XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Determinación de H-matrices

R. Bru, C. Corral, I. Gimenez, J. Mas

Institut de Matemàtica Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València, E-46021 València.
E-mails: {rbru,ccorral,igimenez,jmasm}@imm.upv.es.

Palabras clave: H-matrices, Dominancia diagonal, Radio espectral, Vector de Perron, Matriz de Jacobi, Matriz de comparación, Singularidad, Reducibilidad

Resumen

Cuando la matriz de comparación de una matriz A, $\mathcal{M}(A)$, es M-matriz, se dice que A es H-matriz. Este tipo de matrices aparece, por ejemplo, en la discretización por elementos finitos de ciertas ecuaciones parabólicas no lineales. Además, esta característica garantiza la existencia de precondicionadores para la resolución de sistemas lineales por métodos iterativos de tipo Krylov. Aunque son muchas las caracterizaciones de H-matriz que provienen de las de M-matriz invertible, una H-matriz invertible puede tener una matriz de comparación singular. En este trabajo utilizamos una caracterización de H-matriz con elementos diagonales no nulos, tanto si $\mathcal{M}(A)$ es invertible como singular, basada en que $\rho \leq 1$, siendo ρ el radio espectral de la matriz de Jacobi de $\mathcal{M}(A)$. Proponemos entonces algoritmos para acotar el valor de ρ y concluir si la matriz A es H-matriz o no. Se proponen algoritmos para aproximar el valor de ρ y el vector de Perron asociado y se demuestra su convergencia para matrices irreducibles.

1. Introducción

Las H-matrices tienen interés en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos iterativos. Recordemos que las H-matrices se definen como aquellas cuya matriz de comparación

$$\mathcal{M}(A) = \left\{ \begin{array}{cc} -|a_{ij}| & i \neq j \\ |a_{ii}| & \end{array} \right.$$

es M-matriz. Si al definir M-matriz se considera solo el caso invertible, las H-matrices se pueden caracterizar ([2, 10]) como matrices GSDD, matrices estrictamente diagonalmente dominantes en sentido generalizado, es decir, cuando existe una matriz diagonal $D =$

$\mathrm{diag}(d_i)$ no negativa (o equivalentemente un vector positivo $d = (d_i)$) de forma que el producto AD es una matriz estrictamente diagonalmente dominante, esto es

$$|a_{ii}d_i| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}d_j| \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

Este tipo de H-matrices es denominado de "tipo invertible" en [3]. Son H-matrices invertibles con todos sus elementos diagonales no nulos. Además, el radio espectral, ρ, de la matriz de Jacobi de su matriz de comparación es estrictamente menor que la unidad. Es decir, se tienen las siguientes equivalencias: A es una H-matriz de tipo invertible si, y solo si, A es GSDD si, y solo si, $\rho < 1$.

No obstante, también es frecuentemente utilizada la siguiente definición de M-matriz que extiende el concepto al caso singular:

Definicion 1. *A es M-matriz si admite una partición $A = sI - B$ donde B es una matriz no negativa y $s \leq \rho(B)$, siendo $\rho(B)$ el radio espectral de B.*

En la definición anterior, la desigualdad estricta, $s < \rho(B)$, corresponde a la definición de M-matriz invertible, y la igualdad, $s = \rho(B)$, a la de M-matriz singular ([2, 10]).

La caracterización de H-matriz, en este caso, es más restrictiva y es más difícil encontrar propiedades que incluyan el caso invertible y singular conjuntamente. Es importante señalar que, aunque la matriz de comparación sea singular, la H-matriz puede ser invertible, por ejemplo:

Ejemplo 1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

A este respecto, en [3] probamos que hay dos tipos más de H-matrices: si $\Omega(A)$ es el conjunto de matrices equimodulares con A, es decir,

$$\Omega(A) = \{B \in C^{n\times n} \ : \ \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A)\} \tag{2}$$

las H-matrices de "tipo singular" son aquellas en las que $\Omega(A)$ contiene solo matrices singulares y las H-matrices de "tipo mixto" aquellas para las que $\Omega(A)$ contiene al menos una matriz singular ($\mathcal{M}(A)$) y al menos una invertible, como en el ejemplo 1. En [3] demostramos además que la clase de H-matrices de tipo singular se caracteriza por tener algún elemento diagonal nulo, y todas ellas son matrices reducibles.

