XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–??)

Soluciones metaestables para un modelo de campos de fase con más de dos fases

A. Jiménez-Casas[1], M. Castro [2]

[1,2] *Dpto. Grupo Dinámica No Lineal, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Alberto Aguilera 23-28015 Madrid. E-mails:* `ajimenez@rec.upcomillas.es,mario@upcomillas.es`.

Palabras clave: campo de fase, metaestabilidad, espesor de interfase

Resumen

Consideramos una generalización del modelo de campos de fase semilineal [11], usando una función de densidad más general. Esa función de densidad describe la separación de mezclas con tres o más componentes, en lugar de las mezclas binarias de los modelos anteriores. Probamos la existencia de soluciones metaestables, es decir que evolucionan muy lentamente en el tiempo.

1. Introducción

En el caso unidimensional el modelo de campos de fase es el sistema parabólico semilineal dado por

$$\left\{\begin{array}{rcll} \tau\varphi_t & = & \xi^2\varphi_{xx} - \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi) + 2u, & x \in (a,b) \\ u_t + \frac{l}{2}\varphi_t & = & ku_{xx}, & x \in (a,b) \\ \varphi'(a) & = & \varphi'(b) = 0 & \\ u'(a) & = & u'(b) = 0 & \\ \varphi(0,x) & = & \varphi_0(x) \in H^1(a,b) & \\ u(0,x) & = & u_0(x) \in L^2(a,b) & \end{array}\right. \tag{1}$$

Aquí $u(t,x)$ representa típicamente la temperatura de un punto x en el instante de tiempo t de una sustancia que puede aparecer en dos fases diferentes, (por ejemplo sólido-líquido) y $\varphi(t,x)$ es la función campo de fase, que representa una media local de la fase. Las constantes positivas l y k estan asociadas al calor latente y a la difusividad, mientras que τ y ξ (espesor de la interfase) son parámetros positivos asociados al tiempo y a la longitud de escala [2],[3], [4].

Los modelos de campos de fase pueden describir también la densidad de una colonia de bacterias o la masa de crecimiento de un tumor asi como la difusión de la densidad de nutriente. Finalmente $u(t,x)$ es también la concentración, del punto x en el instante de tiempo t, de una de las componentes de la mezcla.

En este trabajo consideramos las dinámicas de la separación y colapso de mezclas de tres o más componentes, para lo cual consideramos una función de densidad $G'(\varphi)$ en lugar de la funció $\frac{1}{2}(\varphi^3-\varphi)$, verificando:

1.- $G \geq 0$ con $G \in \mathcal{C}^3$

2.-G tiene solamente un número finito de ceros, $G^{-1}(0)=\{z_1,..,z_m\}$ (los cuales se corresponden con los estados de las fases del sistema).

3.- $G"(z_i)>0, i=1,..,m$ (estos puntos están asociados a mínimos de G.)

De esta forma, si consideramos la función de entalpía $v=u+\frac{l}{2}\varphi$, el objetivo es el estudio del comportamiento de las soluciones (φ^ξ, v^ξ) del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \tau\varphi_t &=& \xi^2\varphi_{xx}-G'(\varphi)-l\varphi+2v &,\quad x\in(a,b)\\ v_t &=& kv_{xx}-\frac{kl}{2}\varphi_{xx} &,\quad x\in(a,b)\\ \varphi'(a) &=& \varphi'(b)=0 & \\ v'(a) &=& v'(b)=0 & \\ \varphi^\xi(0,x) &=& \varphi_0^\xi(x)\in H^1(a,b) & \\ v^\xi(0,x) &=& v_0^\xi(x)\in L^2(a,b) & \end{array}\right. \tag{2}$$

cuando $\xi \sim 0$.

2. Resultados Previos

En esta sección consideramos un funcional de Lyapunov del sistema (2) y escribimos dicho funcional de forma que una parte del mismo es una expresión que depende solamente de φ, similar al funcional de energía usado en [9]. De esta forma podemos aplicar algunos lemas técnicos que han sido probados en [9].

