

## Un método de elementos finitos mixtos para un problema de interacción sólido–fluido

S. MEDDAHI<sup>1</sup>, G.N. GATICA<sup>2</sup>, A. MÁRQUEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo, Calvo Sotelo s/n, Oviedo. E-mail: salim@uniovi.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile. E-mail: ggatica@ing-mat.udec.cl.

<sup>3</sup> Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, Universidad Oviedo, Campus de Viesques, Gijón. E-mail: amarquez@uniovi.es.

**Palabras clave:** elementos finitos mixtos, ecuación de Helmholtz, ecuación elastodinámica

### Resumen

En este trabajo consideramos un sólido elástico lineal e isótropo, rodeado de un fluido perfecto compresible, sobre el que incide una onda acústica armónica. Nuestro propósito es presentar un esquema numérico para determinar tanto la respuesta en el sólido como la distribución de ondas acústicas en el fluido linealizado. En el sólido utilizamos una formulación variacional mixta de la que, posteriormente, eliminamos el campo de desplazamientos. Así, las únicas incógnitas en el sólido son los campos de tensiones y de rotaciones. Esta formulación mixta se acopla, mediante dos condiciones de transmisión (una de equilibrio y otra de continuidad en desplazamientos) sobre la frontera húmeda, con la ecuación de Helmholtz que satisface la presión sobre el medio acústico. Para definir el correspondiente esquema discreto utilizamos elementos PEERS en el sólido y elementos finitos de Lagrange de primer orden en el dominio acústico. Finalmente, ilustramos las propiedades de convergencia del esquema propuesto con algunos experimentos numéricos.

## 1. Introducción

En este trabajo presentamos un método de elementos finitos mixto–primal para resolver un problema plano de interacción sólido–fluido armónico en tiempo. Consideramos un sólido elástico  $\Omega_s$  sobre el que incide una onda acústica. Suponemos que el medio acústico ocupa una región anular  $\Omega_f$  cuya frontera exterior  $\Gamma$  está situada lejos del obstáculo (el sólido) e imponemos sobre esta curva artificial cerrada una condición de contorno que reproduce el comportamiento del campo acústico reflejado en el infinito. De esta manera,

nuestro problema modelo queda planteado sobre una región acotada. La mayor parte de los métodos numéricos propuestos para resolver esta clase de problema de interacción sólido–fluido utilizan una formulación en desplazamientos para la elasticidad lineal (ver, por ejemplo, [2, 5, 6, 7] y las referencias citadas allí). En este trabajo, en cambio, empleamos una formulación variacional mixta para la elasticidad sobre el sólido y conservamos la formulación primal habitual en el fluido linealizado. Así, el tensor de tensiones en  $\Omega_s$  y la presión en el fluido acústico en  $\Omega_f$  serán nuestras principales incógnitas.

## 2. Planteamiento del problema de interacción sólido–fluido

Consideramos un sólido  $\Omega_s$  inmerso en un fluido acústico sobre el que incide una onda. El contorno de  $\Omega_s$  se denomina frontera húmeda y se denota mediante  $\Sigma$ . Para definir el dominio acústico introducimos una circunferencia  $\Gamma$  de radio suficientemente grande, centrada en el origen, y denotamos mediante  $\Omega_f$  a la región anular acotada entre  $\Sigma$  y  $\Gamma$ . Suponemos que la onda incidente y las fuerzas de volumen exhiben un comportamiento armónico en tiempo con frecuencia  $\omega$  y amplitudes  $p_i$  y  $\mathbf{f}$ , respectivamente, de manera que  $p_i$  satisfaga la ecuación de Helmholtz en  $\Omega_f$ . Suponemos, también, que el fluido es perfecto, compresible y homogéneo, con densidad  $\rho_f$  y número de onda  $\kappa_f := \frac{\omega}{v_0}$ , siendo  $v_0$  la velocidad de sonido en el fluido linealizado. Además, se asume un comportamiento elástico lineal e isótropo para el sólido, con densidad  $\rho_s$  y constantes de Lamé  $\mu$  y  $\lambda$ . Es decir, la ecuación constitutiva del material sólido,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{en } \Omega_s, \quad (1)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)$  es el tensor de pequeñas deformaciones y  $\mathcal{C}$  es el tensor de constantes elásticas, viene dada por la ley de Hooke:

$$\mathcal{C} \boldsymbol{\zeta} := \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\zeta}, \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad y  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) := \sum_{i=1}^2 \zeta_{ii}$ . Las incógnitas del problema son la amplitud  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega_s \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  del tensor de tensiones, la amplitud  $\mathbf{u} : \Omega_s \rightarrow \mathbb{C}^2$  del campo de desplazamientos y la amplitud de la presión global (incidente + reflejada)  $p : \Omega_f \rightarrow \mathbb{C}$ . Bajo la hipótesis de pequeñas oscilaciones en el sólido y en el fluido, y dados  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega_s)]^2$  y  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , consideramos el siguiente problema de interacción sólido–fluido: Encontrar  $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}; \Omega_s)$ ,  $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega_s)]^2$  y  $p \in H^1(\Omega_f)$ , tales que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) && \text{en } \Omega_s, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \kappa_s^2 \mathbf{u} &= -\mathbf{f} && \text{en } \Omega_s, \\ \Delta p + \kappa_f^2 p &= 0 && \text{en } \Omega_f, \\ \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} &= -p \boldsymbol{\nu} && \text{sobre } \Sigma, \\ \rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} && \text{sobre } \Sigma, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \iota \kappa_f p &= g := \frac{\partial p_i}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \iota \kappa_f p_i && \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\kappa_s := \sqrt{\rho_s} \omega$  es el número de onda en el sólido,  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal exterior unitaria sobre  $\Gamma$  y utilizamos el símbolo  $\iota$  para  $\sqrt{-1}$ . La segunda ecuación de (3) es la ecuación de

equilibrio de la elastodinámica en régimen armónico, mientras que la tercera es la ecuación de Helmholtz. La primera condición de transmisión en (3) representa el equilibrio de fuerzas sobre  $\Sigma$  y la segunda la continuidad en desplazamientos normales.

### 3. Formulación variacional del problema

Para tratar el sistema de ecuaciones (3) empleamos una formulación primal en el fluido  $\Omega_f$  y otra mixta en el sólido  $\Omega_s$ . Así, si multiplicamos la ecuación acústica por  $q \in H^1(\Omega_f)$ , integramos por partes y utilizamos la condición de contorno Robin obtenemos

$$\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla q - \kappa_f^2 \int_{\Omega_f} p q + \left\langle \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}}, q \right\rangle_{\Sigma} - \imath \kappa_f \int_{\Gamma} p q = \langle g, q \rangle_{\Gamma}, \quad (4)$$

donde, dado  $\mathcal{S} \in \{\Sigma, \Gamma\}$ , representamos mediante  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$  el producto de dualidad entre  $H^{-1/2}(\mathcal{S})$  y  $H^{1/2}(\mathcal{S})$  con respecto al  $L^2(\mathcal{S})$ -producto escalar. A continuación, utilizamos la condición de transmisión en desplazamientos y reemplazamos  $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  por  $\rho_f \omega^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$  sobre  $\Sigma$ , introducimos la incógnita auxiliar

$$\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}|_{\Sigma} \in [H^{1/2}(\Sigma)]^2,$$

y dividimos por  $\rho_f \omega^2$ , para reescribir (4) como

$$\frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla q - \frac{\kappa_f^2}{\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} p q + \langle q \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Sigma} - \imath \frac{\kappa_f}{\rho_f \omega^2} \int_{\Gamma} p q = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \langle g, q \rangle_{\Gamma}, \quad (5)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  denota, en lo que sigue, el producto de dualidad entre  $[H^{-1/2}(\Sigma)]^2$  y  $[H^{1/2}(\Sigma)]^2$  respecto al  $[L^2(\Sigma)]^2$ -producto escalar.