En definitiva, dada una matriz A, para poder determinar si es H-matriz o no, tenemos lo siguiente:

1. Si algún elemento diagonal es nulo, o no es H-matriz (cuando A es invertible) o lo es de tipo singular (ella y todas las matrices equimodulares son singulares). Este tipo de H-matrices es de escaso interés.

2. Si todos sus elementos diagonales son no nulos, calculando la matriz de Jacobi de su matriz de comparación, $J = J(\mathcal{M}(A))$, y su radio espectral, $\rho = \rho(J)$, se tiene lo siguiente:

   a) si $\rho < 1$, A es una H-matriz (invertible) de tipo invertible *b*) si $\rho > 1$, A no es H-matriz

c) si $\rho = 1$, A es una H-matriz (invertible o singular) de tipo mixto: su matriz de comparación es M-matriz singular, pero alguna matriz en $\Omega(A)$ es invertible.

Una última referencia importante sobre la caracterización de H-matrices que también se incluye en [3] es sobre la dominancia diagonal. Así como ya hemos mencionado que las H-matrices de tipo invertible están caracterizadas por ser matrices GSDD, el resto de H-matrices no guarda una clara relación con la dominancia diagonal en sentido generalizado no estricto. Es decir, si definimos esta propiedad como sigue:

Definicion 2. *Se dice que A es diagonalmente dominante en sentido generalizado, GDD, si existe una matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_i)$ no negativa (o equivalentemente un vector positivo $d = (d_i)$) de forma que el producto AD es una matriz diagonalmente dominante, esto es*

$$|a_{ii}d_i| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}d_j| \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Entonces se obtienen los siguientes resultados:

1. Si A es GDD, entonces A es H-matriz (de cualquiera de los tres tipos).
2. Si A es irreducible, A es H-matriz si, y solo si, A es GDD.

Y no se pueden refinar más las condiciones (salvo incluir otro tipo de condiciones adicionales) como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2. $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *es invertible, GDD, reducible y H-matriz de tipo mixto. Una de las filas es estrictamente diagonal dominante.*

Ejemplo 3. $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *es invertible, reducible y H-matriz de tipo mixto, pero no es GDD.*

Ejemplo 4. $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *es H-matriz de tipo singular (singular y reducible), y es GDD, siendo una de las filas estrictamente diagonal dominante.*

Estos ejemplos ponen de manifiesto que, aunque GDD es una condición suficiente para ser H-matriz, no es necesaria (matrices A_1 y A_3); exigir que alguna fila sea estrictamente diagonal dominante no determina ni la clase a la que pertenece ni la invertibilidad de la matriz (matrices A_2 y A_4). Por último, la clásica definición de matriz “irreduciblemente diagonal dominante”, esto es, irreducible, GDD y con alguna desigualdad estricta, tampoco tiene interés para la determinación de H-matrices puesto que, con las dos primeras condiciones ya se obtiene que la matriz es H-matriz aunque ninguna desigualdad sea estricta.

En definitiva, para determinar si una matriz invertible es H-matriz o no, utilizaremos el radio espectral de la matriz de Jacobi de su matriz de comparación. Con este método determinamos a su vez la clase en la que se encuentra y la invertibilidad o no de su matriz de comparación. No se podrá concluir que la H-matriz es GDD, salvo que se pueda determinar su irreducibilidad.

2. Algoritmos para la determinación de H-matrices

En los trabajos de Li y otros ([7, 8]) y en [6, 9], se proponen diversos algoritmos para la determinación de H-matrices basados en la caracterización de éstas por GSDD. No obstante, como ya se mostró en [4, 5] y posteriormente se muestra en [1], todos ellos pueden fallar por estancamientos, por overflow, y fácilmente son improductivos con matrices reducibles y próximas a la singularidad. En el trabajo de Alanelli y Hadjidimos [1] se propone un algoritmo y se prueba su convergencia para matrices irreducibles de tipo invertible. En [4] y [5] se proponen algoritmos de parecidas características al anterior pero con un valor a elegir o calcular automáticamente, el parámetro ϵ. En [5] se hace un estudio experimental sobre el valor del parámetro que obtiene mejores resultados, siendo el valor óptimo del orden de 0,1.

Como ya hemos indicado anteriormente, cuando la matriz A tiene algún elemento diagonal nulo, ésta no puede ser H-matriz invertible, por tanto, a partir de aquí consideraremos sólo matrices tales que

$$a_{ii} \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

El algoritmo para la determinación de H-matrices que proponemos es el siguiente:

Algoritmo 1 (Algoritmo para determinar si la matriz A es H-matriz)**.**
Parámetros variables: $MAXIT$ (máximo número de iteraciones) y $\varepsilon \geq 0$.

