XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
*Sevilla, 24-28 septiembre 2007*
(pp. 1–6)

# Desigualdades variacionales casilineales elípticas con crecimiento natural en el gradiente

D. Arcoya[1], J. Carmona[2], P.J. Martínez-Aparicio[1]

[1] *Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Granada, C/Severo Ochoa, 18071, Granada.*
*E-mails:* darcoya@ugr.es, pedrojma@ugr.es.
[2] *Dpto. de Álgebra y Análisis Matemático, Universidad de Almería, C/Ctra. Sacramento, La Cañada de San Urbano 04120, Almería. E-mail:* jcarmona@ual.es.

**Palabras clave:** Ecuaciones casilineales elípticas, problemas de obstáculo, no linealidad singular, crecimiento natural del gradiente.

**Resumen**

Nuestro objetivo es estudiar la existencia de solución positiva $w \in H_0^1(\Omega)$ de alguna desigualdad variacional con una no linealidad singular cuyo modelo típico es

$$\left.\begin{array}{r} w(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\[2mm] \dfrac{|\nabla w|^2}{w} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ \dfrac{|\nabla w|^2}{w}(w-\psi^+) \in L^1(\Omega) \\[2mm] \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla (v-w) + \int_\Omega \frac{|\nabla w|^2}{w}(v-w) \geq \int_\Omega a(x)(v-w),\ \forall v \in K_1 \end{array}\right\}$$

donde $\Omega$ es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N\,(N \geq 3)$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ $(p > N)$ tal que $\psi^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $a \in L^q(\Omega)$ con $q > N/2$ es una función estrictamente positiva y el conjunto de las funciones test $K_1$ consta de las funciones $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $v(x) \geq \psi(x)$ a.e. $x \in \Omega$ y supp $(v - \psi^+) \subset\subset \Omega$. Consideramos también clases más amplias de funciones test además del caso en el cual la inecuación variacional se reduce a una ecuación.

## 1. Problema y resultado principal

Sean $\Omega$ un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ $(p > N)$ de manera que $\psi^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $a \in L^q(\Omega)$ con $q > N/2$ satisfaciendo

$$\operatorname{ess\,inf}\{a(x)\,/\,x \in \omega\} > 0, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega. \tag{1}$$

Estudiamos la existencia de solución positiva $w \in H_0^1(\Omega)$ de la desigualdad variacional

$$\left.\begin{array}{r} w(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\ g(w)|\nabla w|^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ g(w)|\nabla w|^2(w-\psi^+) \in L^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla (v-w) + \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2(v-w) \geq \int_\Omega a(x)(v-w),\ \forall v \in K_1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

donde

$$K_1 \quad \equiv \quad \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \begin{array}{l} v(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\ \text{supp } (v-\psi^+) \subset\subset \Omega \end{array} \right\},$$

y $g : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ satisface

$$\limsup_{s \to 0} s g(s) < +\infty. \quad (3)$$

EL problema de obstáculo para operadores no lineales cuadráticos aparece, entre otros casos, en los problemas estocásticos de control (ver [4]).

El modelo básico de no linealidad singular $g$ que nos interesa es $g(s) = 1/s$. Para el conocimiento de los autores, el problema de obstáculo con no linealidades $g$ teniendo singularidad en $s = 0$ no ha sido tratado en la literatura. Mencionamos que el caso de términos $g$ no singulares ha sido estudiado en [3, 5, 6, 8]. Concretamente en [3] y [8] consideran un operador de Leray-Lions y un operador general $g(x, w, \nabla w)$ en lugar de $g(w)|\nabla w|^2$. En el caso particular del operador de Laplace considerado en estas notas, estos autores suponen $a \in L^1(\Omega)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua satisfaciendo la condición de signo $g(s)s \geq 0$, para cada $s \in \mathbb{R}$ y $\psi : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ una función medible. Prueban que si

$$K \equiv \{v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) :\ v(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega\} \not\equiv \emptyset$$

entonces existe solución $w \in H_0^1(\Omega)$ del problema de obstáculo

$$\left.\begin{array}{r} w(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad g(w)|\nabla w|^2,\ g(w)|\nabla w|^2 w \in L^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla (v-w) + \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2(v-w) \geq \int_\Omega a(x)(v-w) \quad \forall v \in K. \end{array}\right\} \quad (4)$$

En [5, 6] se estudia la existencia de solución del problema de obstáculo para operadores en los cuales se añade el término $a_0(x)w$ al operador diferencial, siendo $a_0(x)$ una función acotada inferior y superiormente por constantes positivas.

Nuestro resultado principal [1] es el siguiente.

