

## Un método RKN diagonalmente implícito para problemas stiff oscilatorios de segundo orden

J.M. FRANCO<sup>1</sup>, I. GÓMEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Zaragoza E-mails: jmfranco@unizar.es, igomez@unizar.es.

**Palabras clave:** Métodos RKN, Problemas stiff, A-estabilidad

### Resumen

Construimos un método DIRKN para la resolución numérica de problemas stiff oscilatorios cuyas soluciones pueden contener componentes de larga frecuencia y pequeña amplitud (componentes stiff). La construcción del nuevo método se basa en la influencia que tienen estas componentes sobre la solución numérica proporcionada por un método RKN incondicionalmente estable, dando lugar a que la precisión pueda verse seriamente afectada a menos que se satisfagan ciertas condiciones algebraicas. El nuevo método posee 4 etapas, es A-estable, tiene orden algebraico 4 y orden 2 en las etapas, y además satisface 2 condiciones algebraicas asociadas a las componentes stiff del problema. Los experimentos numéricos realizados muestran la efectividad del nuevo método cuando se compara con otros métodos DIRKN propuestos en la literatura científica para problemas stiff con las características mencionadas.

## 1. Introducción

En el presente trabajo estamos interesados en la resolución numérica de problemas stiff oscilatorios asociados a problemas de valor inicial (PVI) de segundo orden de la forma

$$M\ddot{q} + Kq = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \quad (1)$$

donde la matriz de masas  $M$  y la matriz de rigidez  $K$  son simétricas y definidas positivas, y  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  representan, respectivamente, la primera y segunda derivadas del vector desplazamiento  $q$  con respecto al tiempo. Este tipo de problemas surgen en distintas áreas de la ingeniería y las ciencias aplicadas tales como elastodinámica, mecánica de estructuras, sismología o cuando ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) de segundo orden en el tiempo son semidiscretizadas en las variables espaciales. En particular, cuando la malla espacial es refinada, las EDPs semidiscretizadas dan lugar a PVI que son arbitrariamente stiff.

Cuando se aplican métodos explícitos para resolver esta clase de problemas el tamaño del paso de integración queda limitado por la frecuencia de mayor magnitud ( $\Delta t = \mathcal{O}(\omega_{max}^{-1})$ ), lo que da lugar a pasos excesivamente pequeños. Por lo tanto, para una resolución eficiente de problemas stiff cuya solución esta dominada por las componentes de baja frecuencia, se requiere de un método implícito que sea incondicionalmente estable.

En la literatura científica se han propuesto diversos métodos Runge–Kutta–Nyström implícitos incondicionalmente estables para resolver problemas stiff (1), siendo la mayoría de ellos de tipo diagonalmente implícito (DIRKN) (ver ref. [1–4]). El principal atractivo de los métodos DIRKN proviene de la estructura de su matriz de coeficientes, que da lugar a una reducción del coste algebraico involucrado en la resolución de las etapas internas cuando se utilizan iteraciones de tipo Newton. Recientemente, Alonso-Mallo et al. [?] han realizado un detallado análisis de la estabilidad lineal para métodos RKN y han construido un método DIRKN incondicionalmente estable que presenta un mejor comportamiento que otros métodos cuando las soluciones de los problemas stiff combinan componentes dominantes de frecuencias cortas con componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes.

El esquema del trabajo es el siguiente: en la sección 2 realizamos un análisis de la precisión y las propiedades de fase de los métodos RKN para la resolución de problemas stiff. En la sección 3 hemos construido un método DIRKN A–stable de orden 4 con orden 2 en las etapas, que además, satisface ciertas condiciones algebraicas asociadas a las componentes de frecuencias largas y pequeñas amplitudes (componentes stiff) que pueden aparecer en las soluciones de los problemas stiff considerados. En la sección 4 el nuevo método ha sido aplicado a la resolución de distintos problemas oscilatorios de tipo stiff, y los resultados numéricos obtenidos muestran una importante mejora en el comportamiento cuando se comparan con los obtenidos por otros códigos DIRKN propuestos en la literatura científica [?, ?].

