XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Introducción de penalizaciones de giro en el Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos

E. Martínez[1], D. soler[1], J. Albiach[1]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia, Aptdo. 46022 Valencia. E-mails:* eumarti@mat.upv.es, dsoler@mat.upv.es, jalbiach@mat.upv.es.

Palabras clave: Rutas de vehículos, Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos, transformación.

Resumen

En los últimos años varios problemas de rutas de vehículos han sido estudiados teniendo en cuenta las penalizaciones en los giros para aproximar los modelos matemáticos a los problemas de la vida real. Para el caso de un solo vehículo, se ha unificado el modelo para el estudio de problemas de rutas sobre arcos y sobre vértices.

En este artículo generalizamos ese modelo unificado al caso capacitado. Presentamos el Problema General de Rutas Capacitado sobre Grafos Mixtos teniendo en cuenta penalizaciones en los giros y giros prohibidos. Mediante una transformación polinómica a problemas más sencillos, podemos resolver el problema original tanto de forma óptima como heurística usando algoritmos conocidos.

1. Introducción

En muchos problemas de rutas de vehículos en la vida real, especialmente para rutas dentro de grandes ciudades y particularmente con camiones, algunos giros son más costosos o peligrosos que otros. Además, muchos giros en U y algunos giros a la izquierda son prohibidos. Por otra parte, la mayoría de modelos académicos de rutas de vehículos asumen que todos los giros son permitidos, por ello el conjunto de circuitos que nos dan sus soluciones puede no ser factible si se deben respetar las señales de tráfico.

En los últimos años, intentando acercar los modelos matemáticos a los problemas de la vida real, se han publicado versiones de problemas clásicos de rutas con un solo vehículo, incluyendo penalizaciones en los giros y giros prohibidos en la solución. En la más reciente, Soler *et al* (2007) generalizan el Problema General de Rutas Mixto, (PGRM) que básicamente consiste en encontrar un camino cerrado de mínimo coste sobre un grafo mixto G que recorra un subconjunto dado de enlaces y de vértices requeridos.

El PGRM engloba un importante número de problemas de rutas sobre arcos y sobre vértices. En este sentido, Soler *et al* (2007) presentan un modelo unificado contemplando giros penalizados que abarca tanto la versión de problemas de rutas por arcos como por vértices con un solo vehículo.

Por otra parte, del mismo modo que el PGRM unifica los problemas de rutas sobre arcos y sobre vértices con un solo vehículo, hay en la literatura un problema que unifica los problemas de rutas por arcos o por vértices en el caso capacitado, El Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos (PGRCM), que se define como sigue:

Sea $G = (V, E \cup A)$ un grafo mixto fuertemente conexo donde: cada enlace $e \in E \cup A$ tiene asociado un coste $c_e \geq 0$, el vértice 1 representa el depósito con k vehículos, todos ellos con la misma capacidad W, existe un subconjunto $V_R \subseteq V$ tal que cada vértice $i \in V_R$ tiene asociada una demanda positiva $q_i \leq W$, existe un subconjunto $A_R \subseteq A$ tal que cada arco $(i, j) \in A_R$ tiene asociada una demanda positiva $q_{ij} \leq W$, existe un subconjunto $E_R \subseteq E$ tal que cada arista $(i, j) \in V_R$ tiene asociada una demanda positiva $q_{ij} \leq W$, y la suma de todas las demandas no supera kW.

Encontrar k tours en G, uno para cada vehículo, de forma que cada tour pase por el depósito, las demandas en V_R, A_R y E_R sean satifechas, la demanda total asumida por cada vehículo no exceda W, cada demanda sea asumida por un solo vehículo y la suma total de los costes de los k tours sea mínima.

