

## Métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios y reducción de orden

M. J. MORETA<sup>1</sup> B. BUJANDA<sup>2</sup>, J.C. JORGE<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico I. Universidad Complutense de Madrid. E-mail:*  
mjesusmoreta@ccee.ucm.es

<sup>2,3</sup> *Dpto. Ingeniería Matemática e Informática, Campus Arrosadía s/n, Universidad Pública de Navarra,  
Pamplona (Navarra). E-mails: blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavara.es.*

**Palabras clave:** Métodos Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios, Problemas de segundo orden en tiempo, Reducción de orden

### Resumen

We study here the order reduction that appears in the numerical integration of second-order in time linear problems by means of Fractional Step Runge-Kutta-Nyström methods. This drawback takes its maximum relevance when the boundary conditions are time dependent. This new kind of methods, introduced in [6], allows us to combine the advantages of Fractional Step methods with the ones of Runge-Kutta-Nyström methods. We show that this order reduction can be completely avoided, without increasing too much the computational cost, by taking a suitable modification of the classical boundary conditions considered for the internal stages.

## 1. Introducción

En [6], los autores proponen por primera vez un tipo de métodos denominados Runge-Kutta-Nyström de Pasos Fraccionarios (RKNPF). Estos métodos han mostrado ser especialmente interesantes cuando se usan para integrar numéricamente problemas evolutivos multidimensionales lineales de segundo orden en tiempo, que pueden ser formulados abstractamente como sigue:

$$\begin{array}{l} \text{Encontrar } u(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \text{ solución de} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t) = A u(t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \\ u(0) = u_0, \\ u_t(0) = u_{t0}, \\ B u(t) = g(t) \in \mathcal{H}^b, \quad 0 \leq t \leq T < \infty. \end{array} \right. \end{array} \quad (1)$$

Típicamente,  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio espacial acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\nu$ ,  $\nu$  entero, con frontera  $\Gamma$ .  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador diferencial lineal de orden  $d$  definido en un subconjunto  $\mathcal{D}(A)$  denso en  $\mathcal{H}$ . Este operador contiene las derivadas respecto de las variables espaciales.  $f(t)$  es el término fuente y  $u_0, u_{t_0}$  son las condiciones iniciales; supondremos que estos datos son suficientemente regulares. Asumiremos además que  $B : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^b$  es sobre, siendo  $\overline{Ker(B)} = \mathcal{D}(A)$  y  $\mathcal{H}^b$  un espacio de Hilbert.

Las condiciones que aseguran que este tipo de problemas están bien planteados vienen dadas en [4]. Es necesario que  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) = Ker(B) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  (restricción del operador  $A$  al  $Ker(B)$ ), sea autoadjunto y definido negativo, ya que así el operador  $A_0$  será el generador infinitesimal de una función coseno de tipo  $\omega = 0$  sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ; esto implica que será el generador infinitesimal de un semigrupo  $C_0$  de tipo  $\tilde{\omega} \leq 0$  lo que nos permite asegurar que  $(\mu I - A_0)^{-1}$  existe y es acotado para cada  $\mu$  con  $\mu > \tilde{\omega}$ .

La integración numérica de problemas del tipo (1) se puede realizar siguiendo diferentes técnicas. Para la obtención del esquema totalmente discreto se combinan los procesos de discretización temporal y espacial. Dichos procesos se pueden realizar en cualquier orden. En cuanto a la discretización temporal los métodos RKNPF han mostrado ser especialmente eficientes para problemas multidimensionales en los que el operador lineal admite una adecuada descomposición (ver [6]). Estos métodos surgen de la idea de juntar las ventajas de los métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN) cuando son aplicados a problemas generales de segundo orden en tiempo (ver [5]) con las ventajas de los métodos clásicos de Pasos Fraccionarios desarrollados para problemas evolutivos multidimensionales de primer orden en tiempo (ver [8]). Es bien conocido que la integración temporal de problemas que involucren a ecuaciones diferenciales de segundo orden en tiempo se ha realizado clásicamente utilizando, entre otros, métodos de tipo RK o RKN. En ambos casos este tipo de métodos pueden ser elegidos de tipo explícito o implícito. Los métodos explícitos requieren un bajo costo computacional por paso, sin embargo, cuando el problema es arbitrariamente rígido presentan problemas de estabilidad. Para evitar este problema se pueden tomar métodos implícitos, pero en este caso el costo computacional de cada etapa será elevado, sobre todo cuando se tienen problemas multidimensionales en espacio, que es el caso que nos ocupa; estos inconvenientes se evitan utilizando métodos RKNPF tal y como indicaremos posteriormente.