## 2. Precisión y propiedades de fase para métodos RKN

Un método Runge–Kutta–Nyström (RKN) de  $s$  etapas para la integración numérica del PVI

$$\ddot{q} = f(t, q), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \quad (2)$$

queda definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} Q_i &= q_n + c_i h \dot{q}_n + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Q_j), \quad i = 1, \dots, s, \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i f(t_n + c_i h, Q_i), \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, Q_i), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $h$  es el paso de integración,  $Q_i$  son las etapas, y  $q_{n+1}$  y  $\dot{q}_{n+1}$  representan aproximaciones a  $q(t_{n+1})$  y  $\dot{q}(t_{n+1})$ , respectivamente. Para realizar un análisis de la precisión y las

propiedades de fase consideraremos el problema modelo

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega > 0, \quad (4)$$

cuya solución exacta viene dada por  $q(t) = a_0 \cos(\theta_0 + \omega t)$ , donde  $a_0$  y  $\theta_0$  son constantes reales determinadas por las condiciones iniciales del problema.

Cuando un método RKN se aplica a la resolución del problema modelo (4), las ecuaciones (3) dan lugar al sistema en diferencias:

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ h \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = M(\nu^2) \begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \end{pmatrix}, \quad M(\nu^2) = \begin{pmatrix} m_{11}(\nu^2) & m_{12}(\nu^2) \\ m_{21}(\nu^2) & m_{22}(\nu^2) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

donde  $e = (1, \dots, 1)^T$ ,  $\nu = \omega h$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$ ,  $\bar{b} = (\bar{b}_i)$ ,

$$\begin{aligned} m_{11}(\nu^2) &= 1 - \nu^2 \bar{b}^T (I + \nu^2 A)^{-1} e, & m_{12}(\nu^2) &= 1 - \nu^2 \bar{b}^T (I + \nu^2 A)^{-1} c, \\ m_{21}(\nu^2) &= -\nu^2 b^T (I + \nu^2 A)^{-1} e, & m_{22}(\nu^2) &= 1 - \nu^2 b^T (I + \nu^2 A)^{-1} c. \end{aligned} \quad (6)$$

De forma similar se obtiene que la solución analítica del problema (4) con condiciones iniciales  $q(t_n) = q_n$  y  $\dot{q}(t_n) = \dot{q}_n$  satisface la relación:

$$\begin{pmatrix} q(t_{n+1}) \\ h \dot{q}(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\nu) & \frac{\sin(\nu)}{\nu} \\ -\nu \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

El comportamiento de la solución numérica (5) depende de los valores propios de la *matriz de estabilidad*  $M$ , y las propiedades de estabilidad del método están caracterizadas por el radio espectral  $\rho(M)$ . Así, para métodos RKN utilizamos la definición de intervalo de estabilidad:  $I_s = \{\nu > 0 \mid \rho(M) < 1\}$ , y consideramos que un método RKN es A-estable si  $I_s = (0, \infty)$ . Además, el concepto de A-estabilidad para métodos RKN es equivalente a que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$|\det(M(\nu^2))| < 1 \quad \text{y} \quad |\text{tr}(M(\nu^2))| < 1 + \det(M(\nu^2)), \quad \forall \nu > 0. \quad (8)$$

A continuación, analizamos la precisión de métodos RKN incondicionalmente estables para problemas stiff cuya solución combina componentes de frecuencias cortas (no stiff) con componentes de frecuencias grandes y amplitudes pequeñas (stiff).