A pesar de su importancia, el PGRCM no ha sido apenas estudiado en la literatura, probablemente debido a su complejidad, veáse por ejemplo Jansen (1993), que estudió el caso no dirigido o Pandit y Muralidharan (1995). Sin embargo cientos de artículos se han escrito sobre casos particulares de él, entre ellos:

- El Problema de Rutas por Arcos Capacitado Mixto (PRACM) si $V_R = \emptyset$, y su caso particular, el PRAC, si $V_R = \emptyset = A$.

- El Problema de Rutas de Vehículos Capacitado (PRVC) en su versión simétrica si $A = \emptyset = E_R$ y $V = V_R \cup \{1\}$, o en su versión asimétrica, (PRVCA) si $E = \emptyset = A_R$ y $V = V_R \cup \{1\}$. Este último será definido en la Sección 4.

Presentamos aquí una generalización del PGRCM teniendo en cuenta penalizaciones en los giros y giros prohibidos: el conjunto de tours solución debe recorrer todos los vértices y enlaces requeridos del grafo sin realizar giros prohibidos. El coste total será la suma de los costes de los enlaces recorridos con las penalizaciones asociadas a los giros realizados. Siguiendo trabajos precedentes, el nuevo problema se llamará Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos con Giros Penalizados. (PGRCMGP).

En este sentido presentamos un modelo unificado con penalizaciones de giro que es una versión extendida tanto para problemas de rutas sobre arcos como sobre vértices para una flota de k vehículos, que en el caso particular de $k = 1$, engloba el trabajo de Soler *et al* (2007). Mediante varios pasos transformamos polinómicamente el PGRCMGP en un PRVCA, para el que existen tanto procedimientos exactos como heurísticos capaces de resolver instancias con cientos de vértices, ver por ejemplo Fischetti *et al* (1994), Vigo (1996) o el más reciente heurístico de De Franceschi *et al* (2006).

2. Definiciones y notación

En primer lugar definimos el Problema de Rutas de Vehículos Generalizado (PGRV), que fue introducido por Ghiani e Improta (2000) y puede modelizar numerosas situaciones de la vida real y será la piedra angular para resolver nuestro problema de forma óptima.

"*Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido donde el conjunto de vértices V se particiona en $m + 1$ subconjuntos no vacios $S_0, S_1, ..., S_m$ tal que S_0 tiene sólo un vértice v_0 que representa el depósito, S_h $h = 1, ..., m$ representa $l(h)$ posibles localizaciones de un mismo vértice que tiene asociada una demanda positiva d_i y cada arco $(v_i, v_j) \in A$ tiene asociado un coste $c_{i,j} \geq 0$. Además, una flota de j vehículos homogéneos con la misma capacidad W donde $W \geq d_i$ $\forall i = 1, ..., m$ está disponible en el depósito.*

Encontrar un conjunto de j rutas más cortas empezando y acabando en el depósito que visiten cada subconjunto S_i, $i = 1, ..., m$ exactamente una vez y que la suma de las demandas de cada ruta no exceda la capacidad W del vehículo.

Ghiani e Improta (2000) transformaron el PGRV en un PRAC, con lo que tenemos una forma de obtener cotas superiores e inferiores (ver Belenguer *et al* (2006)).

A continuación introducimos algunos conceptos y notación sobre penalizaciones:

Dado un grafo mixto $G = (V, E, A)$, cada par de enlaces $a = (u, v), b = (v, w) \in E \cup A$ tiene asociado un giro en v realizado desde a hasta b, denotado $[ab]$. Además, si $a, b \in E$, este par tiene asociado otro giro en v, hecho de b hasta a, denotado por $[ba]$. Cada arista e incidente con v tiene asociado un giro en U en v que, si es necesario, será denotado por $[eve]$. Cada enlace $a \in E \cup A$ tiene asociado un coste $c_a \geq 0$, y cada giro $[ab]$ en G tiene asociada una penalización $p_{[ab]} \geq 0$ ($p_{[ab]} = +\infty$ sii $[ab]$ es un giro prohibido).

