

## Estructura diferenciable de las clases de equivalencia de un par controlable

A. COMPTA<sup>1</sup>, J. FERRER<sup>1</sup>, M. PEÑA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada I, Universidad Politécnica de Catalunya, Diagonal 647, E-08028 Barcelona. E-mail: albert.compta@upc.edu, josep.ferrer@upc.edu, marta.penya@upc.edu.*

**Palabras clave:** pares controlables, órbitas por realimentación y cambio de variables, deformaciones versales

### Resumen

Dado un par de matrices que representa un sistema lineal controlable, estudiamos las clases de equivalencia por la acción individual o combinada de realimentaciones y cambio de variables de estado y de entrada, así como sus intersecciones. En particular, demostramos que son variedades diferenciables y calculamos sus dimensiones.

## 1. Introducción

Es conocida, en condiciones bastante generales, la estructura geométrica de las órbitas generadas por la acción de un grupo en una variedad diferenciable. Resulta natural por lo tanto preguntarse por las relaciones geométricas en el caso de considerar diversos subgrupos, es decir, la estructura geométrica de las diferentes subórbitas, así como sus intersecciones (que en general no serán una órbita). Aquí tratamos esta situación en el caso de pares de matrices que representan sistemas lineales, considerando diferentes transformaciones: cambios de base en el espacio de estados y en el espacio de entrada, y realimentaciones.

De forma natural consideramos las clases de equivalencia asociadas a cada una de estas transformaciones o a varias de ellas y nos preguntamos por las relaciones geométricas entre ellas, tales como la codimensión relativa en cada caso o sus intersecciones. En particular, esta estructura geométrica nos proporciona diferentes niveles de clasificación de los sistemas lineales asociados. Así, una clase de equivalencia abierta densa (con respecto a la semejanza por bloques, por ejemplo) se puede particionar si no se permiten realimentaciones, o incluso más si sólo se consideran cambios en el espacio de estados.

El punto de partida es la estructura diferenciable de cada clase de equivalencia, que se deriva del Lema de la Órbita Cerrada. El cálculo de sus dimensiones se basa en las técnicas de Arnold de deformaciones versales, es decir, variedades transversas a las clases (o órbitas) consideradas en alguna otra menos fina. De hecho, utilizamos los resultados de [2] y [3] para obtener deformaciones 'adaptadas' con patrones similares, de tal modo que diferentes familias de parámetros son responsables de la correspondiente deformación. Además, proporciona una parametrización adaptada local de las diferentes clases de equivalencia.

Con respecto a las intersecciones, en general éstas no tienen porque ser una órbita, ni siquiera una variedad diferenciable. En nuestro caso, lo son gracias a que se cumplen las condiciones de transversalidad y además es posible en cada caso una descripción particular como órbita con respecto a subgrupos apropiados.

## 2. Preliminares

Sea  $\mathcal{M} = \mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n \times m}$  la variedad diferenciable de pares de matrices  $\mathcal{M} = \{(A, B) : A \in \mathbb{C}^{n^2}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}\}$  y  $\mathcal{M}^*$  el subconjunto abierto denso de  $\mathcal{M}$  formado por los pares controlables con rango  $B = m$ , es decir, los *pares controlables de rango máximo*.

La semejanza por bloques habitual (o equivalencia BK) viene inducida por la acción del grupo:  $\mathcal{G} = \{g = \begin{pmatrix} S & 0 \\ R & T \end{pmatrix} : S \in Gl_n, T \in Gl_m, R \in \mathbb{C}^{m \times n}\}$ .

$$g * (A, B) = S^{-1}(A, B) \begin{pmatrix} S & 0 \\ R & T \end{pmatrix} = (S^{-1}AS + S^{-1}BR, S^{-1}BT),$$

de manera que la clase de equivalencia BK de un par  $(A, B)$  es la órbita

$$O_{BK}(A, B) = \{g * (A, B) : g \in \mathcal{G}\}.$$

Las acciones de  $S, T, R$  se llaman respectivamente cambio de las variables de estado, cambio de las variables de entrada y realimentación. De forma natural, podemos considerar los subgrupos relativos a sólo alguna de estas acciones y sus correspondientes órbitas.