**Teorema 1.1** *Sean $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > N$ y $\psi^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Sea $a \in L^q(\Omega)$ con $q > N/2$ satisfaciendo (1). Supongamos también que $g : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es una función continua verificando (3). Entonces, existe $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solución de (2).*

*Además, si* $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *entonces* $w$ *también verifica*

$$\left.\begin{aligned} w(x) \geq \psi(x) \ \ a.e.\ x \in \Omega \\ g(w)|\nabla w|^2 \in L^1_{loc}(\Omega),\ g(w)|\nabla w|^2(w-\psi) \in L^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla w \nabla(v-w) + \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2(v-w) \geq \int_\Omega a(x)(v-w),\ \forall v \in K_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

*donde el conjunto no vacío* $K_2$ *está definido como*

$$K_2 \equiv \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \begin{array}{l} v(x) \geq \psi(x) \ \ a.e.\ x \in \Omega \\ supp\ (v-\psi) \subset\subset \Omega \end{array} \right\}.$$

Nuestro procedimiento para la prueba se basa en considerar una sucesión de problemas construidos a partir de una sucesión conveniente de funciones continuas $g_n$ (para $n \in \mathbb{N}$) en $\mathbb{R}$. Concretamente,

$$g_n(s) := \begin{cases} g(s), & s \geq \dfrac{1}{n}, \\ n^2 s^2 g(s), & 0 < s \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & s = 0, \\ -g_n(-s), & s < 0. \end{cases}$$

Por el teorema de Leray-Lions [7, Téorème 8.2], existe solución $w_n \in H_0^1(\Omega)$ del problema de obstáculo

$$\left.\begin{aligned} w \in H_0^1(\Omega), \quad w(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \\ \int_\Omega \nabla w \nabla(v-w) + \int_\Omega g_n(w) \frac{|\nabla w|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla w|^2}(v-w) \geq \int_\Omega a(x)(v-w) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ : \ v(x) \geq \psi(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Además, $w_n$ verifica:

1. existe $\tilde{C}_q > 0$ tal que $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \tilde{C}_q$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De donde podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $w_n \rightharpoonup w$ en $H_0^1(\Omega)$.
2. $w_n \in L^\infty(\Omega)$ y $\|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_q$.
3. $w_n \in C^\alpha_{\text{loc}}(\Omega)$, para cada $0 < \alpha < \text{mín}\{1 - N/p, 2 - N/q\}$.
4. $w_n(x) > 0$ a.e. $x \in \Omega$.

Para probar que $w$ es solución del problema (2) es fundamental comprobar que $w_n$ está lejos de cero en cada subconjunto $\Omega_0$ compactamente contenido en $\Omega$. Para ello, se prueba:

**Proposición 1.1** *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1 y sea* $\Omega_0$ *un subconjunto contenido compactamente en* $\Omega$. *Entonces existe* $c_{\Omega_0} > 0$ *independiente de* $n$ *tal que cada solución* $w_n$ *del problema de obstáculo* (6) *satisface*

$$w_n \geq c_{\Omega_0}, \quad \forall x \in \Omega_0.$$

*Prueba.* Como $g$ es una función continua satisfaciendo (3), existe $\Lambda > 1$ tal que

$$g(s) \leq \frac{\Lambda}{s}, \quad \forall s \in (0, C_q]. \tag{7}$$

El resultado se sigue de [2, Proposition 2.3], una vez que probamos que $w_n$ es una supersolución para el problema casilineal

$$\begin{array}{c} -\Delta w + \frac{\Lambda}{w}|\nabla w|^2 = a(x), \quad x \in \Omega \\ w \in H_0^1(\Omega). \end{array}$$

Para verlo, sea $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ una función no negativa. Usamos $v = w_n + \varphi$ como función test en (6) y, teniendo en cuenta que $g_n(s) \leq g(s) \leq \Lambda/s$ para cada $s \in (0, C_q]$, deducimos que $w_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ satisface en sentido débil

$$0 \leq a(x) \leq -\Delta w_n + g_n(w_n)\frac{|\nabla w_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^2} \leq -\Delta w_n + \frac{\Lambda}{w_n}|\nabla w_n|^2, \quad x \in \Omega.$$

□

Ahora, tomando como funciones test $w_n - [w_n - w]^+$ y $w_n - \varphi_\gamma(z_n)\xi$, para $\gamma \geq \frac{c^2}{4}$, con la función real $\varphi_\gamma(s) = se^{\gamma s^2}$ para cada $s \in \mathbb{R}$ y $z_n \equiv [w_n - w]^-$, obtenemos la convergencia fuerte a una $w \in H_0^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega_0)$ para cada abierto $\Omega_0$ compactamente contenido en $\Omega$.

