

Un problema de control en los coeficientes para la ecuación de ondas con un actuador.

F. MAESTRE¹, A. MÜNCH², P. PEDREGAL¹

¹ Dpto. de Matemáticas, E.T.S.I. Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071 Ciudad Real, España. E-mails: Faustino.Maestre@uclm.es, Pablo.Pedregal@uclm.es.

² UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comte, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, Francia. E-mail: arnaud.munch@univ-fcomte.fr.

Palabras clave: Diseño óptimo, ecuación de ondas, relajación, medidas de Young

Resumen

Analizaremos un problema de diseño óptimo bidimensional gobernado por una ecuación de ondas con un actuador. El problema consiste en encontrar de forma simultánea la distribución espacio-temporal de dos materiales isotrópicos (asociado al diseño $\chi_{\omega_1}(t, x)$) junto a la posición estática del actuador (asociado al diseño $\chi_{\omega_2}(x)$), de manera que se minimice un cierto coste, que depende en forma cuadrática de las derivadas del estado.

La falta de soluciones clásicas de estos problemas es conocida ([12]), por tanto nuestro trabajo consistirá en analizar una apropiada relajación del problema, la cual la llevaremos a cabo mediante el uso de medidas de Young, que nos proporcionan las microestructuras óptimas (laminados) para ambos diseños. Finalmente son realizados ciertas simulaciones numéricas sobre el problema relajado.

1. Introducción

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $T > 0$ un tiempo positivo, las constantes $L_\alpha, L_d \in (0, 1)$. Estudiaremos el siguiente problema de diseño óptimo:

$$(P) \quad \inf_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t^2 + |u_x|^2) dx dt \quad (1)$$

donde u es la única solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla_x([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})]u_x) + a(x)\mathcal{X}_{\omega_2}u_t = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

con los datos iniciales (u_0, u_1) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, lo cual nos garantiza la existencia y regularidad de la solución u de la ecuación de estado, y $d \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^+)$ el actuador tal que $a(x) \geq a > 0$.

Las funciones

$$\mathcal{X}_{\omega_1} \in L^\infty(\Omega \times (0, T); \{0, 1\}), \quad \mathcal{X}_{\omega_2} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}),$$

son las variables de diseño, las cuales representan la colocación de los materiales (α o β) y el actuador, respectivamente y de forma independiente, solamente ligadas a través de la ecuación de estado. En este sentido cada diseño tiene asociada una restricción de volumen indicándonos la cantidad de material y/o actuador que podemos usar, las cuales escribimos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{X}_{\omega_1}(t, x) dx &\leq L_\alpha |\Omega|, \quad \forall t \in (0, T), \quad L_\alpha \in (0, 1), \\ \int_{\Omega} \mathcal{X}_{\omega_2}(x) dx &\leq L_d |\Omega|, \quad L_d \in (0, 1). \end{aligned} \tag{3}$$

Resaltar la dependencia temporal de los diseño asociados a los materiales ($\mathcal{X}_{\omega_1}(t, x)$), cuyo significado físico o ingenieril de este tipo de problemas diseño óptimo es encontrar la mejor distribución *espacio-temporal* de dos materiales dados, cuyo caracter temporal les hace en la literatura sean conocidos materiales dinámicos, y en cambio un diseño estacionario ($\mathcal{X}_{\omega_2}(x)$ independiente del tiempo) asociado al actuador, cuyo significado físico es la presencia de un amortiguador, actuador.

Los problemas de diseño óptimo han sido estudiado en mayor medida bajo leyes elípticas ([1],[2][7]), siendo de muy reciente obtención algunos resultados para problemas de diseño óptimo con leyes hiperbólicas ([9],[5],[6]). En el campo de problemas dinámico si son mas conocidos los problemas de diseño asociados a determinar la mejor posición de un actuador ([11],[10],[4]). Con estas notas nos proponemos estudiar un problema de diseño pionero en este campo donde actúan de forma conjunta un diseño asociado a la óptima distribución espacio-temporal de los materiales y la posición espacial del actuador (para un trabajo más completo en esta linea ver [8]).