Por otra parte, para obtener una formulación variacional mixta en el sólido  $\Omega_s$ , seguimos la metodología habitual (ver[1] y [9]) e introducimos la rotación

$$\boldsymbol{\gamma} := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathfrak{t}}) \in [L^2(\Omega_s)]_{\text{asym}}^{2 \times 2}$$

como incógnita adicional, donde  $[L^2(\Omega_s)]_{\text{asym}}^{2 \times 2}$  denota el espacio de los tensores antisimétricos con componenetes en  $L^2(\Omega_s)$ . De esta manera, la ley de comportamiento se puede reescribir como

$$\mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma}. \quad (6)$$

A continuación, multiplicamos (6) por  $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}; \Omega_s)$  e integramos por partes para obtener

$$\int_{\Omega_s} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega_s} \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) - \langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Sigma} + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (7)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \tau_{ij}$ . La ecuación elastodinámica nos proporciona la siguiente expresión para el campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\kappa_s^2} (\mathbf{f} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})), \quad (8)$$

que introducida en la ecuación constitutiva nos permite escribir (7) como

$$\int_{\Omega_s} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa_s^2} \int_{\Omega_s} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) - \langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Sigma} + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\kappa_s^2} \int_{\Omega_s} \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}). \quad (9)$$

Finalmente, la simetría de  $\boldsymbol{\sigma}$  y la condición de transmisión en fuerzas sobre  $\Sigma$  se imponen débilmente mediante

$$\int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega_s)]_{\text{asym}}^{2 \times 2} \quad (10)$$

y

$$\langle p \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in [H^{1/2}(\Sigma)]^2. \quad (11)$$

Consecuentemente, si sumamos (5) y (9), y sustraemos (11) de (10), obtenemos la siguiente formulación variacional del problema (3): Encontrar  $((\boldsymbol{\sigma}, p), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  tales que

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\sigma}, p), (\boldsymbol{\tau}, q)) + B_1((\boldsymbol{\tau}, q), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) &= F(\boldsymbol{\tau}, q) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbf{H}, \\ B_2((\boldsymbol{\sigma}, p), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta})) &= 0 \quad \forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{Q}$  son los espacios producto

$$\mathbf{H} := H(\mathbf{div}; \Omega_s) \times H^1(\Omega_f), \quad \mathbf{Q} := [H^{1/2}(\Sigma)]^2 \times [L^2(\Omega_s)]_{\text{asym}}^{2 \times 2}, \quad (13)$$

$F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$  es el funcional lineal

$$F(\boldsymbol{\tau}, q) := \frac{1}{\kappa_s^2} \int_{\Omega_s} \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \langle g, q \rangle_{\Gamma} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbf{H}, \quad (14)$$

y  $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $B_1 : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ , y  $B_2 : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{C}$  son las formas bilineales definidas como

$$\begin{aligned} A((\boldsymbol{\zeta}, r), (\boldsymbol{\tau}, q)) &:= \int_{\Omega_s} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\kappa_s^2} \int_{\Omega_s} \mathbf{div}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} \nabla r \cdot \nabla q \\ &\quad - \frac{\kappa_f^2}{\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} r q - i \frac{\kappa_f}{\rho_f \omega^2} \int_{\Gamma} r q \quad \forall (\boldsymbol{\zeta}, r), (\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$B_1((\boldsymbol{\tau}, q), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta})) := \langle q \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Sigma} + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbf{H}, \quad \forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}, \quad (16)$$

y

$$B_2((\boldsymbol{\tau}, q), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta})) := -\langle q \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Sigma} + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, q) \in \mathbf{H}, \quad \forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}. \quad (17)$$

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [4].