No obstante, al igual que sucede con los métodos RK, RKN o Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (RKPF) cuando son aplicados para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, puede aparecer el conocido problema de la reducción de orden (ver [2, 3] para RKN y [1] para RKPF). Este inconveniente suele presentarse en su máxima expresión cuando las condiciones de contorno varían en el tiempo. En [1, 3] se demuestra que en el caso de métodos RKN implícitos o RKPF se puede evitar dicha reducción de orden modificando adecuadamente los valores del contorno que aparecen en las etapas intermedias. La técnica expuesta a continuación tiene en cuenta estas ideas y además presenta la ventaja de que el costo computacional adicional requerido es mínimo.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en las Secciones 2 y 3 describimos el método de discretización temporal y espacial, respectivamente. La Sección 4 muestra los resultados obtenidos en el error global tanto cuando se tiene reducción de orden como cuando se evita. Finalmente, en la Sección 5 mostraremos un ensayo numérico en el que se puede observar la pérdida y recuperación del orden.

## 2. Discretización temporal

La discretización temporal se realiza aplicando un método de tipo RKNPF. Para aplicar este clase de métodos suponemos que el operador elíptico  $A$  admite una descomposición en  $m$  sumandos  $A = \sum_{\ell=1}^m A_\ell$ , donde  $A_\ell : \mathcal{D}(A_\ell) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  y  $\bigcap_{\ell=1}^m \mathcal{D}(A_\ell) = \mathcal{D}(A)$ , siendo cada uno de ellos más sencillo que el operador  $A$  en algún sentido. Además, definimos los operadores de contorno suprayectivos  $B_\ell : \mathcal{D}(A_\ell) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\ell^b$ ,  $\ell = 1, \dots, m$  y denotamos por  $A_{\ell,0} : \mathcal{D}(A_{\ell,0}) = \text{Ker}(B_\ell) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  la restricción de  $A_\ell$  a  $\text{Ker}(B_\ell)$ ; estas restricciones verifican que  $\text{Ker}(B) = \bigcap_{\ell=1}^m \text{Ker}(B_\ell)$  y  $\overline{\text{Ker}(B_\ell)} = \mathcal{D}(A_\ell)$ .  $A_{\ell,0}$  es autoadjunto y definido negativo<sup>1</sup>. Con el fin de buscar una cierta simetría en la exposición de resultados, descomponemos el término fuente en  $m$  sumandos suficientemente regulares  $f(t) = \sum_{\ell=1}^m f_\ell(t)$ . Así, (1) se puede reescribir en la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \text{ solución de} \\ &\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t) = \sum_{\ell=1}^m (A_\ell u(t) + f_\ell(t)), \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \\ u(0) = u_0, \\ u_t(0) = u_{t0}, \\ B_\ell u(t) = g_\ell(t) \in \mathcal{H}_\ell^b, \quad \ell = 1, \dots, m, \quad 0 \leq t \leq T < \infty. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2)$$

Supondremos que existen  $\tilde{\omega}_\ell \in \mathbb{R}$  tales que para cada  $\mu \in \mathbb{R}$  con  $\mu > \tilde{\omega}_\ell$ , el problema

$$(\mu I - A_\ell)u = 0, \quad B_\ell u = v,$$

posee, para cada  $v \in \mathcal{H}_\ell^b$ , una única solución  $u = S_\ell(\mu)v$ , siendo  $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es el operador identidad. Además esta solución satisface:  $\|S_\ell(\mu)v\| \leq L_\ell \|v\|$ , para una cierta constante  $L_\ell > 0$  independientemente de  $\mu$  para  $\mu > \omega_{\ell,0} > \tilde{\omega}_\ell$ .