1. *Calcular:* $D_A = \operatorname{diag}(A), \quad B = |D_A A| - I, \quad iter = 0$
2. *Calcular:* $S_i = \sum_{j\neq i} b_{ij}, \quad MAX = \text{máx}_i\, S_i, \quad MIN = \text{mín}_i\, S_i$
   - *Si $MAX \leq 1$, A es H-matriz.*
   - *Si $MIN \geq 1$, A no es una H-matriz.*
3. *Repetir mientras $iter < MAXIT$:*
   - *Calcular:* $iter = iter + 1, \quad D = \operatorname{diag}(S_i + \varepsilon), \quad B = D^{-1}BD,$
     $S_i = \sum_{j\neq i} b_{ij}, \quad MAX = \text{máx}_i\, S_i, \quad MIN = \text{mín}_i\, S_i$
     a) *Si $MAX \leq 1$, A es H-matriz.* **FIN** *del proceso.*
     b) *Si $MIN \geq 1$, A no es una H-matriz.* **FIN** *del proceso.*

Nótese que, eligiendo $\epsilon = 1$ en el algoritmo 1, se obtiene el algoritmo AH de [1] salvo sutiles diferencias.

En el algoritmo 1 se calcula la suma por filas de matrices similares a la matriz de Jacobi J y se detiene el proceso cuando se obtiene que, o bien (paso $3a$) $\rho(J) \leq 1$ y A es H-matriz, o bien (paso $3b$) $\rho(J) > 1$ y A es no H-matriz. (En el teorema 1 y comentarios posteriores se establecen las condiciones para la convergencia del algoritmo.) No obstante, si modificamos los pasos $3a$ y $3b$ del algoritmo 1, podemos aproximar el radio espectral de la matriz de Jacobi, $\rho = \rho(J)$, como indicamos a continuación:

Algoritmo 2 (Algoritmo para calcular $\rho = \rho(J(\mathcal{M}(A)))$ y su vector propio v)**.**
Parámetros variables: $MAXIT$ (máximo número de iteraciones), $\varepsilon \geq 0$ y TOL (precisión para aproximar ρ).

1. *Calcular:* $D_A = \operatorname{diag}(A)$, $\quad B = |D_A A| - I$, $\quad S_i = \sum_{j \neq i} b_{ij}$, $\quad iter = 0$,
   $MAX = \text{máx}_i\, S_i$, $\quad MIN = \text{mín}_i\, S_i$, $\quad v = (v_i)$, $\quad v_i = 1 \quad \forall i$.
   - *Si* $MAX - MIN < TOL$, $\rho \approx \frac{MAX+MIN}{2}$ *y* v *es un vector propio asociado a* ρ. **FIN** *del proceso.*
2. *Repetir mientras* $iter < MAXIT$:
   - *Calcular::* $\quad iter = iter + 1$, $\quad D = \operatorname{diag}(S_i + \varepsilon)$, $\quad B = D^{-1}BD$,
     $S_i = \sum_{j \neq i} b_{ij}$, $\quad MAX = \text{máx}_i\, S_i$, $\quad MIN = \text{mín}_i\, S_i$, $\quad v_i = v_i \cdot d_i$.
   - *Si* $MAX - MIN < TOL$, $\rho \approx \frac{MAX+MIN}{2}$ *y* $v = (v_i)$ *es un vector propio asociado a* ρ. **FIN** *del proceso.*

La convergencia de los algoritmos 1 y 2 para matrices irreducibles invertibles se demuestra a continuación:

Teorema 1 (Convergencia de los algoritmos)**.** *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *una matriz irreducible con todos sus elementos diagonales no nulos y tal que su matriz de comparación es invertible. Entonces, con la notación de los algoritmos 1 y 2, la sucesión* S_i *de la suma de la fila* i *de la matriz* B*, similar a la matriz de Jacobi de la matriz de comparación de* A*, converge a* $\rho(J(\mathcal{M}(A)))$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots n$*. En consecuencia, para cualesquiera valores de* $\varepsilon > 0$ *y* $TOL > 0$*, tomando* $MAXIT$ *suficientemente grande, los algoritmos 1 y 2 llegan a término y sus resultados son correctos.*