## 2.1. Componentes con frecuencias cortas dominantes

En este caso, las componentes de la solución para el problema (4) son de la forma

$$q(t) = a_0 \cos(\theta_0 + \omega t), \quad \dot{q}(t) = -\omega a_0 \sin(\theta_0 + \omega t), \quad (9)$$

donde  $\omega$  representa una frecuencia corta, y podemos asumir en la práctica que el tamaño del paso  $h$  utilizado por el método es tal que  $\nu = \omega h$  es pequeño ( $\nu \ll 1$ ). Considerando el desarrollo en serie de potencias

$$(I + \nu^2 A)^{-1} = I - A\nu^2 + A^2\nu^4 + \dots + (-1)^j A^j \nu^{2j} + \mathcal{O}(\nu^{2j+2}), \quad (10)$$

se deduce que para un método RKN de orden  $p$ , los coeficientes  $m_{ij}(\nu^2)$  satisfacen

$$\begin{aligned} m_{11}(\nu^2) &= \cos(\nu) + \mathcal{O}(\nu^{p+1}), & m_{12}(\nu^2) &= \frac{\sin(\nu)}{\nu} + \mathcal{O}(\nu^p), \\ m_{21}(\nu^2) &= -\nu \sin(\nu) + \mathcal{O}(\nu^{p+2}), & m_{22}(\nu^2) &= \cos(\nu) + \mathcal{O}(\nu^{p+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en la solución numérica (5) se obtiene

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ h \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\nu) & \frac{\sin(\nu)}{\nu} \\ -\nu \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ h \dot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} CS_n \\ \nu CS_n \end{pmatrix} \Delta_n, \quad (12)$$

donde  $CS_n = a_0 [\cos(\theta_0 + \omega t_n) - \sin(\theta_0 + \omega t_n)]$ ,  $\Delta_n = \mathcal{O}(\nu^{p+1})$ .

Comparando (12) con la solución analítica (7), concluimos que

$$q_{n+1} - q(t_{n+1}) = \mathcal{O}(\nu^{p+1}), \quad \dot{q}_{n+1} - \dot{q}(t_{n+1}) = \mathcal{O}(\nu^{p+1}), \quad (13)$$

y las componentes de la solución con frecuencias cortas dominantes se determinan con la precisión indicada por el orden algebraico del método RKN.

## 2.2. Componentes con frecuencias grandes y amplitudes pequeñas

En este caso, las componentes de la solución del problema (4) son de la forma

$$q(t) = \varepsilon \cos(\theta_0 + \omega t), \quad \dot{q}(t) = -\omega \varepsilon \sin(\theta_0 + \omega t), \quad (14)$$

donde ahora  $\omega$  es una frecuencia grande ( $\omega \gg 1$ ) y  $\varepsilon$  representa una amplitud pequeña ( $\varepsilon \ll 1$ ). En la práctica, podemos asumir que el tamaño del paso  $h$  utilizado por los métodos incondicionalmente estables no es demasiado pequeño, lo que implica que  $\nu = \omega h$  es grande ( $\nu \gg 1$ ). En estas condiciones, el método no aproxima bien a la solución (14) y los errores numéricos cometidos en la solución y su derivada quedan limitados por términos de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  y  $\mathcal{O}(\omega\varepsilon)$ , respectivamente.

Para realizar un análisis asintótico similar al caso previo, consideramos la transformación  $z = 1/\nu$  ( $z \ll 1$ ), y la aproximación a la solución se puede expresar como

$$q_{n+1} = r_{11}(z) \varepsilon \cos(\theta_0 + \omega t_n) - r_{12}(z) \varepsilon \sin(\theta_0 + \omega t_n), \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} r_{11}(z) &= m_{11}(z) = 1 - \bar{b}^T A^{-1} e + (\bar{b}^T A^{-2} e) z^2 + \mathcal{O}(z^4), \\ r_{12}(z) &= \frac{m_{12}(z)}{z} = \frac{1 - \bar{b}^T A^{-1} c}{z} + (\bar{b}^T A^{-2} c) z + \mathcal{O}(z^3). \end{aligned}$$