Finalmente, pasando al límite cuando $n$ tiende a $\infty$, probamos que $w$ es una solución de (2). En efecto, escogemos $v \in K_1$ y la tomamos como función test en (6) para obtener

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla w_n \nabla v \quad &+ \quad \int_\Omega g_n(w_n)\frac{|\nabla w_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^2}(v - \psi^+) - \int_\Omega a(x)(v - w_n) \\ &\geq \quad \int_\Omega \left[|\nabla w_n|^2 + \frac{g_n(w_n)|\nabla w_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^2}(w_n - \psi^+)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Puesto que $w_n$ es débilmente convergente a $w$ en $H_0^1(\Omega)$, la sucesión $\int_\Omega \nabla w_n \nabla v$ tiende a $\int_\Omega \nabla w \nabla v$. También implica la convergencia fuerte de $w_n$ a $w$ en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto la convergencia de $\int_\Omega a(x)(v - w_n)$ a $\int_\Omega a(x)(v - w)$. Por otro lado, escogiendo un subconjunto abierto $\Omega_0$ compactamente contenido en $\Omega$, tal que supp $(v - \psi^+) \subset \Omega_0$ y usando la Proposición 1.1, tenemos $w_n(x) \geq c_0 > 0$ para cada $x \in \Omega_0$ para algún $c_0 > 0$. Por lo tanto, usando que $g_n \leq g$ y la desigualdad (7) tenemos que

$$g_n(w_n) \leq \frac{\Lambda}{c_0}.$$

Esta estimación unida a la convergencia fuerte de $w_n$ a $w$ en $H^1(\Omega_0)$ para todo $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ nos permite aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \frac{g_n(w_n)|\nabla w_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla w_n|^2}(v - \psi^+) = \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2(v - \psi^+).$$

Consecuentemente, tomando límites en (8) cuando $n$ tiende a infinito, concluimos del lema de Fatou que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla w \nabla v &+ \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2(v-\psi^+) - \int_\Omega a(x)(v-w) \\ &\geq \int_\Omega \left[|\nabla w|^2 + g(w)|\nabla w|^2(w-\psi^+)\right],\end{aligned}$$

para cada $v \in K_1$, y por lo tanto que $w$ es una solución de (2).

Finalmente, para probar que si, además, $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonces $w$ es también una solución de (5), sólo tenemos que repetir el argumento reemplazando $\psi^+$ por $\psi$ y $K_1$ por $K_2$. □

## 2. Notas adicionales

En el caso en el cual el dato $\psi$ fuera más regular es posible fortalecer el concepto de solución. Así, si $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p > N$ y supp $\psi \subset\subset \Omega$, entonces $w$ también es solución del problema (4) y extendemos a no linealidades singulares $g$ los resultados de [3] (para el caso $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $a \in L^q(\Omega)$ con $p > N$, $q > N/2$ y supp $\psi \subset\subset \Omega$). Se puede probar el siguiente Teorema.

**Teorema 2.1** *Sean $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > N$ y supp $\psi^+ \subset\subset \Omega$. Para $q > N/2$, sea $a \in L^q(\Omega)$ una función satisfaciendo (1). Supongamos también que $g : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es una función continua verificando (3). Entonces la solución $w$ dada por el Teorema 1.1 es tal que $g(w)|\nabla w|^2 \in L^1(\Omega)$. En particular, si supp $\psi \subset\subset \Omega$, entonces $w$ es solución de (4).*

Como una consecuencia más, mejoramos un resultado previo de [2], donde se estudia la existencia de solución del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta w + g(w)|\nabla w|^2 &=& a(x) & x \in \Omega \\ w &=& 0 & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{9}$$

en el caso particular de $a \in L^\infty(\Omega)$.

**Teorema 2.2** *Sea $a \in L^q(\Omega)$ con $q > N/2$ satisfaciendo (1). Supongamos también que $g : (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ es una función continua verificando (3). Entonces, existe $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solución de (9) en el sentido*

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi + \int_\Omega g(w)|\nabla w|^2 \varphi = \int_\Omega a(x)\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

### Agradecimientos

Trabajo financiado por FEDER, D.G.I. Proyecto *Análisis no lineal y ecuaciones en derivadas parciales elípticas* MTM2006-09282 y FQM-116 *Análisis no lineal y ecuaciones diferenciales*.

## Referencias


[1] D. Arcoya, J. Carmona and P.J. Martínez-Aparicio, *Elliptic obstacle problems with natural growth on the gradient and singular nonlinear terms*, Adv. Nonlinear Stud. **7** (2007), 299-317.

[2] D. Arcoya and P.J. Martínez-Aparicio. *Quasilinear equations with natural growth*, Rev. Mat. Iberoamericana, to appear.

[3] A. Bensoussan, L. Boccardo and F. Murat. *On a non linear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 5 (1988), 347–364.

[4] A. Bensoussan, J. Frehse and U. Mosco, *A stochastic impulse control problem with quadratic growth Hamiltonian and the corresponding quasivariational inequality*, J. Reine Angew. Math. **331** (1982), 124–145.

[5] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel. *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, vol. IV, ed. by H. Brezis and J.L. Lions, Research Notes in Mathematics. **84**, 1983, 19–73.

[6] L. Boccardo, F. Murat and J.P. Puel, *Existence of bounded solutions for non linear elliptic unilateral problems*, Annali di Matematica Pura ed Applicata. **62** (1988), 183–196.

[7] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[8] J.M. Rakotoson and R. Temam. *Relative rearrangement in quasilinear elliptic variational inequalities*, Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), 757–810.