**Definición 2.1** Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}$ . Se consideran las siguientes subórbitas de  $O_{BK}(A, B)$ :

1.  $O_{ST}(A, B) = \{(S^{-1}AS, S^{-1}BT) : S \in Gl_n, T \in Gl_m\}$  cuando  $R = 0$ .
2.  $O_{SR}(A, B) = \{(S^{-1}AS + BR, S^{-1}B) : S \in Gl_n, R \in \mathbb{C}^{m \times n}\}$  cuando  $T = I_m$ .
3.  $O_{TR} = (A + BR, BT)$  cuando  $S = I_n$ .
4.  $O_S(A, B) = \{(S^{-1}AS, S^{-1}B) : S \in Gl_n\}$  cuando  $R = 0$  y  $T = I_m$ .
5.  $O_T(A, B) = \{(A, BT) : T \in Gl_m\}$  cuando  $R = 0$  y  $S = I_n$ .
6.  $O_R(A, B) = \{(A + BR, B) : R \in \mathbb{C}^{m \times n}\}$  cuando  $S = I_n$  y  $T = I_m$ .

Nuestro objetivo es el estudio de estas órbitas y sus intersecciones. Se deduce directamente del Lema de la Órbita Cerrada que todas las órbitas anteriores son variedades diferenciables.

Tal y como ya hemos comentado, nos restringiremos al caso genérico de pares controlables de rango máximo. Es conocido que estos pares se pueden reducir a la siguiente forma canónica BK. Introducimos previamente algunas notaciones.

**Notación 2.2** 1.  $E_q = (0 \dots 010 \dots 0)^t$ , donde el coeficiente de valor 1 está en la posición  $p$ , y cuyo tamaño corresponde al contexto.

2.  $N_p = (0, E_1, \dots, E_{p-1})$  es el bloque nilpotente superior de tamaño  $p$ .

**Definición 2.3** Dado un par controlable de rango máximo  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  y  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m > 0$  sus índices de controlabilidad, existe otro par  $(A_c, B_c)$  en su órbita BK tal que

$$(A_c, B_c) = (\text{diag}(N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_m}), (E_{l_1}, E_{l_2}, \dots, E_{l_m})),$$

donde  $l_i = \sum_{j=1}^i k_j$ .

$(A_c, B_c)$  se denomina forma canónica de Brunovsky de  $(A, B)$ .

Dividiremos también en bloques de la misma forma los pares  $(C, D) \in \mathcal{M}$  ligados a un par controlable de rango máximo  $(A, B)$  con índices de controlabilidad  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$ :

$$C = (C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad C_{i,j} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_j}, \quad D = (D_1, D_2, \dots, D_m), \quad D_i \in \mathbb{C}^n.$$

Cuando aparezca 0 en un bloque de una matriz, será un bloque nulo del tamaño correspondiente (puede ser nulo).

Las siguientes familias de matrices parametrizadas divididas en los bloques anteriores se utilizarán posteriormente:

**Definición 2.4** 1. Dado  $A_\alpha, A_\beta \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $B_\gamma, B_\delta \in \mathbb{C}^{n \times m}$  con  $\alpha_{i,j,p}, \beta_{i,j,p}, \gamma_{i,j}, \delta_{i,j,l} \in \mathbb{C}$  tal que

$$A_{\alpha_{i,j}} = E_{k_i} \cdot (\alpha_{i,j,1}, \alpha_{i,j,2}, \dots, \alpha_{i,j, \min\{k_i, k_j\}}, 0).$$

$$A_{\beta_{i,j}} = E_{k_i} \cdot (0, \beta_{i,j, k_j - k_i + 1}, \dots, \beta_{i,j, k_j}) \text{ si } k_i < k_j, \text{ y } A_{\beta_{i,j}} = 0 \text{ en caso contrario.}$$

$$B_{\gamma_{i,j}} = \sum_{k_i > k_j} \gamma_{i,j} E_{k_i}.$$

$$B_{\delta_{i,j}} = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{1 \leq l \leq k_{i,j}} \delta_{i,j,l} E_{k_i - l}, \text{ donde } k_{i,j} = \max\{0, k_i - k_j - 1\}.$$

