[2] *Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos s/n, 29071 Málaga. E-mail:* `pares@anamat.cie.uma.es`.

Palabras clave: sistemas hiperbólicos no conservativos, método de Godunov

Resumen

En este trabajo se aborda la aproximación numérica del problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos no conservativos en dimensión uno. El concepto de solución débil de dichos sistemas se define utilizando la teoría de Dal Maso, Le Floch y Murat, basada en la elección de una familia de caminos en el espacio de estados. En primer lugar, establecemos hipótesis para la elección de esta familia de caminos y estudiamos sus implicaciones, en particular, la obtención de una expresión del método de Godunov que generaliza su expresión clásica para sistemas de leyes de conservación. A continuación se estudian las propiedades de buen equilibrado de estos métodos. Finalmente, probamos la consistencia del esquema numérico obtenido con la definición de soluciones débiles. En concreto, probamos que, bajo la hipótesis de variación total acotada, si las aproximaciones obtenidas mediante un método de Godunov basado en una familia de caminos converge uniformemente a alguna función cuando la malla se refina, entonces esta función es una solución débil del sistema no conservativo, relativa a esa familia de caminos. Este resultado se extiende a los esquemas numéricos basados en Resolvedores de Riemann Aproximados.

1. Introducción

En este trabajo se estudia la aproximación numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W)\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

donde $W(x,t)$ toma valores en un subconjunto abierto y convexo Ω de $\mathbb{R}^N$ y $\mathcal{A}$ es una función regular y localmente acotada de Ω en $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Suponemos que este sistema es estrictamente hiperbólico y que los campos característicos asociados son o bien genuinamente no lineales o bien linealmente degenerados.

En particular, los sistemas de E.D.P. de la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(W) = \mathcal{B}(W)\frac{\partial W}{\partial x} + S(W)\frac{d\sigma}{dx}, \tag{2}$$

donde W pertenece a un subconjunto abierto y convexo Ω de $\mathbb{R}^N$, F es una función regular de Ω en $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{B}$ es una función regular de Ω en $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, S es una función de Ω en $\mathbb{R}^N$ y σ es una función conocida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se pueden reescribir bajo la forma cuasilineal (1) añadiendo a (2) la ecuación

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0.$$

El sistema (2) incluye como casos particulares: sistemas de leyes de conservación ($\mathcal{B} = 0$, $S = 0$); sistemas de leyes de conservación con término fuente o leyes de equilibrio ($\mathcal{B} = 0$); y sistemas acoplados de leyes de conservación como los del tipo definido en [1].

2. Soluciones débiles

Consideramos el problema en formulación no conservativa (1), bajo las hipótesis establecidas en la sección anterior.

En el caso en que una solución W es discontinua, el producto no conservativo $\mathcal{A}(W)W_x$ no tiene sentido en el marco de las distribuciones. Sin embargo, haciendo uso de la teoría desarrollada por Dal Maso, LeFloch y Murat [2], se puede dar una definición rigurosa de soluciones débiles, definición asociada a la elección de una familia de caminos en Ω, es decir, una aplicación $\Phi\colon [0,1]\times\Omega\times\Omega \to \Omega$ localmente lipschitziana que verifica

$$\Phi(0; W_L, W_R) = W_L \quad \text{y} \quad \Phi(1; W_L, W_R) = W_R, \quad \forall W_L, W_R \in \Omega.$$

Bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre Φ, dada una función $W \in (L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+))^N$, el producto no conservativo $\mathcal{A}(W)W_x$ puede ser interpretado como una medida de Borel, que denotaremos por $[\mathcal{A}(W)W_x]_\Phi$. Si W es regular a trozos, esta medida de Borel asociada al producto no conservativo viene dada, en un tiempo fijado t, por

$$\begin{aligned}\left\langle \left[\mathcal{A}(W(\cdot,t))\frac{\partial W}{\partial x}(\cdot,t)\right]_\Phi, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W(x,t))\frac{\partial W}{\partial x}(x,t)\varphi(x)\,dx \\ &+ \sum_m \left(\int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_m^-, W_m^+))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_m^-, W_m^+)\,ds\right)\varphi(x_m(t)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión W_x de la primera integral representa la derivada puntual de $W(\cdot,t)$; $x_m(t)$ representan la posición de las discontinuidades de W en el tiempo t; W_m^- y W_m^+ son los límites de W a izquierda y derecha, respectivamente, de la discontinuidad m-ésima en el tiempo t; y $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ es el conjunto de aplicaciones continuas con soporte compacto.

Una función $W \in (L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+))^N$ $\mathcal{C}^1$ a trozos es una solución débil de (1) si satisface la igualdad

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left[\mathcal{A}(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right]_\Phi = 0.$$

Se dirá que W es una Φ-solución de (1) si es una solución débil asociada a la familia de caminos Φ. Cuando no haya lugar a confusión, se omitirá la dependencia de Φ en la notación.

A lo largo de una discontinuidad, una solución débil debe satisfacer la condición de Rankine-Hugoniot generalizada:

$$\int_0^1 \big(\xi\mathcal{I} - \mathcal{A}(\Phi(s; W^-, W^+))\big)\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s; W^-, W^+)\, ds = 0, \tag{4}$$

donde ξ es la velocidad de propagación de la discontinuidad, $\mathcal{I}$ es la matriz identidad, y W^- y W^+ son, respectivamente, los límites a izquierda y derecha de la solución a lo largo de la discontinuidad.

En el caso particular de un sistema de leyes de conservación, es decir, cuando $\mathcal{A}(W)$ corresponde a la matriz jacobiana de una función de flujo $F(W)$, la definición de producto no conservativo como una medida de Borel es independiente de la elección de caminos y la condición de Rankine-Hugoniot generalizada se reduce a la condición de Rankine-Hugoniot habitual.

Al igual que ocurre en el caso conservativo, no toda discontinuidad es admisible. Por lo tanto, se hace necesario asumir un concepto de solución entrópica, como el de Lax o bien el siguiente, basado en un par de entropía (η, G) para (1), i.e. un par de funciones regulares de Ω en $\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla G(W) = \nabla\eta(W)\cdot\mathcal{A}(W), \quad \forall W\in\Omega,$$

y según el cual una solución débil se dice que es entrópica si satisface la desigualdad

$$\frac{\partial\eta(W)}{\partial t} + \frac{\partial G(W)}{\partial x} \le 0$$

en el sentido de las distribuciones.

3. Elección de caminos

La elección de la familia de caminos es importante ya que determina la velocidad de propagación de las discontinuidades. La elección más simple es la dada por la familia de segmentos, que corresponde la definición de productos no conservativos introducida por Volpert en [7]. En general, debe estar basada en los aspectos físicos del problema; sin embargo, desde el punto de vista matemático es natural exigir a esta familia que satisfaga algunas hipótesis concernientes a la relación de los caminos con las curvas integrales de los campos característicos. En este trabajo asumiremos que la familia de caminos satisface las siguientes hipótesis:

(H1) Dados dos estados W_L y W_R pertenecientes a la misma curva integral γ de un campo linealmente degenerado, el camino $\Phi(\cdot; W_L, W_R)$ es una parametrización del arco de γ que une W_L y W_R.

(H2) Dados dos estados W_L y W_R pertenecientes a la misma curva integral γ de un campo genuinamente no lineal, R_i, y tal que $\lambda_i(W_L) < \lambda_i(W_R)$, el camino $\Phi(\cdot; W_L, W_R)$ es una parametrización del arco de γ que une W_L y W_R.

