

## Resolución numérica de algunos sistemas parabólico-elípticos no lineales

JOSÉ MANUEL DÍAZ MORENO<sup>1</sup>,  
MARÍA TERESA GONZÁLEZ MONTESINOS<sup>2</sup>,  
FRANCISCO ORTEGÓN GALLEGO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Cádiz, CASEM, Campus del Río San Pedro, 11510 Puerto Real, Cádiz. E-mails: josemanuel.diaz@uca.es, francisco.ortegon@uca.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Escuela Superior de Ingeniería de Cádiz, 11002 Cádiz. E-mail: mariateresa.gonzalez@uca.es.*

**Palabras clave:** Problema del termistor, silistor, ecuaciones elípticas no lineales, ecuaciones parabólicas no lineales, soluciones de capacidad, soluciones débiles, resolución numérica de problemas no lineales, método de los elementos finitos.

### Resumen

En este trabajo se aborda la resolución numérica del problema del termistor en dimensión dos. La mayor dificultad de dicho análisis reside en el hecho que se supone conducción metálica y además se satisface la ley de Wiedemann-Franz. Para la simulación numérica se ha considerado el caso de un termistor PTC de medida o silistor. En tal caso, los parámetros físicos reales conducen un problema adimensional con difusión muy pequeña, lo que puede dar lugar a la aparición de una capa límite a lo largo de la frontera del silistor.

## 1. Introducción

El calor producido por una corriente eléctrica que atraviesa un semiconductor está descrito por el llamado problema del termistor, consistente en un sistema de dos ecuaciones acopladas, una parabólica no lineal y otra elíptica, cuyas incógnitas son la temperatura,  $u$ , y el potencial eléctrico,  $\varphi$ .

Las leyes de Ohm y Fourier vienen dadas por  $\mathcal{J} = \sigma(u)\mathcal{E}$  y  $\mathcal{Q} = -a(u)\nabla u$ , respectivamente, donde  $\mathcal{J}$  es la intensidad de corriente eléctrica,  $\mathcal{Q}$  el flujo de calor,  $\mathcal{E} = -\nabla\varphi$  el campo eléctrico, y  $\sigma(u)$  y  $a(u)$  son sendas conductividades eléctrica y térmica. El problema

del termistor se deduce a partir de las leyes de conservación de la corriente y la energía, a saber,

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = 0, \quad \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{J} \cdot \mathcal{E},$$

siendo  $\rho$  la densidad del semiconductor, y  $c$  su calor específico. Así, obtenemos el siguiente problema:

$$\left. \begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(u) \nabla u) &= \sigma(u) |\nabla \varphi|^2 && \text{en } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \varphi) &= 0 && \text{en } \Omega_T, \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi &= \varphi_0 && \text{sobre } \Gamma_T, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , dominio ocupado por el dispositivo eléctrico, es un abierto acotado y regular,  $N \geq 2$  y  $T > 0$ .

Son escasos los trabajos en los que se aborda la resolución numérica de (1), pero entre ellos cabe destacar [1] y [13], en los que se estudia el problema del termistor con conductividad térmica constante y condiciones de contorno mixtas. Por otro lado, en [11] se analiza un problema similar considerando el llamado modelo de entalpía y, de nuevo,  $a$  es una función constante. Resumiendo, en estos artículos y en tantos otros, la función  $a$  siempre se supone constante.

Ahora bien, cuando la conductividad térmica es de tipo Wiedemann–Franz, es decir,  $a(s) = Ls\sigma(s)$ , siendo  $L > 0$  la constante de Lorenz, y se produce conducción metálica, esto es,  $\sigma(s) = O(s^{-1})$  para  $|s| \rightarrow +\infty$ , el estudio del problema (1) se complica sobremedida debido al carácter degenerado de la ecuación parabólica y al no uniformemente elíptico de la ecuación elíptica. Actualmente, bajo estas hipótesis sobre las conductividades, la existencia de soluciones débiles de (1) constituye un problema abierto; no obstante, en [8] los autores han demostrado la existencia de un cierto tipo de solución que se adapta al marco funcional de (1): la solución de capacidad.

La finalidad de este trabajo estriba en mostrar algunos de los resultados obtenidos en la resolución numérica del sistema (1) en el caso bidimensional, suponiendo que la conductividad térmica satisface la ley de Wiedemann–Franz y además se produce conducción metálica, lo cual se corresponde con los casos físicamente importantes y más complicados desde el punto de vista teórico.