2. Denotamos el número de parámetros de  $A_\alpha, A_\beta, B_\gamma, B_\delta$  por

$$n_\alpha = \sum_{i,j=1}^m \min\{k_i, k_j\} = \sum_{i=1}^m (2i - 1)k_i.$$

$$n_\beta = \sum_{i,j=1}^m \max\{0, k_i - k_j\}.$$

$$n_\gamma = \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}, \text{ donde } \Gamma_{i,j} = 1 \text{ si } k_i > k_j, \text{ y } 0 \text{ en caso contrario.}$$

$$n_\delta = \sum_{i,j=1}^m \max\{0, k_i - k_j - 1\}.$$

**Observación 2.5** Es fácil comprobar que  $n_\alpha + n_\beta = nm$ ,  $n_\gamma + n_\delta = n_\beta$ ,  $n_\alpha + n_\gamma + n_\delta = nm$ .

**Ejemplo 2.6** Si  $k_1 = 6, k_2 = 3, k_3 = k_4 = 2$ , y el par  $(A_c, B_c)$  es la forma canónica de Brunovsky correspondiente, entonces  $A_c + A_\alpha + A_\beta$  y  $B_c + B_\gamma + B_\delta$  son, respectivamente,

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha_{1,1,1}$	$\alpha_{1,1,2}$	$\alpha_{1,1,3}$	$\alpha_{1,1,4}$	$\alpha_{1,1,5}$	$\alpha_{1,1,6}$	$\alpha_{1,2,1}$	$\alpha_{1,2,2}$	$\alpha_{1,2,3}$	$\alpha_{1,3,1}$	$\alpha_{1,3,2}$	$\alpha_{1,4,1}$	$\alpha_{1,4,2}$	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\alpha_{2,1,1}$	$\alpha_{2,1,2}$	$\alpha_{2,1,3}$	$\beta_{2,1,4}$	$\beta_{2,1,5}$	$\beta_{2,1,6}$	$\alpha_{2,2,1}$	$\alpha_{2,2,2}$	$\alpha_{2,2,3}$	$\alpha_{2,3,1}$	$\alpha_{2,3,2}$	$\alpha_{2,4,1}$	$\alpha_{2,4,2}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$\alpha_{3,1,1}$	$\alpha_{3,1,2}$	$\beta_{3,1,3}$	$\beta_{3,1,4}$	$\beta_{3,1,5}$	$\beta_{3,1,6}$	$\alpha_{3,2,1}$	$\alpha_{3,2,2}$	$\beta_{3,2,3}$	$\alpha_{3,3,1}$	$\alpha_{3,3,2}$	$\alpha_{3,4,1}$	$\alpha_{3,4,2}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\alpha_{4,1,1}$	$\alpha_{4,1,2}$	$\beta_{4,1,3}$	$\beta_{4,1,4}$	$\beta_{4,1,5}$	$\beta_{4,1,6}$	$\alpha_{4,2,1}$	$\alpha_{4,2,2}$	$\beta_{4,2,3}$	$\alpha_{4,3,1}$	$\alpha_{4,3,2}$	$\alpha_{4,4,1}$	$\alpha_{4,4,2}$	

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	$\delta_{1,3,3}$	$\delta_{1,4,3}$
0	$\delta_{1,2,2}$	$\delta_{1,3,2}$	$\delta_{1,4,2}$
0	$\delta_{1,2,1}$	$\delta_{1,3,1}$	$\delta_{1,4,1}$
1	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\gamma_{1,4}$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	$\gamma_{2,3}$	$\gamma_{2,4}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	0	1

### 3. Las órbitas $O_S, O_T$ y $O_R$

En primer lugar observamos que, para pares controlables de rango máximo, la acción individual de las matrices de la forma  $S, T$  y  $R$  es simple, generando órbitas de dimensión constante.