Demostración. Como $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, podemos calcular la matriz de Jacobi de la matriz de comparación de A, $J = \left|\operatorname{diag}(A)^{-1}A\right| - I \geq 0$. Dado $\epsilon > 0$ definimos la matriz no negativa $C = J + \epsilon I$. Como A es irreducible, la matriz C es irreducible pero también es primitiva pues tiene algún elemento diagonal no nulo (todos). Con estas condiciones, podemos aplicar el método de la potencia a la matriz C comenzando con el vector $v^{(0)} = e$ el vector cuyas componentes son unos, es decir, calculando la sucesión de vectores

$$v^{(k)} = Cv^{(k-1)} = C^k v^{(0)}$$

Por ser C irreducible y primitiva, si $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ son sus valores propios, se tiene que

$$\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

siendo entonces λ_1 el radio espectral de C, $\rho(C)$. Estas condiciones, junto con el hecho de que $v^{(0)}$ es un vector positivo, garantizan la convergencia del método de la potencia (ver, por ejemplo, Teoremas 3.1 y 3.4 de [1]), es decir,

$$\text{lím}_k \frac{v_i^{(k)}}{v_i^{(k-1)}} = \lambda_1 = \rho(C) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por otra parte, utilizando la notación del algoritmo pero incluyendo el superíndice (k) para denotar la k-ésima iteración, tenemos que $B^{(0)} = J$ y $B^{(k)} = {D^{(k)}}^{-1} B^{(k-1)} D^{(k)}$, siendo $D^{(k)} = \operatorname{diag}(S_i^{(k-1)} + \epsilon)$ y donde $S_i^{(k)} = \sum_{j\neq i} b_{ij}^{(k)}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En particular,

$$S_i^{(k)} = \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \frac{(S_j^{(0)} + \epsilon)(S_j^{(1)} + \epsilon)\cdots(S_j^{(k-1)} + \epsilon)}{(S_i^{(0)} + \epsilon)(S_i^{(1)} + \epsilon)\cdots(S_i^{(k-1)} + \epsilon)} \tag{4}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se tiene entonces que

$$v^{(1)} = Cv^{(0)} = \left(\sum c_{ij}\right) = \left(\sum_{j \neq i} c_{ij} + \epsilon\right) = \left(S_i^{(0)} + \epsilon\right)$$

y por inducción se obtiene que

$$v_i^{(k)} = (S_i^{(0)} + \epsilon)(S_i^{(1)} + \epsilon) \cdots (S_i^{(k-1)} + \epsilon) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

En consecuencia,

$$\rho(C) = \lim_k \frac{v_i^{(k)}}{v_i^{(k-1)}} = \lim_k S_i^{(k-1)} + \epsilon \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

y por ser $\rho(C) = \rho(J) + \epsilon$, hemos obtenido que

$$\lim_k S_i^{(k-1)} = \rho(J) \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{6}$$

Queda entonces probada la parte principal del teorema.

Respecto a la convergencia de los algoritmos, tenemos lo siguiente. Al tener el mismo límite las sumas de cada fila, el criterio de parada del algoritmo 2, $MAX - MIN < TOL$, se alcanzará para alguna iteración y $\frac{MAX+MIN}{2}$ es una aproximación de $\rho(J)$ con un error (absoluto) menor que TOL. Además, el vector v que se calcula en cada iteración del algoritmo 2 es una aproximación del vector propio de J asociado al valor propio $\rho(J)$ (que, con las condiciones impuestas a la matriz A, será el vector de Perron de J) por lo siguiente. Llevando al límite las matrices del proceso, se obtiene una matriz $B = D^{-1}JD$, donde D es la matriz diagonal resultante de multiplicar las sucesivas matrices diagonales $\text{diag}(S_i + \epsilon)$, tal que la suma de todas sus filas es ρ, es decir, $Be = \rho e$. Entonces, si $v = De$, que coincide con el límite del vector v que se calcula en cada iteración del algoritmo, se tiene que:

$$Be = D^{-1}JDe = D^{-1}Jv = \rho e$$

y, multiplicando por D, obtenemos $Jv = \rho De = \rho v$, luego $v = De$ es el vector propio anunciado.