Lema 1 *El funcional de energía definido por*

$$F_\xi(\varphi,v)=\int_a^b[\frac{\xi^2}{2}\varphi_x^2+G(\varphi)]dx+\frac{l}{2}\int_a^b(\frac{2}{l}v-\varphi)^2dx \tag{3}$$

es un funcional de Lyapunov para el sistema (2) en $H^1(a,b)\times L^2(a,b)$. En particular tenemos que

$$\frac{d}{dt}F_\xi(\varphi^\xi,v^\xi)+(\tau\|\varphi_t^\xi\|^2+d\|[(-\Delta)^{-1}v_t^\xi]\|^2)=0 \tag{4}$$

con $d=\frac{4}{kl}>0$.

Demostración: Es suficiente con multiplicar en $L^2(a,b)$ la primera encuación en (2) por $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ y la segunda por $\frac{4}{kl}(-\frac{\partial}{\partial x^2})^{-1}v_t$, e integrar por partes. Manipulando adecuadamente las expresiones de forma similar a la expuesta en [11] obtenemos (4).$\square$

Observamos que el funcional de Lyapunov satisface:

1.-$F_\xi(\varphi,v)\geq 0$.

2.- El mínimo de F_ξ se alcanza en los puntos donde F_ξ is cero, i.e. $(z_i, \frac{l}{2}z_i), i = 1, .., m$ con $\xi \geq 0$. (puntos de equilibrio estable).

3.- F_ξ toma valores muy pequeños de energía con $\xi << 1$, para un conjunto "grande"de funciones. Este conjunto contiene funciones no constantes, en particular contiene a las funciones (φ, v) donde $\varphi \sim z_i$ con valores grandes de gradiente en intervalos pequeños, y $v \sim \frac{l}{2}\varphi$.

De esta forma, podemos buscar soluciones metaestables no constantes para valores pequeños de ξ. Para ello basta con considerar datos iniciales en la región donde el funcional $F_\xi(\varphi, v)$ toma valores pequeños $h(\xi)$, para $\xi << 1$. Teniendo en cuenta ahora que,

$$0 \leq F_\xi(\varphi^\xi(t,x), v^\xi(t,x)) \leq F_\xi(\varphi^\xi(0,x), v^\xi(0,x)) \leq h(\xi)$$

para $t \geq 0$. Si consideramos datos iniciales en esa región, como tenemos poca energía para disipar las soluciones correspondientes tienen una evolución lenta en el tiempo.

Definición de función N, m-transición

Una $N, m-$ *step* función con puntos de transición, $y_j, j \in \{1, 2, ., N\}$, denotada por $\varphi^0 : [a, b] \to \{z_i, i = 1, .., m\}$, es una función que toma diferentes valores z_i, i.e

$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{N+1} z_i \mathcal{X}_{I_i}$ donde $\mathcal{X}$ denota la función característica del conjunto, con $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 .. \cup \bar{I}_{N+1} = [a, b]$ y $(\partial(I_1) \cup \partial(I_2) \cup .. \partial(I_{N+1}) \cap (a, b) = \{y_j, i = 1, ..., N\}$. Donde en el caso de $N > m - 1$ consideramos $z_{m+r} = z_r$ para $r = 1, 2, N + 1 - m$. Una función $N, m - transición$ es una función en $H^1(a, b)$, próxima a una $N, m - step$ función en $L^1(a, b)$.

El objetivo, es buscar soluciones que partiendo de una estructura próxima a una función de este tipo conserve esa misma estructura durante un intervalo de tiempo que tiende a infinito cuando el espesor de la interfase,ξ, tiende a cero. Para ello vamos a utilizar la estructura del funcional de Lyapunov asociado al sistema.