**Proposición 3.1** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}$ ; entonces*

1. *Si  $(A, B)$  es controlable,  $\dim O_S(A, B) = n^2$ .*
2. *Si  $B$  tiene rango máximo,  $\dim O_R(A, B) = nm$ .*
3. *Si  $B$  tiene rango máximo,  $\dim O_T(A, B) = m^2$ .*

Estamos interesados en las intersecciones de las órbitas anteriores y en la acción combinada de las matrices de la forma  $S, T$  y  $R$ . De hecho, centramos nuestra atención en los casos en que la acción por  $S$  está involucrada debido al hecho trivial que:

**Proposición 3.2** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo; entonces*

1.  $O_T(A, B) \cap O_R(A, B) = \{(A, B)\}$ .
2.  $\dim O_{TR}(A, B) = \dim O_T(A, B) + \dim O_R(A, B) = m^2 + nm$ .

#### 4. La órbita $O_{BK}$

Recordamos que la acción triple de  $S, T$  y  $R$  corresponde a la semajanza por bloques habitual. La estructura geométrica de las órbitas BK ha sido estudiada en [2]. En particular, para un par controlable de rango máximo, se cumple:

**Teorema 4.1** [2] *Dado un par controlable de rango máximo  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  con índices de controlabilidad  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m > 0$ , entonces*

$$\dim O_{BK}(A, B) = n^2 + nm - n_\delta.$$

*Si  $(A_c, B_c)$  es su forma canónica de Brunovsky, una deformación miniversal respecto a BK de  $(A_c, B_c)$  en  $\mathcal{M}^*$  es la variedad lineal de dimensión  $n_\delta$ :*

$$(A_c, B_c) + \{(0, B_\delta)\}_\delta.$$

#### 5. Las órbitas $O_{ST}$ y $O_{SR}$

Basaremos el estudio de las órbitas  $O_{ST}$  y  $O_{SR}$  en el siguiente resultado, que es una consecuencia directa de los teoremas (2.2) y (2.3) de [3]:

**Teorema 5.1** [3] *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo con índices de controlabilidad  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m > 0$ , y  $(A_c, B_c)$  su forma reducida BK. Entonces:*

1.  $(A, B)$  es  $S$  equivalente a

$$(A_0, B_0) = (A_c, B_c) + (A_{\alpha_0}, B_{\gamma_0})$$

*para adecuados valores  $\alpha_0, \gamma_0$  de los parámetros en (2.4) y tal vez una permutación de las columnas de  $B_0$ .*

2. *Una deformación miniversal respecto a  $S$  de  $(A_0, B_0)$  en su órbita BK viene dada por la variedad lineal de dimensión  $(n_\alpha + n_\gamma)$ :*

$$(A_0, B_0) + \{(A_\alpha, B_\gamma)\}_{\alpha, \gamma}.$$

Esta deformación miniversal presenta la siguiente peculiar propiedad: los parámetros  $\gamma$ , y sólo ellos, pueden ser eliminados por la acción de  $T$ ; y análogamente, los parámetros  $\alpha$ , y sólo ellos, por la acción de  $R$ . Por lo tanto:

**Proposición 5.2** *Dado un par controlable de rango máximo  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$ , se cumple*

$$\dim O_{ST}(A, B) = n^2 + n_\gamma, \quad \dim O_{SR}(A, B) = n^2 + n_\alpha.$$

En particular, obsérvese que son constantes en cada órbita BK.

## 6. Las intersecciones $O_S \cap O_T$ y $O_R \cap O_S$

A continuación estudiamos la intersección de las órbitas de la sección 3. En general, una intersección de órbitas no tiene porque ser una órbita, ni tan siquiera una variedad diferenciable. Veamos en primer lugar que este hecho se cumple en nuestro caso debido a que las condiciones de transversalidad se verifican.

**Proposición 6.1** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo con índices de controlabilidad  $k_1 \geq \dots \geq k_m > 0$ . Entonces las siguientes intersecciones son subvariedades diferenciables de  $O_{BK}(A, B)$  y:*

$$\dim(O_S(A, B) \cap O_T(A, B)) = m^2 - n_\gamma, \quad \dim(O_R(A, B) \cap O_S(A, B)) = n_\beta.$$

Claramente, dados dos subgrupos generales  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$ , la intersección de sus órbitas no es la órbita con respecto a  $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ . Por ejemplo, la intersección del subgrupo S y el subgrupo T es simplemente la matriz identidad. De hecho, no tiene porque ser una órbita. Sin embargo, veamos que las intersecciones de (6.1) son órbitas con respecto a la acción de subgrupos apropiados que dependerán del par  $(A, B)$ : vamos a describirlos explícitamente en el caso de pares  $(A_c, B_c)$  en forma de Brunovsky.