Dados $a = (u, v), b = (s, t) \in E \cup A$, la *$v - s$ cadena posible desde a a b* es una secuencia alternada de enlaces y giros $C = \{a_1, [a_1a_2], a_2, \ldots, [a_{r-1}a_r], a_r, [a_rb]\}$, donde $a_1 = a$, verificando $\{a_1, \ldots, a_r, b\}$ es una cadena en G, el giro $[a_rb]$ es permitido en G y, si $r > 1$, $[a_ia_{i+1}]$ $i = 1, \ldots, r-1$ son giros permitidos en G. Por conveniencia, una cadena posible empieza en un enlace y acaba en un giro y si todos los enlaces en C son aristas, la cadena posible debe ser recorrida sólo en la dirección especificada. El coste de una cadena posible C se define como $c(C) = \sum_{i=1}^{r}(c_{a_i} + p_{[a_ia_{i+1}]})$, donde $a_{r+1} = b$.

Dados $a = (u, v), b = (s, t) \in E \cup A$, la *$v - s$ cadena posible más corta* de *a hacia b* es una $v - s$ cadena posible C desde a hacia b de mínimo coste $c(C)$, y la denotaremos por $c.p.m.c.(v^a, s^b)$. Una $v - s$ cadena posible desde a hasta b es *cerrada* si $a = b$ y $s \neq v$.

Definimos ya formalmente el Problema General de Rutas con Capacidades sobre Grafos Mixtos con Penalizaciones en los Giros (PGRCMGP):

Sea $G = (V, E, A)$ un grafo mixto donde cada enlace $(i, j) \in E \cup A$ tiene asociado un coste $c_{ij} \geq 0$ y cada giro $[ab]$ tiene asociada una penalización $p_{[ab]} \geq 0$ con $p_{[ab]} = +\infty$ si el giro $[ab]$ es prohibido. Uno de los vértices, digamos 1, representa el depósito donde hay k vehículos con idéntica capacidad $W > 0$ y en él todos los giros son permitidos y con penalización nula. Sea $R \subseteq E \cup A$ un subconjunto de enlaces requeridos tal que cada $(i, j) \in R$ tiene asociada una demanda positiva $q_{ij} \leq W$, y sea $V_R \subseteq V - \{1\}$ un subconjunto de vértices requeridos de forma que $v \in V_R$ tiene asociada una demanda positiva $q_v \leq W$ con $\sum_{(i,j)\in R} q_{ij} + \sum_{v \in V_R} q_v \leq kW$.

Encontrar k cadenas posibles cerradas en G, una para cada vehículo, tal que: cada cadena pase por el depósito, las demandas en R y en V_R sean satisfechas, cada demanda sea asumida sólo por un vehículo, la demanda total servida por un vehículo no exceda su

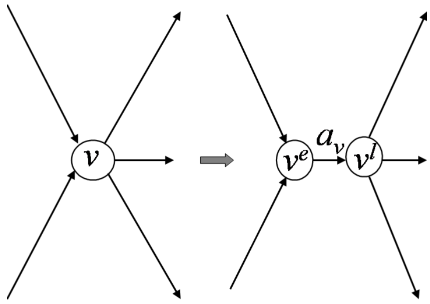

Figura 1: Transformación de un vértice $v \in V_{R_1}$ en G'.

capacidad W y la suma de los costes de k cadenas posibles cerradas sea mínima.

Como en otros trabajos, en todos los problemas capacitados utilizados en este artículo consideraremos que k es el mínimo número de vehículos que se necesitan para cubrir todas las demandas. También como en otros trabajos, en lo sucesivo cada arista no requerida será reemplazada por dos arcos del mismo coste y direcciones opuestas. Asumimos pues que todas las aristas del grafo son requeridas ($E_R = E$, con $R = E_R \cup A_R$). Finalmente, para simplificar la notación, no escribiremos los giros intermedios de las cadenas posibles.