No es difícil ver que si intentamos encontrar una familia de datos iniciales (φ_0^ξ, v_0^ξ) tales que $\liminf_{\xi \to 0} F_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$ es muy pequeño, de orden $O(\xi^2)$, entonces cualquier solución cuando ξ tiende a cero se acercan necesariamente a un punto de equilibrio, es decir φ^ξ se acerca a un valor constante z_i y v^ξ se acerca a $\frac{l}{2}z_i$. Sin embargo el siguiente lema, probado en [1, 9] para dos fases diferentes, nos permite concluir que si consideramos valores del orden de $O(\xi)$, podemos incluir un conjunto de funciones (φ_0^ξ, v_0^ξ), que sin ser puntos de equilibrio (funciones denominadas de transición) mantienen su estructura inicial durante un intervalo de tiempo que tiende a infinito (soluciones metaestables). Por esta razón usamos el funcional de energía reescalado $V_\xi = \frac{1}{\xi}F_\xi$, que podemos reescribir como $V_\xi(\varphi, v) = E_\xi(\varphi) + \frac{l}{2\xi}\int_a^b (\frac{2}{l}v - \varphi)^2 dx$, con

$$E_\xi(\varphi) = \int_a^b [\frac{\xi}{2}\varphi_x^2 + \frac{1}{\xi}G(\varphi)]dx. \tag{5}$$

Lema 2 *Si $\{\varphi^\xi\} \subset H^1(a, b)$, tal que $\varphi^\xi \longrightarrow \varphi^0$ en $L^1(a, b)$, cuando $\xi \to 0$, con φ^0 una función N, m-escalera. Entonces, $\liminf_{\xi \longrightarrow 0^+} E_\xi[\varphi^\xi] \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N H(z_i + 1) - H(z_i) = C(N, m)$ con $H(s) = \int_0^s G(r)dr$.*

Demostración: El lema de Egorov, nos dice que dado $\delta > 0$ existe $A \subset (a, b)$ con $|(a, b) \setminus A| \leq \delta$ tal que $\varphi^\xi \longrightarrow \varphi^0$ uniformemente eb A. De esta forma, podemos considerar

N-intervalos $(a_i, b_i), i \in \{1, 2, .., N\}$ conteniendo a los puntos de transición tales que

$$\varphi^{\xi}(a_i) \longrightarrow \varphi^0(a_i) = z_i, \text{ y } \varphi^{\xi}(b_i) \longrightarrow \varphi^0(b_i) = z_{i+1}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$E_{\xi}(\varphi^{\xi}) = \int_a^b [\frac{\xi}{2}|(\varphi^{\xi})_x|^2 + G(\varphi^{\xi})]dx \geq \sum_{i=1}^{N} [\frac{\xi}{2} \int_{a_i}^{b_i} |(\varphi^{\xi})_x|^2 + G(\varphi^{\xi})].$$

Ahora, por la desigualdad de Young, obtenemos que

$$\int_{a_i}^{b_i} \xi|(\varphi^{\xi})_x|^2 + \frac{1}{\xi} \int_{a_i}^{b_i} |G(\varphi^{\xi})|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} (\varphi^{\xi})_x G(\varphi^{\xi}) = \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} (H(\varphi^{\xi}))_x.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\int_{a_i}^{b_i} (H(\varphi^{\xi}))_x = H(\varphi^{\xi}(b_i)) - H(\varphi^{\xi}(a_i)) = H(z_{i+1}) - H(z_i)$ concluimos.$\square$

3. Evolución de dos o más fases

En adelante consideraremos φ^0 una $N, m-$escalera función i.e. $y_j, j = 1, .., N$ son puntos de transición y r es tal que $(y_j - r, y_j + r) \subset (a, b)$ son disjuntos, con $C \leq r$ una constante positiva.

3.1. Evolución lenta cuando τ es independiente del espesor de la interfase ξ

En esta sección veremos que si consideramos una escala de tiempo de longitud T con $T \geq Me^{\frac{C}{\xi}}$, para toda constante positiva M, entonces la estructura inicial de N, m-transición, se mantiene para el sistema general (2), cuando τ es independiente de ξ.