Un método RKNPF es un integrador numérico que aplicado al problema (2) da la aproximación numérica a la solución exacta en el instante  $t_{n+1} = t_n + \tau$  mediante un algoritmo de la forma:

$$\begin{aligned} K_{n,i} &= U_n + c_i \tau V_n + \tau^2 \sum_{j=1}^i a_{\ell_j, ij} (A_{\ell_j} K_{n,j} + f_{\ell_j}(t_{n,j})), \quad i = 1, \dots, s, \\ V_{n+1} &= V_n + \tau \sum_{j=1}^s b_{\ell_j, j} (A_{\ell_j} K_{n,j} + f_{\ell_j}(t_{n,j})), \\ U_{n+1} &= U_n + \tau V_n + \tau^2 \sum_{j=1}^s \beta_{\ell_j, j} (A_{\ell_j} K_{n,j} + f_{\ell_j}(t_{n,j})), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $t_{n,j} = t_n + c_j \tau$  y  $t_n = n\tau$ ,  $n = 1, \dots, N$ , siendo  $\tau = T/N$  el paso en tiempo y  $N$  el número de pasos.  $K_{n,i}$  se denominan etapas intermedias y  $(U_n, V_n)^T$  es la aproximación numérica de la solución exacta  $(u(t_n), u_t(t_n))^T$ .

Completando con algunos coeficientes nulos siguiendo las ideas de los métodos RKPF,  $a_{\ell, ij} = 0$ ,  $\beta_{\ell, j} = 0$ ,  $b_{\ell, j} = 0$  para  $\ell \neq \ell_j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $1 \leq j \leq s$ , podemos organizar los coeficientes de estos métodos en una tabla de la forma:

<sup>1</sup>Notar que, bajo estas condiciones,  $A_{\ell,0}$  es el generador infinitesimal de un grupo  $C_0$  de tipo  $\bar{\omega}_\ell < 0$ . Así,  $(\mu_\ell I - A_{\ell,0})^{-1}$  existe y es acotado para cada  $\mu_\ell$  con  $\text{Re}(\mu_\ell) > \bar{\omega}_\ell$ .

$$\begin{array}{c|ccc} c & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_m \\ \hline & \beta_1^T & \dots & \beta_m^T \\ \hline & b_1^T & \dots & b_m^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc|ccc} c_1 & a_{1,11} & & & & & a_{m,11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{1,s1} & \dots & a_{1,ss} & & & a_{m,s1} & \dots & a_{m,ss} \\ \hline & \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,s} & \dots & & \beta_{m,1} & \dots & \beta_{m,s} \\ \hline & b_{1,1} & \dots & b_{1,s} & \dots & & b_{m,1} & \dots & b_{m,s} \end{array}$$

En (3) puede verse que si la descomposición realizada para el operador  $A$  es adecuada (p. e., para un problema multidimensional se toma cada  $A_\ell$  conteniendo sólo derivadas con respecto a la variable  $x_\ell$ ) y se combina con una discretización espacial adecuada, los esquemas anteriores tienen un costo computacional por paso muy bajo si lo comparamos con un método implícito clásico.

De la misma forma que para métodos RKN o RKPF, para completar la definición del esquema (3) es necesario añadir condiciones de contorno a las ecuaciones que definen las etapas intermedias. La opción que parece razonable (que es la usada clásicamente) es considerar la evaluación de la condición frontera de (1) en los tiempos intermedios, es decir,  $G_{\ell_i, n, i} \equiv B_\ell K_{n, i} = B_\ell u(t_{n, i}) = g_\ell(t_{n, i})$ . Sin embargo, esta opción no es la más adecuada ya que implica una reducción de orden del método. La demostración de que las etapas, una vez fijadas las condiciones frontera, son resolubles y tienen una única solución puede verse en [7].