**Proposición 6.2** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo.*

(1) *La subvariedad  $O_S(A, B) \cap O_T(A, B)$  es la órbita de  $(A, B)$  con respecto a la acción de  $\mathcal{G}_{ST}(A, B)$  formado por las  $S \in Gl_n$  tales que:*

(i)  $AS = SA,$

(ii) *existe  $T \in Gl_m$  tal que:  $SB = BT$ .*

(2) *En particular, si  $(A_c, B_c) \in \mathcal{M}^*$  es un par BK con índices de controlabilidad  $k_1 \geq \dots \geq k_m > 0$ , entonces:*

$$\mathcal{G}_{ST}(A_c, B_c) = \{S \in Gl_n : S_{i,j} = 0 \text{ si } k_i > k_j, \text{ y } S_{i,j} = (0, s_{i,j}I_{k_i}) \text{ si } k_i \leq k_j\}.$$

**Proposición 6.3** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo.*

(1) *La subvariedad  $O_S(A, B) \cap O_R(A, B)$  es la órbita de  $(A, B)$  con respecto a la acción de  $\mathcal{G}_{SR}(A, B)$  formado por las  $S \in Gl_n$  tales que:*

(i) *existe  $R \in \mathbb{C}^{m \times n}$  tal que:  $S^{-1}AS = A + BR,$*

(ii)  $S^{-1}B = B.$

(2) *En particular, si  $(A_c, B_c) \in \mathcal{M}^*$  es un par BK con índices de controlabilidad  $k_1 \geq \dots \geq k_m > 0$ , es una variedad lineal de dimensión  $n_\beta$ :*

$$O_S(A_c, B_c) \cap O_R(A_c, B_c) = (A_c, B_c) + \{(A_\beta, 0)\}_\beta.$$

**Observación 6.4** *La demostración de la proposición anterior se basa en que, para cada realimentación  $\beta$  existe un cambio de base  $S_\beta \in Gl_n$  tal que*

$$S_\beta^{-1}A_cS_\beta = A_c + A_\beta = A_c + B_cR_\beta, \quad S_\beta^{-1}B_c = B_c.$$

Ello nos proporciona una descripción explícita alternativa de  $O_S \cap O_R$ :

$$O_S(A_c, B_c) \cap O_R(A_c, B_c) = (A_c, B_c) + \{(A_\beta, 0)\}_\beta = \{(S_\beta^{-1}A_cS_\beta, B_c)\}_\beta.$$

Concretamente:  $S_{i,i} = I_{k_i}, S_{i,j} = 0$  si  $k_i \geq k_j$  y  $(S_{i,j})^p = \sum_{q=1}^{k_j-k_i} \beta_{i,j,q} E_{p+q-1}^T$  si  $k_i < k_j$ .

Así, para  $\beta$  como en el ejemplo anterior sería

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta_{2,1,4}$	$\beta_{2,1,5}$	$\beta_{2,1,6}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\beta_{2,1,4}$	$\beta_{2,1,5}$	$\beta_{2,1,6}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\beta_{2,1,4}$	$\beta_{2,1,5}$	$\beta_{2,1,6}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\beta_{3,1,3}$	$\beta_{3,1,4}$	$\beta_{3,1,5}$	$\beta_{3,1,6}$	0	0	$\beta_{3,2,3}$	0	0	1	0	0	0	0	0
0	$\beta_{3,1,3}$	$\beta_{3,1,4}$	$\beta_{3,1,5}$	$\beta_{3,1,6}$	0	0	$\beta_{3,2,3}$	0	0	1	0	0	0	0
$\beta_{4,1,3}$	$\beta_{4,1,4}$	$\beta_{4,1,5}$	$\beta_{4,1,6}$	0	0	$\beta_{4,2,3}$	0	0	0	0	1	0	0	0
0	$\beta_{4,1,3}$	$\beta_{4,1,4}$	$\beta_{4,1,5}$	$\beta_{4,1,6}$	0	0	$\beta_{4,2,3}$	0	0	0	0	1	0	0

## 7. La intersección $O_{SR} \cap O_{ST}$

Como en las secciones anteriores, vamos a ver que  $O_{SR} \cap O_{ST}$  es una variedad diferenciable de  $O_{BK}$ , y a obtener una descripción explícita cuando el par está en forma BK.