## 2. Solución de capacidad

Supongamos las siguientes hipótesis sobre los datos del sistema (1):

(H.1)  $u_0 \in L^2(\Omega)$  es tal que  $u_0 \geq 0$  casi por doquier en  $\Omega$ .

(H.2)  $\varphi_0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ .

(H.3)  $\sigma \in C(\mathbb{R})$  y  $0 < \sigma(s) \leq \sigma_0$ , para cualquier  $s \in \mathbb{R}$ .

(H.4)  $a \in C(\mathbb{R})$  y  $0 < a(s) \leq a_0$ , para cualquier  $s \neq 0$ ,  $a(0) = 0$ .

(H.5) Para cada  $\delta > 0$  existe una constante  $a_\delta > 0$  tal que  $\inf_{|s| > \delta} a(s) \geq a_\delta$ .

Este mismo problema se estudia en [4], donde se demuestra la existencia de soluciones débiles del sistema (1), pero ahora estamos suponiendo que la función  $\sigma$  no está acotada inferiormente por una constante positiva. Este cambio en la hipótesis (H.3) sobre la conductividad eléctrica puede parecer insignificante pero es crucial, ya que el análisis del problema es mucho más complejo: las ecuaciones parabólica y elíptica de (1) ahora van a ser degenerada y no uniformemente elíptica, respectivamente. De este modo, la existencia de soluciones débiles no está garantizada y hemos de tratar con otro tipo de soluciones, a saber, las soluciones de capacidad (véanse [7, 8, 12]). Nótese además que (H.3)–(H.5) incluyen el caso de conducción metálica para  $\sigma$ , mientras que  $a$  puede definirse haciendo uso la ley Wiedemann-Franz.

Sea  $A(s) = \int_0^s a(\tau) d\tau$ . Claramente  $A(0) = 0$ ,  $A \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $A$  es estrictamente creciente y globalmente lipschitziana.

**Definición 1** *Se dice que la terna  $(u, \varphi, \Phi)$  es solución de capacidad de (1) si se cumplen las siguientes condiciones:*

(C.1)  $u \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ ,  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $A(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^q(\Omega_T)$ , para cualquier  $q < 2 + 2/N$ ,  $\varphi \in L^\infty(\Omega_T)$  y  $\Phi \in L^2(\Omega_T)^N$ .

(C.2)  $(u, \varphi, \Phi)$  verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta A(u) &= \nabla \cdot (\varphi \Phi) \text{ en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ \nabla \cdot \Phi &= 0 \text{ en } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

(C.3) Para cada  $S \in W^{1, \infty}(\mathbb{R})$  tal que  $\text{sop } S$  es compacto, se tiene que

$$\begin{aligned} S(A(u))\varphi - S(0)\varphi_0 &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ S(A(u))\Phi &= \sigma(u) [\nabla(S(A(u))\varphi) - \varphi \nabla S(A(u))]. \end{aligned}$$

(C.4)  $u(\cdot, 0) = u_0$ .

En [8] se prueba el resultado de existencia que se enuncia a continuación.

**Teorema 1** *Bajo las hipótesis (H.1)–(H.5), el sistema (1) admite solución de capacidad  $u$  en el sentido de la definición 1.*

*Más aún,  $u \geq 0$  casi por doquier en  $\Omega_T$ , el gradiente de  $u$  está definido casi por doquier en  $\Omega_T$  y es tal que  $\nabla u \chi_{\{u > \delta\}} \in L^2(\Omega_T)$  para cualquier  $\delta > 0$ .*

*Finalmente, si  $S \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  es tal que  $S' \in L^\infty(\mathbb{R})$  y  $\text{sop } S \subset \mathbb{R} \setminus (-\delta_0, \delta_0)$  para algún  $\delta_0 > 0$ , entonces  $S(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  y  $\nabla S(u) = S'(u)\nabla u$  en  $\Omega_T$ .*

### 3. Resolución numérica del problema

Un termistor PTC (*positive temperature coefficient*) es un dispositivo eléctrico semiconductor cuya resistencia aumenta con la temperatura. El modelo que presentamos en este trabajo se corresponde con el de un termistor PTC de medida, basado en silicio dopado, también conocido como silistor.