**Teorema 3.1** *El problema (12) posee una única solución.*

## 4. Un método de elementos finitos mixto–primal

En esta sección presentamos una aproximación de Galerkin del problema (12). Sean  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0} := \{\mathcal{T}_{h_s}\}_{h_s>0} \cup \{\mathcal{T}_{h_f}\}_{h_f>0}$ , donde  $\{\mathcal{T}_{h_s}\}_{h_s>0}$  y  $\{\mathcal{T}_{h_f}\}_{h_f>0}$  son familias regulares de triangulaciones de las regiones poligonales  $\bar{\Omega}_s$  y  $\bar{\Omega}_f$ , respectivamente, mediante triángulos  $T$  de diámetro  $h_T$  con tamaños de malla  $h_s := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_{h_s}\}$ ,  $h_f := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_{h_f}\}$  y  $h := \max\{h_s, h_f\}$ , y tal que los vértices de  $\{\mathcal{T}_{h_s}\}_{h_s>0}$  y  $\{\mathcal{T}_{h_f}\}_{h_f>0}$  coincidan sobre  $\Sigma$ . También introducimos una partición independiente  $\{\hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2, \dots, \hat{\Sigma}_m\}$  de la frontera húmeda  $\Sigma$  y denotamos  $\hat{h} := \max\{|\hat{\Sigma}_j| : j \in \{1, \dots, m\}\}$ . En estas condiciones definimos los subespacios de elementos finitos  $H_h^\sigma$ ,  $H_h^p$ ,  $Q_h^\varphi$  y  $Q_h^\gamma$  para las incógnitas  $\sigma$ ,  $p$ ,  $\varphi$  y  $\gamma$  de (12), respectivamente, como:

$$H_h^\sigma := \{\tau_h \in H(\mathbf{div}; \Omega_s) : \tau_{h,i}|_T \in \mathbb{RT}_0(T)^\mathbf{t} \oplus \mathbb{P}_0(T) \mathbf{curl}^\mathbf{t} b_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h_s}\}, \quad (18)$$

$$H_h^p := \{q_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}_f) : q_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h_f}\}, \quad (19)$$

$$Q_h^\varphi := \{\psi_{\hat{h}} \in [\mathbf{C}(\Sigma)]^2 : \psi_{\hat{h}}|_{\hat{\Sigma}_j} \in [\mathbb{P}_1(\hat{\Sigma}_j)]^2 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}\}, \quad (20)$$

$$Q_h^\gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \eta_h \\ -\eta_h & 0 \end{pmatrix} : \eta_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}_s), \quad \eta_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h_s} \right\}, \quad (21)$$

donde  $\tau_{h,i}$  es la fila  $i$ -ésima de  $\tau_h$  ( $i \in \{1, 2\}$ ),  $\mathbb{RT}_0(T)$  es el espacio local de Raviart–Thomas de orden 0 (cf. [3], [8]),  $b_T$  es la función burbuja cúbica habitual sobre  $T \in \mathcal{T}_{h_s}$ ,  $\mathbf{curl}^\mathbf{t} b_T := (\frac{\partial b_T}{\partial x_2}, -\frac{\partial b_T}{\partial x_1})$ ,  $\mathbf{C}(\cdot)$  es el espacio de las funciones continuas sobre el correspondiente dominio, y, dado un entero  $\ell \geq 0$  y un subconjunto  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{P}_\ell(\mathcal{K})$  denota el espacio de los polinomios definidos en  $\mathcal{K}$  de grado  $\leq \ell$ .

Destacamos que si definimos

$$Q_h^u := \{\mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega_s)]^2 : \mathbf{v}_h|_T \in [\mathbb{P}_0(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h_s}\}, \quad (22)$$

el espacio  $H_h^\sigma \times Q_h^u \times Q_h^\gamma$  constituye el elemento PEERS introducido en [1] para una aproximación con elementos finitos mixtos de la elasticidad lineal plana.