3. Transformación del PGRCMGP en un PGRV

Sea G un grafo mixto donde se define un PGRCMGP, sea $E \cup A_R$ el conjunto de enlaces requeridos, y V_R el conjunto de vértices requeridos. Ya que en el PGRV la demanda está en los vértices, transformaremos el grafo $G = (V, E, A)$ en el que está definido el PGRCMGP en un grafo dirigido $G^* = (V^*, A^*)$ en el que los vértices de G^* están relacionados con los arcos requeridos, aristas requeridas y vértices requeridos de G.

Primero construimos un grafo intermedio $G' = (V', A')$ a partir de G como sigue:

-Inicialmente $G' = G$.

-Cada arista requerida se sustituye por dos arcos opuestos y requeridos, ambos con el mismo coste y demanda, los que tenía la arista.

-Dividimos el subconjunto V_R en dos subconjuntos, V_{R_1} y V_{R_2}, donde V_{R_1} está formado sólo por los vértices que tienen todas las penalizaciones de giro nulas, y V_{R_2} está formado por los vértices con giros prohibidos o con penalización positiva.

i) Si $v \in V_{R_1} \cup \{1\}$, reemplazamos el vértice v en G' por dos vertices v^e y v^l, de manera que v^e tiene sólo arcos entrantes (los arcos que llegan a v) y v^l tiene sólo arcos salientes (los arcos que salen de v). Añadimos un arco requerido $a_v = (v^e, v^l)$ a G' de forma que todos los giros en v^e y v^l son permitidos con penalización nula y la demanda de este arco en G' es la del vértice requerido v en G (la demanda correspondiente al arco que proviene del depósito obviamente será nula). Recorrer el arco a_v en G' es equivalente a pasar por el vértice v en G (ver Figura 1).

ii) Si $v \in V_{R_2}$, seguimos los siguientes pasos:

- Paso 1: Reemplazar el vértice v en G por tantos vértices v_{ij} como giros permitidos $[a_i b_j]$ haya en v, así cada una de estas copias tiene sólo un arco entrante (a_i) y

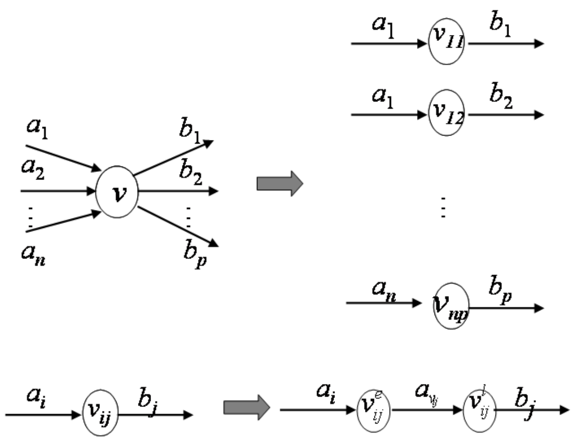

Figura 2: Transformación de un vértice $v \in V_{R_2}$ en G'.

uno saliente (b_j), con su correspondiente giro permitido. Notar que si a_i es un arco entrante en v, G' contendrá al menos tantas copias del arco entrante a_i como giros permitidos con a_i se encuentren en v, y análogamente para un arco saliente b_j de v.

- Paso 2: Proceder como en caso i) reemplazando cada vértice v_{ij} por dos vértices, v^e_{ij} y v^l_{ij}, y un arco "requerido" $a_{v_{ij}} = (v^e_{ij}, v^l_{ij})$ entre ellos con coste cero, de forma que $p_{[a_i a_{v_{ij}}]} = p_{[a_i b_j]}$ y $p_{[a_{v_{ij}} b_j]} = 0$, i.e. la penalización que había en el giro en v_{ij} se traslada al vértice v^e_{ij} y todos estos arcos tendrán la misma demanda, la del vértice requerido v (ver Figura 2). Así, recorrer uno de estos arcos requeridos $a_{v_{ij}}$ en G' significará pasar por el vértice v en G.