Una poderosa herramienta a la hora de estudiar problemas de diseño óptimo es la teoría de la Homogeneización ([1]), con la cual se han obtenidos importantes avances a través del uso de $G - convergencia$, especialmente cuando el funcional coste no depende de forma explícita de las derivadas del estado. Siendo este nuestro caso, proponemos un camino alternativo usando una reformulación variacional del problema, y estudiando una relajación en términos variacionales y usando las medidas de Young ([13]).

2. Formulación Variacional

Nuestro objetivo será transformar el problema (P) en un problema variacional. Para ello utilizamos la caracterización de campos vectoriales con divergencia nula, como la rotación de $\pi/2$ en el sentido contrario a las agujas del reloj de un campo gradiente ([3]). En este sentido la ecuación de estado puede ser escrita en forma de divergencia como

$$\operatorname{div}(u_t + a(x)\mathcal{X}_{\omega_2}u, -[\alpha\mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})]u_x) = 0$$

donde ahora el operador divergencia es entendido en las variables temporal y espacial, de este modo usando la caracterización de los campos con divergencia nula, la ecuación de estado puede ser reescrita como la siguiente restricción puntual

$$\begin{pmatrix} u_t \\ -(\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1}))u_x \end{pmatrix} - R \nabla v = -a(x) \mathcal{X}_{\omega_2} \bar{u} \quad (4)$$

donde

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Es fácil comprobar la identificación entre los pares $(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2})$ y (u, v) , por lo que consideramos $U = (u, v)$ como nueva variable de diseño. Consideremos las variedades

$$\Lambda_{\gamma, \lambda} = \{A \in M^{2 \times 2} : M_{-\gamma} A^{(1)} - R A^{(2)} = \lambda e_1\}, \quad \gamma = \alpha, \beta \text{ and } \lambda \in \mathbb{R}$$

con

$$M_{-\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

y los funcionales

$$W(t, x, U, F) = \begin{cases} |F^{(1)}|^2, & \text{si } F \in \Lambda_{\gamma, 0} \cup \Lambda_{\gamma, -a(x)U^{(1)}}, \gamma = \alpha, \beta \\ +\infty, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

$$V_\alpha(t, x, U, F) = \begin{cases} 1, & \text{si } F \in \Lambda_{\alpha, 0} \cup \Lambda_{\alpha, -a(x)U^{(1)}} \\ 0, & \text{si } F \in \Lambda_{\beta, 0} \cup \Lambda_{\beta, -a(x)U^{(1)}} \setminus (\Lambda_{\alpha, 0} \cup \Lambda_{\alpha, -a(x)U^{(1)}}) \\ +\infty, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

$$V_d(t, x, U, F) = \begin{cases} 1, & \text{si } F \in \Lambda_{\beta, -a(x)U^{(1)}} \cup \Lambda_{\alpha, -a(x)U^{(1)}} \\ 0, & \text{si } F \in \Lambda_{\beta, 0} \cup \Lambda_{\alpha, 0} \setminus (\Lambda_{\beta, -a(x)U^{(1)}} \cup \Lambda_{\alpha, -a(x)U^{(1)}}) \\ +\infty, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

entonces el problema de diseño original puede ser reescrito como:

$$\min_U \hat{I}(U) = \int_0^T \int_\Omega W(t, x, U(x, t), \nabla U(x, t)) dx$$

sujeto a,

$$\begin{aligned} U &\in H^1(\Omega \times (0, T))^2, \\ U^{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \quad U_t^{(1)}(x, 0) = u_1(x) \text{ in } \Omega \\ U^{(1)} &= 0 \text{ in } (0, T) \times \partial\Omega \\ \int_\Omega V_\alpha(t, x, \nabla U(t, x)) dx &\leq L_\alpha |\Omega| \forall t \in (0, T) \\ \int_\Omega V_d(t, x, \nabla U(t, x)) \cdot V_d(0, x, \nabla U(t, x)) dx &\leq L_d |\Omega| \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

De esta forma el problema de diseño original (P) que escrito como un problema variacional vectorial no convexo. Por tanto una relajación de dicho problema viene dada por la (quasi-)convexificación del mismo.