En general  $r_{11}(z)$  está acotado cuando  $z \rightarrow 0$ , pero  $r_{12}(z)$  no, y la aproximación de la solución representa términos de orden

$$q_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(h\omega\varepsilon). \quad (16)$$

Si se satisface la condición  $m_{12}^0 \equiv 1 - \bar{b}^T A^{-1} c = 0$ , entonces  $r_{12}(z)$  también está acotado cuando  $z \rightarrow 0$  y la ecuación (16) se reduce a  $q_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Esto indica que si  $m_{12}^0 = 0$

el método introduce errores en la solución de la misma magnitud que la amplitud de las componentes stiff. En cambio, si esta condición no se satisface ( $m_{12}^0 \neq 0$ ), el método introduce errores en la solución de orden  $\mathcal{O}(h\omega\varepsilon)$  y  $q_{n+1} - q(t_{n+1}) = \mathcal{O}(h\omega\varepsilon)$ . Si además se satisface la condición  $m_{11}^0 \equiv 1 - \bar{b}^T A^{-1}e = 0$ , la ecuación (16) se reduce a  $q_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon z)$  y se introducen errores de magnitud más pequeña en la solución.

La condición  $m_{12}^0 = 0$  ya fue obtenida por Alonso-Mallo et al [?] y garantiza que la matriz de estabilidad de un método RKN incondicionalmente estable (A-estable o P-estable) está uniformemente acotada.

De manera similar, para la aproximación de la derivada obtenemos

$$h \dot{q}_{n+1} = r_{21}(z) \varepsilon \cos(\theta_0 + \omega t_n) - r_{22}(z) \varepsilon \sin(\theta_0 + \omega t_n), \text{ donde}$$

$$r_{21}(z) = m_{21}(z) = -b^T A^{-1}e + (b^T A^{-2}e) z^2 + \mathcal{O}(z^4),$$

$$r_{22}(z) = \frac{m_{22}(z)}{z} = \frac{1 - b^T A^{-1}c}{z} + (b^T A^{-2}c) z + \mathcal{O}(z^3).$$

Ahora  $r_{22}(z)$  no está acotada cuando  $z \rightarrow 0$  y la aproximación a la derivada incluye términos de orden

$$\dot{q}_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1}) + \mathcal{O}(\omega \varepsilon). \quad (17)$$

Si se satisface la condición  $m_{22}^0 \equiv 1 - b^T A^{-1}c = 0$ , entonces  $r_{22}(z)$  está acotado cuando  $z \rightarrow 0$  y la ecuación (17) se reduce a  $\dot{q}_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon h^{-1})$ . Así, esta condición implica que sólo se introducen errores de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon h^{-1})$  y  $\dot{q}_{n+1} - \dot{q}(t_{n+1}) = \mathcal{O}(\omega \varepsilon)$ . Por el contrario, si  $m_{22}^0 \neq 0$ , entonces  $\dot{q}_{n+1} - \dot{q}(t_{n+1}) = \mathcal{O}(\omega \varepsilon) + \mathcal{O}(\omega \varepsilon) \approx \mathcal{O}(2\omega \varepsilon)$ .

### 3. Construcción del método DIRKN

En esta sección analizamos la construcción de un método DIRKN A-estable que satisface dos de las condiciones algebraicas obtenidas en la sección 2. El único método conocido en la literatura que satisface alguna de estas condiciones es el método DIRKN P-stable determinado en [?]. Consideramos el caso de métodos de cuatro etapas con todos los elementos de la diagonal iguales, y en particular, estudiamos métodos con orden dos en las etapas y orden algebraico 4:

$$Ae = \frac{c^2}{2}, \quad \bar{b}_i = b_i(1 - c_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

$$b^T e = 1, \quad b^T c = \frac{1}{2}, \quad b^T c^2 = \frac{1}{3}, \quad b^T c^3 = \frac{1}{4}, \quad b^T A c = \frac{1}{24}. \quad (19)$$