**Proposición 7.1** *Sea  $(A, B) \in \mathcal{M}^*$  un par controlable de rango máximo.*

(1) *La siguiente intersección es una subvariedad diferenciable de  $O_{BK}(A, B)$ , con:*

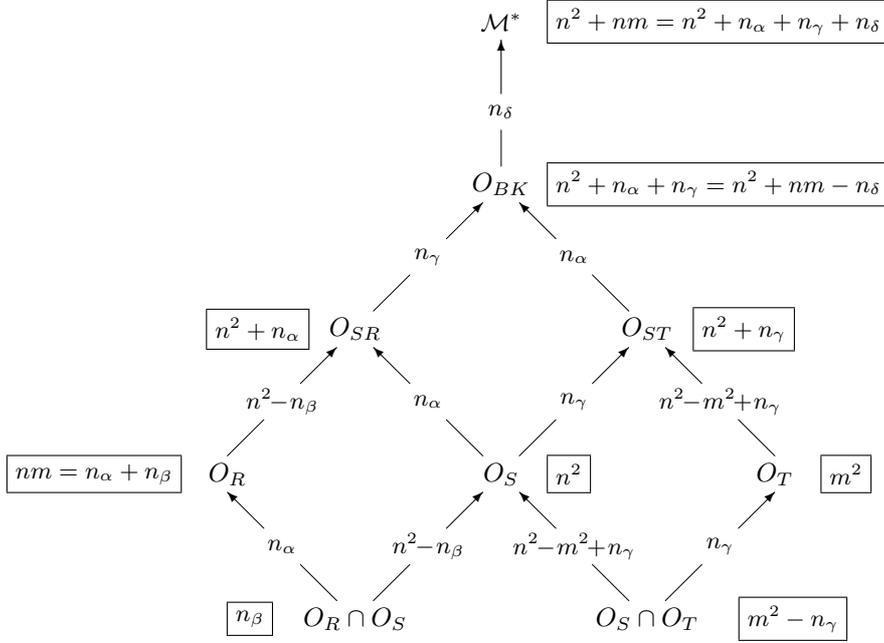
$$\dim(O_{SR}(A, B) \cap O_{ST}(A, B)) = n^2.$$

(2) *En particular, si  $(A_c, B_c) \in \mathcal{M}^*$  es un par BK, entonces*

$$O_{SR}(A_c, B_c) \cap O_{ST}(A_c, B_c) = O_S(A_c, B_c).$$

## 8. Diagrama resumen

Podemos resumir los resultados anteriores de la siguiente forma:



donde las cantidades enmarcadas son las dimensiones de las variedades y las cantidades en las flechas sus codimensiones correspondientes.

De hecho, en un entorno de un par BK  $(A_c, B_c)$ , tenemos un sistema de coordenadas adaptado  $(S, \alpha, \gamma, \delta)$  de  $\mathcal{M}^*$ , donde  $S \in Gl_n$  y  $\alpha, \gamma, \delta$  son los parámetros (2.4), de tal manera que:

$$O_{BK} = \{\delta = 0\}, \quad O_{ST} = \{\delta = \alpha = 0\}, \quad O_{SR} = \{\delta = \gamma = 0\}, \quad O_S = \{\delta = \alpha = \gamma = 0\}.$$

### Referencias

- [1] V.I. Arnold. *On Matrices Depending on Parameters*, Uspekhi Mat. Nauk., 26 (1971), 101–114.
- [2] J. Ferrer, M.I. García, F. Puerta. *Brunovsky Local Form of a Holomorphic Family of Pairs of Matrices*, Linear Algebra Appl., 253 (1997), 175–198.
- [3] A. Tannenbaum. *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, LNM, 845, Springer, 1981.