El criterio de parada del algoritmo 1 también se alcanzará ya que, por ser $\mathcal{M}(A)$ una matriz invertible, $\rho(J) \neq 1$, por lo que, a partir de cierta iteración, o bien $S_i < 1$ para todo i y se detiene en el paso $3a$ o bien $S_i > 1$ para todo i y se detiene en el paso $3b$. La determinación de H-matrices queda entonces garantizada. $\square$

Nota 1: En los pasos $3a$ y $3b$ del algoritmo 1 se ponen desigualdades no estrictas, es decir, se admite $MAX = 1$ o $MIN = 1$, por lo siguiente. En primer lugar, si en alguna iteración se obtiene por azar que $MAX = MIN$, se ha obtenido el límite del proceso; esto significa que $\rho(J) = MAX = MIN$ y el algoritmo 1 se detendrá necesariamente en alguno de los dos pasos con la observación adicional de que, si $MAX = MIN = 1$, se detendrá en el primero, concluyendo que A es H-matriz (de tipo mixto), resultado correcto puesto que $\rho(J) = 1$. Esto significa que el algoritmo 1 puede determinar H-matrices aunque no se verifique la condición de invertibilidad de la matriz $\mathcal{M}(A)$.

En segundo lugar, cuando no se obtiene la igualdad en la suma de las filas, es conocido que, al ser J una matriz no negativa e irreducible,

$$\min S_i \leq \rho(J) \leq \max S_i \tag{7}$$

siendo ambas desigualdades estrictas o las tres cantidades idénticas. Al no ser iguales, si $\min S_i = 1$ y $\max S_i > 1$, se tiene que $\rho(J) > 1$ y A no es H-matriz; y si $\max S_i = 1$ y $\min S_i < 1$, $\rho(J) < 1$ y A es H-matriz.

Nota 2: Respecto a las concidiones impuestas a la matriz A para la convergencia del algoritmo, es importante tener en cuenta lo siguiente. Que los elementos diagonales sean no nulos es directamente comprobable y, si no se verifica, ya hemos comentado que la matriz no es H-matriz o lo es del tipo singular. Sobre la singularidad de $\mathcal{M}(A)$ ya hemos hecho alguna observación en el apartado anterior. Por último, si A es reducible, el algoritmo 1 puede proporcionar un resultado y este será correcto puesto que la desigualdad (7) es válida para toda matriz no negativa. Esta posibilidad es frecuente; por ejemplo cuando los bloques irreducibles diagonales de su forma canónica son del mismo tipo, es decir, todos ellos son H-matrices o no lo es ninguno.

Respecto a la comparación entre el Algoritmo AH de [1] y el Algoritmo 1, es decir, si otras elecciones distintas de $\epsilon = 1$ producen mejores o peores resultados, debemos decir que, usando las matrices particulares definidas en [1], al ser matrices de pequeña dimensión, la diferencia en el número de iteraciones, si la hay, es pequeña, habiendo casos en que el valor óptimo es $\epsilon = 1$ (Ejemplo 7 de [1]) y casos en los que se obtienen mejores resultados con un valor diferente (Ejemplo 6 de [1], con $\epsilon = 0{,}5$). Una extensa comparación de resultados con matrices de mayor dimensión y distintos valores y fórmulas de cálculo del parámetro se puede ver en [5] donde se concluye que, en general, se obtiene la determinación con un menor número de iteraciones tomando $\epsilon \approx 0{,}1$.

Agradecimientos

El trabajo está financiado por el proyecto de la DGI número MTM2004-02998 y por la Universidad Politécnica de Valencia.

Referencias

[1] M. Alanelli and A. Hadjidimos. *A new iterative criterion for H-matrices.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 29-1 (2006) 160–176.

[2] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, London, 1979.

[3] R. Bru, C. Corral, I. Gimenez and J. Mas. *On singular and nonsingular H-matrices.* (Sometido).

[4] C. Corral, I. Gimenez and J. Mas. *Algorithms to determine H-matrices and the permutation matrix of a reducible matrix.*, EALA-2003, Universidade Nova de Lisboa, Caparica, Portugal, 2003.

[5] C. Corral, I. Gimenez and J. Mas. *Algorithms based on diagonal dominance: H-matrix, Perron vector and reducibility*, Proc. of the Fifth Int. Conf. on Engin. Comp. Tech., Civil-Comp Press, Scotland, 2006.

[6] T. Kohno, H. Niki, H. Sawami and Y. Gao. An iterative test for H-matrices. *J. Comput. Appl. Math.*, 115:349–355, 2000.

[7] B. Li, L. Li, M. Harada, H. Niki, M. J. Tsatsomeros. *An iterative criterion for H-matrices.* Linear Algebra Appl., 271 (1998), 179–190.

[8] L. Li. *On the iterative criterion for generalized diagonally dominant matrices*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24-1 (2002) 17–24.

[9] K. Ojiro, H. Niki and M. Usui. An new criterion for the H-matrix property. *J. Comput. Appl. Math.*, 150:293–302, 2003.

[10] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.