Además, imponemos las dos condiciones algebraicas (ver sección 2)

$$m_{12}^0 = 0, \quad m_{22}^0 = 0. \quad (20)$$

Las condiciones (18)-(20) permiten determinar los coeficientes  $b$ ,  $\bar{b}$  y  $A$  en función de los nodos  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Para simplificar el problema, consideramos nodos simétricos:  $c_4 = 1 - c_1$ ,  $c_3 = 1 - c_2$ , y los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  se seleccionan de manera que el método sea A-estable y tenga constantes del error de truncación local tan pequeñas como sea

posible. Los valores óptimos que hemos obtenidos son  $c_1 = 18/25$ ,  $c_2 = 9/10$ , y el método resultante queda definido por la tabla de coeficientes

$\frac{18}{25}$	$\frac{162}{625}$			
$\frac{9}{10}$	$\frac{729}{5000}$	$\frac{162}{625}$		
$\frac{1}{10}$	$\frac{712900273}{81875000}$	$\frac{86510956}{10234375}$	$\frac{162}{625}$	
$\frac{7}{25}$	$\frac{11917747621792}{3155357421875}$	$\frac{51013639903293}{12621429687500}$	$\frac{4527479079}{100971437500}$	$\frac{162}{625}$
	$\frac{161}{1674}$	$\frac{131}{8370}$	$\frac{131}{930}$	$\frac{23}{93}$
	$\frac{575}{1674}$	$\frac{131}{837}$	$\frac{131}{837}$	$\frac{575}{1674}$

con constantes del error local  $\|\tau^{(5)}\|_2 = 1,77 \times 10^{-3}$ ,  $\|\dot{\tau}^{(5)}\|_2 = 3,82 \times 10^{-3}$ .

## 4. Experimentos Numéricos

En esta sección evaluamos la efectividad del nuevo método y para ello lo comparamos con un método DIRKN de recientemente publicación (ver [?]) y con un método DIRKN clásico de cuarto orden determinado en [?]. los métodos utilizados en las comparaciones se denotan por

- DIRKN(2)<sub>12-22</sub>: El método A-estable obtenido en la sección 3.
- ◊ ACM(1)D6<sub>12</sub>: El método P-estable obtenido en [?].
- \* SHARP(2): El método P-estable obtenido en [?]

**Problema 1:** El modelo stiff de elastodinámica lineal

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + u(x, t) = f(x, t), & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t), & t > 0, \\ u_x(0, t) = h_3(t), \quad u_x(1, t) = h_4(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 384 \cos(t), & \mu &= \sqrt[4]{\omega^2 - 1}, \\ g_1(x) &= 16x^2(1 - x)^2 + \varepsilon \sin(\mu x), & g_2(x) &= 0, \\ h_1(t) &= 0, & h_2(t) &= \varepsilon \sin(\mu) \cos(\omega t), \\ h_3(t) &= \varepsilon \mu \cos(\omega t), & h_4(t) &= \varepsilon \mu \cos(\mu) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

y cuya solución exacta es  $u(x, t) = 16x^2(1 - x)^2 \cos(t) + \varepsilon \sin(\mu x) \cos(\omega t)$ . El problema se ha discretizado en espacio utilizando diferencias centradas de segundo orden sobre una malla uniforme de tamaño  $\Delta x = 10^{-3}$ . Este proceso conduce a un problema stiff lineal de la forma

$$\ddot{q} + Kq = F(t), \quad q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0,$$