Notar que en el paso 2 hemos escrito requerido entre comillas porque en este caso, para cada $v \in V_{R_2}$ sólo uno de los arcos generados debe ser servido. Después de esta transformación tenemos un grafo dirigido $G' = (V', A')$ de forma que A'_R proviene de los arcos requeridos, aristas requeridas y vértices requeridos en G. A'_R originará la partición del conjunto de vértices V^* en el grafo G^* en el que definiremos el PGRV. Cada arco entre dos de estos vértices que no formen parte del mismo subconjunto, tendrá asociado el coste de la cadena posible más corta entre los correspondientes enlaces en G'.

A partir de G' construimos el grafo $G^* = (V^*, A^*)$ como sigue:

- Por cada arco $a_v \in A'_R$ con $v \in V_{R_1} \cup \{1\}$, asociamos un conjunto de vértices $S_v = \{x_{a_v}\}$ en G^*, con la correspondiente demanda q_v.

- Para cada $v \in V_{R_2}$, asociamos un conjunto de vértices S_v en G^* con tantos vértices $x_{a_{v_{ij}}}$ como arcos $a_{v_{ij}}$ haya en A'_R, todos ellos con la misma demanda.

- Por cada arco $a \in A'_R$ que proviene de un arco requerido en G, asociamos un conjunto de vértices S_a en G^* con tantas copias del vértice x_a como copias del arco a aparezcan en G', todas ellas con la misma demanda.

-Por cada par de arcos requeridos opuestos $e_1, e_2 \in A'_R$ que provengan de una arista requerida e en G, asociamos un conjunto de vértices S_e en G^* con tantas copias de vértices

x_{e_1} y x_{e_2} como copias de arcos e_1 y e_2 respectivamente aparezcan en G', todas con la misma demanda.

- Por cada par de vértices $x_a, x_b \in V^*$ con $x_a \in S_i$, $x_b \in S_j$, $i \neq j$ siendo $a = (u, v)$ y $b = (s, t)$, añadir arcos (x_a, x_b) y (x_b, x_a) a A^*, con el coste de la *c.p.m.c.*(v^a, s^b) y el de la *c.p.m.c.*(t^b, u^a) respectivamente en G' (si ésta existe).

- No hay arcos entre vértices que pertenezcan al mismo S_i.

Dado un PGRCMGP en G, definimos un PGRV en G^* donde el conjunto de vértices V^* se particiona en los siguientes subconjuntos: S_v para todo $v \in V_{R_1} \cup \{1\}$ (De ahora en adelante denotaremos el subconjunto correspondiente al depósito por $S_0 = \{v_D\}$), S_v para todo $v \in V_{R_2}$, S_a para todo $a \in A_R$ y S_e para todo $e \in E_R$.

Teorema 1 *Un PGRCMGP definido en G puede transformarse en tiempo polinomial en el correspondiente PGRV definido en G^*.*

Demostración. Por construcción de G', dado $B = \{T_i\}_{i=1}^k$ un conjunto de k cadenas posibles cerradas en G correspondientes a una solución del PGRCMGP, podemos asociar con B un conjunto $B' = \{T_i'\}_{i=1}^k$ de k cadenas posibles cerradas en G' de manera que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos:

- T_i' recorre el arco a_1 (correspondiente al nodo del depósito 1 en G). T_i pasa por el vértice $v \in V_{R_1}$ sii T_i' recorre el arco a_v en G'. T_i pasa por el vértice $v \in V_{R_2}$ sii T_i' recorre el arco $a_{v_{ij}}$. T_i recorre el arco $a \in A_R$ sii T_i' recorre una copia del arco a en G'. T_i recorre la arista $e \in E$ sii T_i' recorre una copia del arco e_1 o del arco e_2 en G'. T_i' tiene el mismo coste que T_i.