Introducimos ahora dos conceptos importantes asociados a los métodos RKNPF:

**Definición:** *Un método RKNPF dado por (3) se dice que tiene orden clásico  $p$  cuando es aplicado para resolver el problema (2) si  $\|\rho_{n+1}\| = O(\tau^{p+1})$  y  $\|\xi_{n+1}\| = O(\tau^{p+1})$ , donde  $\rho_{n+1} = u(t_{n+1}) - \bar{U}_{n+1}$  y  $\xi_{n+1} = u_t(t_{n+1}) - \bar{V}_{n+1}$ , siendo  $(\bar{U}_{n+1}, \bar{V}_{n+1})^T$  la solución numérica obtenida a partir de  $(u(t_n), u_t(t_n))^T$ .*

**Definición:** *Un método RKNPF se dice que tiene orden de etapas  $q$  cuando  $q = \min\{p, \tilde{q}\}$  siendo  $p$  el orden clásico y  $\tilde{q}$  el máximo valor tal que, para  $\ell = 1, \dots, m$ ,  $c^r = r(r-1)A_\ell c^{r-2}$ ,  $r = 2, \dots, \tilde{q}$ , donde  $c^r = [c_1^r, \dots, c_s^r]^T$  y  $c^0 = e = [1, \dots, 1]^T$ .*

### 3. Discretización espacial

Veamos ahora una breve descripción del tipo de discretización espacial que utilizamos. Para  $\ell = 1, \dots, m$  supongamos que queremos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} A_\ell u = F_\ell, & x \in \Omega, \\ B_\ell u = G_\ell, & x \in \Gamma_\ell \equiv B_\ell \Omega, \end{cases}$$

donde  $F_\ell, G_\ell \in \mathcal{H}_\ell^b$  y  $u \in \mathcal{D}(A_\ell) \cap \mathcal{H}$ .  $A_\ell$  y  $B_\ell$  son los descritos al inicio de la Sección 2.

Para la discretización de este problema se considera una malla  $\Omega_J$  en  $\Omega \cup \Gamma$ . Esta malla, asociada a un parámetro natural  $J$ , relativo al número de nodos en ella, consta de nodos interiores,  $\Omega_{J,I}$ , y nodos frontera,  $\Omega_{J,b}$ . Tras ello, tomamos  $H_J$ , un espacio finito-dimensional asociado a este parámetro, considerando el subespacio (o espacio de menor dimensión que  $H_J$ )  $H_{J,0}$  formado por los elementos de  $H_J$  que se anulan en cierta forma en la frontera  $\Gamma$ . Además, definimos los operadores  $\hat{R}_{\ell, J, u} \in H_J$ , con  $B_\ell \hat{R}_{\ell, J, u} = 0$  y  $\kappa_{\ell, J, b} G_\ell$  interpolando  $G_\ell$  en  $\Omega_J \cap B_\ell \Omega$ , y anulándose en  $\Omega_J \cap \Omega$ . Notar que,  $\tilde{R}_{\ell, J, u} + \kappa_{\ell, J, b} G_\ell$  aproxima  $u$  en  $H_J$ .

Para encontrar los valores de  $u_J$  en  $\Omega \cap \Omega_J$  (aquellos de  $R_{\ell,J}u$ ), debemos resolver

$$P_J A_\ell \tilde{R}_{\ell,J} u + P_J A_\ell \kappa_{\ell,J,b} G_\ell = P_J F_\ell, \quad (4)$$

donde  $P_J$  se define como el operador proyección en  $H_{J,0}$ .