Nuestro objetivo es llevar a cabo un análisis numérico del comportamiento de un silistor típico, cuyo rango de temperatura oscila aproximadamente entre  $-60^\circ\text{C} = 213^\circ\text{K}$  y  $300^\circ\text{C} = 573^\circ\text{K}$ , y cuya resistencia eléctrica viene dada  $R(u) = R_0 r(u)$ , siendo

$$r(u) = 1 + \alpha(u - u_0) + \beta(u - u_0)^2, \quad (2)$$

donde  $u_0 = 25^\circ\text{C} = 298^\circ\text{K}$ ,  $R_0 = R(u_0)$  y las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  dependen de las propiedades del termistor. Las conductividades eléctrica y térmica vienen dadas pues por

$$\sigma(u) = \frac{H}{SR(u)}, \quad a(u) = Lu\sigma(u) = \frac{LHu}{SR(u)}, \quad (3)$$

donde  $S$  es el área de la sección del dispositivo,  $H \times H \times H/2$  son las dimensiones del mismo, se satisface la ley de Wiedemann-Franz y se produce conducción metálica.

Teniendo en cuenta las hipótesis (H.1)–(H.5), en lugar del problema (1), vamos a considerar este otro:

$$\left. \begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(u)\nabla u) &= \sigma(u)|\nabla\varphi|^2 && \text{en } \Omega_T, \\ \nabla \cdot (\sigma(u)\nabla\varphi) &= 0 && \text{en } \Omega_T, \\ a(u)\frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y)(u - u_0) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_T, \\ \varphi &= \pm\varphi_0 && \text{sobre } \Gamma_S^\pm \times (0, T), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde  $\Omega = (0, H) \times (0, H)$ ,  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_S \cup \Gamma_N$ , con  $\Gamma_S \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma_S^\pm$  son los lados del dispositivo correspondientes a la entrada y salida de corriente eléctrica, y  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor, que depende del silistor.

Concretamente, estudiamos el comportamiento de un silistor durante una hora de funcionamiento, integrado en un circuito que recibe un voltaje inicial  $V_0$  y cuya temperatura máxima es  $u_M$ . Sus datos físicos reales son los que siguen:

$$\begin{aligned} \rho &= 2.3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, & c &= 701 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}, & H &= 0.01 \text{ m}, & R_0 &= 500 \Omega, \\ u_M &= 600^\circ\text{K}, & \alpha &= 7.874 \cdot 10^{-3}, & \beta &= 1.874 \cdot 10^{-5}, & V_0 &= 250 \text{ V}, \\ L &= 2.44 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega^\circ\text{K}^{-2}, & u_0 &= 298^\circ\text{K}, & \varphi_0(t) &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{544}t\right) + 3, & T &= 3600 \text{ s}. \end{aligned} \quad (5)$$

En cuanto a  $h$ , un valor estándar suele ser  $4 \cdot 10^2 \text{ W}^\circ\text{K}^{-1}\text{m}^{-2}$ ; sin embargo, en vista de que los contactos del silistor son metálicos, podemos tomar  $h = 10^2 \text{ W}^\circ\text{K}^{-1}\text{m}^{-2}$  en los contactos,  $\Gamma_S$ , y  $h = 10 \text{ W}^\circ\text{K}^{-1}\text{m}^{-2}$  en el resto de la frontera,  $\Gamma_N$ .

### 3.1. Modelo adimensional

El paso previo a la resolución numérica del sistema (4) pasa por considerar un modelo adimensional del mismo. Por ello, se introducen las siguientes variables adimensionales (designadas con una raya)

$$\begin{aligned} u - u_0 &= u_M \bar{u}, \quad \varphi = \frac{V_0}{2} \bar{\varphi}, \quad x = H \bar{x}, \quad y = H \bar{y}, \quad t = T \bar{t}, \\ R(u) &= R_0 \bar{R}(\bar{u}), \quad \sigma(u) = \sigma_0 \bar{\sigma}(\bar{u}), \quad a(u) = a_0 \bar{a}(\bar{u}), \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\sigma_0 = \sigma(u_0)$  y  $a_0 = a(u_0)$ . Por otro lado, gracias a (2) y (3),

$$\bar{R}(\bar{u}) = r(u) = 1 + \alpha u_M \bar{u} + \beta u_M^2 \bar{u}^2, \quad \bar{\sigma}(\bar{u}) = \frac{1}{\bar{R}(\bar{u})}, \quad \bar{a}(\bar{u}) = \frac{u_0 + u_M \bar{u}}{u_0 \bar{R}(\bar{u})}. \quad (7)$$