Teorema 1 *Supongamos una familia de datos iniciales* $(\varphi_0^{\xi}(x), v_0^{\xi}(x))$ *satisfaciendo:*
i) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \varphi_0^{\xi}(x) = \varphi^0(x)$ *en* $L^1(\Omega)$.
ii) $E_{\xi}[\varphi_0^{\xi}] \leq C(N, m) + \frac{1}{2}h(\xi)$, *con* $\xi h(\xi) \to 0$ *cuando* $\xi \to 0$.
iii) $l \int_a^b |\frac{2}{l} v_0^{\xi} - \varphi_0^{\xi}|^2 dx \leq \xi h(\xi)$.
Entonces, para todo $M > 0$ *tenemos que*
i) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \quad \|\varphi^{\xi}(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$
ii) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \quad \|\frac{2}{l} v^{\xi}(t) - \varphi^{\xi}(t)\|_{L^2} = 0.$
iii) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \quad \|\frac{2}{l} v^{\xi}(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$
En particular, si $h(\xi) = ke^{-\frac{C}{\xi}}$ *para algún* k, *entonces*
iv) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \quad \|\varphi^{\xi}(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$
v) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \quad \|\frac{2}{l} v^{\xi}(t) - \varphi^{\xi}(t)\|_{L^2} = 0.$
vi) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \quad \|\frac{2}{l} v^{\xi}(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$

Demostración: Hemos de recorrer varias etapas siguiendo el procedimiento en [11, 13]:

1ª Etapa. Probaremos que existen C_1, C_2 constantes positivas independientes de ξ, tales que la solución (φ^ξ, v^ξ) satisface

$$\int_0^T \int_a^b [(\varphi_t^\xi)^2 + |(-\Delta)^{-1}(v_t^\xi)|^2] dxdt \leq C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})$$

para ξ suficientemente pequeño, y elegimos T tal que $T \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi)+\xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$.

En particular si $h(\xi) = C_3 e^{-\frac{C}{\xi}}$, entonces $T \geq C_4 e^{\frac{C}{\xi}}, C_i > 0, i = 3, 4$.

En efecto, si consideramos δ pequeño, usando el lema 2 junto con la continuidad del semigrupo asociado a las soluciones del sistema (2), para $\xi \leq \xi_0$ fijado, existe $T = T(\xi) > 0$, dependiendo del dato inicial, y existe $C_1^* > 0$ constante tal que

1.-$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$ para todo $0 \leq t \leq T(\xi)$ con

2.-$E_\xi[\varphi^\xi](t) \geq C(N, m) - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$ para todo $0 \leq t \leq T(\xi)$.

Teniendo en cuenta que G is positiva, tenemos que para todo $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$C(N, m) - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}} \leq E_\xi[\varphi^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi]. \qquad (6)$$

Usando, ahora que $V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] = E_\xi[\varphi_0^\xi] + \frac{l}{2\xi}\int_a^b (\frac{2}{l} v_0^\xi - \varphi_0^\xi)^2 \leq C(N, m) + h(\xi)$, obtenemos que para todo $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq h(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}. \qquad (7)$$

Observamos que (7) nos dice que la variación de energía en $0 \leq t \leq T(\xi)$ es muy pequeño.

Además, de (4), obtenemos que $\frac{dV_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)}{dt} = -\xi^{-1}(\tau\|\varphi_t^\xi\|^2 + d\|[(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]\|^2)$ con $d = \frac{4}{kl} > 0$, de esta forma integrando de 0 a $t \leq T(\xi)$, se tiene que

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) = \xi^{-1} \int_0^t \int_a^b \left(\tau(\varphi_t^\xi)^2 + d[(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2\right).$$

Usando esto junto con (7) obtenemos $\xi^{-1}\int_0^t \int_a^b \left(\tau(\varphi_t^\xi)^2 + d[(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2\right) \leq g(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$ i.e.

$$\int_0^t \int_a^b \left((\varphi_t^\xi)^2 + [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2\right) \leq C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}}), \qquad (8)$$

con $C_1 = \frac{max\{C_1^*, 1\}}{min\{\tau, d\}}$.

Observamos que (7) y (8) siguen siendo ciertos mientras $\int_a^b |\varphi^\xi(s) - \varphi^0| \leq \delta$ for $0 \leq s \leq t$.