(H3) Denotemos por $\mathcal{RP} \subset \Omega \times \Omega$ el conjunto de pares (W_L, W_R) tales que el problema de Riemann

$$\begin{cases} W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0, \\ W(x,0) = \begin{cases} W_L & \text{if } x < 0, \\ W_R & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

tiene una única solución débil autosimilar compuesta por a lo sumo N ondas simples (i.e. choques entrópicos, discontinuidades de contacto u ondas de rarefacción) conectando $J+1$ estados intermedios constantes

$$W_0 = W_L,\, W_1, \dots, W_{J-1},\, W_J = W_R,$$

con $J \leq N$. Entonces, dados $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$, la curva descrita por el camino $\Phi(\cdot; W_L, W_R)$ en Ω es igual a la unión de las correspondientes a los caminos $\Phi(\cdot; W_{j-1}, W_j)$, $j = 1, \dots, J$.

El establecimiento de estas hipótesis nos permite probar las propiedades siguientes:

Proposición *Asumamos que el concepto de soluciones débiles de* (1) *está definido en la base de una familia de caminos que satisface las hipótesis* (H1)-(H3). *Entonces:*

(i) Dados dos estados W_L y W_R pertenecientes a la misma curva integral de un campo linealmente degenerado, la discontinuidad de contacto dada por

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \textit{if } x < \sigma t, \\ W_R & \textit{if } x > \sigma t, \end{cases}$$

donde σ es el valor constante del autovalor correspondiente a lo largo de la curva integral, es una solución débil entrópica de (1).

(ii) Sea un par de estados (W_L, W_R) de $\mathcal{RP}$ y sea W la solución del problema de Riemann (5). *Se tiene, para cada $t > 0$, la desigualdad*

$$\langle \mathcal{A}(W(\cdot,t))W_x(\cdot,t), 1\rangle = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R)\, ds.$$

Por tanto, la masa total de la medida de Borel $\mathcal{A}(W(\cdot,t))W_x(\cdot,t)$ es independiente de t.

(iii) Sea (W_L, W_R) un par de $\mathcal{RP}$ y sea W_j cualquiera de los estados intermedios en la solución del problema de Riemann (5). *Entonces*

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R)\, ds \\ &\qquad = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_j))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_j)\, ds \\ &\qquad\qquad + \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_j, W_R))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_j, W_R)\, ds. \end{aligned}$$

Es posible dar un procedimiento general para construir una familia de caminos que satisfaga las hipótesis (H1)-(H3), al menos para la clase $\mathcal{RP}$, extendiendo la teoría de ondas simples de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación y los resultados concernientes a las soluciones de los problemas de Riemann al caso de sistemas hiperbólicos no conservativos.

4. El método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos

Consideremos el sistema (1) bajo las condiciones establecidas en la sección 1, con condición inicial

$$W(x,0) = W_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

y asumamos que la familia de caminos Φ usada en la definición del producto no conservativo $\mathcal{A}(W)W_x$ satisface las hipótesis (H1)-(H3).

Para discretizar el sistema consideramos celdas $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ que supondremos, por comodidad, de tamaño constante Δx y definimos $x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x$. Definimos también $x_i = (i-1/2)\Delta x$, el centro de cada celda I_i. Sea Δt el paso de tiempo y definamos $t^n = n\Delta t$.

Denotamos por W_i^n a la aproximación de las medias en cada celda de la solución exacta obtenida con el esquema numérico en $t = t^n$:

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x,t^n)\,dx.$$

Supongamos conocidos W_i^n. Como es usual en los métodos de Godunov, aproximamos la solución en $t = t^{n+1}$ por

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} W^{i-1/2}(x,t^{n+1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} W^{i+1/2}(x,t^{n+1})\,dx\right),$$

donde $W^{i+1/2}$ denota la solución del problema de Riemann asociado a los estados W_i^n y W_{i+1}^n en la intercelda $x = x_{i+1/2}$.