- Además, supondremos que si T_i satisface la demanda en $v \in V_1$ ($v \in V_2$) ($a \in A_R$) ($e \in E$), entonces T_i' satisface la demanda localizada en a_v (uno y sólo uno de los arcos $a_{v_{ij}}$) (uno y sólo uno de los arcos a in G') (una y sólo una de las copias de e_1 o e_2 en G').

Resumiendo, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ T_i' es una cadena posible cerrada en G' que recorre a_1, satisfaciendo las mismas demandas que T_i y los mismos costes que T_i.

Una vez hemos construido B' a partir de B, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, de T_i' construimos un ciclo C_i^B en G^* como sigue:

Supongamos que T_i' satisface, en este mismo orden, las demandas $q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_{m_i}}$. Entonces C_i^B es un ciclo en G^* que visita, en este orden, los conjuntos de vértices $S_0, S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_{m_i}}, S_0$, y para todo $t \in \{1, \ldots, m_i\}$, C_i visita sólo los vértices en S_t que provienen de los arcos en G' cuyas demandas han sido satisfechas por T_i'.

El conjunto de ciclos $L^B = \{C_i^B\}_{i=1}^k$ es una solución del PGRV en G^* con coste $c^*(L^B)$ menor o igual que $c(B)$, ya que el coste de un segmento de ruta de una cadena posible y cerrada T_i' en G' entre dos arcos servidos consecutivamente (incluyendo el arco depósito a_1) es mayor o igual que el coste de la cadena posible más corta en G' entre ellos (desde el primero servido al segundo), mientras que el coste de un arco en C_i^B en G^* desde un vértice proveniente de servir un arco en G' a otro vértice proveniente del siguiente arco en G' es igual al coste de la cadena posible más corta en G' entre ellos.

Por otro lado, sea $L = \{C_i\}_{i=1}^k$ un conjunto de k ciclos correspondiendo a una solución del PGRV en G^*. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, de C_i construimos una cadena posible cerrada $T_i'^L$ en G' del siguiente modo:

Sea (x_a, x_b) un arco genérico de C_i, $a = (u, v)$ y sean $b = (w, r)$ los arcos de A_R' de los que provienen los vértices x_a y x_b, respectivamente. El arco (x_a, x_b) dará lugar en $T_i'^L$ a la

$c.p.m.c.(v^a, w^b)$, de forma que $T_i'^L$ asume la demanda en a (la misma que en x_a) y en b (la misma que en x_b). Notese que en este sentido, $T_i'^L$ tiene el mismo coste que C_i y satisface la misma demanda que C_i.

A partir del conjunto $B'^L = \{T_i'^L\}_{i=1}^k$ de k cadenas posibles cerradas G', construimos ahora el conjunto $B^L = \{T_i^L\}_{i=1}^k$ de k cadenas posibles cerradas en G como sigue:

- "Contraer" cada secuencia en $T_i'^L$ de la forma $(u, v^e)(v^e, v^l)(v^l, w)$ con $a_v = (v^e, v^l)$ si $v \in V_{R_1} \cup \{1\}$ por $(u, v)(v, w)$ en T_i^L.

- "Contraer" cada secuencia en $T_i'^L$ de la forma $(u, v_{ij}^e)(v_{ij}^e, v_{ij}^l)(v_{ij}^l, w)$ con $a_{v_{ij}} = (v_{ij}^e, v_{ij}^l)$ si $v \in V_{R_2}$ por $(u, v)(v, w)$ en T_i^L.

- Si $T_i'^L$ recorre una copia del arco e_1 o una copia del arco e_2 en G', con $e \in E$, reemplazar esta copia en T_i^L por la arista e.

- Cualquier otro enlace o giro en $T_i'^L$ se reemplaza por el mismo en T_i^L.