Además, se define  $R_{\ell,J}$  como el operador en  $H_{J,0}$  que interpola  $\tilde{R}_{\ell,J}u$  en  $\Omega_{J,I}$ . Por lo tanto,  $\tilde{R}_{\ell,J}u$  se puede expresar como  $R_{\ell,J}u + \sum_{k=1, k \neq \ell}^m \kappa_{k,J,b} B_k \tilde{R}_{k,J}u$ , y teniendo en cuenta que  $P_J A_\ell \kappa_{k,J,b} B_k \tilde{R}_{k,J}u = 0$  para  $\ell, k = 1, \dots, m$  con  $k \neq \ell$ , se tiene que (4) se puede escribir como  $A_{\ell,J,0} R_{\ell,J}u + S_{\ell,J} B_\ell u = P_J A_\ell u$ , donde  $A_{\ell,J,0} : H_{J,0} \rightarrow H_{J,0}$  (simétrico y definido negativo) y  $S_{\ell,J} : \mathcal{H}_\ell \rightarrow H_{J,0}$ , (con  $\mathcal{H}_\ell$  cierto espacio de funciones en  $\Gamma_\ell$ ), vienen dados por  $A_{\ell,J,0} = P_J A_\ell$  y  $S_{\ell,J} = P_J A_\ell \kappa_{\ell,J,b}$ , respectivamente. Nótese que debido a su definición,  $P_J u - R_{\ell,J}u$  se anula en  $\Gamma \cap \Omega_J$  y coincide con  $P_J u - \tilde{R}_{\ell,J}u$  en  $\Omega \cap \Omega_J$ . Además, también se define  $R_J : \mathcal{D}(A) \rightarrow H_J$  como el operador satisfaciendo que  $A_{J,0} R_J u - S_J g = P_J f$ , con  $A_{J,0} = P_J A|_{H_J}$  y  $S_J = P_J A \kappa_{J,b}$ , con  $\kappa_{J,b}u$  interpolando  $u$  en  $\Omega_J \cap \Gamma$  y anulándose en  $\Omega_J \cap \Omega$ . Por último, denotamos por  $\|\cdot\|_J$  a la norma discreta considerada en  $H_{J,0}$ , que aproxima en cierto modo a la norma de  $\mathcal{H}$  ( $\|\cdot\|$ ). Algunos métodos conocidos que se pueden escribir de esta forma son las discretizaciones espectrales y algunos métodos de elementos finitos y diferencias finitas.

Para nuestro análisis supondremos que las siguientes hipótesis se satisfacen (ver [7]), donde las correspondientes constantes no dependen de  $J$ .

(H1)  $\forall u \in C(\Omega)$  suficientemente regular y  $J$  suficientemente grande,  $\|P_J u\|_J = O(\|u\|)$ .

(H2) Existe  $\tilde{\alpha} > 0$  y una función decreciente<sup>2</sup>  $\tilde{d} : (\tilde{\alpha}, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$  tal que, si  $u \in \mathcal{H}^\alpha(\Omega) \subset \mathcal{D}(A_\ell)$ , con  $\alpha > \tilde{\alpha}$  y  $J$  es suficientemente grande,

$$\|R_{\ell,J}u - P_J u\|_J = O(J^{\tilde{d}(\alpha)} \|u\|_{\mathcal{H}^\alpha(\Omega)}) \quad \text{y} \quad \|R_J u - P_J u\|_J = O(J^{\tilde{d}(\alpha)} \|u\|_{\mathcal{H}^\alpha(\Omega)}).$$

(H3) Para  $U_{\ell,J,0} \in H_{\ell,J,0}$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , existe  $\tilde{d} \geq 0$  tal que  $\|A_{\ell,J,0} U_{\ell,J,0}\|_J = O(J^{\tilde{d}} \|U_{\ell,J,0}\|_J)$ .

(H4) El operador  $(\mathcal{I} \otimes I_J - \sum_{\ell=1}^m \mathcal{A}_\ell \otimes \tau^2 A_{\ell,J,0})^{-1}$  está uniformemente acotado en  $J$ .

## 4. Error global

Cuando los valores para el contorno son elegidos en la forma clásica, es decir,  $G_{\ell,n,j}^{[0]} = B_\ell u(t_{n,j})$  ( $G_{\ell,n}^{[0]} = [B_\ell u(t_{n,1}), \dots, B_\ell u(t_{n,s})]^T$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ ), se prueba que el error global obtenido está relacionado con el orden de etapas, que para estos métodos suele ser muy bajo. El error local puede verse como el error global tras un paso. Para evitar esta reducción de orden (sin elevar de manera importante el costo computacional) redefinimos el valor de las condiciones de contorno de las etapas intermedias utilizando el siguiente proceso recursivo:

$$\begin{aligned} K_{n,i}^{[0]} &= u(t_{n,i}), \\ K_n^{[r]} &= (e \otimes I)u(t_n) + \tau(c \otimes I)u_t(t_n) + \tau^2 \sum_{\ell=1}^m (\mathcal{A}_\ell \otimes A_\ell) K_n^{[r-1]} + \tau^2 \sum_{\ell=1}^m (\mathcal{A}_\ell \otimes I) f_{\ell,n}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En métodos espectrales  $\tilde{d}(\alpha)$  es estrictamente decreciente cuando  $\alpha$  crece. En diferencias finitas y elementos finitos  $\tilde{d}(\alpha)$  es usualmente constante y no depende de la regularidad de  $u$ .