Sean

$$\mathbf{H}_h := H_h^\sigma \times H_h^p, \quad \mathbf{Q}_{\hat{h},h} := Q_{\hat{h}}^\varphi \times Q_h^\gamma. \quad (23)$$

Entonces, el esquema de elementos finitos mixto–primal asociado al problema de transmisión (12) es: Encontrar  $((\sigma_h, p_h), (\varphi_{\hat{h}}, \gamma_h)) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{\hat{h},h}$  tales que

$$\begin{aligned} A((\sigma_h, p_h), (\tau_h, q_h)) + B_1((\tau_h, q_h), (\varphi_{\hat{h}}, \gamma_h)) &= F(\tau_h, q_h) \quad \forall (\tau_h, q_h) \in \mathbf{H}_h, \\ B_2((\sigma_h, p_h), (\psi_{\hat{h}}, \eta_h)) &= 0 \quad \forall (\psi_{\hat{h}}, \eta_h) \in \mathbf{Q}_{\hat{h},h}. \end{aligned} \quad (24)$$

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [4].

**Teorema 4.1** *El esquema de elementos finitos mixto–primal (24) posee una única solución  $((\sigma_h, p_h), (\varphi_{\hat{h}}, \gamma_h)) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_{\hat{h},h}$ . Además, si existe un  $\delta \in (0, 1]$  tal que  $\sigma \in$*

$[H^\delta(\Omega_s)]^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) \in [H^\delta(\Omega_s)]^2$ ,  $p \in H^{1+\delta}(\Omega_f)$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in [H^{1/2+\delta}(\Sigma)]^2$  y  $\boldsymbol{\gamma} \in [H^\delta(\Omega_s)]^{2 \times 2}$ , entonces se verifica

$$\begin{aligned} & \|((\boldsymbol{\sigma}, p), (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) - ((\boldsymbol{\sigma}_h, p_h), (\boldsymbol{\varphi}_{\hat{h}}, \boldsymbol{\gamma}_h))\|_{\mathbf{H} \times \mathbf{Q}} \leq C \hat{h}^\delta \|\boldsymbol{\varphi}\|_{[H^{1/2+\delta}(\Sigma)]^2} \\ & + C h^\delta \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{[H^\delta(\Omega_s)]^{2 \times 2}} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{[H^\delta(\Omega_s)]^2} + \|p\|_{H^{1+\delta}(\Omega_f)} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{[H^\delta(\Omega_s)]^{2 \times 2}} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

con una constante  $C > 0$  independiente de  $h$  y  $\hat{h}$ .

## 5. Resultados numéricos

En esta sección presentamos un ejemplo que ilustra la convergencia del esquema de elementos finitos mixto-primal (24) sobre una sucesión de triangulaciones cuasi-uniformes del dominio. Denotamos mediante  $N$  el número de grados de libertad que define los subespacios de elementos finitos  $\mathbf{H}_h$  y  $\mathbf{Q}_{\hat{h},h}$ . Los errores individuales se definen como:

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\sigma}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\mathbf{div}; \Omega_s)}, \quad \mathbf{e}(p) := \|p - p_h\|_{H^1(\Omega_f)},$$

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}) := \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_{\hat{h}}\|_{[H^{1/2}(\Sigma)]^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}(\boldsymbol{\gamma}) := \|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_{[L^2(\Omega_s)]^{2 \times 2}}.$$

También, sean  $r(\boldsymbol{\sigma})$ ,  $r(p)$ ,  $r(\boldsymbol{\varphi})$  y  $r(\boldsymbol{\gamma})$  los ratios de convergencia experimental:

$$r(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{\log(\mathbf{e}(\boldsymbol{\sigma})/\mathbf{e}'(\boldsymbol{\sigma}))}{\log(h/h')}, \quad r(p) := \frac{\log(\mathbf{e}(p)/\mathbf{e}'(p))}{\log(h/h')},$$

$$r(\boldsymbol{\varphi}) := \frac{\log(\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi})/\mathbf{e}'(\boldsymbol{\varphi}))}{\log(h/h')} \quad \text{y} \quad r(\boldsymbol{\gamma}) := \frac{\log(\mathbf{e}(\boldsymbol{\gamma})/\mathbf{e}'(\boldsymbol{\gamma}))}{\log(h/h')},$$

donde  $h$  y  $h'$  denotan dos tamaños de malla consecutivos con errores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{e}'$ .