Asumiendo una condición CFL 1/2 obtenemos la siguiente expresión para el método de Godunov:

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\bigg(&\int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s, W_{i-1/2}^n, W_i^n))\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s; W_{i-1/2}^n, W_i^n)\,ds \\ &+ \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_i^n, W_{i+1/2}^n))\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s; W_i^n, W_{i+1/2}^n)\,ds\bigg), \end{aligned} \tag{7}$$

donde $W_{i+1/2}^n$ es el valor (constante) de $W^{i+1/2}$ en la intercelda $x = x_{i+1/2}$. Nótese que $W^{i+1/2}$ puede ser discontinua en $x = x_{i+1/2}$. En tal caso, la discontinuidad en $x = x_{i+1/2}$ es estacionaria, por lo que la masa asociada al salto correspondiente es cero. Por tanto, en el esquema podemos reemplazar $W_{i+1/2}^n$ bien por el límite de $W^{i+1/2}$ a la izquierda de $x_{i+1/2}$, $W_{i+1/2}^{n,-}$, o bien por el límite a la derecha, $W_{i+1/2}^{n,+}$.

En el caso particular de un sistema de leyes de conservación, en que $\mathcal{A}$ es la matriz jacobiana de una función de flujo F, (7) coincide con la expresión habitual del método de Godunov para sistemas de leyes de conservación.

Este método es bien equilibrado. Recordemos que la propiedad de buen equilibrado está relacionada con la aproximación numérica de las soluciones estacionarias. El sistema (1) admite soluciones estacionarias no triviales sólo si tiene campos linealmente degenerados: si $W(x)$ es una solución estacionaria regular, satisface

$$\mathcal{A}(W(x)) \cdot W'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si $W'(x) \neq 0$, entonces 0 es un autovalor de $\mathcal{A}(W(x))$ con $W'(x)$ como autovector asociado. Por tanto, esta solución se puede interpretar como una parametrización de una curva integral de un campo linealmente degenerado cuyo autovalor correspondiente toma el valor 0 a lo largo de la curva. Si llamamos Γ al conjunto de todas las curvas integrales γ de un campo linealmente degenerado de $\mathcal{A}(W)$ tal que el autovalor correspondiente se anula en Γ, dada una curva $\gamma \in \Gamma$, un esquema numérico se dice que es exactamente bien equilibrado (o respectivamente bien equilibrado con orden k) para γ si resuelve de modo exacto (respectivamente con orden $O(\Delta x^k)$) soluciones regulares estacionarias W tales que $W(x) \in \gamma$ para cada x. Se dice que el esquema numérico es exactamente bien equilibrado (o bien equilibrado con orden k) si estas propiedades se satisfacen para cada curva de Γ (véase [6] para más detalles).

5. Consistencia del método de Godunov

En [5] se conjeturó un teorema de convergencia de tipo Lax-Wendroff para esquemas numéricos camino-conservativos: si las soluciones obtenidas con un esquema camino-conservativo convergen a alguna función cuando se refina la malla, entonces esta función debe ser una solución débil del sistema no conservativo si las definiciones de esquema camino-conservativo y solución débil hacen referencia a la misma familia de camios. El resultado principal de esta sección apunta en ese sentido.

Asumimos que $\Delta t/\Delta x$ es una constante fija λ cuando Δx y Δt tienden a 0 y una condición CFL 1/2.

Como discretización de la condición inicial elegimos las medias

$$W_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_0(x)\, dx.$$

Sea $h = \Delta x$ y sea $W_h(x,t)$ la función definida c.p.d. en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ por

$$W_h(x, 0) = W_i^0, \quad x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \tag{8}$$

y

$$W_h(x,t) = W^{i+1/2}(x,t), \quad (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times [t^n, t^{n+1}). \tag{9}$$

La condición CFL impuesta asegura que las soluciones de los problemas de Riemann adyacentes no interfieren una con otra antes del instante de tiempo t^{n+1}.