para  $r = 1, \dots$  entero, tomando entonces  $G_{\ell,n,i}^{[0]} = B_\ell K_{n,i}^{[0]} = B_\ell u(t_{n,i})$  y  $G_{\ell,n,i}^{[r]} = B_\ell K_{n,i}^{[r]}$  para  $\ell = 1, \dots, m$   $i = 1, \dots, s$  y  $r = 1, \dots$  entero.

Después de discretizar en tiempo y una vez que se han impuesto las condiciones frontera  $G_{l,n}^{[r]}$ ,  $l = 1 \dots, m$ ,  $r \geq 0$  entero, entonces, de forma tensorial, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} \otimes I_J - \tau^2 \sum_{l=1}^m \mathcal{A}_l \otimes A_{l,J,0}) K_{n,J,0}^{[r]} &= (e \otimes I_J) U_{n,J,0}^{[r]} + \tau (c \otimes I_J) V_{n,J,0}^{[r]} + \tau^2 \sum_{l=1}^m (\mathcal{A}_l \otimes S_{l,J}) G_{l,n}^{[r]} \\ &+ \tau^2 \sum_{l=1}^m (\mathcal{A}_l \otimes P_J) f_{l,J}, \end{aligned}$$

$$V_{n+1,J,0}^{[r]} = V_{n,J,0}^{[r]} + \tau \sum_{l=1}^m (b_l^T \otimes A_{l,J,0}) K_{n,J,0}^{[r]} + \tau \sum_{l=1}^m (b_l^T \otimes S_{l,J}) G_{l,n}^{[r]} + \tau \sum_{l=1}^m (b_l^T \otimes P_J) f_{l,n},$$

$$U_{n+1,J,0}^{[r]} = U_{n,J,0}^{[r]} + \tau V_{n,J,0}^{[r]} + \tau^2 \sum_{l=1}^m (\beta_l^T \otimes A_{l,J,0}) K_{n,J,0}^{[r]} + \tau^2 \sum_{l=1}^m (\beta_l^T \otimes S_{l,J}) G_{l,n}^{[r]} + \tau \sum_{l=1}^m (\beta_l^T \otimes P_J) f_{l,n},$$

con  $(U_{n,J,0}^{[r]}, V_{n,J,0}^{[r]})$  la aproximación numérica a la solución exacta  $(u(t_n), u'(t_n))$ .

Entonces, los errores globales en la solución y en la derivada vienen dados por

$$e_{n+1,J}^{[r]} = P_J u(t_{n+1}) - U_{n+1,J,0}^{[r]}, \quad \tilde{e}_{n+1,J}^{[r]} = P_J u_t(t_{n+1}) - V_{n+1,J,0}^{[r]},$$

donde supondremos que  $e_{0,J}^{[r]} = \tilde{e}_{0,J}^{[r]} = 0$ ,  $r \geq 0$  entero. En este caso se demuestra (ver [7])

$$\begin{aligned} \|e_{n,J}^{[r]}\| &= O\left(\tau^{\min\{\tilde{q}+2r,p\}} + \tau^{2r+1} J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+2))} + \tau J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+1))} + \tau^{-1} J^{\tilde{d}(\alpha-d)}\right) \\ &+ O\left(\tau^{2r+1} J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+1))+\tilde{d}} + \tau J^{\tilde{d}(\alpha-dr)+\tilde{d}} + J^{\tilde{h}(\alpha)}\right), \\ \|\tilde{e}_{n,J}^{[r]}\| &= O\left(\tau^{\min\{\tilde{q}+2r-1,p-1\}} + \tau^{2r} J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+2))} + J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+1))} + \tau^{-1} J^{\tilde{d}(\alpha-d)}\right) \\ &+ O\left(\tau^{2r} J^{\tilde{d}(\alpha-d(r+1))+\tilde{d}} + J^{\tilde{d}(\alpha-dr)+\tilde{d}}\right), \end{aligned}$$

donde se puede observar que la reducción de orden puede ser completamente evitada si la solución es suficientemente regular y se realiza el número necesario de iteraciones.