$h$	$N$	$\mathbf{e}(\boldsymbol{\sigma})$	$r(\boldsymbol{\sigma})$	$\mathbf{e}(p)$	$r(p)$	$\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi})$	$r(\boldsymbol{\varphi})$	$\mathbf{e}(\boldsymbol{\gamma})$	$r(\boldsymbol{\gamma})$
0.0982	1297	2.20E-01	—	1.03E-01	—	2.53E-02	—	9.42E-03	—
0.0654	2763	1.45E-01	1.02	6.54E-02	1.12	1.21E-02	1.81	5.56E-03	1.30
0.0490	4885	1.09E-01	0.99	4.64E-02	1.18	7.02E-03	1.90	3.20E-03	1.91
0.0321	11506	6.93E-02	1.06	2.88E-02	1.11	2.86E-03	2.10	1.59E-03	1.63
0.0245	19616	5.30E-02	1.00	2.23E-02	0.95	1.97E-03	1.39	1.19E-03	1.09
0.0164	43140	3.57E-02	0.97	1.43E-02	1.10	9.81E-04	1.72	6.64E-04	1.44
0.0123	78271	2.59E-02	1.11	1.08E-02	0.97	5.92E-04	1.75	4.40E-04	1.43
0.0082	175630	1.73E-02	0.99	7.10E-03	1.03	2.96E-04	1.70	2.55E-04	1.34
0.0061	310084	1.31E-02	0.96	5.30E-03	1.01	1.87E-04	1.59	1.81E-04	1.18

Tabla 1: Tamaños de malla  $h$ , grados de libertad  $N$ , errores y convergencia.

Consideramos los dominios  $\Omega_s := ]-0,3,0,3[^2$  y  $\Omega_f := \mathbf{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \Omega_s$ , donde  $\mathbf{B}(\mathbf{0}, 1)$  es el círculo unidad, y elegimos los parámetros  $\omega = 10$ ,  $\rho_s = \rho_f = \lambda = \mu = 1$ , de donde  $\kappa_f = 1$  y  $\kappa_s = 10$ . Por otra parte, sean  $K_0$ ,  $K_1$  y  $K_2$  las funciones de Bessel modificadas de segunda clase y órdenes 0, 1 y 2, respectivamente, y sea  $H_0^{(1)}$  la función de Hankel de

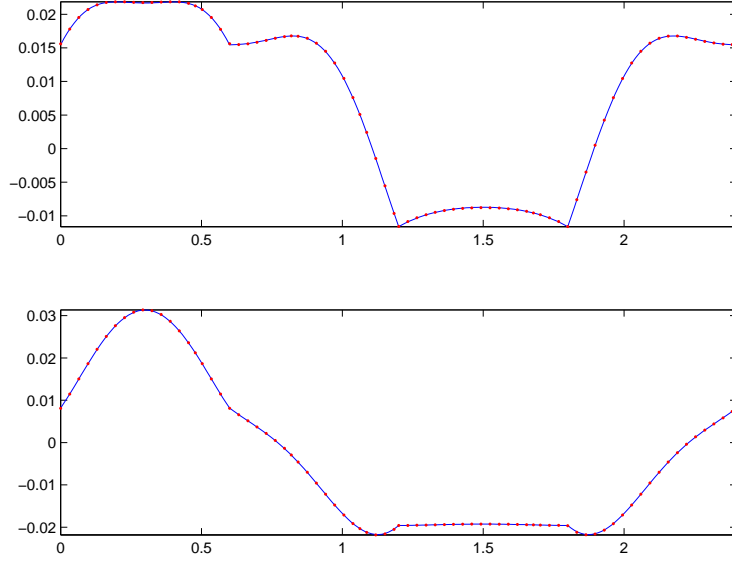


Figura 1: Partes real e imaginaria, exacta (azul) y aproximada (puntos en rojo) de  $\varphi_1$ .