con 999 ecuaciones. Como valores de los parámetros hemos elegido  $\omega = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $t_{end} = 10$ , y los resultados numéricos presentados en la Figura 1 se han calculado con los pasos  $h = 0,8/2^i$ ,  $i \geq 0$ . Estos resultados muestran que los métodos con orden 2 en las etapas (DIRKN(2)<sub>12-22</sub> y SHARP(2)) proporcionan una mayor precisión en el cálculo de la posición  $q(t)$  que el método ACM(1)D6<sub>12</sub> cuyo orden en las etapas es 1. Esto se debe a que las condiciones de contorno no homogéneas dan lugar a un PVI stiff en el que los métodos sufren el fenómeno de la reducción del orden. Para la velocidad  $\dot{q}(t)$ , los tres métodos alcanzan aproximación de orden  $\mathcal{O}(\omega\varepsilon)$ , pero los métodos con orden 2 en las etapas alcanzan este límite de precisión con pasos de integración más grandes. En particular, el método DIRKN(2)<sub>12-22</sub> es el que proporciona mejor precisión para este problema, mientras que el método ACM(1)D6<sub>12</sub> es el que presenta un peor comportamiento de los tres métodos comparados.

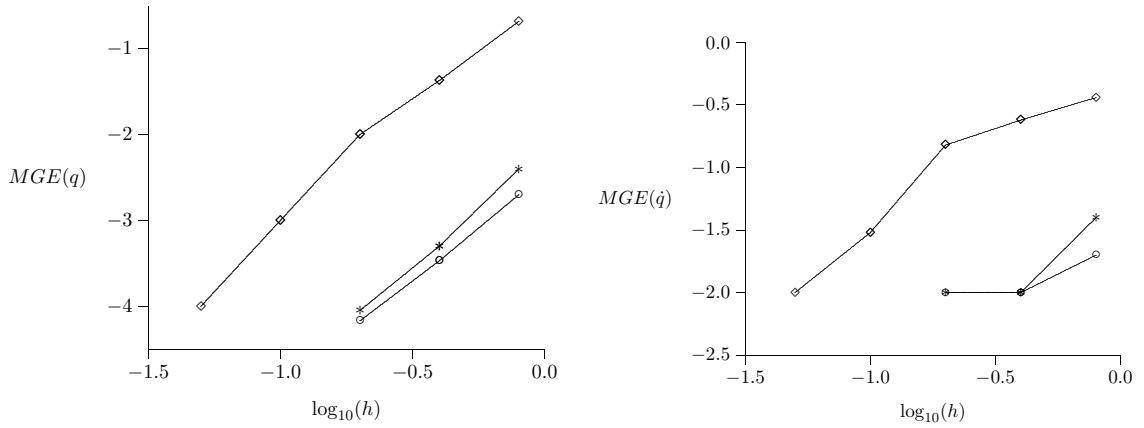


Figura 1: Curvas de precisión para  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$  en el Problema 1. Los métodos comparados son  $\circ-\circ$ : DIRKN(2)<sub>12-22</sub>,  $\diamond-\diamond$ : ACM(1)D6<sub>12</sub> y  $*-*$ : SHARP(2)

**Problema 2:** El problema de valor inicial no lineal

$$\ddot{q}(t) + \begin{pmatrix} 1 + k^2 + \omega^2 & 1 + k^2 - \omega^2 \\ 1 + k^2 - \omega^2 & 1 + k^2 + \omega^2 \end{pmatrix} q(t) = \frac{1}{2} k^2 (q_1(t) + q_2(t))^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, t_{end}]$$

$$q(0) = \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^T, \quad \dot{q}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\omega\varepsilon}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^T,$$

con  $\omega > 0$ ,  $0 \leq k < 1$ , que representa un modelo formado por dos masas puntuales conectadas con un muelle flexible no lineal y un muelle rígido lineal. La solución analítica de este PVI viene dada por