En esta relajación cambiaremos la densidad del coste W por su *cuasiconvexificación restringida* CQW ([2]), que se define como

$$CQW(t, x, U, F, s, r) = \inf \left\{ \int_{M^{2 \times 2}} W(x, t, U, F) d\nu(A) : \nu \in \mathcal{A}(F, s, r) \right\}$$

con,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(F, s, r) = \left\{ \nu : \nu \text{ es } H^1\text{-medida de Young } F = \int_{M^{2 \times 2}} A d\nu(A), \right. \\ \left. \int_{M^{2 \times 2}} V_\alpha(t, x, U, A) d\nu(A) = s, \int_{M^{2 \times 2}} V_d(x, U, A) d\nu(A) = r \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Esta envolvente convexa es difícil de calcular, debido principalmente a que no conocemos explícitamente quién es el conjunto \mathcal{A} . En este sentido la estrategia usual a la hora de obtener dicha envoltura es a través de la policonvexificación y convexificación de rango uno, cotas inferior y superior respectivamente, y comprobando que coinciden.

Por tanto el objetivo principal de estas notas será probar que el siguiente problema variacional

$$(RP) \quad \min_U \quad \hat{I}(U) = \int_0^T \int_\Omega CQW(x, t, U(x, t), \nabla U(x, t)) dx$$

sujeto a,

$$\begin{aligned} U &\in H^1(\Omega \times (0, T))^2, \\ U^{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \quad U_t^{(1)}(x, 0) = u_1(x) \text{ in } \Omega \\ U^{(1)} &= 0 \text{ in } (0, T) \times \partial\Omega \\ \psi(x, t, \nabla U(x, t)) &= 0, \quad u_t + v_x = a(x)r(x)u(t, x) \text{ a.e. } (t, x) \in \Omega \times (0, T) \\ 0 \leq s(t, x) \leq 1, \quad \int_\Omega s(t, x) dx &\leq L_\alpha |\Omega| \forall t \in (0, T) \\ 0 \leq r(x) \leq 1, \quad \int_\Omega r(x) dx &\leq L_d |\Omega| \end{aligned}$$

donde

$$CQW(U, F) = |F_{11}|^2 + s \left| \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}) \right|^2 + (1 - s) \left| \frac{-1}{(1 - s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}) \right|^2$$

$$\psi(F, s) = F_{12} F_{21} + \alpha s \left| \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}) \right|^2 + \beta (1 - s) \left| \frac{-1}{(1 - s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}) \right|^2$$

es una relajación del problema de diseño original en el sentido del siguiente teorema

Teorema 1 *El problema variacional de arriba es una relajación del problema de diseño original en el sentido que*

- i) el ínfimo de ambos problemas coincide,*
- ii) el problema relajado admite soluciones óptimas,*
- iii) la microestructura óptima del problema de diseño original está codificada en la solución del problema relajado (a través de la medida de Young óptima).*

3. Policonvexificación

Calculemos la policonvexificación dada por

$$CPW(t, x, U, F, s, r) = \inf \left\{ \int_{M^{2 \times 2}} W(t, x, U, F) d\nu(A) : \nu \in \mathcal{A}^*(F, s, r) \right\}$$

con,

$$\mathcal{A}^*(F, s, r) = \left\{ \nu : \nu \text{ medida de Young que commuta con el determinante} \right. \\ \left. \int_{M^{2 \times 2}} V_d(t, x, U, A) d\nu(A) = r, \int_{M^{2 \times 2}} V_\alpha(t, x, U, A) d\nu(A) = s, \right. \\ \left. F = \int_{M^{2 \times 2}} A d\nu(A) \right\}. \quad (8)$$

De $\nu \in \mathcal{A}^*(F, s, r)$ tenemos la siguiente descomposición

$$\nu = s(r\nu_{\alpha,1} + (1-r)\nu_{\alpha,0}) + (1-s)(r\nu_{\beta,1} + (1-r)\nu_{\beta,0})$$

con $\text{sop}(\nu_{\gamma,n}) \subset \Lambda_{\gamma,n}$, $\gamma = \alpha, \beta$, $n = -a(x)F_{11}, 0$ (por simplicidad notamos $n=1,0$)