primera clase y orden 0. Entonces, elegimos los datos  $\mathbf{f}$  y  $g$  de manera que la solución exacta de (3) sea

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \psi(\mathbf{x}) - \frac{(x_1 - 1)^2}{r_1^2} \chi(\mathbf{x}) \\ -\frac{(x_1 - 1)x_2}{r_1^2} \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_s, \quad \text{y} \quad p(\mathbf{x}) = H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f,$$

donde  $r_1 := \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$ ,  $\psi(\mathbf{x}) := K_0(i\omega r_1) + \frac{1}{i\omega r_1} \left( K_1(i\omega r_1) - \frac{1}{\sqrt{3}} K_1\left(\frac{i\omega r_1}{\sqrt{3}}\right) \right)$ , y  $\chi(\mathbf{x}) := K_2(i\omega r_1) - \frac{1}{3} K_2\left(\frac{i\omega r_1}{\sqrt{3}}\right)$ . La función  $\mathbf{u}$  es la solución fundamental, centrada en  $(1, 0)$ , de la ecuación elastodinámica, lo cual supone  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  en  $\Omega_s$ , y  $p$  es la solución fundamental, centrada en el origen, de la ecuación de Helmholtz en  $\Omega_f$ . De esta forma,  $(\mathbf{u}, p)$  es solución de (3) con condiciones de transmisión no homogéneas sobre  $\Sigma$  y condiciones de contorno adecuadas sobre  $\Gamma$ .

En la Tabla 1 presentamos la convergencia del ejemplo elegido para una sucesión de triangulaciones cuasi-uniformes del dominio  $\bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_f$ . Podemos observar que el error dominante es  $\mathbf{e}(\boldsymbol{\sigma})$ , algo bastante frecuente en los esquemas de elementos finitos mixtos. Destacamos, también, que la convergencia  $O(h)$  que predice el Teorema 4.1 (cuando  $\delta = 1$ ) se alcanza para todas las incógnitas. Además, en algunos casos la convergencia de  $\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi})$  y  $\mathbf{e}(\boldsymbol{\gamma})$  es aun más rápida que  $O(h)$ , lo cual puede indicar un fenómeno de superconvergencia en estas incógnitas o simplemente una característica especial del ejemplo elegido. Finalmente, en la Figura 1 representamos las partes real e imaginaria de la componente  $\varphi_1$  del multiplicador desplazamiento (para  $N = 43140$ ), donde la línea azul de trazo continuo es la solución exacta y la solución aproximada aparece con puntos rojos.

## Referencias

- [1] D.N. Arnold, F. Brezzi y J. Douglas. *PEERS: A new mixed finite element method for plane elasticity*. Japan Journal of Applied Mathematics, vol. 1 (1984), 347–367.
- [2] J. Bielak y R.C. MacCamy. *Symmetric finite element and boundary integral coupling methods for fluid-solid interaction*. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 49 (1991), 107–119.
- [3] F. Brezzi y M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Verlag, 1991.
- [4] G.N. Gatica, A. Márquez y S. Meddahi. *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. Aceptado en SIAM Journal on Numerical Analysis, (2007).
- [5] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [6] A. Márquez, S. Meddahi y V. Selgas. *A new BEM-FEM coupling strategy for two-dimensional fluid-solid interaction problems*. Journal of Computational Physics, vol. 199 (2004), 205–220.
- [7] S. Meddahi y F.-J. Sayas. *Analysis of a new BEM-FEM coupling for two dimensional fluid-solid interaction*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 21 (2005), 1017–1042.
- [8] J.E. Roberts y J.M. Thomas, *Mixed and Hybrid Methods*. En: Handbook of Numerical Analysis, editado por P.G. Ciarlet y J.L. Lions, vol. II, Finite Element Methods (Part 1), North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [9] R. Stenberg. *A family of mixed finite elements for the elasticity problem*. Numerische Mathematik, vol. 53, 5 (1988), 513–538.