En vista de (6) y (7), y prescindiendo de las barras usadas hasta ahora, obtenemos el problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \nabla \cdot (a(u) \nabla u) &= \eta \sigma(u) |\nabla \varphi|^2 && \text{en } \Omega_T, \\ \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \varphi) &= 0 && \text{en } \Omega_T, \\ a(u) \frac{\partial u}{\partial n} + \kappa u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_T, \\ \varphi &= \pm \varphi_0 && \text{sobre } \Gamma_S^\pm \times (0, T), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= 0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

donde  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $T = 1$ ,  $\gamma = \frac{Lu_0 T}{\rho c S H R_0}$ ,  $\eta = \frac{V_0^2 T}{4 \rho c S H L u_M R_0}$  y  $\kappa = \frac{S R_0 h}{L u_0}$ .

Para la resolución numérica de (8), consideramos un esquema de Euler implícito en tiempo, dividiendo el intervalo  $[0, 1]$  en  $N$  subintervalos de longitud  $\tau$ , y escribiremos  $f^n(x, y) = f(x, y, n\tau)$ ,  $n \geq 0$ , para cualquier función  $f$  definida en  $\Omega_T$ . De este modo, para  $n \geq 0$ , se considera la siguiente sucesión de problemas elípticos: dados  $u^n$  y  $\varphi^n$ , resolver

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \gamma \nabla \cdot (a(u^n) \nabla u^{n+1}) &= \eta \sigma(u^n) |\nabla \varphi^n|^2 && \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\sigma(u^{n+1}) \nabla \varphi^{n+1}) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ a(u^n) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} + \kappa u^{n+1} &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\ \varphi^{n+1} &= \pm \varphi_0^{n+1} && \text{sobre } \Gamma_S^\pm, \\ \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_N, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde  $u^0 = 0$  y  $\varphi^0 \in H^1(\Omega)$  es la solución de

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma(u^0)) \nabla \varphi^0 &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \varphi^0 &= \varphi_0^0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

La resolución de los problemas (9)–(10) se realiza mediante el método de los elementos finitos.

### 3.2. Resultados numéricos

Teniendo en cuenta (5), el coeficiente  $\gamma$  de la ecuación para  $u$  es muy pequeño y pueden surgir capas límites a lo largo de  $\partial\Omega$ . Por esa razón, se construye una malla más densa en nodos cerca de la frontera que en el resto del dominio; así se consigue evaluar mejor la función  $a(u)$  y resolver adecuadamente el problema para  $u$  de (9).

Para que la malla se adapte mejor a la solución numérica, se hace uso de un algoritmo adaptativo ([10]) que actualiza la malla cada 100 ciclos de tiempo (véase figura 1). Las figuras 2 y 3 muestran diversos gráficos de las temperaturas obtenidas con el algoritmo (9)–(10) durante una hora de funcionamiento del silistor. Se observa la pronunciada pendiente de la capa límite a lo largo de toda la frontera.

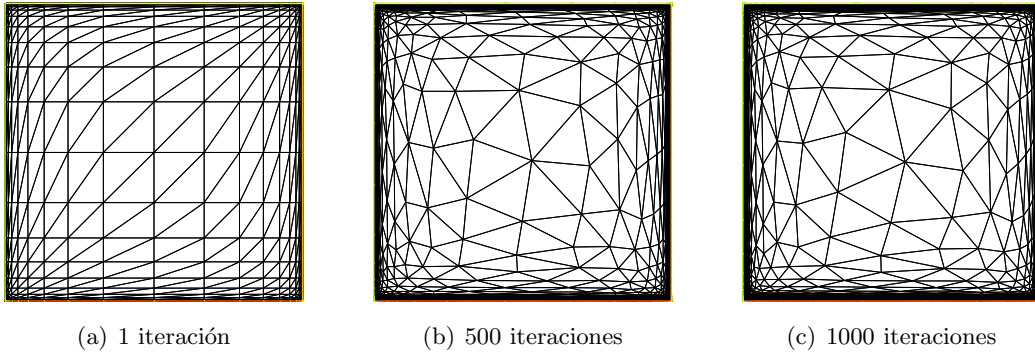


Figura 1: Mallas según distintas iteraciones en  $t$ .