Notamos

$$F_{\gamma,n} = \int_{\Lambda_{\gamma,n}} A d\nu_{\gamma,n}, \gamma = \alpha, \beta, n = 0, 1;$$

De la restricción sobre el primer momento (8)₃ junto con que $F_{\gamma,n} \in \Lambda_{\gamma,n}$ obteneoms un sistema de ecuaciones en $F_{\gamma,n}$ que tendrá solución si y solo si se verifica la condición de compatibilidad

$$F^{11} = rn - F^{22}.$$

En este caso la solución es

$$F_{\beta,1}^1 = \frac{F_{11} - rsa_1 - s(1-r)a_2 - (1-s)(1-r)a_3}{(1-s)r}, \quad F_{\alpha,0}^1 = \frac{F_{21} + \beta F_{12} - (\beta - \alpha)rsa_4}{(1-r)s(\beta - \alpha)}$$

$$F_{\beta,0}^1 = \frac{-F_{21} - \alpha F_{12} - (\beta - \alpha)r(1-s)a_5}{(1-r)(1-s)(\beta - \alpha)}, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5.$$

Ponemos las variables

$$S_{\gamma,i} = \int_{\Lambda_{\gamma,i}} a_{12}^2 d\nu_{\gamma,i}(A), \quad \text{with } \gamma = \alpha, \beta, i = 1, 0.$$

$$S_1 = \int_{M^{2 \times 2}} a_{11}^2 d\nu(A)$$

Usando la propiedad principal de conmutatividad de la medida policonvexa con el determinante

$$\det F = \int_{M^2} \det A d\nu(A) = -S_1 + nr(sF_{\alpha,1}^{11} + (1-s)F_{\beta,1}^{11}) \\ \alpha s(rS_{\alpha,1} + (1-r)S_{\alpha,0}) + \beta(1-s)(rS_{\beta,1} + (1-r)S_{\beta,0}) \quad (9)$$

del mismo modo la función coste puede ser escrita en terminos de las variables $S_{\gamma,n}$ y S_1 , que junto con las nuevas restricciones que aparecen a aplicar desigualdad de Jensen a estas nuevas variables, permiten escribir la policonvexificación como el siguiente problema de programación matemática

$$\underset{(S_1, S_{\gamma,i}, a_j)}{\text{minimize}} \quad S_1 + s(rS_{\alpha,1} + (1-r)S_{\alpha,0}) + (1-s)(rS_{\beta,1} + (1-r)S_{\beta,0}) \quad (10)$$

sujeto a,

$$\det F = -S_1 + nr(sF_{\alpha,1}^{11} + (1-s)F_{\beta,1}^{11}) + \alpha s(rS_{\alpha,1} + (1-r)S_{\alpha,0}) + \beta(1-s)(rS_{\beta,1} + (1-r)S_{\beta,0})$$

$$S_{\gamma,i} \geq (F_{\gamma,i}^{12})^2, \text{ with } \gamma = \alpha, \beta, i = 1, 0. S_1 \geq (F^{11})^2.$$

Los valores óptimos son alcanzados cuando

$$\begin{aligned} S_{\alpha,i} &= a_4 = \left| \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}) \right|^2, i = 1, 2 \\ S_{\beta,i} &= a_5 = \left| \frac{-1}{(1-s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}) \right|^2, i = 1, 2 \\ S_1 &= a_1 = a_2 = a_3 = |F_{11}|^2 \end{aligned}$$

y se verifica la siguiente igualdad

$$F_{12}F_{21} + \alpha s \left(\left| \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}) \right|^2 \right) + \beta(1-s) \left(\left| \frac{-1}{(1-s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}) \right|^2 \right) = 0$$

y el valor óptimo es

$$CPW(U, F) = |F_{11}|^2 + s \left| \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}) \right|^2 + (1-s) \left| \frac{-1}{(1-s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}) \right|^2$$