## 5. Experimentos numéricos

En esta sección mostramos un ensayo numérico en el que se puede comprobar la pérdida de orden de un método RKNPF cuando es aplicado en la integración numérica de un problema del tipo (1) en el que las condiciones de contorno dependen del tiempo, así como la recuperación de ese orden perdido cuando se aplican las técnicas anteriormente indicadas para evaluar las condiciones de contorno de las etapas intermedias. Hemos elegido para ello un dominio  $\Omega \times [0, T] = (-1, 1) \times (-1, 1) \times [0, 1]$  en el que resolvemos:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) &= -u_{xxxx}(x, y, t) - u_{yyyy}(x, y, t) + f(x, y, t), & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ B u(x, y, t) &= e^{-t+x^2+2y}, & (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0, 1], \\ B_1(u_x(x, y, t)) &= 2x e^{-t+x^2+2y}, & (x, y) \in \Gamma_1, \quad t \in [0, 1], \\ B_2(u_y(x, y, t)) &= 2e^{-t+x^2+2y}, & (x, y) \in \Gamma_2, \quad t \in [0, 1], \\ u(x, y, 0) &= e^{x^2+2y}, & (x, y) \in \Omega, \quad u_t(x, y, 0) = -e^{x^2+2y}, & (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

$\tau$	Reducción de orden		Evitando la reducción de orden	
	$u(t)$	$u'(t)$	$u(t)$	$u'(t)$
1/80 - 1/160	2.10351	1.13384	3.79841	2.85849
1/160 - 1/320	2.14856	1.16897	3.88389	2.96564
1/320 - 1/640	2.18613	1.20035	3.94071	3.04479
1/640 - 1/1280	2.21926	1.22765	4.00462	3.16751

Tabla 1: Orden del error local

donde  $\Gamma_1 = \{-1, 1\} \times (-1, 1)$  y  $\Gamma_2 = (-1, 1) \times \{-1, 1\}$ . La descomposición del operador  $A$  (con  $Au = -u_{xxxx} - u_{yyyy}$ ) la haremos de la forma  $A = A_1 + A_2$  con  $A_1u = -u_{xxxx}$  y  $A_2u = -u_{yyyy}$ . La fuente  $f(x, y, t)$  ha sido elegida de tal forma que la solución exacta sea  $u(x, y, t) = e^{-t+x^2+2y}$  y se ha descompuesto como  $f_1(x, y, t) = u_{tt}(x, y, t)/2 + u_{xxxx}(x, y, t)$  y  $f_2(x, y, t) = u_{tt}(x, y, t)/2 + u_{yyyy}(x, y, t)$ .

En primer lugar discretizamos en tiempo utilizando para ello el método RKNPF descrito en [6]. Este método tiene orden clásico 3, pero su orden de etapas es sólo uno. Con el fin de que las cuatro etapas que aparecen en el algoritmo estén bien definidas y tengan una única solución debemos añadir las condiciones de contorno correspondientes. Debido a que en las etapas impares actúa implícitamente sólo el operador  $u_{xxxx}$  (en las pares sólo  $u_{yyyy}$ ) las condiciones de contorno para ellas deben ser impuestas en la frontera  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ). Con el fin de recuperar el orden perdido introducimos las condiciones de contorno en la forma  $G_{\ell,n}^{[r]}$ ,  $\ell = 1, 2$  para  $r = 0$  y  $r = 1$ . Notar que los problemas resultantes en cada etapas son esencialmente unidimensionales.