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} sn(t; k) - \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \\ sn(t; k) + \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \end{pmatrix},$$

y representa un movimiento periódico en términos de funciones trigonométricas y elípticas. En las comparaciones realizadas hemos tomado los valores de los parámetros  $\omega = 10^5$ ,  $k = 0,5$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $t_{end} = 10$  y los resultados numéricos presentados en la Figura 2 se han calculado con los pasos de integración  $h = 0,8/2^i$ ,  $i \geq 1$ . En este problema, los

resultados numéricos indican que los métodos alcanzan precisión hasta orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  para la posición  $q(t)$  excepto SHARP(2) que no satisface la condición  $m_{12}^0 = 0$ . En cambio, el método DIRKN(2)<sub>12–22</sub> que es A-estable proporciona una precisión de orden  $\mathcal{O}(\omega\varepsilon)$  para la velocidad  $\dot{q}(t)$ , mientras que los métodos P-estables (SHARP(2) y ACM(1)D6<sub>12</sub>) sólo obtienen una precisión de orden  $\mathcal{O}(2\omega\varepsilon)$  debido a que no amortiguan los errores iniciales. En particular, el método DIRKN(2)<sub>12–22</sub> es el que muestra un mejor comportamiento para este problema, mientras que el método SHARP(2) resulta ser el menos competitivo de los tres métodos comparados.

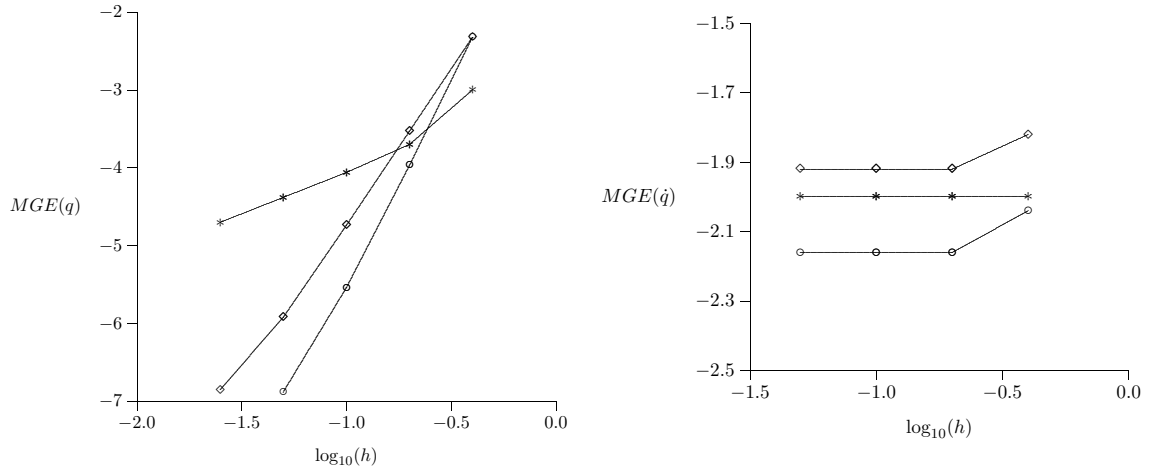


Figura 2: Curvas de precisión para  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$  en el Problema 2. Los métodos comparados son  $\circ$ — $\circ$ : DIRKN(2)<sub>12–22</sub>,  $\diamond$ — $\diamond$ : ACM(1)D6<sub>12</sub> y \*—\*: SHARP(2)

## Agradecimientos

El trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto MTM2004–06466–C02–01 de la Dirección General de Investigación (Ministerio de Educación Cultural y Deporte).

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo, B. Cano and M.J. Moreta. *Stability of Runge–Kutta–Nyström methods*. J. Comput. Appl. Math., **189** (2006) 120–131.
- [2] J.M. Franco, I. Gómez and L. Rández. *Four-stage symplectic and P-stable SDIRKN methods with dispersion of high order*. Numer. Algorithms, **26** (2001) 347–363.
- [3] E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Springer–Verlag, Berlin, 1993.
- [4] E. Hairer and G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer–Verlag, Berlin, 1991.
- [5] P.W. Sharp, J.M. Fine and K. Burrage. *Two-stage and three-stage diagonally implicit Runge–Kutta–Nyström methods of order three and four*. IMA J. Numer. Anal., **10** (1990) 489–504.