- La demanda en $v \in V_1$ ($v \in V_2$) ($a \in A_R$) ($e \in E$) se asigna a la ruta T_i^L sii $T_i'^L$ satisface la demanda localizada en a_v (uno y sólo uno de los arcos $a_{v_{ij}}$) (una y sólo una copia del arco a en G') (una y sólo una copia de e_1 o e_2 en G').

Es evidente que $B^L = \{T_i^L\}_{i=1}^k$ es una solución del PGRCMGP en G con $c(B^L) = c^*(L)$, ya que para todo i, $c(T_i^L) = c'(T_i'^L)$.

Sea, pues L^{opt} una solución óptima del PGRV en G^* y sea $B^{L^{opt}}$ la solución del PGR-CMGP en G obtenida a partir de L^{opt} como se ha descrito anteriormente. Para cada solución B del PGRCMGP en G tenemos que $c(B) \geq c^*(L^B) \geq c^*(L^{opt}) = c(B^{L^{opt}})$, por lo que $B^{L^{opt}}$ es una solución óptima del PGRCMGP en G. ▌

4. Transformación de un PGRV en un PRVCA

En esta sección presentamos una transformación del PGRV en un PRVCA que ofrece una forma más atractiva de resolver el PGRCMGP, ya que mientras no existe un algoritmo exacto para resolver el PRACA, para la resolución del PRVCA al menos dos algoritmos exactos han sido presentados (Laporte *et al* (1986) y de Fischetti *et al* (1994)).

En primer lugar, por claridad, definimos formalmente el PRVCA:

Sea $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A})$ un grafo completo, y sea $\hat{V} = \{v_i\}_{i=0}^n$ su conjunto de vértices, donde v_0 es el vértice depósito, cada vértice v_i con $i > 0$ tiene asociada una demanda $d_i > 0$, y cada arco $(v_i, v_j) \in A$ tiene asociado un coste $c_{i,j} \geq 0$. Además, una flota de k vehículos con la misma capacidad W donde $W \geq d_i \; \forall i = 1, ..., n$ está disponible en el depósito.

Encontrar un conjunto de k rutas más cortas empezando y acabando en el depósito tal que cada vértice $v_i \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}$ sea visitado por uno y sólo un vehículo y la suma de las demandas de los vértices visitados por cada vehículo no exceda su capacidad W.

A partir del grafo dirigido $G^* = (V^*, A^*)$ dado en la definición del PRVG construimos el grafo dirigido $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A})$ de la siguiente forma:

- $\hat{V} = V^*$.

- Por cada S_i con $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ y $|S_i| > 1$, ordenamos sus vértices de forma consecutiva en un orden arbitrario $\{v_1^i, \ldots, v_{l(i)}^i\}$; entonces, para $j = 1, \ldots, l(i) - 1$, se define el coste $c_{j,j+1}^i$ del arco $(v_j^i, v_{j+1}^i) \in \hat{A}$ nulo ; también se define $c_{l(i),1}^i$ como cero.

- Para cada $v_j^i \in S_i$ y cada $w \notin S_i$ ponemos $c_{v_j^i, w}$ en $\hat{A}$ igual al coste en G^* del arco desde $v_{j+1(mod\ l(i))}^i$ a w más un número fijo, positivo muy grande M si $|S_i| > 1$ e igual al coste en G^* del arco desde v_j^i a w más M si $|S_i| = 1$.

- Cualquier otro arco en $\hat{A}$ tiene coste infinito.
- Asignamos demandas positivas que sumen en total d_i a los vértices en S_i $\forall$ i.