Teorema *Dado $h > 0$, sea W_h la aproximación numérica* (9) *obtenida con el método de Godunov, y sea $W_h(x,0)$ dado por* (8)*.*

Supongamos que existe una función $W \in (L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \cap BV(\mathbb{R}\times[0,\infty)))^N$ tal que

$$\|W_h(\cdot,t) - W(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})^N} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{en } L^1([0,\infty)) \tag{10}$$

y que existe una constante C tal que

$$TV(W_h(\cdot,t)) \le C \quad \forall t \in [0,\infty), h > 0. \tag{11}$$

Entonces W es una solución débil del problema (1) *con condición inicial* (6)*.*

La prueba de este teorema es una adaptación del teorema de convergencia de Lax-Wendroff para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación, para la que hemos de usar un resultado de estabilidad para productos no conservativos establecido en [2].

El resultado anterior no implica que la solución débil obtenida al refinar la malla sea una solución entrópica. Si asumimos el concepto de solución débil entrópica basado en un par de entropía debemos probar que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta(W(x,t))\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dxdt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty G(W(x,t))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dxdt \\ \le -\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(W_0(x))\varphi(x,0)\,dx \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+),\ \varphi \ge 0. \tag{12}$$

Para ello sería suficiente suponer que se tiene una desigualdad de entropía discreta de la forma

$$\eta(W_i^{n+1}) \le \eta(W_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(\mathcal{G}_{i+1/2}^n - \mathcal{G}_{i-1/2}^n\big), \tag{13}$$

donde

$$\mathcal{G}_{i+1/2}^n = \mathcal{G}\big(W_{i-q}^n, \dots, W_{i+p}^n\big), \tag{14}$$

siendo $\mathcal{G}$ una función Lipschitz continua de Ω^{p+q+1} en Ω, consistente con G en el sentido de que

$$\mathcal{G}(W,\dots,W) = G(W) \quad \forall W \in \Omega. \tag{15}$$

6. Algunas consideraciones

El teorema establecido en la sección anterior no puede ser considerado como una extensión del teorema clásico de Lax-Wendroff para problemas no conseervativos, ya que la convergencia uniforme aquí requerida es mucho más fuerte que la exigida en dicho resultado clásico. Ha de ser pues entendido únicamente como un resultado de consistencia del esquema numérico con el concepto de solución débil elegido y, por tanto, con las condiciones de Rankine-Hugoniot correspondientes.

Este teorema se puede extender al caso de una familia de esquemas numéricos basada en la elección de un resolvedor de Riemann aproximado. En efecto, en [5] se introdujo una generalización para el caso de sistemas no conservativos del concepto de resolvedor de

Riemann aproximado, basada en la elección de una familia de caminos, así como la definición de esquema numérico camino-conservativo, que generaliza la de esquema numérico conservativo para problemas conservativos. Este concepto de resolvedor de Riemann aproximado para sistemas no conservativos permite la construcción de un esquema numérico que puede ser escrito bajo la forma de un esquema camino-conservativo. El esquema de Godunov presentado es el caso particular correspondiente a la elección del resolvedor de Riemann exacto.

Agradecimientos

Este estudio ha sido parcialmente financiado por los proyectos BFM2003-07530-C02-02 y MTM2006-08075.

Referencias

[1] M.J. Castro, J. Macías, C. Parés. *A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system.* Math. Mod. Num. Anal., 35 (2001), 107–127.

[2] G. Dal Maso, P.G. LeFloch, F. Murat. *Definition and weak stability of nonconservative products.* J. Math. Pures Appl., 74 (1995), 483–548.

[3] P.D. Lax, B. Wendroff. *Systems of conservation laws.* Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960) 217–237.

[4] M.L. Muñoz-Ruiz, C. Parés. *Godunov method for nonconservative hyperbolic systems.* Math. Mod. Num. Anal., 41 (2007), 169–185.

[5] C. Parés. *Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework.* SIAM J. Numer. Anal., 44 (2006), 300–321.

[6] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water systems.* Math. Mod. Num. Anal., 38 (2004), 821–852.

[7] A.I. Volpert. *The space BV and quasilinear equations.* Math. USSR Sbornik, 73 (1967), 225–267.