4. Convexificación de rango uno

En esta sección buscamos una medida de Young que sea un laminado de manera que recupere el valor óptimo dado por la policonvexificación. De las condiciones de optimalidad tenemos

$$\nu^{(11)} = \delta_{F^{11}}, \text{ y } \nu_{\gamma,i}^{(12)} = \delta_{F_{\gamma,i}^{12}}$$

y por lo tanto

$$\nu_{\gamma,i} = \delta_{F_{\gamma,i}} \quad \text{con } \gamma = \alpha, \beta, i = 0, 1$$

$$\begin{aligned} F_{\gamma,1} &= \begin{pmatrix} F^{11} & y_\gamma \\ -\gamma y_\gamma & -F^{11} - n \end{pmatrix}, \quad F_{\gamma,0} = \begin{pmatrix} F^{11} & y_\gamma \\ -\gamma y_\gamma & -F^{11} \end{pmatrix} \\ y_\alpha &= \frac{1}{s(\beta - \alpha)} (\beta F_{12} + F_{21}), \quad y_\beta = \frac{-1}{(1-s)(\beta - \alpha)} (\alpha F_{12} + F_{21}). \end{aligned}$$

Comprobemos que $\nu = s(r\nu_{\alpha,1} + (1-r)\nu_{\alpha,0}) + (1-s)(r\nu_{\beta,1} + (1-r)\nu_{\beta,0})$ es un laminado, i.e. que existe conexiones de rango uno entre el soporte de las deltas. Se verifica que

$$F_{\gamma,1} - F_{\gamma,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = b \otimes e_2 \text{ con } b = (0, n), e_2 = (0, 1).$$

Por otro lado

$$(rF_{\alpha,1} + (1-r)F_{\alpha,0}) - (rF_{\beta,1} + (1-r)F_{\beta,0}) = \begin{pmatrix} 0 & y_\alpha - y_\beta \\ \beta y_\beta - \alpha y_\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que ν es un laminado, si y solo si,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & y_\alpha - y_\beta \\ \beta y_\beta - \alpha y_\alpha & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{sii} \quad (y_\alpha - y_\beta)(\beta y_\beta - \alpha y_\alpha) = 0$$

despues de algunos cálculos elementales se puede comprobar que esta última condición de determinante nulo es equivalente a la condición necesaria a que la policonvexificación sea finita, i.e., $\psi(F, s, r) = 0$.

5. Análisis del problema relajado

En esta sección nos gustaria analizar el problema relajado (RP), y realizar simulaciones numéricas del mismo.

Haciendo un análisis mas profundo del problema relajado (RP), en particular teniendo en cuenta que es un problema de mínimos, y el significado que pueden aportar las restricciones $\psi(F, s) = 0$ y $u_t + v_x = a(x)r(x)u(t, x) a.e.(t, x) \in \Omega \times (0, T)$, la relajación se simplificaría a

$$(\widetilde{RP}) : \inf_{s,r} \tilde{I}(s, r) = \int_0^T \int_\Omega \left(u_t(t, x)^2 + u_x(t, x)^2 \right) dx dt \quad (11)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \nabla_x((\alpha s + \beta(1-s))u_x) + d(x)r(x)u_t &= 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & & \text{in } \Omega, \\ 0 \leq s(t, x) \leq 1, \int_\Omega s(t, x) dx \leq L_\alpha |\Omega| & & \text{in } [0, T], \\ 0 \leq r(x) \leq 1, \int_\Omega r(x) dx \leq L_d |\Omega| & & \end{aligned} \quad (12)$$

es más se tiene que $\min(RP) = \inf(\widetilde{RP})$, la falta de convexidad de este último problema es la que no nos garantiza la existencia del mínimo de (\widetilde{RP}) . Para más detalles, consultar ([8]).

Presentamos simulaciones numéricas realizadas a (\widetilde{RP}) . Hemos utilizado un método de descenso gradiente, y las restricciones de volumen usando multiplicadores de Lagrange. Consideramos $\Omega = (0, 1)$ y las condiciones iniciales $u_0(x) = \sin(\pi x), u_1(x) = 0$

Referencias

- [1] Allaire, G., *Shape optimization by the homogenization method*, Springer, (2002).
- [2] Aranda, E. and Pedregal P., *Constrained envelope for a general class of design problems*, Disc. Cont. Dyn. Syst., Supplement Volume, (2003), 30-41.
- [3] Girault, V. and Raviart, P-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Springer, (1986).