$\tau$	Reducción de orden		Evitando la reducción de orden	
	$u(t)$	$u'(t)$	$u(t)$	$u'(t)$
1/80 - 1/160	2.12108	1.25245	2.96620	2.65720
1/160 - 1/320	2.14045	1.26605	2.98271	2.83957
1/320 - 1/640	2.17220	1.28081	2.97849	2.78291
1/640 - 1/1280	2.21213	1.28904	2.89219	2.78943

Tabla 2: Orden del error global, hasta  $T = 1$

Para la obtención del esquema totalmente discreto hemos utilizado en segundo lugar un método espectral (ver [6]) tomando para ello 40 nodos en el intervalo  $(-1, 1)$ . Al hacerlo sólo debemos resolver 40 sistemas desacoplados de tamaño  $40 \times 40$  en cada etapa, lo que supone una importante diferencia si lo comparamos con otros métodos. Por ejemplo, si utilizáramos un RKN implícito, en cada etapa tendríamos que resolver un sistema de dimensión  $(40 \times 40) \times (40 \times 40)$ .

En las Tablas 1 y 2 mostramos órdenes numéricos para el error local y el error global cuando son calculados en una norma discreta asociada a la discretización espacial tomada. En la Figura 1 mostramos el error global evaluado en  $T = 1$  y el error local. Ambas gráficas han sido realizadas como función de  $\tau$  en una doble escala logarítmica; la pendiente de las líneas corresponde al orden numérico observado. En ambos casos, el orden observado cuando aparece reducción de orden se ha marcado con una línea continua. El

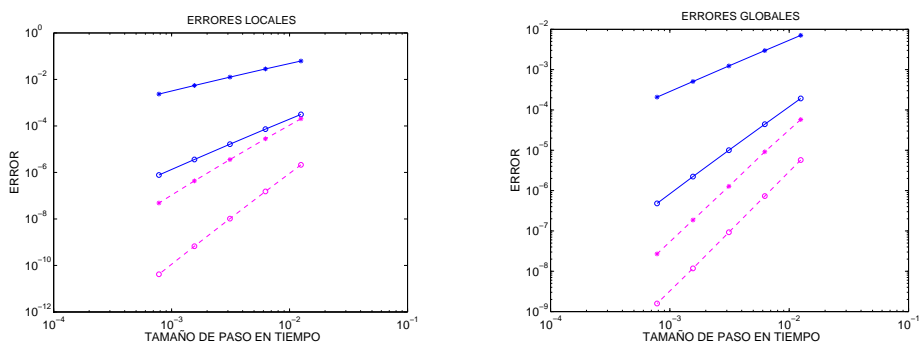


Figura 1: Errores locales

Errores globales

orden observado cuando se evita la reducción de orden con una iteración se ha marcado con trazo discontinuo. Se han utilizado además símbolos (o) para la solución y (\*) para la derivada. En el error global se observa un orden más del esperado debido al fenómeno conocido como sumación por partes.

## Agradecimientos

Este paper ha sido financiado con ayuda de los proyectos: MTM 2004-08012, MTM 2004-05521 y Red Temática 05/R-8.

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo, B. Cano, J. C. Jorge, J. C. *Spectral-fractional step Runge-Kutta discretizations for initial boundary value problems with time dependent boundary conditions*, Math. Comp. 73 (2004), 1801-1825.
- [2] I. Alonso-Mallo, C. Cano, M. J. Moreta, *Order reduction and how to avoid it when explicit Runge-Kutta-Nyström methods are used to solve linear partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 293-318.
- [3] I. Alonso-Mallo, B. Cano, M. J. Moreta, *Optimal time order when implicit Runge-Kutta-Nyström methods solve linear partial differential equations*, Aceptado para publicación en APNUM.
- [4] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1985.
- [5] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Second revised edition, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [6] M. J. Moreta, B. Bujanda & J. C. Jorge, *Fractional Step Runge-Kutta-Nyström methods*, enviado, 2007.
- [7] M. J. Moreta, B. Bujanda & J. C. Jorge, *Solving second-order in time PDE's with Fractional Step Runge-Kutta-Nyström methods*, enviado, 2007.
- [8] N. N. Yanenko, *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.