Teorema 2 *El PRVG definido en G^* puede resolverse mediante su transformación en tiempo polinomial a un PRVCA en el digrafo $\hat{G}$.*

Demostración. Si identificamos cada arco (v_j^i, w) en G^* $w \notin S_i$ (w puede ser el depósito) con el camino $(v_j^i, v_{j+1}^i, \ldots, v_{l(i)}^i, v_1^i, \ldots, v_{j-1}^i, w)$ en $\hat{G}$ si $j \neq 1$ y $|S_i| > 1$, o con el camino $(v_1^i, \ldots, v_{l(i)}^i, w)$ si $j = 1$ y $|S_i| > 1$ o (v_j^i, w) si $|S_i| = 1$ (en este último caso v_j^i puede ser el depósito), es fácil comprobar que L una solución posible del PRVG en G^* da lugar a una solución H_L en $\hat{G}$ del PRVCA con coste $\hat{c}(H_L) = c^*(L) + M(m+k)$, y debido al coste de los arcos en $\hat{G}$, es evidente que una solución óptima del PRVCA en $\hat{G}$ tiene la misma estructura que H_L: si un vehículo sirve al vértice $v_j^i \in S_i$ con $|S_i| > 1$, servirá todos los vértices de S_i, y si v_j^i es el primer vértice servido de S_i, ese vehículo servirá consecutivamente el resto de vértices de S_i en el orden $v_j^i, v_{j+1}^i, \ldots, v_{l(i)}^i, v_1^i, \ldots, v_{j-1}^i$ if $j \neq 1$ or $v_1^i, \ldots, v_{l(i)}^i$ si $j = 1$.

Por otra parte, basándonos en la misma identificación, H una solución posible del PRVCA en $\hat{G}$ con la estructura definida anteriormente, da lugar a una solución posible L_H del PRVG en G^* con coste $c^*(L_H) = \hat{c}(H) - M(m+k)$.

Por tanto, si H^{opt} es una solución óptima del PRVCA en $\hat{G}$, $L_{H^{opt}}$ es una solución óptima del PRVG en G^*. Por otro lado, dada L^{opt} una solución óptima del PRVG en G^* con $c^*(L^{opt}) < c^*(L_{H^{opt}})$, Entonces $H_{L^{opt}}$ es una solución posible del PRVCA en $\hat{G}$ con

$\hat{c}(H_{L^{opt}}) = c^*(L^{opt}) + M(m+k) < c^*(L_{H^{opt}}) + M(m+k) = (\hat{c}(H^{opt}) - M(m+k)) + M(m+k) = \hat{c}(H^{opt})$. Así tenemos que el coste de H^{opt} es mayor o igual que el coste de $H_{L^{opt}}$ en $\hat{G}$, lo cual es absurdo debido a la optimalidad de H^{opt}.∎

Referencias

[1] Belenguer JM, Benavent E, Lacomme P and Prins C (2006). Lower and upper bounds for the mixed capacitated arc routing problem. *Compu Opns Res* **33**: 3363-3383.

[2] De Franceschi R, Fischetti M and Toth P (2006). A new ILP-based refinement heuristic for vehicle routing problems. *Math Program Ser B* **105**: 471-499.

[3] Fischetti M, Toth P and Vigo D. (1994). A branch-and-bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem on directed graphs. *Ops Res* **42**: 846-859.

[4] Ghiani G and Improta G (2000). An efficient transformation of the generalized vehicle routing problem. *Eur J Opl Res* **122**: 11-17.

[5] Jansen K (1993). Bounds for the general capacitated routing problem. *Networks* **23**: 165-173.

[6] Laporte G, Mercure H and Nobert Y (1986). An exact algorithm for the asymmetrical capacitated arc routing problem. *Networks* **16**: 33-46.

[7] Pandit R and Muralidharan B (1995). A capacitated general routing problem on mixed networks. *Compu Opns Res* **22**: 465-478.

[8] Soler D, Martínez E and Micó JC (2007) *A transformation for the mixed general routing problem with turn penalties. J Opl Res Soc*, doi:10.1057/palgrave.jors.2602385.

[9] Vigo D (1996). A heuristic algorithm for the asymmetric capacitated vehicle routing problem. *Eur J Opl Res* **89**: 108-126.