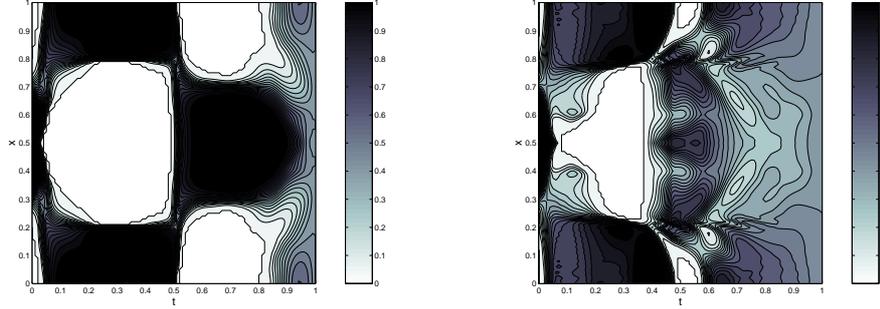


Figura 1: Densidad óptima s^{lim} en $(0, T) \times \Omega$ para $(\alpha, \beta, d) = (1, 1, 1)$ (izqda.), y $(\alpha, \beta, d) = (1, 4, 10)$ (dcha).

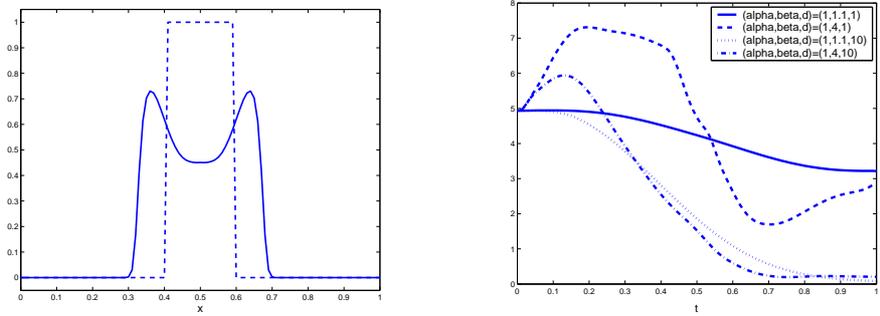


Figura 2: - **Linea sólida** : Densidad óptima r^{lim} para ambos casos (izqda.). Evolución de la energía respecto al tiempo, en diferentes casos (dcha.).

- [4] Hebrard, P. and Henrot, A., *Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string*, Systems and control letters, **48**, (2003) 199-209.
- [5] Lurie, K., *Control of the coefficients of linear hyperbolic equations via spatio-temporal composites*. In Homogenization, World Scientific, Singapore (V. Berdychesky, V. Jikov and G. Papanicolau eds.), (1999) 285-315.
- [6] Lurie, K., *Some new advances in the theory of dynamic materials*, Journal of Elasticity, **72**, (2003) 229-239.
- [7] Maestre, F. and Pedregal, P., *Quasiconvexification in 3-D for a variational reformulation of an optimal design problem in conductivity*, Nonlinear Analysis, **64(9)**, (2006) 1962-1976.
- [8] Maestre, F., Münch, A. and Pedregal, P., *A spatio-temporal design problem for a damped wave equation*. SIAP, en prensa.
- [9] Maestre, F., Münch, A. and Pedregal, P., *Optimal design under the one-dimensional wave equation*. Submitted.
- [10] Münch, A., Pedregal P. and Periago, F., *A variational approach to a shape design problem for the wave equation*, C.R.Acad. Sci. Paris Série I, **343**, (2006) 371-376.
- [11] Münch, A., Pedregal P. and Periago, F., *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, Journal of Differential Equations, **231(1)**, (2006) 331-358.
- [12] Murat, F. *Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients*, Ann. Mat. Pura e Appl. Serie **4** 112, (1977) 49-68.
- [13] Pedregal, P. *Vector variational problems and applications to optimal design*, ESAIM-COCV **15**, (2005) 357-381.