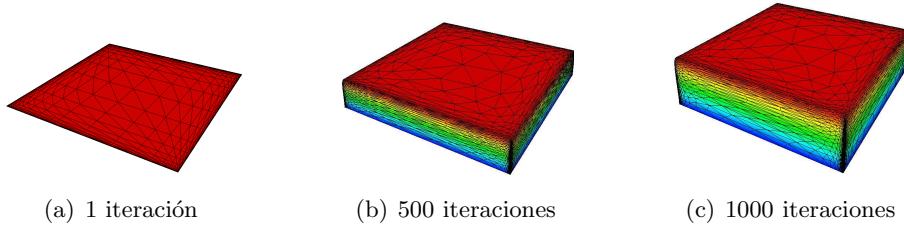


Figura 2: Función  $u$  según distintas iteraciones en  $t$ .

Para estudiar con más detalle el comportamiento de la función  $u$  cerca de  $\Omega$  se han realizado tres cortes en superficie integral (figura 3).

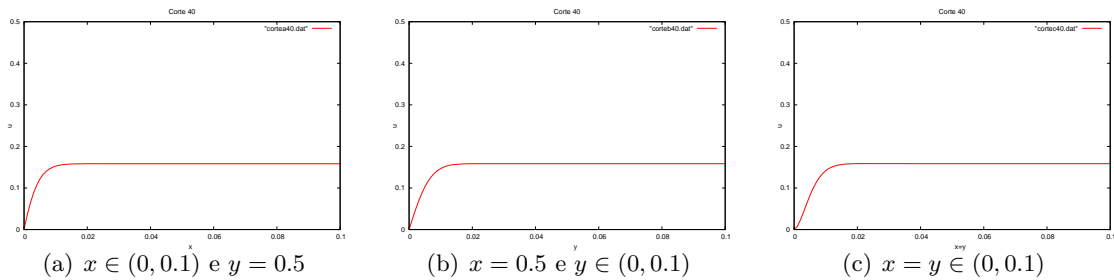


Figura 3: Cortes de la gráfica de la función  $u$  para  $t = 0.5$ .

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto I+D+I MTM2006-04436, con la participación del FEDER, y la Junta de Andalucía, III Plan Andaluz de Investigación, grupo FQM-315.

## Referencias

- [1] A. C. Fowler, I. Frigaard, S. D. Howinson, *Temperature surges in current-limiting circuit devices*, SIAM J. Appl. Math., vol. 52, 4 (1992), 998–1011.
- [2] P. J. Frey, *MEDIT, An interactive mesh visualization software*, INRIA, 0253, Thème 4 (2001).
- [3] M. T. González Montesinos, *Estudio matemático de algunos problemas no lineales del electromagnetismo relacionados con el problema del termistor*, Tesis, Universidad de Cádiz, España, 2002.
- [4] M. T. González Montesinos, F. Ortega Gallego, *The evolution thermistor problem with degenerate thermal conductivity*, Comm. Pure Appl. Anal., vol. 1, 3 (2002), 313–325.
- [5] M. T. González Montesinos, F. Ortega Gallego, *On certain non-uniformly and singular non-uniformly elliptic systems*, Nonlinear Anal., 54 (2003), 1193–1204.
- [6] M. T. González Montesinos and F. Ortega Gallego, *Algunos resultados sobre el problema del termistor*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 31 (2005), 109–138.
- [7] M. T. González Montesinos, F. Ortega Gallego, *Existence of a capacity solution to a coupled non-linear parabolic-elliptic system*. Comm. Pure Appl. Anal., vol. 6, 1 (2007), 23–42.
- [8] M. T. González Montesinos, F. Ortega Gallego, *The thermistor problem with degenerate thermal conductivity and metallic conduction*. (Aparecerá en Discrete Contin. Dyn. Syst.–Suplement, 2007).
- [9] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [10] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka. *FreeFem++*, Version 2.11, 2006.
- [11] P. Shi, M. Shillor, X. Xu, *Existence of a solution to the Stefan problem with Joule's heating*, J. Differential Equations, 105 (1993), 239–263.
- [12] X. Xu, *A strongly degenerate system involving an equation for parabolic type and an equation of elliptic type*, Comm. Partial Differential Equations, vol. 18, 1&2 (1993), 199–213.
- [13] S. Zhou, D. R. Westbrook, *Numerical solutions of the thermistor equations*, J. Comput. Appl. Math., 79 (1997), 101–118.