Finalmente, basta con trabajar como en [], para probar que es posible tomar $T = T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi)+\xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$ con $C_2 > 0$ independiente del dato inicial.

En efecto, si $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| \leq \frac{1}{2}\delta$ entonces la demostración ha terminado, ya que para todo $t \geq 0$ tenemos que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \int_0^t \int_a^b |\varphi_t^\xi| + \int_a^b |\varphi_0^\xi - \varphi^0| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta \qquad (9)$$

y (7), (8) son ciertos para todo t.

Por otra parte, si $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| > \frac{1}{2}\delta$, entonces existe $T(\xi) > 0$, todavía dependiendo del dato inicial, tal que

$$\frac{1}{2}\delta = \int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|$$

y como en (9), tenemos que $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$ para todo $t \in [0, T(\xi)]$. De esta forma (8) es cierto para todo $t \in [0, T(\xi)]$. Aplicando ahora la desigualdad de Holder, se tiene que

$$\frac{1}{2}\delta \leq \left(\int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (T(\xi))^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}} \leq \xi^{\frac{1}{2}} [C_1(h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}} T(\xi)^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}}$$

y por tanto $T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$ with $C_2 = \frac{\delta^2}{4(b-a)}$ con lo que el segundo miembro es independiente del dato inicial. El resto es inmediato.

2ª Etapa.-De las etapas anteriores tenemos que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi| dx \leq \int_a^b \int_0^t |\varphi_t^\xi| dx ds \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} [C_1 \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}}.$$

De esta forma para $t \leq T(\xi)$ se tiene que $\|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} \leq C_2 [T(\xi)\xi(h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}}$ con $C_2 = (C_1(b-a))^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto tomando $T(\xi)$ como en la 1ª etapa y tal que $T(\xi)\xi(h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \to 0$ si $\xi \to 0$, por ejemplo, $T(\xi) = \frac{M}{h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}$, obtenemos que

$$\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T(\xi)} \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} = 0.$$

Usando ahora que $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \|\varphi_0^\xi - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ concluimos.

ii) Con $T(\xi)$ como en i) y usando ahora (5) y la hipótesis sobre (φ_0^ξ, v_0^ξ), obtenemos

$$V_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)(t) = E_\xi(\varphi^\xi)(t) + \frac{l}{2\xi} \int_a^b (\frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi)^2(t) \leq V_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi) \leq C(N, m) + h(\xi),$$

de esta forma, usando el Lema 2 junto con las etapas anteriores, obtenemos

$$\frac{1}{2\xi} \int_a^b |\frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi|^2 \leq C(N, m) + h(\xi) - E_\xi(\varphi^\xi)(t) \leq h(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$$

con C_1^* constante positiva que no depende de ξ ni de t. Por lo tanto, se tiene que

$$\sup_{t \in [0, T(\xi)]} \|\frac{2}{l} v^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} \leq C_3 \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \tag{10}$$

para una constante positiva C_3 independiente de ξ y t, lo que concluye la demostración .

iii) Observamos que $\|\frac{2}{l} v^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} \leq \|(\frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi)(t)\|_{L^1} + \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1}$ y aplicando la desigualdad de Holder junto con ii) obtenemos el resultado.$\square$

3.2. Evolución lenta cuando $\tau = \tau(\xi)$

En esta sección estudiamos el caso en el que $\tau = \xi^2$ con ξ,espesor de la interfase, tendiendo a cero. En este caso, consideramos datos iniciales φ_0 muy cerca de la estructura de $N, m - transición$. Es decir, suponemos que $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq C(N,m) + \frac{1}{2}h(\xi)$, con $h(\xi)$ tal que $\xi^{-1}h(\xi) \to 0$ as $\xi \to 0$. Probamos que la estructura inicial de $N, m - transición$ se conserva para la solución durante una escala de tiempo de longitud T con $T \geq M\xi^{1+\delta}e^{C/\xi}$, para cualesquiera constantes positivas M, δ, (en lugar de $T \geq Me^{\frac{C}{\xi}}$). De esta forma, en este caso probamos que la solución conserva su estructura durante un intervalo de tiempo más pequeño que en el caso anterior (ver [12]).

Teorema 2 *Suponemos que el dato inicial* $(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x))$ *satisface:*
i) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \varphi_0^\xi(x) = \varphi^0(x)$ *en* $L^1(\Omega)$.
ii) $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq NC_0 + \frac{1}{2}g(\xi)$, *con* $\xi^{-1}g(\xi) \to 0$ *cuando* $\xi \to 0$.
iii) $\frac{2c}{l}\int_a^b |v_0^\xi - \frac{l}{2}h(\varphi_0^\xi)|^2 dx \leq \xi g(\xi)$.
Entonces, para $M > 0, \delta > 0$ *tenemos que*
i) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M\xi^{1+\delta}}{g(\xi)+e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$
ii) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M\xi^{1+\delta}}{g(\xi)+e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|v^\xi(t) - \frac{l}{2}h(\varphi^\xi(t))\|_{L^2} = 0.$
En particular, si $g(\xi) = ke^{-\frac{C}{\xi}}$ *para algún* k, *entonces*
iv) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq M\xi^{1+\delta}e^{\frac{C}{\xi}}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$
v) $\lim_{\xi \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq M\xi^{1+\delta}e^{\frac{C}{\xi}}} \|v^\xi(t) - \frac{l}{2}h(\varphi^\xi(t))\|_{L^2} = 0.$

Demostración: Basta con usar de nuevo el lema anterior para esta función general de densidad y trabajar como en el caso anterior (ver [11, 12, 13]).$\square$

Agradecimientos

Financiado parcialmente por los Proyectos MTM2006-08262 y MEC FIS2006-12253-C06-06, Spain.

Referencias

[1] L.Bronsard, R.V. Kohn, "On the slowness of Phase boundary motion in one space dimension", Com. on Pure and Appl. Math. **43**, 987-997, (1990).

[2] G.Caginalp, "The dynamics of a conserved Phase Field system:Stefan-like, Hele-Shaw, and Cahn-Hilliard models as asymptotic limits", IMA J. of Appl. Math. **44**, 77-94, (1990).

[3] G.Caginalp, "Phase Field models and sharp interface limits: some differences in subtle situations", Rocky Mountain J. Math., **21, 2**, 603-616, (1991).

[4] G.Caginalp, P.C.Fife, "Dynamics of layered interfaces arising from Phase boundaries", SIAM.J. Appl. Math. **48, 3**, 506-518, (1988).

[5] J.Carr, R.L.Pego, "Metastable patterns in solutions of $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$", Comm.Pure Appl. Math. **42**, 523-579, (1989).

[6] J.Carr, R.Pego, "Invariant manifolds for metastable patterns in $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$", Proceeding of the Royal Society of Edimburgh, **116A**, 133-160, (1990).

[7] M. Castro, "Phase-field approach to heterogeneous nucleation", Phys. Rev. B **67**, 035412 (2003).

[8] G. Fusco, J.K. Hale, "Slow-motion manifolds, dormant instability, and singular perturbations". J. Dynamics Differential Equations., **1, 1**, 75-94 (1989).

[9] C.P. Grant, "Slow motion in one-dimensional Cahn-Morral systems", SIAM J. Math. Anal, **26**, 1, 21-34, (1995).

[10] A. Jiménez-Casas, "Dinámica en dimensión finita: Modelos de campos de fase y un termosifón cerrado,"Ph. D. Thesis, U.C.M., (1996).

[11] A. Jiménez-Casas, A. Rodriguez-Bernal, "Linear stabilility analysis and metastable solutions for a phase-field model,"Proceeding of the Royal Society of Edimburgh, **129A**, 571-600, (1999).

[12] A. Jiménez-Casas, "Metastable soltuions for the thin-interface limit of a phase-field model", Nonlinear analysis 63, e963-e970,(2005).

[13] A. Jiménez-Casas, M.Castro, "Slow motion for a phase-field model", aceptado para publicación.

[14] L. Modica, "The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion", Arch. Rat. Mech. Anal., **98**, 123-142, (1987).